UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Conexiones entre álgebras, problemas matriciales y posets

T E S I N A

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
PRESENTA:

Yadira Valdivieso Díaz

DIRECTOR DE TESINA:
Dr. Michael Barot Schlatter

2009

Índice general

Introducción

Los problemas matriciales son uno de los métodos que se usan en la solución de problemas de clasificación en la teoría de representaciones. Este método fue muy usado por Navarova y Roiter desde 1967(ver [8]). La ventaja de esta técnica es que además de clasificar el tipo representación de un álgebra también determina sus representaciones inescindibles e inclusive decir cuantas representaciones inescindibles tiene el álgebra.

En este trabajo damos una clasificación de los conjuntos parcialmente ordenado de representación finita, es decir, aquellos conjuntos parcialmente ordenados cuyos problemas matricial asociados son de tipo de representación finita.

En el capítulo uno introducimos las definiciones básicas que usamos a los largo del trabajo, así como también buscamos que el lector se familiarice con las técnicas y/o el algoritmo que se siguen para resolver un problema matricial. También damos un algoritmo para obtener un problema matricial a partir de un conjunto parcialmente ordenado, que en el siguiente capítulo usaremos.

En el capítulo dos damos algunas definiciones básicas de módulos que utilizamos en el algoritmo para obtener un problema matricial asociado a un álgebra. Además, justificamos la relación que hay entre los módulos inescindibles sobre una k-álgebra A y un problema matricial. En este capítulo desarrollamos un ejemplo de como usar el algoritmo y dentro de este ejemplo nuevamente se aprecia las técnicas para resolver un problema matricial.

Finalmente, en el capítulo tres, presentamos cuatro resultados que clasifican en conjunto los conjuntos parcialmente ordenados de representación-finita. Además en este capítulo introducimos una técnica de derivación de un conjunto parcialmente ordenado $\mathscr{P}$, que es utilizada para demostrar dos de los resultados presentados.

Capítulo 1

Conjuntos parcialmente ordenados y problemas matriciales

En este capítulo introduciremos la definición de problemas matriciales y representación de un conjunto parcialmente ordenado, que abreviamos poset[1]. Así como también un algoritmo para obtener un problema matricial a partir de un poset.

Aún cuando hay una definición más general que la que trabajaremos aquí de un problema matricial (ver [2]), es más conveniente para nosotros trabajar con la siguiente definición:

Definición 1.1. *Un* ***problema matricial de tamaño*** $n \times m$ *es un par* $(\mathscr{T}, \mathscr{A})$*, donde* $\mathscr{A} \subset k^{n\times m}$ *y cada* $A \in \mathscr{A}$ *la pensaremos como una* t *- ada de matrices* $(A_1, \ldots, A_t)$ *y un conjunto* $\mathscr{T}$ *de transformaciones elementales de tal manera que para cada* $T_1, T_2 \in \mathscr{T}$ *cumplen que* $T_1 A T_2^{-1}$ *es nuevamente una matriz* $[A'_1 \mid \ldots \mid A'_t]$ *dividida en* t *franjas.*

Diremos que A *y* B *son equivalentes si existen* $T_1, T_2 \in \mathscr{T}$ *tales que* $A = T_1 B T_2^{-1}$*. En este caso escribiremos* $A \sim B$*. Se puede verificar que esta relación es de equivalencia.*

La solución de un problema matricial $(\mathscr{T}, \mathscr{A})$ consiste en clasificar las órbitas de $\mathscr{A}$ bajo la acción de $\mathscr{T}$, definida por $(T_1, T_2)(A) = T_1 A T_2^{-1}$, donde $T_1, T_2 \in \mathscr{T}$ y $A \in \mathscr{A}$.

Definición 1.2. *Una* ***representación de un poset*** $(\mathscr{P}, \preceq)$*, donde* $\mathscr{P} = \{p_1, \ldots, p_t\}$ *y* $\preceq$ *es el orden en* $\mathscr{P}$*, con* ***vector dimensión*** $d = [d_0, d_1, \ldots, d_t] \in \mathbb{N}^{1+t}$ *es un par*

[1] abreviatura de en inglés de partially ordered set

*(d,A), donde $A \in k^{d_o \times \overline{d}}$ y $\overline{d} = d_1 + \cdots + d_t$. El vector dimensión induce una partición en la matriz $A = [A_1 \mid A_2 \mid \cdots \mid A_t]$ en t franjas donde $A_i \in k^{d_o \times d_i}$. Además dos representaciones (d,A) y (e,B) son **equivalentes** si $d = e$ y B puede obtenerse a partir de A aplicando las siguientes transformaciones elementales:*

1. *Transformaciones arbitrarias de renglones de $[A_1 \mid \ldots \mid A_t]$*

2. *Transformaciones arbitrarias de columna en cada una de las franjas, es decir, transformaciones de columna de A_i que no alteren a ningún A_j con $i \neq j$*

3. *Si $p_i \preceq p_j$, entonces también podemos sumar múltiplos de una columna de A_i a otra columna de A_j.*

Ahora hablaremos sobre suma directa de matrices, la definición que daremos es el caso cuando las matrices tiene 2 franjas. Sin embargo, esta definición se puede generalizar al caso de matrices con t franjas.

Definición 1.3. *Sean $[A \mid B] \in K^{n\times(n_1+n_2)}$ y $[C \mid D] \in K^{r\times(m_1+m_2)}$ un par de matrices, definimos su **suma directa** como una nueva matriz*

$$[A \mid B] \oplus [C \mid D] = \left[\begin{array}{cc|cc} A & \mathbf{0} & B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C & \mathbf{0} & D \end{array}\right].$$

Observemos que $[A \mid B] \oplus [C \mid D]$ es una matriz del álgebra de matrices $K^{(n+r)\times(m_1+m_2+s_1+s_2)}$.

Definición 1.4. *Sea $A \in K^{n\times m}$. Decimos que A es una **matriz inescindible** si no puede expresarse como suma directa de dos matrices no cero.*

Notemos que la matriz A de una representación (d,A) puede ser o no inescindible.

Estamos ahora en las condiciones de definir para cada poset $\mathscr{P}$ finito y cada vector dimensión d un problema matricial $(\mathscr{T}_{\mathscr{P}}, A_{\mathscr{P}})$ asociado a $\mathscr{P}$.

Definición 1.5. *Sea $\mathscr{P} = \{p_1, \ldots, p_t\}$ un poset finito y $d \in \mathbb{N}^{t+1}$ un vector. El par $(\mathscr{T}_{\mathscr{P}}, \mathscr{A}_{\mathscr{P}})_d$, donde $\mathscr{A}_{\mathscr{P}}$ son las representaciones de $\mathscr{P}$ con vector dimensión d y $\mathscr{T}_{\mathscr{P}}$ son las transformaciones elementales de la relación de equivalencia de las representaciones, es **el problema matricial asociado a** $\mathscr{P}$.*

Antes de hacer un ejemplo recordemos que cualquier matriz A podemos reducirla a una matriz de la forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1}_a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

a partir de las transformaciones arbitrarias de columnas y renglones de A, donde $\mathbf{1}_a$ indica la matriz identidad de tamaño a y $\mathbf{0}$ indica una matriz con entradas cero, no necesariamente cuadrada . Puesto que utilizaremos esta reducción en varias ocasiones a lo largo del trabajo nos referiremos a ella como la forma del bloque que obtenemos y no en las transformaciones que usamos.

Ejemplo 1.1. Para ilustrar la defición de un problema matricial $(\mathscr{T}_{\mathscr{P}}, \mathscr{A}_{\mathscr{P}})_d$ asociado a el poset $\mathscr{P}$ con vector dimensión d , haremos un ejemplo.

Consideremos $\mathscr{P} = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, con la relación no trivial $p_1 \preceq p_2$. Entonces tenemos al conjunto $\mathscr{A}$ de representaciones de $\mathscr{P}$ con vector dimensión d, es decir, matrices $A = [A_1 \,|\, A_2 \,|\, A_3 \,|\, A_4]$, con 4 franjas, y el conjunto $\mathscr{T}_{\mathscr{P}}$ consiste de las siguientes transformaciones:

1. Transformaciones arbitrarias de renglones de $[A_1 \,|\, A_2 \,|\, A_3 \,|\, A_4]$.
2. Transformaciones arbitrarias de columnas en cada una de las franjas.
3. Suma de alguna columna de A_1 a alguna columna de A_2.

Con las transformaciones arbitrarias de renglón de $[A_1 \,|\, A_2 \,|\, A_3 \,|\, A_4]$ podemos reducir dicha matriz a:

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & C_3 & C_4 \end{array}\right]. \tag{1.2}$$

Ahora reduciremos el bloque $[C_3 \,|\, C_4]$, notemos que las transformaciones permitidas no afectan al bloque $[B_1 \,|\, B_2]$. Primero podemos reducir el bloque C_3 a la forma 1.1 y de esta manera 1.2 es equivalente a:

$$\left[\begin{array}{c|c|c:c|c} B_1 & B_2 & B_3^1 & B_3^2 & B_4 \\ \hdashline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_a & \mathbf{0} & C_4' \\ \hdashline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & G_4 \end{array}\right]. \tag{1.3}$$

Nuevamente podemos reducir el bloque G_4 a la forma 1.1 y puesto que podemos utilizar transformaciones arbitrarias de renglones, sumando múltiplos adecuados de los renglones del nuevo bloque encontrado podemos hacer cero las entradas de los bloques que se encuentran arriba de este bloque de la forma 1.1 y asi 1.3 es equivalente a:

$$\left[\begin{array}{c|c|c:c|c:c} B_1 & B_2 & B_3^1 & B_3^2 & \mathbf{0} & B_4^2 \\ \hdashline & & \mathbf{1}_a & \mathbf{0} & \mathbf{0} & C_4^2 \\ \cdashline{3-6} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_b & \mathbf{0} \\ \cdashline{3-6} & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]. \tag{1.4}$$

Para reducir el bloque C_4^2 podemos utilizar transformaciones arbitrarias de columnas y renglones y de esta manera reducirlo a un bloque de la forma 1.1. Sin embargo al utilizar una transformación de renglones estamos modificando el bloque de la forma 1.1 que se encuentra debajo de B_3^1, por ello para contrarrestar este cambio debemos realizar la transformación inversa de renglón a la tercera franja . De esta manera tenemos la siguiente matriz equivalente:

$$\left[\begin{array}{c|c|c:c:c|c:c:c} B_1 & B_2 & B_3^1 & B_3^2 & B_3^3 & \mathbf{0} & B_4^2 & F \\ \hdashline & & \mathbf{1}_c & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_c & \mathbf{0} \\ \cdashline{3-8} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_d & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \cdashline{3-8} & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_b & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \cdashline{3-8} & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right] \tag{1.5}$$

donde $c+d=a$.

Finalmente podemos reducir los bloques B_3^2 y B_4^2 a bloques ceros, sumando múltiplos adecuados de renglones de los bloques tipo 1.1 que se encuentran abajo de ellos, obteniendo la siguiente matriz equivalente:

$$\left[\begin{array}{c|c|c:c:c|c:c:c} B_1 & B_2 & D & \mathbf{0} & E & \mathbf{0} & \mathbf{0} & F \\ \hdashline & & \mathbf{1}_c & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_c & \mathbf{0} \\ \cdashline{3-8} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_d & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \cdashline{3-8} & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_b & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \cdashline{3-8} & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right], \tag{1.6}$$

donde $D=B_3^1$ y $E=B_3^3$.

La matriz que obtuvimos da un nuevo problema matricial equivalente al incial, dado por el poset $\mathscr{P}'=\{p_1,p_2,p_3,p_4,p_5\}$, correspondientes con los bloques B_1,B_2,D,E,F con las relaciones no triviales $p_1 \preceq p_2$ y $p_4 \preceq p_3$.

Finalmente introduciremos las definiciones de problema matricial de tipo de representación finita y poset de representación-finita.

Definición 1.6. *Un problema matricial* $(\mathscr{T},\mathscr{A})$ *es de* ***tipo de representación finita*** *si tiene sólo un número finito de isoclases de bloques inescindibles. En caso contrario diremos que* $(\mathscr{T},\mathscr{A})$ *es de* ***tipo de representación infinita.***

Definición 1.7. *El poset* $(\mathscr{P},\preceq)$ *es de* ***representación-finita*** *si el problema matricial* $(\mathscr{T}_{\mathscr{P}},\mathrm{A}_{\mathscr{P}})_d$ *es de tipo de representación finita, para cada vector dimensión* d.

En el capítulo 3, trata de describir los posets de representación-finita.

Capítulo 2

Problemas matriciales asociado a un álgebra

En este capítulo describiremos un algoritmo para obtener un problema matricial a partir de un cierto tipo de álgebra. Este algoritmo es útil pues con el podemos clasificar todos los A-módulos inescindibles .

En [12], Roiter y Nazarova, demuestran que dada una k-álgebra A de dimensión finita, existe un k-morfismo inclusión $\varepsilon : A \to S$ no-singular y un problema matricial $(\mathscr{P}, \mathscr{A})$ tales que la clasificación de los A-módulos M inescindibles tales que $M(\mathrm{Ker}\varepsilon) \neq 0$ es equivalente a encontrar las órbitas del problema matricial $(\mathscr{P}, \mathscr{A})$.

Empezaremos definiendo algunos conceptos básicos necesarios para el algoritmo que describiremos.

Definición 2.1. *Sean A una k-álgebra y e un elemento de A. El elemento e es un* ***elemento primitivo*** *si no admite una descomposición $e = e' + e''$ de elementos no-cero idempotentes tales que $e'e'' = 0 = e''e'$.*

Definición 2.2. *Sea A una k-álgebra. Decimos que un A-módulo M es* ***inescindible*** *si no existen A-submódulos N y P de M, diferentes del A-módulo 0, tales que $M = N \oplus P$.*

Ahora enunciaremos un lema que nos permite relacionar la definición de elemento primitivo de un álgebra A y A-módulos inescindibles.

Lema 2.1. *Sean A una k-álgebra y e un elemento del álgebra A. El elemento e es un elemento primitivo si y sólo si el A-módulo eA es inescindible.*

El álgoritmo lo restringiremos a una k-álgebra A de dimensión finita y tales que cada A-módulo M inescindible tiene dimensión 1.

El primero de este algoritmo es encontrar una descomposición de la unidad $1_A = \mathrm{e}_1 + \cdots + \mathrm{e}_n$ de A con elementos primitivos e_i tales que $\mathrm{e}_i\mathrm{e}_j = 0$ si $i \neq j$. Estos elementos primitivos, por 2.1, inducen A-módulos e_iA inescindibles tales que $A = \mathrm{e}_1A \oplus \cdots \oplus \mathrm{e}_nA$. Hasta este punto sólo hemos utilizado la hipótesis de que la k-álgebra A es de dimensión finita.

El siguiente paso es obtener un poset $\mathscr{P}_A$ asociado a A, el cual es suficiente para definir el problema matricial asociado a la k-álgebra A. Para ello basta tomar un subconjunto maximal $\mathscr{I} = \{\mathrm{e}_1A, \ldots, \mathrm{e}_tA\}$ de $\{\mathrm{e}_1A, \ldots, \mathrm{e}_nA\}$ de módulos inescindibles no isomorfos dos a dos. Los elementos del subconjunto $\mathscr{I}$ son los elementos del poset $(\mathscr{P}_A, \preceq)$ y el orden $\preceq$ es la cerradura transitiva de la siguiente relación: $e_iA \preceq e_jA$ si existe un morfismo $\phi : \mathrm{e}_iA \to \mathrm{e}_jA$ diferente de cero.

Notemos que el poset $\mathscr{P}_A$ definido en el algoritmo esta bien definido, pues en general, si $i \neq j$ tendremos a lo más una de las relaciones posibles, es decir, $\mathrm{e}_iA \preceq \mathrm{e}_jA$ ó $\mathrm{e}_jA \preceq \mathrm{e}_iA$, pues en caso contrario tendríamos que $e_iB \cong e_jB$, lo cual sería una contradicción al hecho de que $\mathscr{P}_B$ es un conjunto de módulos no isomorfos dos a dos.

En el caso de tener un conjunto $\{\mathrm{e}_1A, \ldots, \mathrm{e}_nA\}$ de A-módulos inescindibles, el A-módulo $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{e}_iA, \mathrm{e}_jA)$ es isomorfo al A-módulo $\mathrm{e}_iA\mathrm{e}_j$, lo cual facilita la construcción del poset $\mathscr{P}_A$.

En el siguiente ejemplo desarrollamos paso a paso el algoritmo para una cierta álgebra.

Ejemplo 2.1. Consideremos k un campo algebraicamente cerrado y el subálgebra

$$A = \begin{bmatrix} k & k \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

de matrices con coeficientes en el campo k. Esta subálgebra es de dimensión 3 y ademas cumple que cada A-módulo inescindible es de dimensión 1.

En este caso la descomposición de la unidad en A es:

$$\mathbf{1} = \mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2,$$

donde e_i es la matriz cuya entrada en el lugar ii es 1 y en las demás entradas son cero. Es claro que e_1 y e_2 son elementos primitivos de A.

Los elementos e_1 y e_2 cumplen además:

$$\mathrm{e}_1 A \mathrm{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } \mathrm{e}_1 A \mathrm{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto, $\mathrm{e}_1 A$ y $\mathrm{e}_2 A$ no son isomorfos en A.

Ahora, definimos el poset $\mathscr{P}_A$ asociado a A, como el par $(\mathscr{P}_A, \preceq)$, donde $\mathscr{P}_A = \{\mathrm{e}_1 A, \mathrm{e}_2 A\}$ y en este caso tenemos una única relación no trivial $\mathrm{e}_1 A \preceq \mathrm{e}_2 A$.

De ahora en adelante pensaremos en el poset $\mathscr{P}_A$ como el diagrama de Hasse asociado al poset, en nuestro ejemplo tenemos:

$$\underset{\mathrm{e}_1}{\circ} \longrightarrow \underset{\mathrm{e}_2}{\circ}$$

Como ya vimos en el capítulo 1 todo poset $\mathscr{P}$ induce un problema matricial $(\mathscr{T}_{\mathscr{P}}, \mathscr{A}_{\mathscr{P}})$. En este caso, nuestro poset $\mathscr{P}_A$, induce un problema matricial $(\mathscr{T}_{\mathscr{P}}, \mathscr{A}_{\mathscr{P}})$, donde $\mathscr{A}_{\mathscr{P}}$ consiste en todas las es una matriz de la forma $[A_1 \,|\, A_2]$ y el conjunto $\mathscr{T}_{\mathscr{P}}$ consiste en las transformaciones siguientes:

1. Transformaciones arbitrarias de renglones.

2. Transformaciones arbitrarias de columnas de cada una de las franjas.

3. Suma de una columna de A_1 a una columna de A_2.

Al usar las transformaciones del tipo 1 y 2 en A_1 podemos ver que la matriz $[A_1 \,|\, A_2]$ es equivalente a

$$\left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{1}_a & \mathbf{0} & A_2^1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_2^2 \end{array}\right]$$

Ahora, al sumar múltiplos de columnas de la primera franja a la segunda franja, podemos llevar a A_2^1 a la matriz cero, inclusive sin alterar A_2^2, obteniendo así la siguiente matriz:

$$\left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{1}_a & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_2^2 \end{array}\right]$$

Finalmente utilizando nuevamente las transformaciones del tipo 1 y 2 a A_2^2, tenemos que la matriz anterior es equivalente a:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{1}_a & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_b & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]. \tag{2.1}$$

Además del tamaño de las matrices identidad, esta forma normal depende del número de columnas cero en cada una de las franjas y del número de renglones cero.

Capítulo 3

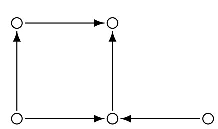
Resultados de clasificación

En los capítulos anteriores hemos introducido el tipo de problemas matriciales que nos interesan. En este capítulo enunciamos algunos de los resultados que nos parecen interesantes y que caracterizan a los problemas matriciales de tipo de representación finita.

Ahora definiremos el ancho de un poset, que nos servirá para clasificar los problemas matriciales de tipo finito.

Definición 3.1. *Sea $(\mathscr{P}, \preceq)$ un poset. El **ancho** $\omega(\mathscr{P})$ de $\mathscr{P}$ se define como el máximo número de elementos en $\mathscr{P}$ incomparables 2 a 2.*

Ejemplo 3.1. *Consideremos el poset $\mathscr{P}$ representado por su diagrama de hasse:*



en este caso $\omega(\mathscr{P}) = 2$.

El siguiente teorema, nos permite deducir rápidamente si el poset es de representación-infinita.

Teorema 3.1. *[15] Si el ancho $\omega(\mathscr{P})$ de un poset $\mathscr{P}$ es mayor o igual a cuatro, entonces $\mathscr{P}$ es de tipo de representación infinito.*

La demostración del teorema se basa en el hecho de que podemos restringirnos a un poset $\mathscr{I} = \{1, 2, 3, 4\}$ de elementos incomparables dos a dos y para este poset mostrar una familia de representaciones matriciales inescindibles. Una familia de representaciones matriciales inescindibles puede ser la siguiente: para cada $\lambda \in$k consideramos la representación matricial:

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} J(n,\lambda) & \mathbf{1}_n & \mathbf{1}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{1}_n & \mathbf{1}_n & \mathbf{0} & \mathbf{1}_n \end{array}\right]$$

con vector dimensión $d = (n,n,n,n,2n)$, donde $J(n,\lambda) \in \mathrm{k}^{n\times n}$ y

$$J(n,\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Esta familia de matrices resulta ser una familia de matrices inescindibles y por tanto el poset $\mathscr{I}$ es de representación-infinita.

El siguiente teorema da una clasificación de los poset de ancho 1 y 2. En [12] se describe inclusive el tipo de bloques inescindibles que tendremos.

Teorema 3.2. *[12]*

i) Si $\omega(\mathscr{P}) = 1$, entonces $\mathscr{P}$ es de representación finita y tiene 1 + $|\mathscr{P}|2$ elementos inescindibles.

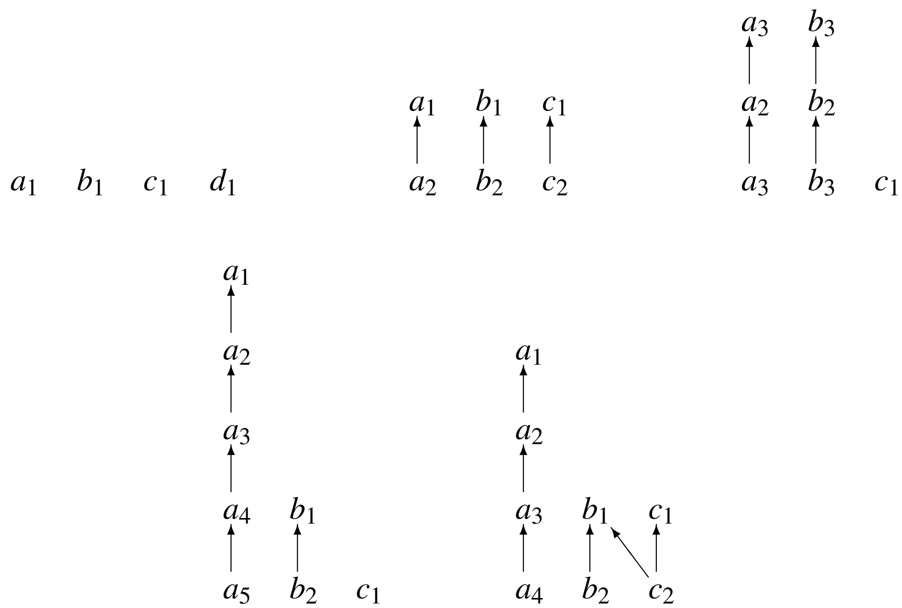
ii) Si $\omega(\mathscr{P}) = 2$, entonces $\mathscr{P}$ es de representación finita y hay 1 + $|\mathscr{P}|2 + 2^{|\mathscr{P}'|}$, donde $\mathscr{P}'$ es el conjunto de los elementos incomparables.

La demostración de este teorema es por inducción sobre el número de elementos que posee el poset $\mathscr{P}$.

Por los teoremas 3.2 y 3.1, podemos observar que en caso de que el ancho de un poset $\mathscr{P}$ es menor que dos sabemos que es de representación-finita e inclusive sabemos el tipo de bloques inescindibles que tiene el problema matricial y en el caso de que $\omega(\mathscr{P}) \geq 4$, entonces estamos seguros que el poset $\mathscr{P}$ es de representación-infinita.

Sin embargo, es interesante el caso $\omega(\mathscr{P}) = 3$ pues existen poset de representación-finita y otros cuyo de representación-infinita. Los siguientes dos teoremas clasifican este caso y junto con 3.2 y 3.1, tenemos una clasificación completa de los poset de representación-finita.

Teorema 3.3. *[2][3] Un poset finito $\mathscr{P}$ es de representación-infinita si y sólo si $\mathscr{P}$ contine un conjunto crítico, es decir, un subconjunto en donde $\mathscr{P}$ induce un orden de uno de los cincco diagramas siguientes:*



La demostración de 3.3, dada por Kleiner en 1972, utiliza el algoritmo de diferenciación de un poset $\mathscr{P}$ (ver [2], [15]). Este algoritmo, si el peso $\omega(\mathscr{P}) = 3$ puede reducir el poset $\mathscr{P}$ al poset $\mathscr{P}' = \emptyset$ o a un poset $\mathscr{P}'$ de peso $\omega(\mathscr{P}') \geq 4$, es decir, el poset $\mathscr{P}$ es de representacion-finita o de representación-infinita.

Para ilustrar un poco más la idea de la demostración definiremos el derivado de un poset $\mathscr{P}$ en un punto a y daremos un ejemplo.

Definición 3.2. *Sea $\mathscr{P}$ un poset y a un elemento máximo de $\mathscr{P}$ tal que el peso del poset $\mathscr{P} \setminus \{a\}$ es menor o igual a 2. El poset $\mathscr{P}'_a$ el* ***derivado de** $\mathscr{P}$ **en*** *a es el poset $\mathscr{P}'_a = \{\mathscr{P} \setminus \{a\}\} \cup \{r \vee s \mid s, r \text{ y } a \text{ son incomparables en } \mathscr{P}\}$, donde $e \vee s = \{r, s\}$. Y el orden en $\mathscr{P}'_a$ esta dado por los siguientes casos:*

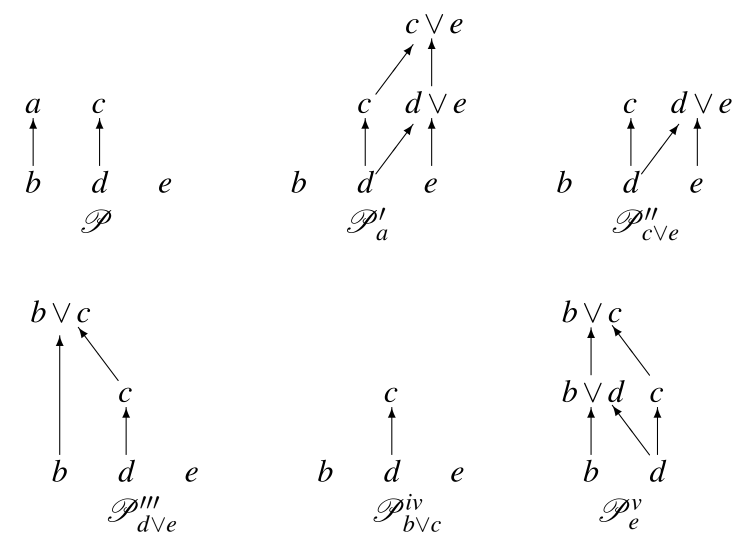
1. *El conjunto $\mathscr{P} \setminus \{a\}$ tiene el orden inducido por $\mathscr{P}$.*

2. *Si $t \preceq s$ o $t \preceq r$, entonces $t \preceq s \vee r$.*

3. *Si $r \preceq t$ y $s \preceq t$, entonces $s \vee r \preceq t$.*

4. *Si $r \preceq r'$ o $r \preceq s'$ y $s \preceq r'$ o $s \preceq s'$, entonces $r \vee s \preceq r' \vee s'$.*

Ejemplo 3.2. En este ejemplo, hacemos la reducción de un poset. El poset y sus poset derivados los representaremos por su diagrama de Hasse.



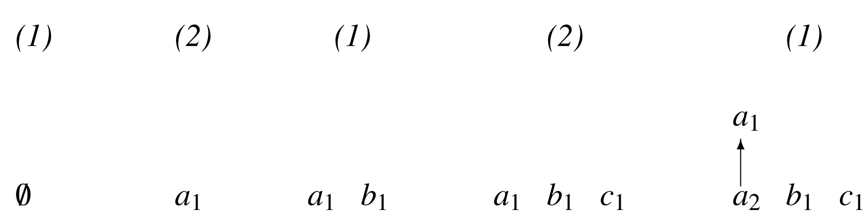
Como se vió en el ejemplo 3.1, el poset $\mathscr{P}^v_e$ es de ancho 2, por tanto el poset $\mathscr{P}$ es de representación-finita.

Finalmente, definiremos un poset y una representación matricial sincera, definiciones que usaremos en el último teorema de clasificación.

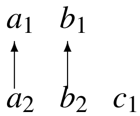
Definición 3.3. *Sea $\mathscr{P}$ un poset y $(\mathscr{T}_{\mathscr{P}}, \mathscr{A}_{\mathscr{P}})_d$ un problema matrical asociado a $\mathscr{P}$. Una matriz A del problema matricial $(\mathscr{T}_{\mathscr{P}}, \mathscr{A}_{\mathscr{P}})_d$ es una **representación sincera** si A es inescindible y las coordenadas del vector dimensión d son no cero.*

Definición 3.4. *Un poset $\mathscr{P}$ es **sincero** si $\mathscr{P}$ tiene una represención sincera de inescindibles.*

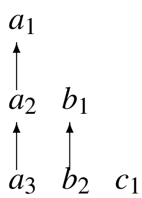
Teorema 3.4. *[2][4] Los poset de representación-finita son isomorfos a algún de los siguientes poset y el número entre paréntesis indica el número de representaciones sinceras que un poset dado admite salvo isomorfismo.*



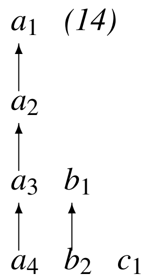
(3)


a_1 b_1
a_2 b_2 c_1

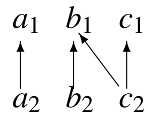
(4)


a_1
a_2 b_1
a_3 b_2 c_1

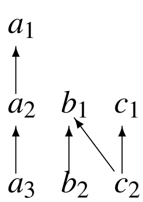
(14)


a_1
a_2
a_3 b_1
a_4 b_2 c_1

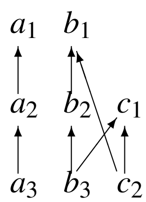
(1)


a_1 b_1 c_1
a_2 b_2 c_2

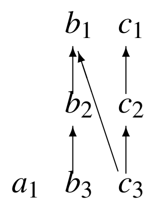
(9)


a_1
a_2 b_1 c_1
a_3 b_2 c_2

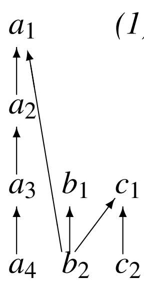
(1)


a_1 b_1
a_2 b_2 c_1
a_3 b_3 c_2

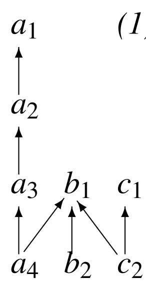
(1)


b_1 c_1
b_2 c_2
a_1 b_3 c_3

(1)


a_1
a_2
a_3 b_1 c_1
a_4 b_2 c_2

(1)


a_1
a_2
a_3 b_1 c_1
a_4 b_2 c_2

Bibliografía

[1] ANDERSON F.W. y FULLER K.R., *Rings and categories of Modules*, Graduate Text in Mathematics 13, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg,1973.

[2] GABRIEL P. y ROITER A.V., *Representations of finite-dimensional algebras*, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg,1997.

[3] KLEINER, M.M., *Partially ordered sets of finite type*, Investigations on the theory of representations. Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) 28 (1972), 32–41.

[4] KLEINER, M.M., *On faithful representations of partially ordered sets of finite type*, Investigations on the theory of representations. Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) 28 (1972), 42–59.

[5] MACLANE S., *Categories for the Working Mathematician* , Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg, 1971.

[6] MACLANE S., *Homology* , Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg, 1963.

[7] NAZAROVA L.A., *Poset representation*, in Lecture Notes in Math. No. 882, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, (1981), 345-356.

[8] NAZAROVA L.A., *Representations of quadruples*, Izv. Akad. Nauk. SSSR 31 (1967), 1361-13788.

[9] NAZAROVA, L. A. y ROITER A.V., *Kategorielle Matrizen-Probleme und die Brauer-Trall-Vermutung*, Mitt. Math. Sem. Giesse 115 (1975), 1-153.

[10] NAZAROVA L.A., *Partially ordered sets of infinite type*, Math USSR IZV, 1975, 9 (5), 911–938.

[11] NAZAROVA L.A. y ROITER A.V., *Representations of partially ordered set*, Journal of Mathematical Sciences, 3 (1975), 585-606.

[12] NAZAROVA L.A. y ROITER A.V., *Representations and forms of weakly completed posets*, Comment. Math. Helv. 63 (1988), 498-526.

[13] NAZAROVA L.A. y ROITER A.V., *Representations of bipartite completed posets*, Comment, Math Helvetici, 63, (1988), 498-526.

[14] ROITER A.V., *Matriz problems and representations of bocses*(Otawa 1979), Lec. Notes Math. 831 (1980), 288-324.

[15] SIMSON D., *Linear Representations of Partially Ordered Sets and Vector Space Categories*, Gordon and Breach Science Publishers, 1992.