



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS
MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

Condiciones de completez para retículos de
estados coherentes

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA

JOSÉ GUADALUPE DE LA TORRE SUÁREZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. CARLOS VILLEGAS BLAS.

MÉXICO, D.F.

NOVIEMBRE, 2009.

Índice general

Resumen	i
Muy breve introducción	v
1. Preliminares	1
1.1. Los Espacios de Hilbert	1
1.2. Teoría de operadores.	7
1.3. Funciones analíticas en varias variables.	9
2. Los espacios de Bergman y de Segal-Bargmann	11
2.1. Ejemplos de espacios de funciones holomorfas.	20
2.1.1. Los espacios de Bergman con peso.	20
2.1.2. El espacio de Segal-Bargmann.	23
3. Mecánica cuántica	27
3.1. Las expresiones de la energía.	27
3.2. Algunas cuestiones de la Mecánica cuántica.	29
3.3. El grupo de Heisenberg-Weyl.	31
3.3.1. El oscilador armónico y los estados coherentes.	35
4. Sobre la transformada de Bargmann	41
4.1. La obtención de μ	43
4.2. La obtención del núcleo de integración.	45
4.3. La resolución de la identidad.	47
5. Condiciones de completez	51
5.1. Funciones enteras.	51
5.2. La Fórmula de Poisson	53
5.3. La Fórmula de Jensen.	56

5.3.1. Estimación de los ceros.	59
5.4. Orden (ρ) y tipo (τ) de funciones enteras.	63
5.5. El exponente de convergencia σ	65
5.6. Retículos de estados coherentes.	71
5.6.1. Retículos finos.	73
5.7. La función σ de Weierstrass.	78
5.8. El retículo de von-Neumann, $\gamma = \sqrt{\pi}$	96
6. Marcos en los espacios de Bargmann	105
6.1. La transformada de Zak y los operadores de Weyl.	121
6.2. Demostraciones de (I) al (XVIII).	126
6.3. Conclusiones.	130

Muy breve introducción

El espacio de Bargmann $\mathcal{HL}^2(\mathbb{C})$, es el espacio de Hilbert de funciones analíticas que son de cuadrado integrable, con respecto de una medida gaussiana $d\mu$ sobre \mathbb{C} , donde su producto interno está definido como

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{HL}^2(\mathbb{C})} = \int_{\mathbb{C}} \overline{f(z)} g(z) d\mu(z)$$

con $d\mu(z) = (\hbar\pi)^{-1} e^{-|z|^2/\hbar} dx dy$ y \hbar la constante de Planck.

La transformada de Bargmann $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ [2] toma un elemento $\psi(z)$ de $L^2(\mathbb{R})$ y lo lleva de forma unitaria a un elemento del espacio $\mathcal{HL}^2(\mathbb{C})$. Esta transformada está dada como

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\psi(z) = (\pi\hbar)^{-1/4} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2\hbar}(z^2+x^2-2\sqrt{2}zx)} \psi(x) dx. \quad (1)$$

Este operador integral está bien definido y es unitario [2]. En la parte de la exponencial bajo la integral en la ecuación (1) tenemos una función que depende de \hbar, z y x a la cual designaremos como $A(z, x, \hbar)$

$$A(z, x, \hbar) = e^{-\frac{1}{2\hbar}(z^2+x^2-2\sqrt{2}zx)}$$

si hacemos $\hbar = 1$ tenemos

$$A(z, x) = e^{-\frac{1}{2}(z^2+x^2-2\sqrt{2}zx)}. \quad (2)$$

La expresión $A(z, x)$ en la ecuación (2) nos provee de un conjunto de funciones $\psi_z(x)$ del siguiente modo

$$\psi_z(x) = \overline{A(z, x)}.$$

Las funciones $\psi_z(x) \in L^2(\mathbb{R})$ – donde z es una etiqueta – son llamadas estados coherentes; fueron establecidos por Schrödinger [20] para el oscilador

armónico.

Los estados coherentes tienen la particularidad de ser combinaciones lineales de funciones propias del operador Hamiltoniano H que va de un subconjunto denso de $L^2(\mathbb{R})$ a $L^2(\mathbb{R})$.

$$H = -\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{kx^2}{2}$$

donde m es la masa, x es el desplazamiento y k es una constante. El dominio de H es un conjunto D que es denso en $L^2(\mathbb{R})$. Los elementos de D poseen segunda derivada en el sentido de distribuciones [18].

La imagen de la función ψ_z bajo la transformada de Bargmann $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ es el núcleo reproductor $K(z, w)$ del espacio de Bargmann $\mathcal{HL}^2(\mathbb{C})$. Este último tiene la propiedad de recuperar cada función en $\mathcal{HL}^2(\mathbb{C})$.

Resulta natural preguntarse si esta misma propiedad de recuperación se preserva en $L^2(\mathbb{R})$ (la imagen inversa del espacio de Bargmann) de algún modo, tal recuperación se da en la resolución de la identidad

$$f(x) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_{|z| \leq \sigma} \langle f(x), \psi_z \rangle \psi_z(x) d\mu(z)$$

con $f \in L^2(\mathbb{R})$. Decimos entonces que el conjunto $\{\psi_z\}_{z \in \mathbb{C}}$ es sobrecompleto, en el sentido de que la extracción de una cantidad finita de ψ_z 's nos sigue dando una resolución de la identidad.

Resulta muy interesante tanto desde el punto de vista físico como matemático, el preguntarnos sobre la existencia de subconjuntos discretos $\{\psi_{z'}\}$ con $\{\psi_{z'}\} \subset \{\psi_z\}_{z \in \mathbb{C}}$ que nos den un conjunto completo en $L^2(\mathbb{R})$. Es decir, que el conjunto de combinaciones lineales finitas de $\{\psi_{z'}\}$ nos de un conjunto denso en $L^2(\mathbb{R})$.

El objetivo de esta tesis es describir el trabajo de Bargmann, Butera, Girardello, Klauder [3], Daubechies y Grossman [8], acerca de criterios geométricos bajo los cuales un subconjunto de $\{\psi_z\}_{z \in \mathbb{C}}$ — etiquetado por puntos z' en los vértices de un retículo en el plano complejo —, es completo.

Esta tesis está organizada de la siguiente manera. En el capítulo 1 se dan las notaciones y resultados básicos del Análisis que usaremos a lo largo de todo este trabajo.

En el capítulo 2 mostraremos algunos aspectos básicos del espacio de funciones analíticas de cuadrado integrable, en específico el espacio de Bargmann. Aquí cabe la aclaración que el espacio de Bargmann es también conocido como el espacio de Segal-Bargmann por el trabajo de I. Segal. Este

capítulo está basado principalmente en el trabajo de B.Hall [9].

En el capítulo 3 se enuncian algunos conceptos elementales de la Mecánica Cuántica. Además se verifica que la transformada de Bargmann nos lleva a una representación coordinada de una partícula, a través de funciones analíticas definidas en el espacio fase (con una estructura compleja). La transformada de Bargmann puede ser también escrita como una transformada de estados coherentes. Dichos estados son las funciones $\psi_z \in L^2(\mathbb{R})$ y están etiquetados por un punto en $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.

Además se mencionan por primera vez los operadores de Weyl actuando sobre un estado base.

En el capítulo 4 se obtienen las fórmulas para el núcleo de integración $A_n(z, x)$ y la medida gaussiana μ_n . Estos dos elementos son los que permiten pasar de $L^2(\mathbb{R})$ a $\mathcal{HL}^2(\mathbb{C})$ [2].

En el capítulo 5 se analizan condiciones de completez de los retículos, para ello, se enuncian teoremas de crecimiento y de ceros de funciones enteras con el propósito de encontrar las áreas de los elementos del retículo que nos den la completez. Además, se da una función que depende de la función σ de Weierstrass [3] en la que se demuestra que para un retículo que no es suficientemente denso, esta no genera un conjunto completo. Finalmente se enuncia el criterio de von-Neumann donde aún la completez es preservada [3].

En el capítulo 6 se desarrolla el trabajo de Daubechies y Grossmann [8] en el sentido de recuperar las funciones en $L^2(\mathbb{R})$ y los criterios de completez a través de marcos de funciones usados en la teoría de Wavelets. Estos marcos provienen de una aplicación directa del Teorema espectral de operadores y de ciertas conexiones entre la transformada de Zak, los operadores de Weyl y las funciones theta de Jacobi.

Algunas de las demostraciones presentadas en este trabajo son originales, como a continuación se indica.

En el capítulo 5 damos una demostración alternativa de la fórmula de Poisson utilizando el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue. En ese mismo capítulo hemos tenido que dar una demostración alternativa del Lema 5.1 a la encontrada en [12], para ello utilizamos métodos discretos, debido a la dificultad teórica encontrada en [12] que usa integración por partes en los vértices de una función escalón, donde esta última es obviamente

no diferenciable. Hacemos la demostración del Teorema 5.8 puesto que en [3] solo se menciona el resultado, más no se prueba.

Este trabajo no hubiera podido ser posible sin la ayuda del Dr. C. Villegas, el Dr. Villegas ha tenido además la paciencia y el empeño para explicarme cuestiones de Física, Análisis y Teoría de grupos que se plantean en este trabajo. De todo ello estoy profundamente agradecido.

Asimismo agradezco el apoyo que se me ha otorgado para terminar esta tesis por parte de la institución en la que trabajo, la Facultad de Matemáticas en Acapulco dependiente de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAG), en específico al coordinador de esta, al M.en C. Efrén Marmolejo por su comprensión en las dificultades en que me he encontrado.

Agradezco las observaciones que me han hecho los Drs. E. Marmolejo, S. Perez-Esteva y O. Tchevotareva; pero en especial a las observaciones del Dr. J. H. Toloza tanto en la parte de Matemáticas y Física como en la redacción y respeto por el idioma español que han servido para pulir este trabajo.

Por supuesto que los errores que sean encontrados son de mi entera responsabilidad

Resumen

Los estados coherentes son funciones del tipo $\psi_z(x) = e^{-\frac{1}{2}[z^2+x^2-2\sqrt{2}zx]}$ con $z \in \mathbb{C}$, estos poseen la propiedad de que al aplicarles la transformada de Bargmann se obtiene el núcleo reproductor del espacio de Bargmann.

Como elementos del espacio vectorial $L^2(\mathbb{R})$ generan al resto de estados, dado que nos proveen de una resolución de la identidad. Como conjuntos son sobrecompletos y podemos escoger subconjuntos numerables de ellos.

En particular, como subconjuntos numerables específicos escogemos retículos en el plano complejo \mathbb{C} , donde cada punto $z \in \mathbb{C}$ en el retículo actúa como etiqueta en ψ_z , estudiamos las condiciones de densidad del retículo de puntos con el propósito de asegurar la completez de estos subconjuntos.

Estas condiciones están dadas en términos de las áreas de las celdas básicas del retículo.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo intentamos uniformar la notación y los resultados más generales que daremos a lo largo de todo este trabajo; no se darán aquí pruebas en detalle, pero si las respectivas referencias que en su mayor parte son [17] y [19].

1.1. Los Espacios de Hilbert

Definición 1.1. *Un espacio lineal L sobre \mathbb{C} es llamado un espacio pre-Hilbert si existe una función numérica escalar, definida como producto escalar (o producto interno); el cuál asigna a cada par de vectores $f, g \in L$ un número $\langle f, g \rangle \in \mathbb{C}$.*

El producto escalar satisface las siguientes condiciones

- (a) $\langle f, f \rangle \geq 0$; $\langle f, f \rangle = 0$ si y sólo si $f = 0$.
- (b) $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$
- (c) $\langle cf, g \rangle = \bar{c}\langle f, g \rangle$ donde c es un número complejo arbitrario.
- (d) $\langle f_1 + f_2, g \rangle = \langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle$

donde $\overline{\langle g, f \rangle}$ denota el complejo conjugado de $\langle g, f \rangle$.

Se sigue que

$$\langle f, g_1 + g_2 \rangle = \langle f, g_1 \rangle + \langle f, g_2 \rangle$$

y

$$\langle f, cg \rangle = c\langle f, g \rangle.$$

Definición 1.2. Un espacio lineal E sobre \mathbb{C} se dice que es normado, si para cada $f \in E$ existe un número real asociado $\|f\|$, que es la norma del vector f tal que

- (a) $\|f\| \geq 0$, y $\|f\| = 0$ si y sólo si $f = 0$.
- (b) $\|cf\| = |c|\|f\|$ donde c es un número complejo arbitrario.
- (c) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

Esta última condición c) implica que

$$\|f - g\| \geq \left| \|f\| - \|g\| \right|.$$

Esto se sigue del hecho $\|f\| = \|f + g - g\| = \|f - g + g\| \leq \|f - g\| + \|g\|$ y también $\|g\| = \|g + f - f\| \leq \|g - f\| + \|f\|$. Por tanto $\|f\| - \|g\| \leq \|f - g\|$ y $\|g\| - \|f\| \leq \|g - f\|$; de donde $\left| \|f\| - \|g\| \right| \leq \|f - g\|$.

Podemos definir la distancia $d(f, g)$ entre dos elementos $f, g \in E$

$$d(f, g) = \|f - g\|.$$

Si se nos da un producto escalar, entonces podemos introducir una norma. La norma de f está definida por

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

Un vector $f \in L$ se dice que está normalizado si $\|f\| = 1$.

Definición 1.3. Dos elementos $f, g \in L$ son ortogonales si

$$\langle f, g \rangle = 0.$$

Definición 1.4. Una sucesión $\{f_n\} (n \in \mathbb{N})$ de elementos en un espacio normado E es llamada una sucesión de Cauchy si para cada $\epsilon > 0$ existe un número M_ϵ tal que $\|f_p - f_q\| < \epsilon$ para todo $p, q > M_\epsilon$.

Definición 1.5. Un espacio normado E se dice que es completo si cada sucesión de Cauchy de elementos en E , converge a un elemento en E .

Definición 1.6. Un espacio pre-Hilbert completo es llamado un espacio de Hilbert.

Definición 1.7. *Un espacio normado completo es llamado un espacio de Banach.*

En esta sección denotaremos a un espacio de Hilbert como \mathcal{H} y a un espacio de Banach como \mathcal{B} .

Teorema 1.1. *Cada espacio pre-Hilbert L admite una completación \mathcal{H} , el cuál es un espacio de Hilbert [19].*

Definición 1.8. *Una sucesión $\{f_n\}$ de vectores en un espacio de Hilbert \mathcal{H} se dice que converge fuertemente a f si*

$$\|f_n - f\| \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$. Escribimos $s - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \rightarrow f$.

Definición 1.9. *Una sucesión $\{f_n\}$ de vectores en un espacio de Hilbert \mathcal{H} se dice que converge débilmente a f si*

$$\langle f_n, g \rangle \rightarrow \langle f, g \rangle$$

cuando $n \rightarrow \infty$, para todo vector g en \mathcal{H} . Escribimos $w - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \rightarrow f$. Se puede mostrar que la convergencia fuerte implica la convergencia débil. La proposición recíproca no es en general cierta, como a continuación se indica.

Ejemplo 1.1. *Consideremos la sucesión*

$$f_n = \text{sen}(nx), \quad n = 1, 2, \dots$$

En el espacio de Hilbert $L^2[0, \pi]$. La sucesión no tiende a un límite en el sentido de convergencia fuerte, pues $\|f_n - f_m\|_{L^2[0, \pi]}^2 = \pi$ cuando m, n son ambos pares o ambos impares. Sin embargo la sucesión $\{f_n\}$ tiende a 0 en el sentido de convergencia débil por el Teorema de Riemman-Lebesgue [19].

Nuestros ejemplos inmediatos de *espacios de Hilbert* son los siguientes.

Ejemplo 1.2. *Cada espacio vectorial de dimensión finita con un producto interno es un espacio de Hilbert. En específico tomamos \mathbb{C}^n , el conjunto de n -adas con entradas complejas con el producto escalar*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \bar{\mathbf{u}}\mathbf{v}^T = \sum_{j=1}^n \bar{u}_j v_j$$

donde $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, $u_i, v_i \in \mathbb{C}$ para cada i con $1 \leq i \leq n$, \mathbf{v}^T denota la transpuesta del vector fila \mathbf{v} .

Ejemplo 1.3. Denotamos por $l^2(\mathbb{N})$ el conjunto de todos los vectores de dimensión infinita (sucesiones), $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots)^T$ de números complejos u_j tales que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |u_j|^2 < \infty.$$

Aquí $l^2(\mathbb{N})$ es un espacio lineal con las siguientes operaciones, para $a \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} a\mathbf{u} &= (au_1, au_2, \dots)^T \\ \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots)^T \end{aligned}$$

con $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots)^T$ y $\sum_{j=1}^{\infty} |v_j|^2 < \infty$. Así tenemos

$$\sum_{j=1}^{\infty} |u_j + v_j|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} |u_j|^2 + |v_j|^2 + 2|u_j v_j| \leq 2 \sum_{j=1}^{\infty} (|u_j|^2 + |v_j|^2) < \infty.$$

El producto escalar está definido como:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \bar{\mathbf{u}}\mathbf{v}^T = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{u}_j v_j$$

donde \mathbf{v}^T denota la transpuesta del vector fila $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots)$.

Ejemplo 1.4. $L_2(M)$ es el espacio de funciones de cuadrado integrable según Lebesgue, donde M es un subconjunto Lebesgue medible de \mathbb{R}^n y $n \in \mathbb{N}$.

Si $f \in L_2(M)$, entonces

$$\int_M |f|^2 dm < \infty.$$

La integración se realiza en el sentido de Lebesgue. El producto escalar en $L_2(M)$ está definido como

$$\langle f, g \rangle = \int_M \overline{f(x)}g(x)dm$$

donde \overline{f} denota la conjugación compleja de f .

Definición 1.10. *Un subespacio \mathcal{K} de un espacio de Hilbert \mathcal{H} es un subconjunto de vectores el cual en sí mismo es un espacio vectorial.*

Definición 1.11. *Una sucesión $\{\phi_j\}, j \in I$ y $\phi_j \in \mathcal{H}$ es llamada una sucesión ortonormal si*

$$\langle \phi_j, \phi_k \rangle = \delta_{jk}$$

donde I es un conjunto indizado numerable y donde δ_{jk} denota la *delta de Kronecker*

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{para } j = k \\ 0 & \text{para } j \neq k. \end{cases}$$

Definición 1.12. *Una sucesión ortonormal $\{\phi_j\}$ en \mathcal{H} es una base, si cada $f \in \mathcal{H}$ puede ser expresada como*

$$f = \sum_{j \in I} a_j \phi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|j| \leq n} a_j \phi_j$$

donde I es un conjunto de índices y las a_j son constantes en \mathbb{C} . Los coeficientes de expansión a_j están dados por

$$a_j = \langle \phi_j, f \rangle.$$

Ejemplo 1.5. *Considere el espacio de Hilbert $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$. El producto escalar está definido por*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\mathbf{u}} \mathbf{v}^T.$$

Una base ortonormal en \mathcal{H} está dado por

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \quad i), \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \quad -i)$$

donde $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = 0$ y $\|\mathbf{e}_1\| = 1, \|\mathbf{e}_2\| = 1$.

Ejemplo 1.6. Sea $\mathcal{H} = L_2(-\pi, \pi)$. Entonces una base ortonormal esta dada por

$$\left\{ \phi_k(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \right\}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Si $f \in L_2(-\pi, \pi)$, entonces los coeficientes de la expansión son $a_k = \langle \phi_k, f \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$. En particular, a la expansión $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \phi_k, f \rangle \phi_k$ le llamamos la *serie de Fourier* de f .

Desigualdad de Schwarz. Sean $f, g \in \mathcal{H}$. Entonces

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|.$$

Desigualdad del triángulo. Sean $f, g \in \mathcal{H}$. Entonces

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

Sea $B = \{\phi_n : n \in I\}$ una base ortonormal en un espacio de Hilbert \mathcal{H} , donde I es un conjunto numerable de índices. Entonces ocurre que

$$(1) \quad \langle \phi_n, \phi_m \rangle = \delta_{nm}.$$

$$(2) \quad \text{Para toda } f \in \mathcal{H} \quad f = \sum_{n \in I} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n.$$

$$(3) \quad \text{Para toda } f, g \in \mathcal{H} \quad \langle f, g \rangle = \sum_{n \in I} \overline{\langle f, \phi_n \rangle} \langle g, \phi_n \rangle.$$

$$(4) \quad \text{Para toda } \phi_n \in B \quad \langle f, \phi_n \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad f \equiv 0.$$

$$(5) \quad \text{Para toda } f \in \mathcal{H} \quad \|f\|^2 = \sum_{n \in I} |\langle f, \phi_n \rangle|^2.$$

Observación. La ecuación (5) es llamada la *relación de Parseval*.

Siempre vamos a asumir que cada espacio de Hilbert \mathcal{H} del que hablemos es *separable* en el sentido de la topología heredada de la norma, esto es, existe un conjunto numerable denso en \mathcal{H} – o en forma equivalente – tal \mathcal{H} posee una base ortonormal numerable.

Si $M \leq \mathcal{H}$ es un subespacio cerrado, su *complemento ortogonal*

$$M^\perp := \{y \in \mathcal{H} : \langle y, x \rangle = 0, \quad \text{para todo } x \in M\}$$

es un subespacio cerrado con $M^\perp \cap M = \{0\}$. Además $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$, donde el lado derecho es la “suma directa de espacios de Hilbert”; esto es, cada vector en \mathcal{H} se escribe de manera única como $x + y$, con $x \in M$ y $y \in M^\perp$, y donde además se cumple $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

1.2. Teoría de operadores.

Definición 1.13. Un operador lineal $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ es acotado si hay un $M \geq 0$ tal que $\|Tx\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in \mathcal{H}$. El menor M posible es la norma del operador T , denotado por

$$\|T\| := \inf\{M \geq 0 : \|Tx\| \leq M\|x\|, \forall x \in \mathcal{H}\} = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}. \quad (6)$$

La condición $\|T\| < \infty$ equivale a la continuidad del operador lineal T ; denotamos como $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ al espacio normado de operadores acotados; con la norma asociada $T \rightarrow \|T\|$. $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ es en sí mismo un espacio de Banach, es decir, es completo en la norma (6) y es cerrado bajo la composición de aplicaciones lineales con

$$\|ST\| \leq \|S\|\|T\| \quad \text{para todo } S, T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Definición 1.14. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Diremos que λ es un valor propio de T si existe $x \in \mathcal{H}$ con $x \neq 0$, tal que $Tx = \lambda x$. En este caso el vector x se llama vector propio asociado a λ .

Es claro que si λ es un valor propio de T , con I el operador identidad, entonces $T - \lambda I$ no es un operador invertible.

Definición 1.15. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. El espectro de T , que denotamos por $\sigma(T)$, se define como el conjunto $\{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ no es invertible}\}$.

Definición 1.16. Llamaremos al operador T^* como el adjunto al operador T , que cumple con

$$\langle T^*y, x \rangle = \langle y, Tx \rangle$$

asimismo se cumplen las siguientes propiedades: $(\alpha T + \beta S)^* = \bar{\alpha}T^* + \bar{\beta}S^*$ si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $(T^*)^* = T$, $(TS)^* = S^*T^*$ y $\|T^*\| = \|T\|$.

La existencia de T^* esta garantizada por el Teorema de representación de Riesz [17]. De aquí tenemos otra fórmula para la norma de T

$$\|T\| = \sup\{|\langle y, Tx \rangle| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\}. \quad (7)$$

Como consecuencia inmediata de (7) tenemos $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

Definición 1.17. Operadores unitarios. A los operadores U en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ que cumplen $U^*U = UU^* = I$ les llamaremos unitarios.

Los operadores unitarios tienen la virtud de ser isométricos, es decir, si U es unitario se tiene $\langle Uy, Ux \rangle = \langle y, x \rangle$, preservan el producto interno y por tanto la norma, además $U^{-1} = U^*$. Al subespacio de operadores unitarios en \mathcal{H} lo denotaremos como $\mathcal{U}(\mathcal{H})$.

Definición 1.18. *Núcleo reproductor.* Si \mathcal{H} es un espacio de Hilbert, con $\mathcal{H} \leq L^2(X, d\mu)$, y si además \mathcal{H} posee una base ortonormal de funciones $\{e_k\}_{k \in J}$, definimos la serie formal

$$K(x, y) := \sum_{k \in J} e_k(x) \overline{e_k(y)}. \quad (8)$$

donde $K(x, y)$ le denominamos el núcleo reproductor.

Se puede mostrar que el lado derecho no depende de la base ortonormal elegida [4], además tenemos para $f \in \mathcal{H}$:

$$\int_X K(x, y) f(y) d\mu(y) = \sum_{k \in J} e_k(x) \langle e_k, f \rangle = f(x). \quad (9)$$

Se debe tener cuidado con las fórmulas (8) y (9), dado que la convergencia de la serie de Parseval en (9) debe entenderse como convergencia en media cuadrática; mientras que la convergencia indicada en (8) es puntual (o casi en todas partes).

Sin embargo, hay varios casos en donde estos dos tipos de convergencia son compatibles; por ejemplo, cuando \mathcal{H} es de dimensión finita o cuando se compone de funciones holomorfas. Este último caso es el que desarrollaremos a lo largo de todo este trabajo.

Definición 1.19. *Un grupo de Lie es un grupo G que es a su vez una variedad diferencial real [10], de modo que el producto $(g, h) \mapsto gh : G \times G \rightarrow G$ y la inversión $g \mapsto g^{-1} : G \rightarrow G$ son aplicaciones suaves, es decir, infinitamente diferenciables.*

Definición 1.20. *Para un grupo G de Lie dado una representación unitaria de G es un homomorfismo $\pi : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ donde \mathcal{H} es algún espacio de Hilbert.*

Si $\pi_1 : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_1)$, $\pi_2 : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_2)$ son dos representaciones de G , se dice que un operador lineal y continuo $A : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ entrelaza a π_1 y a π_2 si

$$A\pi_1(g) = \pi_2(g)A, \quad \text{para todo } g \in G.$$

Se dice que π_1 y π_2 son *equivalentes*, y se escribe $\pi_1 \sim \pi_2$ si existe un operador invertible que los entrelaza, y que son *unitariamente equivalentes* si hay un operador unitario que los entrelaza.

Definición 1.21. Sea G un grupo de Lie, $\pi : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ una representación unitaria. Un subespacio invariante para π es un subespacio cerrado \mathcal{K} de \mathcal{H} tal que $\pi(g)\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ para todo $g \in G$. Como cada $\pi(g)$ es unitario, tenemos $\pi(g^{-1}) = \pi(g)^{-1} = \pi(g)^*$, la restricción $g \mapsto \pi(g)$ restringido a \mathcal{K} es una representación de G sobre \mathcal{K} , es decir, una representación de π . También

$$\langle \pi(g)y|x \rangle = \langle y|\pi(g)^*x \rangle = \langle y|\pi(g^{-1})x \rangle = 0 \quad \text{si } x \in \mathcal{K}, y \in \mathcal{K}^\perp$$

así que $\pi(g)\mathcal{K}^\perp \subset \mathcal{K}^\perp$, tenemos

$$\pi = (\pi \text{ restringido a } \mathcal{K}) \oplus (\pi \text{ restringido a } \mathcal{K}^\perp).$$

Si $\{0\} \neq \mathcal{K} \neq \mathcal{H}$ decimos que π es *reducible*. Por el contrario, si los únicos subespacios invariantes de π son los subespacios triviales $\{0\}$ y \mathcal{H} , decimos que π es *irreducible*.

1.3. Funciones analíticas en varias variables.

Definición 1.22. Sea U un conjunto abierto en $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ y sea $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ con $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$

$$g((z_1, \dots, z_n)) = h, \quad z_i, h \in \mathbb{C}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Decimos que g es analítica en U si para cada z_i con $1 \leq i \leq n$ se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i}(z) = 0.$$

Definición 1.23. *Funciones holomorfas.* Para un conjunto U no vacío subconjunto de \mathbb{C}^n y abierto en la topología de $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, definimos como $\mathcal{H}(U)$ al conjunto de funciones holomorfas f que van de $U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$.

Para $z \in U \subset \mathbb{C}^n$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, $f(z) = (f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z)) \in \mathbb{C}^n$, tenemos entonces que f es continua (holomorfa), en cada $z \in U$ si y solo si cada $f_i(z)$ es continua (holomorfa) en \mathbb{C} para $1 \leq i \leq n$.

La integral en \mathbb{C}^n queda, para $f : U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, como

$$\int_{\mathbb{C}^n} f(w)dw = \int_{\mathbb{C}} \dots \int_{\mathbb{C}} f(w_1, \dots, w_n)dw_1 \dots dw_n$$

donde $w = (w_1, \dots, w_n)$, $w_i \in \mathbb{C}$ para $1 \leq i \leq n$.

Si bien para los abiertos U de $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ usamos la topología conocida de las bolas abiertas $B_r(z_0)$

$$B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z - z_0\| < r\}$$

también usaremos la topología de los polidiscos $P_r(z_0)$

$$P_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_s - w_s| < r, s = 1, \dots, n\}$$

con $z = (z_1, \dots, z_n)$ y $z_0 = (w_1, \dots, w_n)$, cada uno de los abiertos de la topología de los polidiscos puede ser insertado en un abierto de la topología producto en \mathbb{R}^{2n} y también de manera inversa; a su vez la topología producto es equivalente a la topología usual de las bolas abiertas heredada por la métrica euclídea en \mathbb{R}^{2n} .

Toda función entera $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ puede ser expresada en una serie de potencias única

$$f(z) = \sum_{\nu} \alpha_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n} z_1^{\nu_1} \dots z_n^{\nu_n}$$

con $z \in \mathbb{C}^n$, $z = (z_1, \dots, z_n)$, $\nu \in \mathbb{N}^n$, $\nu = (\nu_1 \dots \nu_n)$, por conveniencia en la notación, denotamos a los coeficientes $\alpha_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n}$ como $\alpha_{[\nu]}$, y al producto $z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2} \dots z_n^{\nu_n}$ como $z^{[\nu]}$, tenemos entonces que

$$f(z) = \sum_{\nu} \alpha_{[\nu]} z^{[\nu]},$$

y esta serie converge uniformemente en cada subconjunto compacto de \mathbb{C}^n .

Además también denotaremos como $[\nu]!$ al producto $\nu_1! \nu_2! \dots \nu_n!$ y con $|\nu|^j$ a la suma $|\nu_1|^j + |\nu_2|^j + \dots + |\nu_n|^j$.

Capítulo 2

Los espacios de Bergman y de Segal-Bargmann

En este capítulo se da la descripción de las principales propiedades de las funciones holomorfas de cuadrado integrable, a este espacio de funciones dotado de una medida específica se le denomina espacio de Segal-Bargmann. Este material está tomado en su mayoría de [9], en algunos casos se dan más detalles de las definiciones y teoremas de estos espacios.

Sea U un conjunto no vacío en \mathbb{C}^n . Sea $\mathcal{H}(U)$ el espacio de las funciones holomorfas (o analíticas complejas) en U . Recordemos que una función de varias variables complejas $f : U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, con

$$f((z_1, \dots, z_n)) = (f_1((z_1, \dots, z_n)), \dots, f_n((z_1, \dots, z_n))), \quad z_i \in \mathbb{C}$$

se dice que es holomorfa si es continua y holomorfa en cada una de sus componentes f_i , $1 \leq i \leq n$.

Sea U un conjunto abierto no vacío en \mathbb{C}^n , con la topología usual heredada de $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ y sea α una función continua y estrictamente positiva sobre U .

Definición 2.1. Sea $\mathcal{HL}^2(U, \alpha)$ denota el espacio L^2 de funciones holomorfas con respecto al peso α , esto es

$$\mathcal{HL}^2(U, \alpha) = \left\{ f \in \mathcal{H}(U) : \int_U |f(z)|^2 \alpha(z) dz < \infty \right\}$$

donde dz denota la medida de Lebesgue $2n$ -dimensional sobre \mathbb{C}^n .

Teorema 2.1. (1) Para todo $z \in U$ existe una constante c_z tal que

$$|f(z)|^2 \leq c_z \|f\|_{L^2(U, \alpha)}^2$$

para toda f en $\mathcal{HL}^2(U, \alpha)$.

(2) $\mathcal{HL}^2(U, \alpha)$ es un subespacio cerrado de $L^2(U, \alpha)$ y de aquí un espacio de Hilbert.

Demostración. (1) Sea $P_s(z)$ el polidisco de radio s centrado en z , esto es

$$P_s(z) = \{v \in \mathbb{C}^n : |v_k - z_k| < s, k = 1, \dots, n\}.$$

Aquí $z = (z_1, \dots, z_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$ con cada $z_k, v_k \in \mathbb{C}$. Si $z \in U$ escogemos s suficientemente pequeño tal que $\overline{P_s(z)} \subset U$. Entonces afirmamos que

$$f(z) = (\pi s^2)^{-n} \int_{P_s(z)} f(v) dv. \quad (2.1)$$

Para verificar esto consideramos primero el caso $n = 1$. Podemos expandir a f en serie de Taylor centrada en $v = z$.

$$f(v) = f(z) + a_1(v - z) + a_2(v - z)^2 + \dots$$

Esta serie converge uniformemente a f en el conjunto compacto $\overline{P_s(z)} \subset U$. Así que cuando evaluamos la integral en el lado derecho de la ecuación (2.1) podemos intercambiar la integral con la suma y obtener

$$\begin{aligned} (\pi s^2)^{-1} \int_{P_s(z)} f(v) dv &= (\pi s^2)^{-1} \int_{P_s(z)} \left(f(z) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (v - z)^k \right) dv \\ &= (\pi s^2)^{-1} \left\{ \int_{P_s(z)} f(z) dv + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{P_s(z)} a_k (v - z)^k \right\}. \end{aligned}$$

Para este caso, el polidisco es sólo el disco unitario en \mathbb{C} . Si usamos coordenadas polares con origen en z , $(v - z)^k = r^k e^{i\theta k}$, y como veremos a continuación,

la segunda integral es cero para cada k .

$$\begin{aligned}
& (\pi s^2)^{-1} \int_{P_s(z)} f(v) dv \\
&= (\pi s^2)^{-1} \left\{ f(z) \int_0^s \int_0^{2\pi} r d\theta dr + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^s \int_0^{2\pi} r^k e^{ik\theta} r d\theta dr \right\} \\
&= (\pi s^2)^{-1} \left\{ f(z)(\pi s^2) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^s r^{k+1} \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} d\theta dr \right\} \\
&= f(z).
\end{aligned}$$

Para el caso $n > 1$ tenemos entonces

$$\begin{aligned}
& (\pi s^2)^{-n} \int_{P_s(z)} f(v) dv \\
&= (\pi s^2)^{-n} \int_{P_s(z)} \left(f(z) + \sum_{\substack{[\nu] \in \mathbb{N}^n \\ [\nu] \neq 0}} c_{[\nu]} \int_{P_s(z)} (v-z)^{[\nu]} \right) \\
&= f(z) + (\pi s^2)^{-n} \sum_{\substack{[\nu] \in \mathbb{N}^n \\ [\nu] \neq 0}} c_{[\nu]} \int_{D(z_1; s)} \int_{D(z_2; s)} \dots \\
&\dots \int_{D(z_n; s)} \prod_{j=1}^n (v_j - z_j)^{\nu_j} dv_n \dots dv_2 dv_1 \\
&= f(z) + (\pi s^2)^{-n} \sum_{\substack{[\nu] \in \mathbb{N}^n \\ [\nu] \neq 0}} c_{[\nu]} \int_{D(z_1; s)} (v_1 - z_1)^{\nu_1} \dots \\
&\dots \int_{D(z_n; s)} (v_n - z_n)^{\nu_n} dv_n \dots dv_1
\end{aligned}$$

nuevamente, utilizando coordenadas polares como en el caso unidimensional, todas las integrales se hacen cero, con lo que tenemos la igualdad. Una vez teniendo verificada la ecuación (2.1) podemos escribirla como

$$\begin{aligned}
f(z) &= (\pi s^2)^{-n} \int_U \chi_{P_s(z)}(v) \frac{1}{\alpha(v)} f(v) \alpha(v) dv \\
&= (\pi s^2)^{-n} \left\langle \chi_{P_s(z)} \frac{1}{\alpha}, f \right\rangle_{L^2(U, \alpha)}.
\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Schwarz

$$|f(z)|^2 \leq (\pi s^2)^{-2n} \left\| \chi_{P_s(z)} \frac{1}{\alpha} \right\|_{L^2(U, \alpha)}^2 \|f\|_{L^2(U, \alpha)}.$$

Dado que α es positiva sobre $\overline{P_s(z)} \in U$, entonces $\frac{1}{\alpha}$ es acotada sobre $P_s(z)$ por lo que la primera norma es finita y solo depende de z .

(2). Sea $z \in U$, $V = P_r(z)$, $r \geq 0$, tal que V esté totalmente contenido en U haciendo a r suficientemente pequeño. Sea $s = r/2$.

Además tenemos que para todo punto $v \in P_s(z)$, su correspondiente polidisco $P_s(v)$ está contenido en $V \subset U$ ya que para $w = (w_1, \dots, w_n) \in P_s(v)$

$$\begin{aligned} |w_k - z_k| &= |w_k - v_k + v_k - z_k| \\ &\leq |w_k - v_k| + |v_k - z_k| \\ &= 2s = r. \end{aligned}$$

Entonces, para $v \in P_s(z) \subset U$ se tiene

$$\begin{aligned} |f(v)|^2 &\leq (\pi s^2)^{-2n} \left\| \chi_{P_s(z)} \frac{1}{\alpha} \right\|_{L^2(U, \alpha)}^2 \|f\|_{L^2(U, \alpha)}^2 \\ &\leq \left(\frac{s^2}{r^2}\right)^{-2n} (\pi r^2)^{-2n} \left\| \chi_{P_s(z)} \frac{1}{\alpha} \right\|_{L^2(U, \alpha)}^2 \|f\|_{L^2(U, \alpha)}^2 \\ &= 2^{-4n} c_z \|f\|_{L^2(U, \alpha)}^2 \\ &\leq c_z \|f\|_{L^2(U, \alpha)}^2 \end{aligned}$$

para todo $v \in V$ y toda $f \in \mathcal{H}L^2(U, \alpha)$.

Sea $\{f_k\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}L^2(U, \alpha)$, entonces, como $L^2(U, \alpha)$ es un espacio de Hilbert, existe $f \in L^2(U, \alpha)$ tal que $f_k \rightarrow f$ en la norma de $L^2(U, \alpha)$. Ahora tenemos que demostrar que f se encuentra en $\mathcal{H}L^2(U, \alpha)$. En particular se cumple que $\{f_k\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(U, \alpha)$ y además

$$\sup_{v \in \overline{V}} |f_k(v) - f_l(v)| \leq \sqrt{c_z} \|f_k - f_l\|_{L^2(U, \alpha)} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } k, l \rightarrow \infty.$$

Esto demuestra que la sucesión $\{f_k\}$ converge uniformemente en un compacto de forma local, a un límite que es una función, a dicho límite lo denotaremos

por $f(v)$. Si el límite en L_2 y el límite puntual existen, ambos deben ser iguales casi en todas partes. Pero un teorema estándar muestra que el límite uniforme local de funciones holomorfas es siempre holomorfo.

(Usamos el teorema de Morera para demostrar que el límite continua siendo holomorfo en cada una de las variables). Esta f tiene que ser holomorfa, así la función límite f está en $\mathcal{HL}^2(U, \alpha)$. Por tanto $\mathcal{HL}^2(U, \alpha)$ es cerrado. \square

Observación 1. El punto (1) del Teorema 2.1 nos dice que el funcional de evaluación Λ_z para cada $z \in U$ dado por

$$f \rightarrow f(z), \quad \text{con} \quad \Lambda_z : \mathcal{HL}^2(U, \alpha) \rightarrow \mathbb{C}$$

es continuo.

Observación 2. También para $\frac{\partial}{\partial z_k} f$ con $f \in \mathcal{HL}^2(U, \alpha)$ se puede obtener una cota semejante a (1), lo que a continuación demostraremos.

Teorema 2.2. Para $f \in \mathcal{HL}^2(U, \alpha)$

$$\left| \frac{\partial}{\partial z_k} f \right|^2 \leq \|f\|^2 (|z|^2 + 1) e^{z\bar{z}}.$$

Demostración.

$$\left| \frac{\partial}{\partial z_k} f \right|^2 \leq \left(\sum_{[\nu] \in \mathbb{N}^n} |a_{[\nu]}| \left| \nu_k \frac{z_1^{\nu_1} \cdots z_k^{\nu_k-1} \cdots z_n^{\nu_n}}{\sqrt{[\nu!]}} \right| \right)^2$$

aplicando la desigualdad de Schwarz, con la notación, para $[\nu] \in \mathbb{N}^n$, $[\nu_k^{-s}] = (\nu_1, \dots, \widehat{\nu_k - s}, \dots, \nu_n)$, $s \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &\leq \left[\left(\sum_{[\nu] \in \mathbb{N}^n} |a_{[\nu]}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{[\nu] \in \mathbb{N}^n} \left(\nu_k^2 \frac{(|z|^2)^{[\nu_k^{-1}]} }{[\nu!] } \right)^{1/2} \right)^2 \\ &= \|f\|^2 \sum_{[\nu] \in \mathbb{N}^n} \nu_k \frac{(|z|^2)^{[\nu_k^{-1}]} }{[\nu_k^{-1}!] } \\ &= \|f\|^2 \left[\sum_{[\nu] \in \mathbb{N}^n} \frac{(|z|^2)^{[\nu_k^{-1}]} }{[\nu_k^{-2}!] } + \sum_{[\nu] \in \mathbb{N}^n} \frac{(|z|^2)^{[\nu_k^{-1}]} }{[\nu_k^{-1}!] } \right] \\ &= \|f\|^2 (|z|^2 + 1) e^{z\bar{z}}. \end{aligned}$$

\square

Teorema 2.3. (El núcleo reproductor). Sea $\mathcal{HL}^2(U, \alpha)$, entonces existe una función $K(z, w)$, $z, w \in U$ con las siguientes propiedades:

1. $K(z, w)$ es holomorfa en z y \bar{w} , satisface

$$K(w, z) = \overline{K(z, w)}.$$

2. Para cada $z \in U$ fijo, $K(z, w) \in L^2(U, \alpha)$. Para toda $F \in \mathcal{HL}^2(U, \alpha)$

$$F(z) = \int_U K(z, w)F(w)\alpha(w)dw.$$

3. Si $F \in L^2(U, \alpha)$, y PF denota la proyección ortogonal de F en el subespacio cerrado $\mathcal{HL}^2(U, \alpha)$. Entonces

$$PF(z) = \int_U K(z, w)F(w)\alpha(w)dw.$$

4. Para todo $z, u \in U$

$$\int_U K(z, w)K(w, u)\alpha(w)dw = K(z, u).$$

5. Para todo $z \in U$,

$$|F(z)|^2 \leq K(z, z)\|F\|^2$$

y la constante $K(z, z)$ es la óptima en el sentido de que para cada $z \in U$ existe una $F_z \in \mathcal{HL}^2(U, \alpha)$ distinta de cero para la cual la igualdad se cumple.

6. Dado cualquier $z \in U$, si $\phi_z(\cdot) \in \mathcal{HL}^2(U, \alpha)$ satisface

$$F(z) = \int_U \overline{\phi_z(w)}F(w)\alpha(w)dw$$

para toda $F \in \mathcal{HL}^2(U, \alpha)$, entonces $\overline{\phi_z(w)} = K(z, w)$.

Demostración. Sea $z \in U$ y sea Λ_z como en la observación 1 por el teorema de Riesz, este funcional lineal puede ser representado de forma única como el producto interno de algún $\phi_z \in \mathcal{HL}^2(U, \alpha)$ con F tal que

$$\Lambda_z(F) = \langle \phi_z, F \rangle_{L^2(U, \alpha)} = \int_U \overline{\phi_z(w)}F(w)\alpha(w)dw. \quad (2.2)$$

Por lo que definimos $K(z, w) = \overline{\phi_z(w)}$. Así, por construcción $K(z, w)$ satisface el punto (2) y dado que $\phi_z(\cdot)$ es analítica, entonces $K(z, w)$ es analítica en \overline{w} .

Para el punto (1), aplicamos Λ_z a ϕ_z obteniendo

$$\begin{aligned}\Lambda_w(\phi_z) &= \phi_z(w) = \langle \phi_w, \phi_z \rangle_{L^2(U, \alpha)} \\ &= \overline{\langle \phi_z, \phi_w \rangle_{L^2(U, \alpha)}} = \overline{\phi_w(z)}.\end{aligned}$$

De donde $\overline{K(z, w)} = K(w, z)$ y por tanto $K(z, w)$ es analítica en z , por lo que tenemos el punto (1) de este Teorema.

Para el punto (3) consideramos dos casos, si $F \in \mathcal{HL}^2(U, \alpha)$ el punto (3) dice lo mismo que el punto (2), por otro lado si $F \in \mathcal{HL}^2(U, \alpha)^\perp$ entonces, el lado derecho de la ecuación del punto (3) es precisamente $\langle \phi_z, F \rangle$, el cual es cero dado que $\phi_z \in \mathcal{HL}^2(U, \alpha)$. Así el lado derecho del punto (3) es la identidad en $\mathcal{HL}^2(U, \alpha)$ y cero en el complemento ortogonal de $\mathcal{HL}^2(U, \alpha)$, así, debe coincidir con P .

El punto (4) es solamente el punto (2) aplicado a las funciones holomorfas de cuadrado integrable $K(z, u)$, viendo z como variable y u como parámetro tenemos que

$$K(z, u) = \int_U K(z, w)K(w, u)\alpha(w)dw.$$

Para el punto (5) notamos que la evaluación en z es precisamente el producto interno con un elemento ϕ_z de nuestro espacio de Hilbert. Así, la norma de este funcional lineal es precisamente la norma de ϕ_z , como a continuación vemos

$$\begin{aligned}\|\Lambda_z\|_{\mathcal{L}(\mathcal{HL}^2(U, \alpha))}^2 &= \|\phi_z\|^2 \\ &= \langle \phi_z, \phi_z \rangle_{L^2(U, \alpha)} = \phi_z(z) = K(z, z)\end{aligned}$$

luego de (2.2)

$$\begin{aligned}|F(z)|^2 &= |\Lambda_z(F)|^2 \\ &\leq \|\phi_z\|^2 \|F\|^2 = K(z, z) \|F\|^2.\end{aligned}$$

Si tomamos $F_z = \phi_z$, $|\phi_z(z)|^2 = K(z, z)^2 = \|\phi_z\|^2 \cdot \|\phi_z\|^2$, así, encontramos la función F_z para la cual se da la igualdad en el punto (5).

Para el punto (6), notemos que $\phi_z(\cdot)$ está en $\mathcal{HL}^2(U, \alpha)$ y satisface

$$F(z) = \langle \phi_z, F \rangle \quad \text{para todo } F \in \mathcal{HL}^2(U, \alpha),$$

entonces

$$\langle \phi_z, F \rangle_{L^2(U, \alpha)} = \left\langle \overline{K(z, \cdot)}, F \right\rangle_{L^2(U, \alpha)} \quad \text{y} \quad \left\langle \overline{K(z, \cdot)} - \phi_z, F \right\rangle_{L^2(U, \alpha)} = 0$$

para todo $F \in \mathcal{HL}^2(U, \alpha)$. Dado que $\overline{K(z, \cdot)}$ y ϕ_z están ambos en $\mathcal{HL}^2(U, \alpha)$ podemos tomar $F = \overline{K(z, \cdot)} - \phi_z$, lo cual muestra que $\overline{K(z, \cdot)} - \phi_z = 0$, esto es $\phi_z(w) = \overline{K(z, w)}$. \square

Este teorema es en realidad, la continuidad de la evaluación puntual junto con el teorema de Riesz. El núcleo reproductor es un instrumento útil para codificar información acerca del espacio de funciones holomorfas. El próximo resultado nos da un modo de calcular el núcleo reproductor.

Teorema 2.4. *Sea $\{e_j\}$ una base ortonormal de $\mathcal{HL}^2(U, \alpha)$. Entonces para todo $z, w \in U$*

$$\sum_j |e_j(z)\overline{e_j(w)}| < \infty$$

y

$$K(z, w) = \sum_j e_j(z)\overline{e_j(w)}.$$

Demostración. La parte técnica de la demostración es la cuestión de la convergencia, una vez solventada, es relativamente sencillo obtener la formula para K .

Para cualquier $f \in \mathcal{HL}^2(U, \alpha)$, la relación de Parseval nos dice que

$$\sum_j |\langle f, e_j \rangle|^2 = \|f\|^2.$$

Entonces para cualquier $f, g \in \mathcal{HL}^2(U, \alpha)$, consideremos la desigualdad de Schwarz en el espacio l^2 de sucesiones de cuadrado sumable, aplicada a las sucesiones $|\langle f, e_j \rangle|$ y $|\langle g, e_j \rangle|$. Esto nos da

$$\sum_j |\langle f, e_j \rangle \langle e_j, g \rangle| \leq \left(\sum_j |\langle f, e_j \rangle|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_j |\langle e_j, g \rangle|^2 \right)^{1/2} = \|f\| \|g\|.$$

Tomando $f = \phi_z$ y $g = \phi_w$, tenemos

$$\sum_j |e_j(z)\overline{e_j(w)}| \leq \|\phi_z\| \|\phi_w\| < \infty.$$

Así, la suma es absolutamente convergente para cada z y w .

Ahora, pensemos las sumas parciales de $\sum_j e_j(z)\overline{e_j(w)}$ como funciones de w con z fijo. Entonces la serie es ortogonal y

$$\begin{aligned} \sum_j \left\| e_j(z)\overline{e_j(w)} \right\|_{L^2(w)}^2 &= \sum_j |e_j(z)|^2 \|e_j\|^2 = \\ &= \sum_j \|\langle \phi_z, e_j \rangle e_j\|^2 = \sum_j |\langle \phi_z, e_j \rangle|^2 = \|\phi_z\|^2 < \infty. \end{aligned}$$

Hasta ahora la serie es L^2 -convergente vista como una función de \bar{w} con z fija. Argumentando de manera similar intercambiamos los papeles de z y w para mostrar que la suma es holomorfa como una función de z para w fija. De aquí que la suma satisface el punto 1 del Teorema 2.3.

Ahora que hemos mostrado la parte técnica de la convergencia, probaremos la fórmula para K . Sea $F \in \mathcal{HL}^2(U, \alpha)$, luego F es la suma de las proyecciones tomadas sobre los elementos de la base ortonormal $\{e_j\}$. De aquí que

$$\begin{aligned} F(z) &= \langle \phi_z, F \rangle = \sum_j \langle \phi_z, e_j \rangle \langle e_j, F \rangle = \\ &= \sum_j e_j(z) \int_U \overline{e_j(w)} F(w) \alpha(w) dw = \\ &= \int_U \left[\sum_j e_j(z) \overline{e_j(w)} \right] F(w) \alpha(w) dw. \end{aligned}$$

En la primera línea hemos usado la propiedad básica de los ϕ_z 's y la *relación de Parseval*, en la segunda línea hemos usado la propiedad básica de los ϕ_z al evaluar $\langle \phi_z, e_j \rangle$ y escrito a $\langle e_j, F \rangle$ como una integral. En la tercera línea hemos intercambiado la suma y la integral, justificado por la convergencia en L^2 de la suma. Finalmente entonces por el punto (6) del Teorema 2.3 concluimos que la cantidad entre paréntesis cuadrados debe ser $K(z, w)$. \square

NOTA: La mayor parte del tiempo, esta fórmula para el núcleo reproductor no es especialmente útil dado que; (1) no podemos encontrar explícitamente una base ortonormal y, (2) aún si pudieramos encontrar tal base, probablemente no podríamos calcular explícitamente la suma. Pero nos darán fórmulas explícitas para el núcleo reproductor en casos de suma importancia.

2.1. Ejemplos de espacios de funciones holomorfas.

2.1.1. Los espacios de Bergman con peso.

Definición 2.2. *Los espacios de Bergman con peso son los espacios*

$$\mathcal{H}L^2(\mathbb{D})((1 - |z|^2)^a), \quad a > -1,$$

donde \mathbb{D} es el disco unitario,

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.$$

Aquí la restricción $a > -1$ es necesaria para no tener un espacio nulo, vamos a calcular el núcleo reproductor para los espacios de Bergman con peso solo en el caso $a = 0$. En este caso tal espacio es el *espacio de Bergman estándar*, denotemos a este espacio como $\mathcal{H}L^2(\mathbb{D})$.

Paso 1. Mostremos que $\{z^k\}_{k=0}^{\infty}$ es una base ortogonal para $\mathcal{H}L^2(\mathbb{D})$.

Primero verificamos la ortogonalidad, calculando la integral en coordenadas polares.

$$\begin{aligned} \langle z_k, z_l \rangle &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^k e^{-ik\theta} r^l e^{il\theta} r dr d\theta \\ &= \int_0^1 r^{k+l+1} \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)\theta} d\theta dr \\ &= 0 \quad (k \neq l). \end{aligned}$$

Necesitamos mostrar que el espacio generado por los z^k 's es un subespacio denso en $\mathcal{H}L^2(\mathbb{D})$. Para ello usaremos el hecho de que $\mathcal{H}L^2(\mathbb{D}) = \overline{\text{span}\{z_k\}} + \text{span}\{z_k\}^{\perp}$. Será suficiente mostrar que si $F \in \mathcal{H}L^2(\mathbb{D})$ y $\langle z_k, F \rangle = 0$ para todo k , entonces $F = 0$.

Ahora supongamos $F \in \mathcal{H}L^2(\mathbb{D})$. Expandimos a F en una serie de potencias

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k. \tag{2.3}$$

Esta serie converge uniformemente en un subconjunto compacto de \mathbb{D} . Ahora calculamos

$$\begin{aligned}\langle z_m, F \rangle &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^m e^{-im\theta} F(re^{i\theta}) r dr d\theta \\ &= \lim_{a \rightarrow 1} \int_0^a \int_0^{2\pi} r^m e^{-im\theta} F(re^{i\theta}) r dr d\theta\end{aligned}$$

donde la última igualdad es por el criterio de la Convergencia Dominada. Por ahora la serie en (2.3) converge uniformemente en el conjunto $r \leq a$. Así podemos intercambiar la integral y la suma para obtener.

$$\begin{aligned}\langle z_m, F \rangle &= \lim_{a \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^a \int_0^{2\pi} r^m e^{-im\theta} c_k r^k e^{ik\theta} r dr d\theta \\ &= \lim_{a \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_0^a r^{k+m+1} \int_0^{2\pi} e^{-i(k-m)\theta} d\theta dr\end{aligned}$$

pero la integral en θ nos da cero excepto en el caso cuando $k = m$. Así que solo un término en la suma sobrevive, y podemos hacer que a tienda hacia 1 para obtener.

$$\begin{aligned}\langle z_m, F \rangle &= 2\pi c_m \int_0^1 r^{2m+1} dr \\ &= 2\pi c_m \frac{1}{2m+2} = \frac{\pi c_m}{m+1}.\end{aligned}$$

Así si $\langle z^m, F \rangle = 0$ para todo m , entonces $c_m = 0$ para todo m , en este caso F es idénticamente cero. Así $\{z^k\}_{k=0}^{\infty}$ es una base.

Paso 2. Normalizamos

$$\begin{aligned}\|z^k\|^2 &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^{2k} r dr d\theta \\ &= 2\pi \frac{1}{2k+2} = \frac{\pi}{k+1}.\end{aligned}$$

Así

$$\left\{ z^k \sqrt{\frac{k+1}{\pi}} \right\}_{k=0}^{\infty}$$

es una base ortonormal para $\mathcal{HL}^2(\mathbb{D})$.

Paso 3. Calculamos el núcleo reproductor. De acuerdo a nuestro teorema, podemos calcular el núcleo reproductor como

$$\begin{aligned} K(z, w) &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sqrt{\frac{k+1}{\pi}} \bar{w}^k \sqrt{\frac{k+1}{\pi}} \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) (z\bar{w})^k. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Así, si consideramos la función

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \xi^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{d\xi} \xi^{k+1} \\ &= \frac{d}{d\xi} \sum_{k=0}^{\infty} \xi^{k+1} = \frac{d}{d\xi} (\xi + \xi^2 + \xi^3 + \dots). \end{aligned}$$

Adicionamos 1 dentro de la derivada (lo cuál no produce ningún efecto en la igualdad puesto que la derivada de 1 es cero) obtenemos

$$f(\xi) = \frac{d}{d\xi} \frac{1}{1-\xi} = \frac{1}{(1-\xi)^2}.$$

Ahora por (2.4), $K(z, w) = f(z\bar{w})/\pi$ tenemos la siguiente conclusión.

Conclusión. El núcleo reproductor para el espacio estándar de Bergman es

$$K(z, w) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1 - z\bar{w})^2}.$$

En particular tenemos

$$|F(z)|^2 \leq \frac{1}{\pi(1 - |z|^2)^2} \|F\|^2$$

para todo $F \in \mathcal{HL}^2(\mathbb{D})$ y todo $z \in \mathbb{D}$.

2.1.2. El espacio de Segal-Bargmann.

Definición 2.3. *Los espacios de Segal-Bargmann son los espacios de funciones holomorfas*

$$\mathcal{HL}^2(\mathbb{C}^n, \mu_t)$$

donde

$$\mu_t(z) = (\pi t)^{-n} e^{-|z|^2/t}. \quad (2.5)$$

Aquí $|z|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2$, $z = (z_1, \dots, z_n)$ y t es un número positivo.

Ahora calculamos el núcleo reproductor para el espacio de Segal-Bargmann. Consideramos sólo el caso $n = 1$.

Paso 1. Mostramos que $\{z^k\}_{k=0}^{\infty}$ es una base para el espacio de Segal-Bargmann, con $n = 1$

$$\begin{aligned} \langle z^k, z^l \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} r^{k+l} e^{i\theta(k-l)} e^{-r^2/2} r d\theta dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} r^{k+l+1} e^{-r^2/2} \int_0^{2\pi} e^{i\theta(k-l)} d\theta dr \\ &= 0 \quad (k \neq l). \end{aligned}$$

Paso 2. Normalizamos. Calculamos $\|z^k\|^2$ por inducción en k . Para $k = 0$ observamos que (con $n = 1$).

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}} (1)^2 \mu_t(z) dz &= \frac{1}{\pi t} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2/t} r dr d\theta \\ &= \frac{2\pi}{\pi t} \left(-\frac{t}{2} \right) \lim_{A \rightarrow \infty} e^{-r^2/t} \Big|_0^A \\ &= - \lim_{A \rightarrow \infty} \left[e^{-A^2/2} - 1 \right] = 1. \end{aligned}$$

Ahora calculamos para $k > 0$

$$\begin{aligned} \|z^k\|^2 &= \int_{\mathbb{C}} |z^k|^2 \mu_t(z) dz = \frac{1}{\pi t} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2/t} r^{2k+1} dr d\theta \\ &= \frac{2}{t} \int_0^{\infty} r^{2k} \left(e^{-r^2/t} r \right) dr. \end{aligned}$$

Integrando por partes tenemos

$$\begin{aligned}\|z^k\|^2 &= -\frac{2}{t} \int_0^\infty (2kr^{2k-1}) \left(-\frac{t}{2} e^{-r^2/t}\right) dr \\ &= \frac{2}{t} (kt) \int_0^\infty e^{-r^2/t} r^{2(k-1)+1} dr \\ &= kt \|z^{k-1}\|^2.\end{aligned}$$

Así tenemos

$$\|z^k\|^2 = k!t^k \quad ,$$

y por tanto

$$\left\{ \frac{z^k}{\sqrt{k!t^k}} \right\}_{k=0}^\infty$$

es una base ortonormal para $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}, \mu_t)$. Mas aún, el conjunto de funciones

$$\frac{z_1^{\nu_1} \dots z_n^{\nu_n}}{\sqrt{\nu_1! \dots \nu_n!}}$$

nos provee una base para $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_t)$.

Paso 3. Calculamos el núcleo reproductor

$$\begin{aligned}K(z, w) &= \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\sqrt{k!t^k}} \frac{\overline{w^k}}{\sqrt{k!t^k}} \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} \left(\frac{z\overline{w}}{t}\right)^k = e^{z\overline{w}/t}.\end{aligned}$$

Así hemos calculado el núcleo reproductor explícitamente para el caso $n = 1$, para un n general se puede demostrar de manera similar el siguiente resultado.

Teorema 2.5. *Para todo $n \geq 1$ el núcleo reproductor para el espacio $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_t)$ está dado por*

$$K(z, w) = e^{z\overline{w}/t} \tag{2.6}$$

donde $z \cdot \bar{w} = z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2 + \dots + z_n \bar{w}_n$. En particular tenemos la acotación puntual

$$|F(z)|^2 \leq e^{|z|^2/t} \|F\|^2$$

para todo $F \in \mathcal{HL}^2(\mathbb{C}^n, \mu_t)$ y todo $z \in \mathbb{C}^n$.

Cabe hacer notar que en los diversos artículos de la literatura, a los espacios de Segal-Bargmann se les llama simplemente espacios de Bargmann.

Capítulo 3

Mecánica cuántica

El propósito de este capítulo es establecer la acción del operador $D(\alpha)$ de Weyl, en $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$.

$$D(\alpha)\varphi(x) = e^{-\frac{i}{2\hbar}PQ} e^{-\frac{i}{\hbar}Px} \varphi(x - Q).$$

Donde $\alpha \in \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ es un punto en el espacio fase, $\alpha = (P + iQ)/\sqrt{2}$ con $P, Q \in \mathbb{R}^n$.

En el capítulo 6 de este trabajo, utilizaremos estos mismos operadores con la notación $W(p, q)$, $\hbar = 1$

$$[W(p, q)f](x) = e^{-\frac{1}{2}ipq} e^{ipx} f(x - q) \quad \text{con} \quad f \in L^2(\mathbb{R})$$

donde, $p, q \in \mathbb{R}^n$ y cada estado coherente $\varphi^{p,q}$ puede ser visto como una órbita de la familia de operadores de Weyl actuando sobre el estado base $\varphi^{0,0}$

$$\varphi^{p,q} = W(p, q)\varphi^{0,0} \quad \text{con} \quad \varphi^{0,0} = \pi^{-1/4} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Es por esta razón que trabajamos de manera muy somera algunos conceptos de la mecánica cuántica, y vemos como un estado coherente tiene como representación la transformada de Bargmann actuando en un elemento de $L^2(\mathbb{R})$.

3.1. Las expresiones de la energía.

Consideremos una partícula moviéndose en una línea. En la mecánica clásica cada estado de un sistema físico está especificado por dos variables,

su posición r y su momento p , ($p = mv = \text{masa} \times \text{velocidad}$).

Al plano cartesiano conformado por el eje horizontal r y el eje vertical p , le llamamos *plano fase*. Si la partícula tiene masa m , entonces la energía cinética de esa partícula está dada por $\frac{1}{2m}p^2$.

Decimos que la partícula se mueve bajo la influencia de una fuerza conservativa F , si existe una función $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $F = -\frac{dU}{dr}$. La función U recibe el nombre de energía potencial.

La función que nos da el total de la energía – es decir, la energía total vista como suma de la energía cinética y potencial – se conoce como *función Hamiltoniana*. Es decir

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + U(r).$$

Esta función del total de energía H es importante no solo porque se conserva, esto es $\frac{d}{dt}H = 0$ para cualquier movimiento específico de la partícula, sino que también de manera fundamental podemos derivar las ecuaciones del movimiento de la partícula a partir de la función H de la siguiente manera:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \text{y} \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial r}. \quad (3.1)$$

Estas son conocidas como las *ecuaciones de Hamilton* para la función de energía H . A las soluciones de dichas ecuaciones, les llamaremos las órbitas del Hamiltoniano H en el espacio fase. La conservación de la energía es fácil de verificar usando la regla de la cadena para calcular $\frac{dH}{dt}$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dr}{dt} \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{dp}{dt} \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{dr}{dt} \left(-\frac{dp}{dt} \right) + \frac{dp}{dt} \frac{dr}{dt} = 0.$$

Consideremos una función f definida en el espacio fase (puede ser la energía cinética, la energía total, etc.). Podemos calcular la razón de cambio con respecto al tiempo de f a lo largo de una órbita del Hamiltoniano H . Pensemos a r y p como funciones del tiempo t a través de una órbita particular. Usando la regla de la cadena y utilizando las ecuaciones de Hamilton para H (3.1) tenemos

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial H}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial p}. \quad (3.2)$$

El lado derecho de la ecuación anterior se define como el paréntesis de Poisson $\{H, f\}$ de las funciones H y f . Este paréntesis es de gran importancia para la Mecánica clásica, pues le da estructura de Algebra de Lie al conjunto de

funciones suaves definidas en el espacio fase. Así pues, de la ecuación (3.2) tenemos que la evolución temporal de una función f a lo largo de una órbita del Hamiltoniano H es igual al paréntesis de Poisson $\{H, f\}$, evaluado en tal órbita.

Todo esto lo podemos generalizar al caso de una partícula moviéndose en \mathbb{R}^n . En este caso el espacio fase es \mathbb{R}^{2n} formado por los vectores que por comodidad designaremos por posición $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$ y momento $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$. La función Hamiltoniana queda como

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \sum_{k=1}^n \frac{p_k^2}{2m} + U(\mathbf{r})$$

y la condición de que la fuerza F sea conservativa consiste en requerir la existencia de una función $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$F = -\nabla U, \quad \text{donde} \quad \nabla U = \left(\frac{\partial U}{\partial r_1}, \dots, \frac{\partial U}{\partial r_n} \right).$$

Las ecuaciones de Hamilton quedan como

$$\frac{dr_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \text{y} \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial r_k}.$$

y el paréntesis de Poisson de dos funciones f, g en el espacio fase \mathbb{R}^{2n} se define

$$\{f, g\} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial r_k} - \frac{\partial f}{\partial r_k} \frac{\partial g}{\partial p_k}.$$

3.2. Algunas cuestiones de la Mecánica cuántica.

En Mecánica cuántica los observables como la energía cinética, la energía total, el momento angular, etc; son representados por operadores que actúan en un espacio de Hilbert \mathcal{H} . Un elemento ψ en \mathcal{H} es llamado un *estado del sistema* en cuestión. En el caso de una partícula moviéndose en \mathbb{R}^n , una de las posibilidades para el espacio de Hilbert \mathcal{H} es $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Así pues, la descripción del movimiento de la partícula consiste en tomar

una función $\psi = \psi(x, t)$ tales que para cada tiempo t , $\psi(x, t) \in L^2(\mathbb{R}^n)$. La función

$$\varrho(x, t) = \frac{|\psi(x, t)|^2}{\|\psi(x, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2}$$

se interpreta como la densidad de probabilidad, asociada a la posición de la partícula para cada tiempo t .

Es decir, dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ medible Lebesgue y un tiempo t , la probabilidad de que la partícula se encuentre en Ω al tiempo t está dada por

$$\int_{\Omega} \varrho(x, t) dx$$

donde dx es la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n .

Mas aún, la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo establece la evolución temporal de la función $\psi(x, t)$, dado un operador Hamiltoniano \hat{H} de la siguiente manera

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi. \quad (\text{H1})$$

En general asumiremos que el operador \hat{H} es autoadjunto, con el propósito de garantizar que la ecuación (H1) tiene una única solución, dada la condición inicial $\psi(x, 0) = \varphi(x)$.

De hecho, el Teorema espectral [17] y el cálculo funcional, nos permiten escribir la solución de la ecuación (H1) como

$$\psi(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar}\psi(0).$$

Mas aún, si \hat{H} es acotado, tiene sentido escribir $e^{\hat{H}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\hat{H})^n$. En diversas ocasiones es importante considerar estados estacionarios, es decir, estados donde

$$\psi(x, t) = F(x)\tau(t).$$

En tal caso, F es una función propia de \hat{H} que satisface la siguiente ecuación de valores propios

$$\hat{H}(F) = \lambda \cdot F, \quad F \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{H2})$$

y $T(t) = e^{-i\lambda t/\hbar}$. La ecuación de valores propios (H2) es conocida como la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo.

Debido a que se pide que H sea autoadjunto, los valores propios de H

deben ser reales. La interpretación física de los valores propios de H , consiste en considerarlos como el resultado de medir a \hat{H} experimentalmente.

Hacemos notar que en la Mecánica cuántica, surge la necesidad en muchas ocasiones, de introducir operadores autoadjuntos no acotados cuyo dominio sea un subespacio denso de \mathcal{H} . En el presente trabajo no consideraremos aspectos explícitos de los dominios que se usen, para no hacer esta tesis innecesariamente complicada. Además, esto no afecta en ningún modo el propósito de este trabajo.

3.3. El grupo de Heisenberg-Weyl.

Para un sistema de una partícula moviéndose en la recta real \mathbb{R} , las relaciones más básicas de conmutación, son las así llamadas *relaciones canónicas de conmutación* (RCC) entre los operadores de posición \hat{q} dado por multiplicación por la coordenada q y el operador de momento $\hat{p} = i\hbar \frac{\partial}{\partial q}$. Explícitamente, dichas (RCC) están dadas por

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \hat{I}, \quad [\hat{q}, \hat{I}] = [\hat{p}, \hat{I}] = 0. \quad (3.3)$$

Aquí \hat{I} es el operador identidad, \hbar es la constante de Planck, y los paréntesis cuadrados significan el conmutador $[A, B] = AB - BA$.

NOTA: Aquí solo estamos considerando el aspecto algebraico, sin considerar cuestiones de dominios de operadores.

La escritura de las relaciones canónicas de conmutación de la ecuación (3.3) es descrita por un grupo, el así llamado grupo de Heisenberg-Weyl W . La ecuación (3.3) para los operadores $\hat{q}, \hat{p}, \hat{I}$ significa que estos son generadores de un álgebra de Lie, la cual la denotaremos por \mathfrak{w} y de aquí en adelante la llamaremos el álgebra de Heisenberg-Weyl.

Dicha álgebra consiste en tomar las combinaciones lineales con coeficientes en los reales de los operadores $\hat{p}, \hat{q}, \hat{I}$ y dotando a este espacio de un paréntesis que satisface la identidad de Jacobi y esta dado por el conmutador arriba definido.

Es común que las (RCC) también se presenten en términos del así llamado operador a^- de aniquilación y su conjugado, el operador a^\dagger de creación, definidos (con $\hbar = 1$) como

$$a^- = \frac{\hat{q} + i\hat{p}}{\sqrt{2}}, \quad a^\dagger = \frac{\hat{q} - i\hat{p}}{\sqrt{2}}.$$

De la definición de a^\dagger y a^- obtenemos las relaciones de conmutación

$$[a^-, a^\dagger] = \hat{I} \quad \text{y} \quad [a^-, \hat{I}] = [a^\dagger, \hat{I}] = 0. \quad (3.4)$$

Si introducimos las cantidades

$$e_1 = i\hat{p}, \quad e_2 = i\hat{q}, \quad e_3 = i\hat{I}$$

y las vemos como los elementos de un álgebra de Lie abstracta, no solo como operadores en un espacio de Hilbert, tendremos la siguiente definición.

Definición 3.1. *El álgebra de Heisenberg-Weyl \mathfrak{w} es un álgebra de Lie real de tres dimensiones, cuyos conmutadores están determinados por estas tres ecuaciones.*

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0.$$

En general los elementos del álgebra de Lie \mathfrak{w} los escribiremos como

$$x = (s; x_1, x_2) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + s e_3$$

o

$$x = is\hat{I} + i(P\hat{q} - Q\hat{p}) = is\hat{I} + (\alpha a^\dagger - \bar{\alpha} a^-) \quad (3.5)$$

donde s, x_1 y x_2 son números reales

$$x_1 = -Q$$

$$x_2 = P$$

$$\alpha = (2)^{-1/2}(Q + iP) = 2^{-1/2}(-x_1 + ix_2)$$

$$\bar{\alpha} = (2)^{-1/2}(Q - iP).$$

Las cantidades Q y P son la posición y el momento clásicos, respectivamente, el conmutador de los elementos $x = (s; x_1, x_2)$ y $y = (t; y_1, y_2)$ están dados por

$$[x, y] = B(x, y)e_3, \quad \text{donde} \quad B(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Notemos que $B(x, y)$ es la forma simpléctica estándar en el plano (x_1, x_2) .

La construcción del grupo de Lie correspondiente al álgebra de Lie es hecha como es usual por la exponenciación de la ecuación (3.5)

$$e^x = e^{is\hat{I}} e^{\alpha a^\dagger - \bar{\alpha} a^-}.$$

NOTA: El significado del operador $e^{\alpha a^+ - \bar{\alpha} a^-}$ es dado por el cálculo funcional de operadores autoadjuntos no acotados, al escribir dicho operador como $e^{-ii(\alpha a^+ - \bar{\alpha} a^-)}$ notamos que el operador $i(\alpha a^+ - \bar{\alpha} a^-)$ es autoadjunto. Mas aún, el cálculo funcional nos garantiza que $e^{\alpha a^+ - \bar{\alpha} a^-}$ es un operador unitario, en particular acotado y definido en todo el espacio de Hilbert \mathcal{H} .

Llamamos a $D(\alpha) = e^{\alpha a^+ - \bar{\alpha} a^-}$. Necesitamos encontrar la ley de multiplicación para los operadores $D(\alpha)$ y para ello usamos la fórmula de Baker–Hausdorff–Campbell [10]

$$e^A e^B = e^{\frac{1}{2}[A,B]} e^{A+B} \quad (3.6)$$

la cual es válida si $[A, [A, B]] = 0$ y $[B, [A, B]] = 0$. De donde $e^{A+B} = e^{-\frac{1}{2}[A,B]} e^A e^B$ y por tanto

$$\begin{aligned} D(\alpha) &= e^{\alpha a^+ - \bar{\alpha} a^-} \\ &= e^{iP\hat{q} - iQ\hat{p}} \\ &= e^{-\frac{1}{2}(i)(-i)PQ[\hat{q},\hat{p}]} e^{iP\hat{q}} e^{-iQ\hat{p}} \\ &= e^{-\frac{i}{2}PQ} e^{iP\hat{q}} e^{-iQ\hat{p}}. \end{aligned}$$

El operador $D(\alpha)$ aplicada a una $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ nos da

$$D(\alpha)\varphi(x) = e^{-\frac{i}{2}PQ} e^{iPx} \varphi(x - Q). \quad (3.7)$$

La ecuación (3.7) es conocida como la familia de operadores $D(\alpha)$ de Weyl en $L^2(\mathbb{R})$.

Si sustituimos $A = \alpha a^+ - \bar{\alpha} a$ y $B = \beta a^+ - \bar{\beta} a$ en la ecuación anterior obtenemos la ley de multiplicación

$$D(\alpha)D(\beta) = e^{i\text{Im}\{\alpha\bar{\beta}\}} D(\alpha + \beta). \quad (3.8)$$

la fórmula correspondiente para el producto de varios operadores $D(\alpha)$ es

$$D(\alpha_n)D(\alpha_{n-1}) \cdots D(\alpha_1) = e^{i\delta} D(\alpha_n + \alpha_{n-1} + \cdots + \alpha_1)$$

donde $\delta = \text{Im} \sum_{j>k} \alpha_j \bar{\alpha}_k$.

Una consecuencia de (3.8) es

$$D(\alpha)D(\beta) = e^{2i\text{Im}\{\alpha\bar{\beta}\}} D(\beta)D(\alpha). \quad (3.9)$$

Una ventaja de la forma (3.9) comparada con (3.3) es que a diferencia de los operadores \hat{p} y \hat{q} que son operadores no acotados en el espacio de Hilbert \mathcal{H} , los operadores $D(\alpha)$ son acotados y definidos en todo el espacio \mathcal{H} .

Otra consecuencia de (3.8) es que los operadores $e^{it}D(\alpha)$ forman una representación del grupo con elementos fijados por tres números reales, $g = (t; x_1, x_2)$, o por un número real t y un número complejo α , $g = (t; \alpha)$. Este grupo lo llamaremos el grupo de *Heisenberg-Weyl*, denotado por W . No es difícil ver que la ley de multiplicación en W es

$$(s; x_1, x_2)(t; y_1, y_2) = (s + t + B(x, y); x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

con $B(x, y) = x_1y_2 - y_1x_2$.

Notemos que el grupo W pertenece a la clase de los así llamados grupos nilpotentes, es decir aquellos en los que para cada elemento g del grupo $g^k = \text{Identidad}$ para algún k ; un ejemplo de este tipo es el grupo de las matrices triangulares superiores (inferiores) con unidades en la diagonal principal bajo la operación multiplicación. Así en este caso $W = \{g\}$ donde

$$g = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

estas matrices nos dan la representación no unitaria más simple de dimensión finita del grupo W . Los generadores correspondientes del algebra de Lie e_1, e_2, e_3 están representados por

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

respectivamente.

Para el presente trabajo es importante el estudio del grupo de Heisenberg - Weyl, puesto que dos representaciones unitarias e irreducibles de (3.9) deben estar relacionadas por una transformación unitaria. Esto lo establece el siguiente teorema [9].

Teorema 3.1. *Teorema de Stone-von Neumann. Para un valor fijo λ , ($\lambda \neq 0$) cualesquiera, dos representaciones unitarias irreducibles del grupo W son unitariamente equivalentes.*

En otras palabras, para cualesquiera dos sistemas de operadores $\{D(\alpha)\}$ y $\{\tilde{D}(\alpha)\}$ que satisfagan (3.8), existe un operador unitario U tal que

$$\tilde{D}(\alpha) = UD(\alpha)U^{-1}.$$

El Teorema de Stone-von Neumann lo utilizaremos para establecer teóricamente la existencia de la transformada de Bargmann.

3.3.1. El oscilador armónico y los estados coherentes.

En esta sección discutiremos el oscilador armónico y el conjunto canónico de estados coherentes asociados a este. Todo lo dicho en esta sección es válido para una dimensión arbitraria pero hemos preferido detallar solo el caso unidimensional para mantener la discusión lo más simple posible.

Los operadores q, p, a^- y a^\dagger actúan en el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$. V.Fock hizo la observación clave de que es posible otra representación de las RCC escritas como en (3.3). Esta representación esta dada por los operadores

$$b^\dagger = \frac{d}{dz}, \quad b^- = \text{multiplicación por la variable } z. \quad (3.10)$$

V. Bargmann introdujo la existencia de los ahora llamados espacios de Bargmann \mathcal{B} que consiste en funciones holomorfas en \mathbb{C} que son de cuadrado integrable con respecto a una medida gaussiana. En dicho espacio los operadores en (3.10) son el adjunto uno del otro.

El teorema de Stone Von Neumann establece la existencia de una transformación unitaria $B : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{B}$ tales que

$$Ba^\dagger B^{-1} = b^\dagger, \quad Ba^- B^{-1} = b^-.$$

Es conocido que un vector φ_0 llamado estado base existe en \mathcal{H} , este es un vector normalizado aniquilado por el operador a^-

$$a^- \varphi_0 = 0, \quad \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle = 1, \quad \varphi_0(q) = \pi^{-1/4} e^{-\frac{1}{2}q^2}.$$

La acción del operador creación a^\dagger genera un conjunto de vectores φ_n normalizados a partir del estado base φ_0

$$\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}.$$

Los vectores $\{\varphi_n\}$ forman una base en \mathcal{H} . Además, son estados propios del oscilador armónico. La acción de los operadores a^- y a^\dagger en esta base está dada por

$$a^- \varphi_n = \sqrt{n} \varphi_{n-1}, \quad a^\dagger \varphi_n = \sqrt{n+1} \varphi_{n+1}, \quad a^\dagger a^- \varphi_n = n \varphi_n.$$

Cada φ_n puede ser vista como

$$\varphi_n(q) = \pi^{-1/4} (2^n n!)^{-1/2} H_n(q) e^{-q^2/2}. \quad (3.11)$$

Donde H_n es el polinomio de Hermite de grado n . En la representación coordenada, (3.11) se convierte en una relación de recurrencia para los polinomios de Hermite

$$\begin{aligned} \frac{d}{dq} H_n(q) &= 2n H_{n-1}(q), \\ (2q - \frac{d}{dq}) H_n(q) &= H_{n+1}(q). \end{aligned}$$

De donde obtenemos las relaciones

$$\begin{aligned} H_n(q) &= (2q - \frac{d}{dq})^n H_0(q), \quad H_0(q) \equiv 1 \\ H_n(q) &= (-1)^n e^{q^2} \frac{d^n}{dq^n} e^{-q^2}, \end{aligned}$$

Así como también la ecuación diferencial para los polinomios de Hermite

$$H_n'' - 2qH_n' + 2nH_n = 0.$$

Por otro lado, el oscilador armónico en una dimensión H es un operador que va de cierto subconjunto D de $L^2(\mathbb{R})$ a $L^2(\mathbb{R})$, D es de hecho el espacio de Sobolev de orden 2 [18]

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{kx^2}{2}.$$

La afirmación de que las funciones φ_n son funciones propias del oscilador armónico H se concreta como

$$H\varphi_n = \lambda_n \varphi_n, \quad n = 0, 1, \dots$$

donde

$$\lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Para el presente trabajo resultará de gran importancia el concepto de estado coherente.

Dichos estados son elementos del espacio de Hilbert \mathcal{H} etiquetados por puntos del espacio fase del sistema clásico correspondiente.

Hablando someramente, la idea básica de los estados coherentes es considerar estados cuyo centro sigue aproximadamente una órbita clásica. De hecho, fué Schrödinger quien introdujo esta idea inicialmente para el caso del oscilador armónico. En dicho caso, un estado coherente es una función gaussiana, cuyo centro sigue de manera exacta la trayectoria clásica correspondiente. Mas aún, los estados coherentes en este caso satisfacen la relación de incertidumbre de Heisenberg $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ de manera óptima : $\Delta x \Delta p = \hbar/2$. También dan una resolución de la identidad en $L^2(\mathbb{R}^n)$, es decir, que toda función en $L^2(\mathbb{R}^n)$ es la “suma continua” de sus proyecciones en los estados coherentes, lo cual se precisará mas adelante. Adicionalmente, son funciones propias del operador de aniquilación.

En particular, pensamos al estado coherente ψ_α como una función en $L^2(\mathbb{R})$ etiquetada por $\alpha \in \mathbb{C}$, donde al estado base φ_0 le aplicamos el operador $D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \bar{\alpha} a^-}$

$$\begin{aligned}
\psi_\alpha &= D(\alpha)\varphi_0 \\
&= e^{\alpha a^\dagger - \bar{\alpha} a^-} \varphi_0 \\
&= e^{-\frac{1}{2}(-|\alpha|^2)(-I)} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\bar{\alpha} a^-} \varphi_0 \\
&= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} (e^{-\bar{\alpha} a^-} \varphi_0) \\
&= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} \varphi_0 \\
&= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha a^\dagger)^n}{n!} \varphi_0 \\
&= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \{(a^\dagger)^n \varphi_0\} \\
&= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \{\sqrt{n!} \varphi_n\} \\
&= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \varphi_n.
\end{aligned}$$

Es decir

$$\psi_\alpha(x) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \varphi_n(x), \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Además, ψ_α es un estado propio del operador de aniquilación pues

$$\begin{aligned} a^- \psi_\alpha &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} a^- \varphi_n \\ &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} a^- \varphi_n \\ &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{(n-1)!}} \varphi_{n-1} \\ &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m+1}}{\sqrt{m!}} \varphi_m \\ &= \alpha \left[e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} \varphi_m \right] \\ &= \alpha \psi_\alpha. \end{aligned}$$

El conjunto de estados coherentes $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{C}}$ etiquetados por los complejos $\alpha = P + iQ$ es sobrecompleto, en el sentido que nos da una *resolución de la identidad*, para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$ [16]. Es decir

$$f(x) = \int_{\mathbb{C}} \langle f(x), \psi_\alpha \rangle \psi_\alpha(x) d\mu(\alpha) \quad (3.12)$$

o más bien

$$f(x) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_{|\alpha| \leq \sigma} \langle f(x), \psi_\alpha \rangle \psi_\alpha(x) d\mu_{\hbar}(\alpha).$$

Donde μ_{\hbar} es la medida gaussiana definida en la ecuación (2.5) del espacio de Bargmann $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, d\mu_t)$ con $t = \hbar$.

Otra propiedad importante de los estados coherentes es que su imagen bajo la transformada de Bargmann $L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n)$ está dada por

$$\mathcal{B}\psi_\alpha(z) = e^{z \cdot \bar{\alpha} / \hbar}.$$

La transformada de Bargmann del estado coherente ψ_α está dada por

$$\mathcal{B}\psi_\alpha = \int_{\mathbb{R}} A(z, x) \psi_\alpha dx, \quad \psi_\alpha \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Donde $A(z, x)$ lo denominamos un núcleo de integración, en el sentido de que nos permite pasar de $L^2(\mathbb{R}^n)$ al espacio de funciones analíticas $\mathcal{HL}^2(\mathbb{C}^n)$ que son de cuadrado integrable.

En el capítulo siguiente daremos las condiciones que deben ser cumplidas por $A(z, x)$ y la función de la medida $\mu(z)$ en la ecuación (3.12), mientras que el estudio de la ecuación misma (3.12) será hecho a lo largo de todo este trabajo.

Capítulo 4

Sobre la transformada de Bargmann y la función de peso

μ

En este capítulo obtenemos las fórmulas para el núcleo de integración $A_n(z, x)$ y la medida μ_n , estos dos elementos definen la transformada de Bargmann y nos permitirán pasar del espacio $L^2(\mathbb{R}^n)$ al espacio $\mathcal{HL}^2(\mathbb{C}^n)$ de forma unitaria, como se demuestra en el artículo de Bargmann [2]. Con estos elementos dotaremos al espacio de Bargmann $\mathcal{HL}^2(\mathbb{C}^n)$ de un producto interno.

Vamos a demostrar que para el caso $n = 1$, la transformada de Bargmann está dada por

$$\mathcal{B}\psi(x) = \int_{\mathbb{R}} A(z, x)\psi(x)dx, \quad \psi \in L^2(\mathbb{R})$$

con $A(z, x) = \pi^{-1/4} \exp\{-\frac{1}{2}(z^2 + x^2) + \sqrt{2}zx\}$.

Mientras que para $f \in \mathcal{HL}^2(\mathbb{C})$, la transformada inversa de Bargmann \mathcal{B}^{-1} está dada como

$$\mathcal{B}^{-1}f = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_{|z| \leq \sigma} \overline{A(z, x)} f(z) d\mu(z) \quad \text{con} \quad \mu(z) = \pi^{-1} e^{-|z|^2/2}.$$

En el capítulo 2 vimos como $\mathcal{HL}^2(U, \alpha)$ es un espacio de Hilbert, U es un abierto en \mathbb{C}^n y α es una función no decreciente. Un caso específico de estos espacios es el espacio de Segal-Bargmann $\mathcal{HL}^2(\mathbb{C}^n, \pi^{-n} e^{-|z|^2/2})$, que por

comodidad designaremos simplemente como $\mathcal{HL}^2(\mathbb{C}^n)$.

Encontramos como un hecho por demás interesante que al aplicar la transformada de Bargmann a los $\varphi_n \in L^2(\mathbb{R})$ se tiene

$$\mathcal{B}\varphi_n(z) = \frac{z^n}{\sqrt{n!}}$$

y estas últimas funciones, por lo visto en el capítulo 2, forman una base en $\mathcal{HL}^2(\mathbb{C}^n)$. Es decir, bases van a dar a bases.

El espacio estándar de Segal-Bargmann queda así definido como el conjunto de funciones analíticas f que son de cuadrado integrable con respecto a la medida $d(\mu_n) = \pi^{-n} e^{-|z|^2/2} dx^n dy^n$, $z \in \mathbb{C}^n$, $z = x + iy$ y $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{HL}^2(\mathbb{C}^n) = \left\{ f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n : \int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 e^{-|z|^2/2} dx^n dy^n < \infty \right\}$$

con $|z|^2 = |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2$, $\mathcal{HL}^2(\mathbb{C}^n)$ es un espacio de Hilbert con producto interno

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{\mathbb{C}^n} \overline{f_1(z)} f_2(z) d\mu(z).$$

Tal como lo hicimos en la sección 3.3 para un sistema cuántico de n grados de libertad, definimos los operadores posición \hat{p}_k y momento \hat{q}_k como

$$\hat{p}_k = i\hbar \frac{\partial}{\partial q_k} \quad \text{y} \quad \hat{q}_k = \text{multiplicación por la coordenada } q_k$$

con $1 \leq k \leq n$. Del mismo modo, a partir de estos operadores definimos los operadores a_k^- de aniquilación y a_k^\dagger de creación ($\hbar = 1$)

$$a_k^- = \frac{\hat{q}_k + i\hat{p}_k}{\sqrt{2\hbar}}, \quad a_k^\dagger = \frac{\hat{q}_k - i\hat{p}_k}{\sqrt{2\hbar}}$$

con $1 \leq k \leq n$, a_k^- y a_k^\dagger el adjunto uno del otro.

Por otro lado, bajo las observaciones de Fock [15] que expresan la ecuación (3.10), los operadores a_k^- y a_k^\dagger tienen sus equivalentes en el espacio de Bargmann $\mathcal{HL}^2(\mathbb{C}^n)$ en los operadores que a continuación se indican

$$b_k^- = \frac{\partial}{\partial z_k} \quad \text{y} \quad b_k^\dagger = \text{multiplicación por } z_k \quad (4.1)$$

b_k^- y b_k^\dagger son adjuntos uno del otro en dicho espacio.

De aquí que para una función $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ cuya imagen bajo la transformada de Bargmann sea $f \in \mathcal{HL}^2(\mathbb{C}^n)$, se deben cumplir las siguientes asignaciones bajo operadores

$$a_k^- \psi \mapsto \frac{\partial f}{\partial z_k}, \quad a_k^\dagger \psi \mapsto z_k f. \quad (4.2)$$

Cabe aclarar que los cálculos que a continuación escribiremos son de propósitos puramente heurísticos, el dominio de $A_n(z, x)$ es ampliamente discutido en [2].

4.1. La obtención de μ .

Consideremos el espacio vectorial de funciones analíticas en \mathbb{C}^n , queremos dotar a dicho espacio con un producto interno

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{HL}^2(\mathbb{C}^n)} = \int_{\mathbb{C}^n} \overline{f(z)} g(z) \mu(z) d^n(z).$$

Con $d^n(z) = dx_1, \dots, dx_n, dy_1, \dots, dy_n$ la medida de Lebesgue en $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, $z_k = x_k + iy_k$, con $1 \leq k \leq n$. Por la ecuación (4.1) requerimos que z_k y $\partial/\partial z_k$ sean adjuntos uno del otro con respecto a este producto escalar. En consecuencia la ecuación que determina a μ queda como

$$\langle z_k f, g \rangle_{\mathcal{HL}^2(\mathbb{C}^n)} = \left\langle f, \frac{\partial g}{\partial z_k} \right\rangle_{\mathcal{HL}^2(\mathbb{C}^n)}, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (4.3)$$

Suponemos que (4.3) se cumple para todas las funciones f y g en $\mathcal{HL}^2(\mathbb{C}^n)$ que no crecen demasiado rápido al infinito. De la definición de producto interno

$$\left\langle f, \frac{\partial g}{\partial z_k} \right\rangle_{\mathcal{HL}^2(\mathbb{C}^n)} = \int_{\mathbb{C}^n} \bar{f} \frac{\partial g}{\partial z_k} \mu d^n(z).$$

Primero veamos que, aplicando la regla de la derivación parcial para un producto

$$\frac{\partial}{\partial z_k}(g\mu) = \frac{\partial g}{\partial z_k} \cdot \mu + g \cdot \frac{\partial \mu}{\partial z_k}$$

multiplicando por \bar{f}

$$\bar{f} \frac{\partial}{\partial z_k}(g\mu) = \bar{f} \frac{\partial g}{\partial z_k} \cdot \mu + \bar{f} g \cdot \frac{\partial \mu}{\partial z_k}.$$

Despejando $\bar{f} \frac{\partial g}{\partial z_k} \cdot \mu$

$$\bar{f} \frac{\partial g}{\partial z_k} \cdot \mu = \bar{f} \frac{\partial}{\partial z_k} (g\mu) - \bar{f} g \cdot \frac{\partial \mu}{\partial z_k}.$$

De donde el producto interno anteriormente mencionado queda como

$$\begin{aligned} \left\langle f, \frac{\partial g}{\partial z_k} \right\rangle_{\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n)} &= \int_{\mathbb{C}^n} \bar{f} \frac{\partial g}{\partial z_k} \mu d^n(z) \\ &= \int_{\mathbb{C}^n} \bar{f} \frac{\partial}{\partial z_k} (g\mu) d^n(z) - \int_{\mathbb{C}^n} \bar{f} g \cdot \frac{\partial \mu}{\partial z_k} d^n(z) \end{aligned}$$

en la primera derivada parcial podemos meter a \bar{f} , puesto que f es analítica, $\partial f / \partial \bar{z}_k = 0$. Por tanto

$$\left\langle f, \frac{\partial g}{\partial z_k} \right\rangle_{\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n)} = \int_{\mathbb{C}^n} \frac{\partial}{\partial z_k} (\bar{f} g \mu) d^n(z) - \int_{\mathbb{C}^n} \bar{f} g \cdot \frac{\partial \mu}{\partial z_k} d^n(z).$$

Suponemos que $\bar{f} g \mu$ decae suficientemente rapido al infinito, de donde la primera parcial en la ecuación anterior se anula. Además a esta ultima expresión para $\langle f, \partial g / \partial z_k \rangle_{\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n)}$ la comparamos con $\langle z_k f, g \rangle_{\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n)}$ dado que son iguales por la ecuación (4.3), por tanto tenemos

$$\langle z_k f, g \rangle_{\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n)} = \int_{\mathbb{C}^n} \bar{z}_k \bar{f} g \mu d^n(z) = - \int_{\mathbb{C}^n} \bar{f} g \cdot \frac{\partial \mu}{\partial z_k} d^n(z).$$

Esto nos sugiere que

$$\frac{\partial \mu}{\partial z_k} = -\bar{z}_k \mu. \tag{A}$$

Con $z_k = x_k + iy_k$. Aplicando la regla de la cadena tenemos

$$\frac{\partial \mu}{\partial x_k} = \frac{\partial \mu}{\partial z_k} \cdot \frac{\partial z_k}{\partial x_k} + \frac{\partial \mu}{\partial \bar{z}_k} \cdot \frac{\partial \bar{z}_k}{\partial x_k} = \frac{\partial \mu}{\partial z_k} + \frac{\partial \mu}{\partial \bar{z}_k} \tag{B}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y_k} = \frac{\partial \mu}{\partial z_k} \cdot \frac{\partial z_k}{\partial y_k} + \frac{\partial \mu}{\partial \bar{z}_k} \cdot \frac{\partial \bar{z}_k}{\partial y_k} = i \frac{\partial \mu}{\partial z_k} - i \frac{\partial \mu}{\partial \bar{z}_k} \tag{C}$$

Multiplicando a la ecuación (C) por $-i$ y sumándola a (B) se tiene

$$\frac{\partial \mu}{\partial x_k} - i \frac{\partial \mu}{\partial y_k} = 2 \frac{\partial \mu}{\partial z_k}$$

Así que, comparando esta última expresión con (A)

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mu}{\partial x_k} - i \frac{\partial \mu}{\partial y_k} \right) = -(x_k - iy_k) \mu.$$

Por tanto

$$\frac{\partial \mu}{\partial x_k} = -2x_k \mu, \quad \frac{\partial \mu}{\partial y_k} = -2y_k \mu.$$

En consecuencia

$$\mu = c \exp\{-\bar{z} \cdot z\}$$

donde $\bar{z} \cdot z = \sum_{k=1}^n \bar{z}_k z_k = \sum_{k=1}^n (x_k^2 + y_k^2)$ y c es una constante positiva.

Se toma la constante $c = \pi^{-n}$ de tal modo que la norma en el espacio de Bargmann de la función $f(z) = 1$ sea uno.

En la literatura es común introducir la constante de Planck \hbar y hacer ver a μ dependiente de la n reescribiéndola como

$$\mu_n(z) = (\pi \hbar)^{-n} e^{-|z|^2/\hbar}.$$

4.2. La obtención del núcleo de integración $A_n(z, x)$.

Si reescribimos los operadores $\hat{p}_k = i\partial/\partial x_k$ y $\hat{q}_k =$ multiplicación por x_k los operadores de aniquilación a_k^- y de creación a_k^\dagger quedan como

$$a_k^- = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x_k - \frac{\partial}{\partial x_k} \right), \quad a_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x_k + \frac{\partial}{\partial x_k} \right).$$

La idea básica de Bargmann para encontrar el núcleo integral $A_n(z, x)$ que defina la transformada \mathcal{B} es como se menciona en las ecuaciones (4.2), el requerir que los operadores a_k^- y a_k^\dagger sean intercambiados con los operadores b_k^- y b_k^\dagger respectivamente los cuales fueron definidos en la ecuación (4.1). Con lo cual se debe tener

$$\mathcal{B} a_k^- \mathcal{B}^{-1} = b_k^- \quad \text{y} \quad \mathcal{B} a_k^\dagger \mathcal{B}^{-1} = b_k^\dagger$$

Esta idea de Bargmann es la implementación del Teorema de Stone-von-Neumann a la pareja de representaciones $\{a_k^-, a_k^\dagger\}$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y $\{b_k^-, b_k^\dagger\}$ en

$\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n)$ de las Relaciones Canónicas de Conmutación (RCC).

Entonces, dada $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ suficientemente suave (por ejemplo $\psi \in C_0^\infty$) tenemos que para $z \in \mathbb{C}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}^n} A_n(z, x)(a_k^- \psi) d^n(x) &= \int_{\mathbb{C}^n} (a_k^\dagger A_n(z, x)) \psi d^n(x) \\ &= z_k f = \int_{\mathbb{C}^n} z_k A_n(z, x) \psi d^n(x) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}^n} A_n(z, x)(a_k^\dagger \psi) d^n(x) &= \int_{\mathbb{C}^n} (a_k^- A_n(z, x)) \psi d^n(x) \\ &= \frac{\partial f}{\partial z_k} = \int_{\mathbb{C}^n} \frac{\partial A_n(z, x)}{\partial z_k} \psi d^n(x) \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} z_k A_n(z, x) &= a_k^\dagger A_n(z, x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x_k A_n(z, x) + \frac{\partial A_n(z, x)}{\partial x_k} \right) \end{aligned} \quad (\text{A})$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_n(z, x)}{\partial z_k} &= a_k^- A_n(z, x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x_k A_n(z, x) - \frac{\partial A_n(z, x)}{\partial x_k} \right). \end{aligned} \quad (\text{B})$$

Sumando (A) y (B), y despejando $A_n(z, x)/\partial z_k$ se tiene

$$\frac{\partial A_n(z, x)}{\partial z_k} = (\sqrt{2}x_k - z_k) A_n(z, x). \quad (\text{C})$$

Restando (B) de (A), despejando $A_n(z, x)/\partial x_k$ y sustituyendo el valor de $A_n(z, x)/\partial z_k$ obtenido en (C)

$$\frac{\partial A_n(z, x)}{\partial x_k} = (\sqrt{2}z_k - x_k) A_n(z, x). \quad (\text{D})$$

De (C) y (D), la solución para $A_n(z, x)$ es

$$A_n(z, x) = c' \exp\left\{-\frac{1}{2}(z^2 + x^2) + \sqrt{2}z \cdot x\right\}$$

donde $z^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2$, $x^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$, $z \cdot x = z_1x_1 + z_2x_2 + \dots + z_nx_n$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ y $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Escogemos c' como $\pi^{-n/4}$.

El caso general para el valor permitido \hbar es el que a continuación se indica

$$A_n(z, x) = \pi^{-n/4} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(z^2 + x^2) + \sqrt{2}z \cdot x}{\hbar}\right\}$$

4.3. La resolución de la identidad.

Cuando aplicamos la transformada de Bargmann a las funciones etiquetadas ψ_z tenemos lo siguiente (cambiamos un poco nuestra notación a $\psi_{\bar{w}}$ sin pérdida de generalidad)

$$\begin{aligned} \mathcal{B}\psi_{\bar{w}}(z) &= \mathcal{B}\left(e^{-\frac{1}{2}|\bar{w}|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{w}^n}{\sqrt{n!}} \varphi_n(z)\right) \\ &= e^{-\frac{1}{2}|w|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{w}^n}{\sqrt{n!}} \mathcal{B}(\varphi_n(z)) \end{aligned}$$

haciendo uso de $\mathcal{B}(\varphi_n(z)) = z^n / \sqrt{n!}$

$$\begin{aligned} &= e^{-\frac{1}{2}|w|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{w}^n}{\sqrt{n!}} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \\ &= e^{-\frac{1}{2}|w|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\bar{w}z)^n}{n!} \\ &= e^{-\frac{1}{2}|w|^2} e^{\bar{w}z} \end{aligned}$$

salvo el factor $e^{-\frac{1}{2}|w|^2}$, $\mathcal{B}\psi_{\bar{w}}(z)$ es igual a $K(z, w)$, el cual es el núcleo reproductor de el espacio de Bargmann visto en el capítulo 2.

Supongamos una función cualquiera Φ con $\Phi \in \mathcal{HL}^2(\mathbb{R})$, $\{\phi_n\}_n = \{z^n/\sqrt{n!}\}_n$ una base de este, y $c_n = \langle \Phi, \phi_n \rangle$ entonces

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = \|\Phi\|^2.$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \langle \Phi, \psi_z \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \overline{c_n} e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \quad \text{y} \\ \langle \psi_z, \Phi \rangle &= \overline{\langle \Phi, \psi_z \rangle} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \frac{\overline{z}^m}{\sqrt{m!}}. \end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned} &\int \langle \Phi, \psi_z \rangle \langle \psi_z, \Phi \rangle dx dy \\ &= \int \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-|z|^2} \overline{c_n} c_m \frac{z^n \overline{z}^m}{\sqrt{n!m!}} dx dy \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \overline{c_n} c_m \langle z^m, z^n \rangle_{\mathcal{HL}^2(\mathbb{R})} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \overline{c_n} c_m \delta_{nm} = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \\ &= \|\Phi\|_{\mathcal{HL}^2(\mathbb{R})}^2. \end{aligned}$$

Es aquí donde nace la idea de definir un producto interno continuo como

$$\langle \phi, \varphi \rangle = \int \langle \phi, \psi_z \rangle \langle \psi_z, \varphi \rangle e^{|z|^2/2} dx dy.$$

Llamamos al operador identidad I en $L^2(\mathbb{R})$ a $I = \int \langle \cdot, \psi_z \rangle \langle \psi_z, \cdot \rangle$.

La resolución de la identidad para una función $f \in L^2(\mathbb{R})$ queda como

$$f(x) = \int_{z \in \mathbb{C}} \langle \psi_z, f \rangle \psi_z(x) d\mu(z) \quad \text{con} \quad d\mu(z) = e^{-|z|^2/2} dx dy$$

donde para solventar algunas cuestiones de invertibilidad de operadores [16] escribimos

$$f(x) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_{|z| \leq \sigma} \langle \psi_z, f \rangle \psi_z(x) d\mu(z).$$

La resolución de la identidad es una versión “continua” de expresar a f como $f = \sum_{z \in \mathbb{C}} \langle \psi_z, f \rangle \psi_z$, donde la integral sustituye a la suma.

Estos estados coherentes ψ_z no sólo generan el espacio de Hilbert, sino que son sobrecompletos, en el sentido que nos dan la resolución de la identidad sobre un conjunto que tiene una cardinalidad más grande que los naturales como lo es el plano complejo \mathbb{C} .

Capítulo 5

Condiciones de completez de los estados coherentes

En este capítulo estudiamos las condiciones de completez de subfamilias de estados coherentes, con etiqueta un punto z en los complejos. Tales condiciones se traducen en el área de los cuadrados básicos del retículo en \mathbb{C} . Si el área resulta ser menor que π la subfamilia es completa, y para demostrar esto usamos teoremas de comportamiento asintótico de ceros de funciones enteras [6] y [12]; si el área es mayor que π entonces la subfamilia no es completa, y vemos que la función σ de Weierstrass [11] es la que nos es útil para demostrar este hecho; si el área es igual a π , que es el caso del retículo de vonn-Neumann la completez aun se preserva [3].

El material aquí expuesto se ha obtenido de [3], sin embargo hemos trabajado con mucho más detalle cada una de las afirmaciones expuestas.

5.1. Funciones enteras.

Sea f una función de variable compleja $f = u + iv$ donde u y v son las partes reales e imaginaria de la función. Decimos que si f es diferenciable en un entorno de $z_0 = x_0 + iy_0$ entonces f es analítica en tal entorno y son válidas las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$$

donde

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

De hecho tanto u como v son diferenciables un número infinito de veces, es decir de tipo $C^\infty(\Omega)$ donde Ω es el entorno abierto y cumplen $\Delta(u) = \Delta(v) = 0$ en Ω donde Δ es el *operador diferencial de Laplace* en \mathbb{R}^2 – o laplaciano –

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

al hecho que u y v se anulen al aplicarles el laplaciano le llamamos que sean **armónicas**. Así hemos comprobado que las partes real e imaginaria de una función analítica en Ω deben ser armónicas en Ω . También tenemos un recíproco de este hecho. A saber que toda función armónica es *localmente* la parte real de alguna función analítica [7]. Por consiguiente, el análisis local de las funciones analíticas es equivalente al de las funciones armónicas.

Definición 5.1. *Una función $f(z)$ que sea analítica en el plano complejo total, es llamada una **función entera**.*

Se puede probar (véase [7] pag.77) que $f(z)$ tiene una representación en serie de potencias.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0.$$

Este es el caso más simple de funciones analíticas que contienen a todos los polinomios. Los polinomios se clasifican de acuerdo a su grado, esto es de acuerdo a su crecimiento cuando $|z| \rightarrow \infty$. Una función entera puede crecer en varios modos a través de diferentes direcciones.

Para una caracterización general del crecimiento damos la función

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Se sigue del **Principio del máximo** que esta función se incrementa monótonamente. Recordemos que tal principio nos dice que una función analítica en un abierto alcanza su máximo en la frontera. Entre mas raíces tenga un polinomio, más rápido crece. Esta propiedad se extiende a funciones enteras pero de manera más compleja. La relación entre el crecimiento de una función entera y la distribución de sus raíces es el objeto de estudio de la teoría de funciones enteras.

Definición 5.2. Las afirmaciones $f(x) = O\{g(x)\}$, $f(x) = o\{g(x)\}$, $f(x) \sim g(x)$ significa como es usual que $f(x)/g(x)$ está acotado, se aproxima a cero, o se aproxima a 1, cuando respectivamente; y $f(x) \leq O\{g(x)\}$, $f(x) \leq o\{g(x)\}$ significa que $f(x)/g(x)$ está acotado por arriba, por una constante, o por $o(1)$, todo esto por supuesto cuando $x \rightarrow \infty$.

Definición 5.3 (Número de ceros). Denotamos por $n(t)$, a el número de puntos a_m , con $f(a_m) = 0$ que satisfacen la desigualdad $|a_m| \leq t$ (incluyendo multiplicidades). Si queremos enfatizar que se trata de el conjunto $\{a_m\}$ escribimos $n_a(t)$.

Con $n(t)$ obtenemos una función continua a la derecha, monótona, con valores en los enteros y constante a pedazos.

5.2. La Fórmula de Poisson

Teorema 5.1 (La Fórmula de Poisson). Si u está definida y es continua en el disco cerrado $\{z : |z| \leq R\}$ y es armónica en el disco abierto $\{z : |z| < R\}$ entonces para $r < R$

$$u(re^{i\theta}) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(Re^{i\psi})}{R^2 - 2Rr \cos(\psi - \theta) + r^2} d\psi \quad z = re^{i\theta} \quad (5.1)$$

o

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\psi}) \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\psi} - z|^2} d\psi \quad \varsigma = Re^{i\psi}. \quad (5.2)$$

Demostración. Puesto que u es armónica en $B(0, R)$ existe una función analítica f tal que $u = \operatorname{Re} f$.

Sea $0 < s < R$ y sea $\gamma_s = \{z : |z| = s\}$ el círculo con centro en el origen y radio s . Entonces, por la fórmula integral de Cauchy, tenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

para todo $|z| < s$. Podemos manipular esta expresión de una forma conveniente para tomar las partes reales.

Sea $\tilde{z} = s^2/\bar{z}$ la cuál es llamada la *reflexión* de z en el círculo γ_s . Así, si z

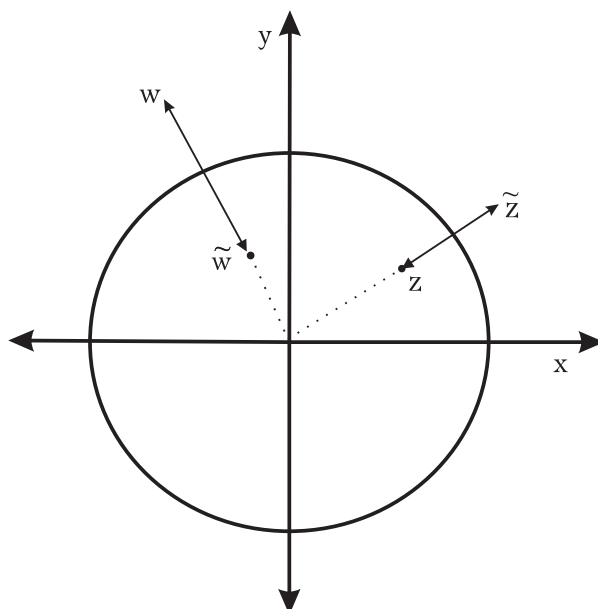


Figura 5.1: La inversión de un complejo en la circunferencia γ_s

está dentro del círculo (véase la figura 5.1), entonces \tilde{z} está fuera del círculo, y en consecuencia

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \frac{f(\zeta)}{f(\zeta - \tilde{z})} d\zeta = 0$$

para $|z| < s$. Podemos sustraer esta fórmula integral de

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

para obtener

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} f(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - \tilde{z}} \right) d\zeta.$$

Observando que $|\zeta| = s$, podemos simplificar como

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - \tilde{z}} &= \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - \frac{|\zeta|^2}{\bar{\zeta}}} = \frac{1}{\zeta - z} - \frac{\bar{\zeta}}{\zeta(\bar{\zeta} - \bar{z})} \\ &= \frac{-\zeta\bar{z} + |\zeta|^2 + \zeta\bar{z} - |z|^2}{\zeta|\zeta - z|^2} = \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{\zeta|\zeta - z|^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \frac{f(\zeta)(|\zeta|^2 - |z|^2)}{\zeta|\zeta - z|^2} d\zeta$$

esto es,

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(se^{i\psi}) \frac{s^2 - r^2}{|se^{i\psi} - re^{i\theta}|^2} d\psi, \quad z = re^{i\theta}$$

nótese que esta última expresión es la ecuación 5.2 excepto que en lugar de R tenemos a s donde $r < s < R$. Así pues, tomamos un proceso de límite cuando $s \rightarrow R$ para demostrar 5.2. Si observamos que $|se^{i\psi} - re^{i\theta}|^2 = s^2 + r^2 - 2sr \cos(\psi - \theta)$ y tomamos las partes reales en ambos lados de la ecuación, obtenemos

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(se^{i\psi})(s^2 - r^2)}{s^2 + r^2 - 2sr \cos(\psi - \theta)} d\psi.$$

Fijemos θ y r y sea $M = \max_{|z| \leq R} |f(z)|$ por la desigualdad del triángulo se tiene

$$|se^{i\psi} - re^{i\theta}| \geq \left| |se^{i\psi}| - |re^{i\theta}| \right| = s - r.$$

Así

$$\frac{s^2 - r^2}{|se^{i\psi} - re^{i\theta}|^2} \leq \frac{s^2 - r^2}{(s - r)^2} = s + r < 2R.$$

Entonces podemos aplicarle el teorema de la *Convergencia Dominada de Lebesgue* [13] a las funciones $g_s = f(se^{i\psi}) \frac{s^2 - r^2}{|se^{i\psi} - re^{i\theta}|^2}$ puesto que $|g_s| < 2RM$. De donde $\lim_{s \rightarrow R} \int_0^{2\pi} g_s = \int_0^{2\pi} \lim_{s \rightarrow R} g_s$ y es así como obtenemos las fórmulas 5.1 y 5.2. \square

5.3. La Fórmula de Jensen.

Para una función armónica $u(z)$ en el disco $\{z : |z| < R\}$ y continua en su cerradura

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\psi}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\psi - \theta) + r^2} d\psi \quad z = re^{i\theta}$$

esta misma fórmula puede ser escrita en la forma

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\zeta) \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} d\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\zeta) \operatorname{Re} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\psi \quad (5.3)$$

donde $\zeta = Re^{i\psi}$.

Como ya hemos mencionado anteriormente para la función u podemos encontrar una función $f = u + iv$ en el disco abierto $B(O, R)$ de radio R analítica y continua en $\overline{B(O, R)}$ que cumple con las condiciones de Cauchy-Riemann en tal región

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Proposición 5.2 (Formula de Schwarz). *Sea f analítica entonces*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\psi + iv(0).$$

Demostración. Como u es armónica cumple con la ecuación 5.2. Hagamos

$$g(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\psi \quad \text{donde} \quad \zeta = Re^{i\psi} \quad (5.4)$$

Por construcción $\operatorname{Re} g = u$ y denotemos $g = u + iw$ con $w = \operatorname{Im} g$. Mas adelante veremos que g es también analítica en $B(O, R)$ y continua en $\overline{B(O, R)}$.

Verificamos las ecuaciones de Cauchy-Riemann para u y w

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Lo siguiente que vamos a ver es que v y w solo difieren en una constante en $B(O, R)$. Para v y w vistas como funciones de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ocurre lo que a continuación se indica con sus respectivos gradientes

$$\nabla v = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \nabla w = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

Como el gradiente es lineal $\nabla(v - w) = 0$ es decir $v - w = c$ donde c es una constante, en particular

$$v(0) - w(0) = c. \quad (5.5)$$

Por otro lado $g(0) = u(0) + iv(0)$ y por (5.4)

$$g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\zeta) \frac{\zeta + 0}{\zeta - 0} d\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\psi}) d\psi \in \mathbb{R}$$

$$\text{donde } \zeta = Re^{i\psi}.$$

esta última integral es igual a $u(0)$, el cuál es un número real, por tanto $w(0)$ solo puede ser 0. Así que por 5.5 $c = v(0)$. Es decir $f(z) = u(z) + iv(z) = u(z) + iw(z) + ic = g(z) + iv(0)$ por tanto

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\psi + iv(0) \quad (5.6)$$

$$\text{donde } \zeta = Re^{i\psi}.$$

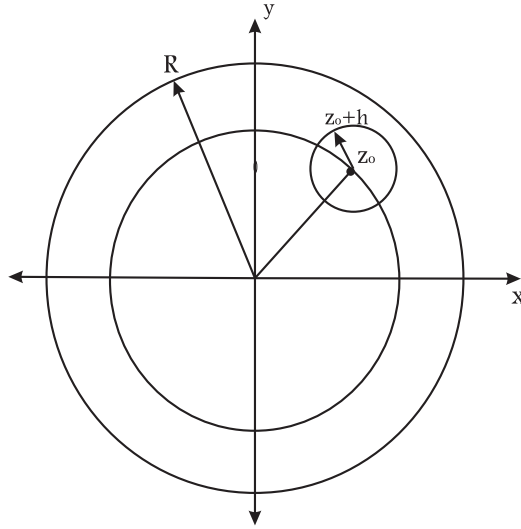
Ahora vamos a enfocarnos en demostrar que g es analítica. En esencia queremos probar que el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(z_0 + h) - g(z_0)}{h}$$

existe.

Para esto escogemos un punto z_0 en el disco abierto centrado en el origen y radio R , $B(0, R)$; y un punto h tal que $B(z_0, h) \subset B(0, R)$ (véase la figura 5.2).

Así

Figura 5.2: z_0 en $B(O, R)$.

$$\begin{aligned}
& \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(z_0 + h) - g(z_0)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} u(\zeta) \frac{\zeta + (z_0 + h)}{\zeta - (z_0 + h)} d\psi - \int_0^{2\pi} u(\zeta) \frac{\zeta + z_0}{\zeta - z_0} d\psi \right\} \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^{2\pi} u(\zeta) \frac{[\zeta + (z_0 + h)](\zeta - z_0) - (\zeta + z_0)[\zeta - (z_0 + h)]}{[\zeta - (z_0 + h)](\zeta - z_0)} d\psi \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^{2\pi} \frac{u(\zeta) 2hz_0}{(\zeta - (z_0 + h))(\zeta - z_0)} d\psi \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{u(Re^{i\psi}) 2Re^{i\psi}}{(Re^{i\psi} - (z_0 + h))(Re^{i\psi} - z_0)} d\psi.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Notemos que en la última integral de la ecuación 5.7 el módulo de los factores del denominador se pueden acotar por abajo, es decir podemos encontrar un $\delta > 0$ suficientemente pequeño tal que, existe una constante $C > 0$ tal que, si tomamos $0 < |h| < \delta$ entonces $|Re^{i\psi} - z_0| > C$ y $|Re^{i\psi} - (z_0 + h)| > C$ y esto implica que

$$\frac{1}{|Re^{i\psi} - (z_0 + h)|} \cdot \frac{1}{|Re^{i\psi} - z_0|} < \frac{1}{C^2}.$$

Sea

$$g_h = \frac{u(Re^{i\psi})2Re^{i\psi}}{(Re^{i\psi} - (z_0 + h))(Re^{i\psi} - z_0)}$$

notemos que

$$|g_h| \leq 2R \max_{|z| \leq R} |u(z)| \frac{1}{C^2}.$$

Aplicamos el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue para g_h por tanto podemos aplicar el $\lim_{h \rightarrow 0}$ dentro del integrando en (5.7) es decir $\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} g_h = \int_0^{2\pi} \lim_{h \rightarrow 0} g_h$ con lo que $g'(z_0)$ existe. \square

5.3.1. Estimación de los ceros.

Ahora, sean a_1, a_2, \dots, a_n los ceros de $f(z)$ en $\{z : |z| < R\}$ enumerados de acuerdo al incremento de su módulo. Vamos a hacer la convención permanente de escribir cada cero tantas veces como su multiplicidad. Sea $f(z) \neq 0$ para $|z| = R$ y hagamos

$$\varphi(z) = f(z) \prod_{m=1}^n \frac{R^2 - \overline{a_m}z}{R(z - a_m)}. \quad (5.8)$$

Es evidente que $|\varphi(Re^{i\psi})| = |f(Re^{i\psi})|$ pues el término general en el producto de la ecuación 5.8 nos da (evaluado en $z = Re^{i\psi}$)

$$\begin{aligned} \left| \frac{R^2 - \overline{a_m}z}{R(z - a_m)} \right|_{z=Re^{i\psi}} &= \left| \frac{R^2 - \overline{a_m}Re^{i\psi}}{R(Re^{i\psi} - a_m)} \right| = \left| \frac{R - \overline{a_m}e^{i\psi}}{Re^{i\psi} - a_me^{i\psi}e^{-i\psi}} \right| = \\ &= \left| \frac{R - \overline{a_m}e^{i\psi}}{e^{i\psi}(R - a_me^{-i\psi})} \right| = 1. \end{aligned}$$

Pues $\overline{R - \overline{a_m}e^{i\psi}} = (R - a_me^{-i\psi})$.

Notemos que $\varphi(z)$ es analítica en el abierto $|z| < R$ y $\varphi(z) \neq 0$ para $|z| \leq R$ puesto que los ceros de $f(z)$ se cancelan con el producto en la fórmula 5.8, por tanto podemos aplicar la fórmula de Schwarz 5.6 para $\log \varphi(z)$. Así

$$\begin{aligned} \log \varphi(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |\varphi(Re^{i\psi})| \frac{Re^{i\psi} + z}{Re^{i\psi} - z} d\psi + iC \\ &\text{con } \operatorname{Re} \log \varphi(Re^{i\psi}) = \log |\varphi(Re^{i\psi})|. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Por tanto, al tomar la parte real de esta última ecuación y recordando que $|\varphi(Re^{i\psi})| = |f(Re^{i\psi})|$

$$\log |\varphi(z)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\psi})| \operatorname{Re} \frac{Re^{i\psi} + z}{Re^{i\psi} - z} d\psi.$$

Evaluando $\log |\varphi(z)|$ en $z = 0$

$$\log |\varphi(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\psi})| d\psi.$$

Igualando esta última expresión con $\varphi(0)$ en (5.8)

$$\begin{aligned} \log \left(|f(0)| \prod_{m=1}^n \left| \frac{R^2}{R(-a_m)} \right| \right) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\psi})| d\psi \quad \Rightarrow \\ \log |f(0)| + \sum_{m=1}^n \log \left| \frac{R}{-a_m} \right| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\psi})| d\psi. \end{aligned}$$

Es decir

$$\log |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\psi})| d\psi + \sum_{|a_m| < R} \log \frac{|a_m|}{R}. \quad (5.10)$$

A la suma $\sum_{|a_m| < R} \log \frac{R}{|a_m|}$ se le puede ver como una integral de Stieltjes igual a $\int_0^R \log \frac{R}{t} dn(t) = n(t) \log \frac{R}{t} \Big|_0^R + \int_0^R \frac{n(t)}{t} dt$, $(n(t) \log \frac{R}{t}) \Big|_0^R$ se anula, pues $n(t)$ se anula en un cierto intervalo abierto con centro en 0, (véase la figura 5.4). De donde $\int_0^R \frac{n(t)}{t} dt$ y $\sum_{|a_m| < R} \log \frac{|a_m|}{R}$ solo difieren en el signo, esto se demuestra rigurosamente en el siguiente Lema.

Lema 5.1. *Como se ha definido anteriormente, se tiene*

$$\sum_{|a_m| < R} \log \frac{|a_m|}{R} = - \int_0^R \frac{n(t)}{t} dt.$$

Demostración. Sean $s_0, s_1, s_2, s_3, \dots, s_k$ los respectivos radios de los círculos donde se encuentran los ceros de $f(z)$ que son menores que R y s_k es el radio mas grande menor que R (véase la figura 5.3).

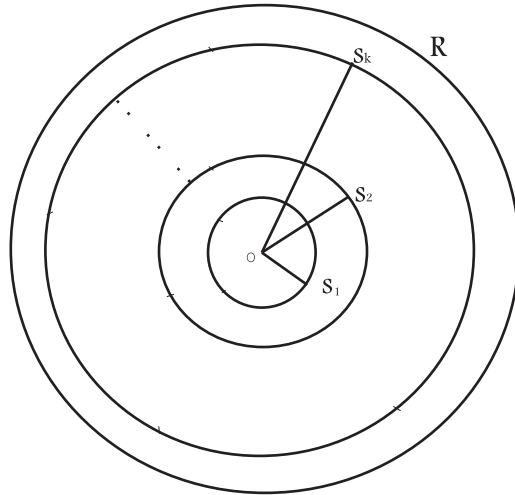


Figura 5.3: Las circunferencias con radios s_k donde se encuentran las raíces.

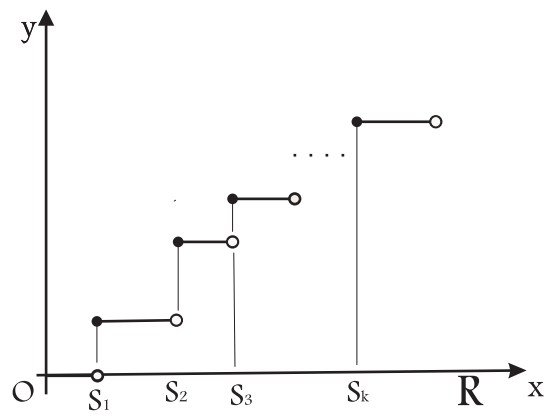


Figura 5.4: La función $n(t)$.

Por otro lado $n(t)$ es una función creciente y continua a la derecha (véase la figura 5.4).

Así

$$\begin{aligned}
& \sum_{|a_m| < R} \log \frac{|a_m|}{R} \\
&= n(s_1) \log \frac{s_1}{R} + [n(s_2) - n(s_1)] \log \frac{s_2}{R} + [n(s_3) - n(s_2)] \log \frac{s_3}{R} \\
&\quad + \dots + [n(s_k) - n(s_{k-1})] \log \frac{s_k}{R} \\
&= n(s_1) \log \frac{s_1}{R} + \sum_{j=2}^k [n(s_j) - n(s_{j-1})] \log \frac{s_j}{R} \\
&= n(s_1) \log s_1 + \sum_{j=2}^k n(s_j) \log s_j - \sum_{j=2}^k n(s_{j-1}) \log s_j - n(s_k) \log R.
\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
& \int_0^R \frac{n(t)}{t} dt \\
&= \int_0^{s_1} \frac{n(t)}{t} dt + \int_{s_1}^{s_2} \frac{n(t)}{t} dt + \int_{s_2}^{s_3} \frac{n(t)}{t} dt + \dots \\
&\quad + \int_{s_{k-1}}^{s_k} \frac{n(t)}{t} dt + \int_{s_k}^R \frac{n(t)}{t} dt \\
&= \int_{s_1}^{s_2} \frac{n(t)}{t} dt + \int_{s_2}^{s_3} \frac{n(t)}{t} dt + \dots \\
&\quad + \int_{s_{k-1}}^{s_k} \frac{n(t)}{t} dt + \int_{s_k}^R \frac{n(t)}{t} dt \\
&= n(s_1)(\log s_2 - \log s_1) + n(s_2)(\log s_3 - \log s_2) + \dots + \\
&\quad n(s_{k-1})(\log s_k - \log s_{k-1}) + n(s_k)(\log R - \log s_k) \\
&= n(s_1) \log s_2 - n(s_1) \log s_1 + n(s_2) \log s_3 - n(s_2) \log s_2 + \dots + \\
&\quad n(s_k) \log R - n(s_k) \log(s_k) \\
&= -n(s_1) \log s_1 - \sum_{j=2}^k n(s_j) \log s_j + \sum_{j=2}^k n(s_{j-1}) \log s_j + n(s_k) \log R
\end{aligned}$$

y una es el inverso aditivo de la otra. \square

Es así como habiendo probado el anterior Lema junto con 5.10 hemos probado el siguiente Teorema

Teorema 5.3 (Teorema de Jensen).

$$\int_0^R \frac{n(t)}{t} d(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\psi})| d\psi - \log |f(0)|.$$

Corolario 1. Si se supone $|f(0)| = 1$ claramente se tiene que

$$\int_0^R \frac{n(t)}{t} d(t) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\psi})| d\psi \leq \log M_f(R).$$

Definición 5.4. Denotaremos como

$$N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t} d(t).$$

5.4. Orden (ρ) y tipo (τ) de funciones enteras.

Introduzcamos la notación siguiente. Si una desigualdad $h(r) < \psi(r)$ se cumple para valores suficientemente grandes de r , vamos a llamarla una **desigualdad asintótica** y escribimos $h(r) \stackrel{as}{<} \psi(r)$.

Si la misma desigualdad se cumple para alguna sucesión de valores $r_n \rightarrow \infty$, entonces escribimos $h(r) \stackrel{n}{<} \psi(r)$.

Una función entera $f(z)$ es llamada una función de **orden finito** si $M_f(r) \stackrel{as}{<} \exp(r^k)$ para algún $k > 0$. El **orden** o el **orden de crecimiento** de una función entera f es la máxima cota inferior de estos valores de k para los cuales la desigualdad asintótica se cumple. Denotaremos usualmente el orden de una función entera f por $\rho = \rho_f$.

Se sigue de la definición de orden que

$$e^{r^{\rho-\varepsilon}} \stackrel{n}{<} M_f(r) \stackrel{as}{<} e^{r^{\rho+\varepsilon}}$$

al tomar el logaritmo dos veces obtenemos

$$\rho - \varepsilon < \frac{n}{\log r} \log \log M_f(r) \stackrel{as}{<} \rho + \varepsilon \quad (5.11)$$

de aquí

$$\rho = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M_f(r)}{\log r}.$$

Sea ρ el orden de una función entera f . La función se dice que tiene un **tipo finito** si para algún $A > 0$ la desigualdad

$$M_f(r) \stackrel{as}{<} e^{Ar^\rho}$$

se cumple.

La máxima cota inferior de estos valores de A para los cuales la desigualdad anterior se cumple se llama el tipo $\tau = \tau_f$ (con respecto al orden ρ) de la función f . Se sigue de la definición del tipo que

$$e^{(\tau-\varepsilon)r^\rho} \stackrel{n}{<} M_f(r) \stackrel{as}{<} e^{(\tau+\varepsilon)r^\rho}.$$

Tomamos el logaritmo y dividimos por r^ρ , obtenemos

$$\tau - \varepsilon < \frac{\log M_f(r)}{r^\rho} < \tau + \varepsilon$$

y de aquí

$$\tau_f = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M_f(r)}{r^\rho}.$$

Si para un $\rho > 0$ dado el tipo de una función es infinito, entonces la función es de **tipo maximal**; para $0 < \tau < \infty$ decimos que el tipo es **normal** o medio; para $\tau = 0$ el tipo es **mínimal**. En este último caso, para algún $\varepsilon > 0$ la siguiente desigualdad asintótica se cumple

$$M_f(r) \stackrel{as}{<} e^{\varepsilon r^\rho}.$$

De las definiciones de orden ρ y tipo τ de una función entera $f(z)$ tenemos que para cada $\varepsilon > 0$

$$M_f(r) = O(e^{r^{\rho+\varepsilon}}) \quad r \rightarrow \infty \quad (5.12)$$

y

$$M_f(r) = O(e^{(\tau+\varepsilon)r^\rho}) \quad r \rightarrow \infty. \quad (5.13)$$

Funciones enteras de orden $\rho = 1$ y tipo normal τ son llamadas **funciones enteras de tipo exponencial** τ .

Ejemplo 5.1. Para las siguientes funciones enteras.

i) $\operatorname{sen} Az$ es de orden $\rho = 1$ y tipo $\tau = |A|$.

ii) $\sqrt{(z)}/\sqrt{(z)}$ es de orden $\rho = 1/2$ y tipo $\tau = 1$.

iii) $\exp\{a_0 z^n + \dots + a_n\}$, $a_0 \neq 0$ es de orden $\rho = n$ y tipo $\tau = |a_0|$.

Cada una definida en sus respectivos dominios.

5.5. El exponente de convergencia σ .

Definición 5.5. Sean a_1, a_2, \dots las raíces de $f(z)$ ordenadas de acuerdo a su módulo y escritas tantas veces como su multiplicidad y sean $|a_1|, |a_2|, \dots$ sus módulos. El exponente de convergencia de los ceros de $f(z)$ (llamado por conveniencia el **exponente de convergencia** de $f(z)$) es el ínfimo de los números positivos α para el cuál la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^\alpha}$$

converge, y lo denotaremos por λ .

Lema 5.2. La serie y la integral

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^\alpha}, \quad \int_0^{\infty} t^{-\alpha-1} n(t) dt$$

convergen o divergen ambas si $\alpha > 0$.

Primero vamos a mostrar que

$$\sum_{|a_n| \leq T} \frac{1}{|a_n|^\alpha} = T^{-\alpha} n(T) + \alpha \int_0^T t^{-\alpha-1} n(t) dt. \quad (5.14)$$

De hecho $\sum_{|a_n| \leq T} \frac{1}{|a_n|^\alpha}$ es a su vez una suma parcial de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^\alpha}$, a esta suma parcial podemos verla de manera general como una integral de Stieltjes $\int_0^T t^{-\alpha} dn(t) = T^{-\alpha} n(T) + \alpha \int_0^T t^{-\alpha-1} n(t) dt$. Sin embargo a la ecuación 5.14 la mostraremos de la siguiente manera:

Consideremos nuevamente s_1, s_2, \dots, s_k los radios de los círculos donde se encuentran las raíces a_1, a_2, \dots, a_k , aquí $s_1 < s_2 < \dots < s_k \leq T$ como en las figuras 5.3 y 5.4, solo que esta vez T ocupa el lugar de R y $s_k \leq T$,

aunque esto último como veremos más adelante, no afectará en nada nuestros cálculos.

Por un lado tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{|a_n| \leq T} \frac{1}{|a_n|^\alpha} &= n(s_1) \frac{1}{s_1^\alpha} + (n(s_2) - n(s_1)) \frac{1}{s_2^\alpha} \\ &+ \cdots + (n(s_{k-1}) - n(s_{k-2})) \frac{1}{s_{k-1}^\alpha} + (n(T) - n(s_{k-1})) \frac{1}{T^\alpha}. \end{aligned}$$

Mientras

$$\begin{aligned} \alpha \int_0^T t^{-\alpha-1} n(t) dt &= \alpha \left[\int_0^{s_1} + \int_{s_1}^{s_2} + \cdots + \int_{s_{k-2}}^{s_{k-1}} + \int_{s_{k-1}}^T \right] t^{-\alpha-1} n(t) dt \\ &= \alpha \left[n(s_1) \int_{s_1}^{s_2} + n(s_2) \int_{s_2}^{s_3} + \cdots \right. \\ &\quad \left. + n(s_{k-2}) \int_{s_{k-2}}^{s_{k-1}} + n(s_{k-1}) \int_{s_{k-1}}^T \right] t^{-\alpha-1} dt \\ &= n(s_1) \frac{1}{s_1^\alpha} + (n(s_2) - n(s_1)) \frac{1}{s_2^\alpha} + \cdots \\ &\quad + (n(s_{k-1}) - n(s_{k-2})) \frac{1}{s_{k-1}^\alpha} - n(s_{k-1}) \frac{1}{T^\alpha}. \end{aligned}$$

Si agregamos a esta última expresión $T^{-\alpha} n(T)$ obtenemos $\sum_{|a_n| \leq T} \frac{1}{|a_n|^\alpha}$ y con ello tenemos probado (5.14). Es así como hacemos la demostración del Lema anterior que nos habla de la dependencia de la convergencia entre la integral y la suma.

Demostración. Supongamos que $\sum_{|a_n| \leq T} \frac{1}{|a_n|^\alpha} < \infty$, por la ecuación (5.14)

$$\alpha \int_0^T t^{-\alpha-1} n(t) dt < \sum_{|a_n| \leq T} \frac{1}{|a_n|^\alpha} < \infty \quad \text{por tanto} \quad \int_0^T t^{-\alpha-1} n(t) dt \quad \text{converge.}$$

Recíprocamente, supongamos que $\int_0^\infty t^{-\alpha-1} n(t) dt < \infty$, dado que $n(t)$ se incrementa tenemos en particular que $n(T) \leq n(t)$ para todo $t \in [T, 2T]$, por

tanto es fácil ver que

$$n(T) \int_T^{2T} t^{-\alpha-1} dt = \int_T^{2T} t^{-\alpha-1} n(T) dt \leq \int_0^{2T} t^{-\alpha-1} n(t) dt$$

y además

$$n(T) \int_T^{2T} t^{-\alpha-1} dt = n(T) \frac{t^{-\alpha}}{\alpha} \Big|_T^{2T} = \frac{n(T)}{T^\alpha} \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{2^\alpha} - 1 \right)$$

por tanto

$$\frac{n(T)}{T^\alpha} \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{2^\alpha} - 1 \right) \leq \int_0^{2T} t^{-\alpha-1} n(t) dt \quad \text{y para cuando hacemos } T \rightarrow \infty$$

$T^{-\alpha} n(T)$ queda acotado, es decir $n(T) = O(T^\alpha)$, por tanto en (5.14) el lado derecho de la igualdad queda acotado. Así $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^\alpha}$ converge. \square

Una definición alternativa de λ está dado por el siguiente Teorema.

Teorema 5.4. *Si $f(z)$ tiene al menos un cero (con $f(0) \neq 0$) y si*

$$\sigma = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log n(r)}{\log r}$$

entonces σ coincide con λ .

Donde

$$\lambda = \left\{ \inf \alpha : \sum_n \frac{1}{|a_n|^\alpha} < \infty \right\}.$$

Demostración. De la definición de σ , tenemos

$$r^{\sigma-\varepsilon} < \overset{n}{n(r)} < \overset{as}{r^{\sigma+\varepsilon}}.$$

Tomemos la parte $n(r) < \overset{as}{r^{\sigma+\varepsilon}}$. Es necesario que $\alpha > \sigma + \varepsilon$ pues así aseguramos

$$\frac{n(r)}{r^\alpha} < \frac{n(r)}{r^{\sigma+\varepsilon}} < \infty \quad \text{con } r \rightarrow \infty.$$

La convergencia de $n(r)/r^\alpha$ implica la convergencia de $\int_0^\infty t^{-\alpha-1} n(t) dt$ y por el Lema 5.2 la convergencia de $\sum_n 1/|a_n|^\alpha$.

El hecho $\alpha > \sigma + \varepsilon$ implica $\sigma \leq \alpha$ de donde σ es una cota inferior de los

α 's, que es menor que la máxima de las cotas inferiores de las α 's, que es λ . Por lo tanto $\sigma \leq \lambda$.

Por otro lado, con $r^{\sigma-\varepsilon} < n(r)$ y $\sigma > 0$ se tiene una sucesión $|a_k| = r_k$ creciente tal que $r_k^{\sigma-\varepsilon} < n(r_k)$, dado que $n(r)$ se incrementa hagamos $s > 2^{1/\alpha}r_k$ entonces

$$\begin{aligned} s &> 2^{1/\alpha}r_k \text{ de donde} \\ s^{-\alpha} &< 2^{-1}r_k^{-\alpha} \\ s^{-\alpha} - r_k^{-\alpha} &< -\frac{1}{2}r_k^{-\alpha} \text{ por tanto} \\ \int_{r_k}^s t^{-1-\alpha}n(t)dt &\geq r_k^{\sigma-\varepsilon} \int_{r_k}^s t^{-1-\alpha}dt \text{ dado } n(r_k) > r_k^{\sigma-\varepsilon} \\ \int_{r_k}^s t^{-1-\alpha}n(t)dt &\geq r_k^{\sigma-\varepsilon} \int_{r_k}^s t^{-1-\alpha}dt = r_k^{\sigma-\varepsilon} \frac{t^{-\alpha}}{-\alpha} \Big|_{r_k}^s = \\ r_k^{\sigma-\varepsilon} \left(-\frac{1}{\alpha}\right)(s^{-\alpha} - r_k^{-\alpha}) &> r_k^{\sigma-\varepsilon} \left(-\frac{1}{\alpha}\right) \left(-\frac{1}{2}\right)r_k^{-\alpha} \\ &= \frac{1}{2}\alpha^{-1}r_k^{\sigma-\alpha-\varepsilon} \end{aligned}$$

el lado extremo izquierdo de esta desigualdad es arbitrariamente grande si $\alpha < \sigma - \varepsilon$; esto significa que $\int_0^\infty t^{-\alpha-1}n(t)dt$ debe divergir para $\alpha < \sigma - \varepsilon$, y así por el Lema 5.2, la única manera de asegurar la convergencia de $\int_0^\infty t^{-1-\alpha}n(t)dt$ y por ende de $\sum_n 1/|a_n|^\alpha$ es que $\alpha \geq \sigma - \varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$, es decir que siempre exista un α en $(\sigma - \varepsilon, \sigma)$ esto hace a σ un punto de acumulación de las α 's mayor o igual que el menor de los puntos de acumulación de los α 's que es $\lambda = \inf \alpha$. Por tanto $\sigma \geq \lambda$ \square

De esto se deduce el Teorema de Hadamard, que nos será de mucha utilidad mas adelante.

Teorema 5.5 (Teorema de Hadamard). *El exponente de convergencia de una función entera no excede su orden de crecimiento.*

Demostración. Si se supone $|f(0)| = 1$ el Teorema de Jensen nos dice que

$$\int_0^R \frac{n(t)}{t}d(t) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\psi})|d\psi \leq \log M_f(R)$$

por tanto

$$\log M_f(er) \geq \int_0^{er} \frac{n(t)}{t}dt \geq \int_r^{er} \frac{n(t)}{t}dt \geq n(r)$$

de donde

$$n(r) < \log M_f(er).$$

Si $|f(0)| \neq 1$ entonces

$$n(r) < \log M_f(er) + \text{constante}$$

o equivalentemente

$$n(r) < \log M_f(er) + O(1).$$

Se sigue que

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log n(r)}{\log r} \leq \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M_f(er)}{\log r} = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M_f(r)}{\log r}$$

esto es $\sigma \leq \rho$. □

Aquí analizaremos el comportamiento asintótico de funciones enteras y la relación entre estas y su cantidad de ceros.

Teorema 5.6. *Si $f(z)$ es de orden ρ positivo y tipo finito τ entonces*

$$L = \limsup_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} n(r) \leq e\rho\tau \quad (5.15)$$

$$l = \liminf_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} n(r) \leq \rho\tau. \quad (5.16)$$

Con e la base de las exponenciales.

Demostración. Por la ecuación 5.11 tenemos

$$\log M(r) \leq (\tau + \varepsilon)r^\rho \quad \varepsilon > 0, r > r(\varepsilon)$$

y por el Teorema de Jensen

$$N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta \leq \log M(r) \quad (5.17)$$

y de las dos ecuaciones anteriores

$$N(r)r^{-\rho} \leq \tau + \varepsilon \quad r > r(\varepsilon). \quad (5.18)$$

Si $\beta > 1$ tenemos como en 5.18

$$n(r) \log \beta \leq \int_r^{\beta r} \frac{n(t)}{t} dt \leq \int_0^{\beta r} \frac{n(t)}{t} dt = N(\beta r) \leq \beta^\rho (\tau + \varepsilon) r^\rho \Rightarrow$$

$$n(r)r^{-\rho} \leq \frac{(\tau + \varepsilon)\beta^\rho}{\log \beta}.$$

El lado derecho es el mas pequeño cuando $\beta = e^{1/\rho}$ y entonces

$$L = \limsup_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} n(r) \leq e\rho\tau$$

donde e es la base de los logarimos naturales.

Por otro lado si $n(t) \geq \sigma t^\rho \Rightarrow \sigma t^{\rho-1} \leq n(t)/t$ para $t \geq t_0$ tenemos por (5.18)

$$\begin{aligned} r^{-\rho} \int_0^{t_0} \frac{n(t)}{t} dt + \sigma r^{-\rho} \int_{t_0}^r t^{\rho-1} dt &\leq \\ r^{-\rho} \left(\int_0^{t_0} + \int_{t_0}^r \right) \frac{n(t)}{t} dt &= r^{-\rho} N(r) \leq \tau + \varepsilon \quad r > t_0 \end{aligned}$$

es decir

$$\sigma r^{-\rho} \int_{t_0}^r t^{\rho-1} dt \leq \tau + \varepsilon$$

y $(\tau + \varepsilon)$ es una cota asintótica, recordamos que $n(t)$ es una función creciente, por como la hemos escogido tenemos

$$\sigma r^{-\rho} \int_{t_0}^r t^{\rho-1} dt \leq \frac{n(t)}{t^\rho} r^{-\rho} \int_{t_0}^r t^{\rho-1} dt = \frac{n(t)}{t^\rho} \cdot \frac{1}{\rho} \left(1 - \left(\frac{t_0}{r}\right)^\rho \right) \nearrow_r \frac{n(t)}{t^\rho} \cdot \frac{1}{\rho}$$

de aquí es fácil ver que

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{n(t)}{t^\rho} \cdot \frac{1}{\rho} \leq (\tau + \varepsilon) \Rightarrow \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{n(t)}{t^\rho} \leq \rho(\tau + \varepsilon)$$

haciendo el respectivo cambio de variable

$$l = \liminf_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} n(r) \leq \rho\tau.$$

□

La relación entre estas dos ecuaciones con L y l no puede ser aproximada tanto como se quiera. Es decir, no es posible tener una igualdad simultanea si $\tau > 0$.

Teorema 5.7. *Sea $f(z)$ es una función entera de crecimiento (ρ, τ) , si $\{a_n\}$ es un conjunto de números complejos para los cuales ya sea*

$$\tau < \rho^{-1} \liminf_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} n_a(r)$$

o

$$\tau < (e\rho)^{-1} \limsup_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} n_a(r)$$

y si $f(a_n) = 0$ para cada n , entonces $f(z) \equiv 0$.

Demostración. Aquí $n_a(r)$ cuenta la cantidad de elementos de la sucesión total $\{a_n\}$ que cumplen $|a_n| \leq r$.

Por otro lado, recordemos que el término $n(r)$ denota la cantidad de raíces contando multiplicidades de f , tales que se encuentran dentro del círculo de radio r , $|z| \leq r$. Para una r fija se tiene que $n(r)$ y $n_a(r)$ coinciden, pues cada elemento a_n es una raíz de f . Hágamoslo por contradicción y supongamos que $f \neq 0$ y que alguna de las dos desigualdades se cumple. Con $n_a(r) = n(r)$ supongamos que se cumple la primera desigualdad, entonces

$$\rho^{-1} \liminf_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} n_a(r) = \rho^{-1} \liminf_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} n(r) > \tau$$

esto implica

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} n(r) > \rho\tau.$$

Lo cual contradice a la segunda desigualdad del Teorema (5.6). Del mismo modo supongamos que se cumple

$$\tau < (e\rho)^{-1} \limsup_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} n_a(r) = \tau < (e\rho)^{-1} \limsup_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} n(r)$$

lo que nos da

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} n(r) > e\rho\tau$$

que contradice a la primera desigualdad del Teorema (5.6). De donde $f(z) \equiv 0$. \square

5.6. Retículos de estados coherentes.

Definición 5.6. *Llamamos un **retículo** de puntos en el plano complejo \mathbb{C} al arreglo de puntos $z_{mn} \in \mathbb{C}$ con $m, n \in \mathbb{Z}$ formado por un cuadrículado*

uniforme donde la abscisa son los puntos $\{\dots, -2k, -k, 0, k, 2k \dots\}$, $k > 0$ y la ordenada $\{\dots, -2l, -l, 0, l, 2l \dots\}$, con $l > 0$.

En ocasiones el retículo de puntos puede estar formado por paralelogramos en donde el espaciado en la abscisa es el mismo y el espaciado en la ordenada se da de manera uniforme con respecto a un ángulo α , con $0 < \alpha < \pi$.

Para cualquier estado coherente ψ_z este tiene la forma

$$\psi_z = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \varphi_n$$

donde $z \in \mathbb{C}$ es una etiqueta para cada función ψ_z (vease la Figura 5.6).

Apliquemos las propiedades de analiticidad e integrabilidad cuadrática

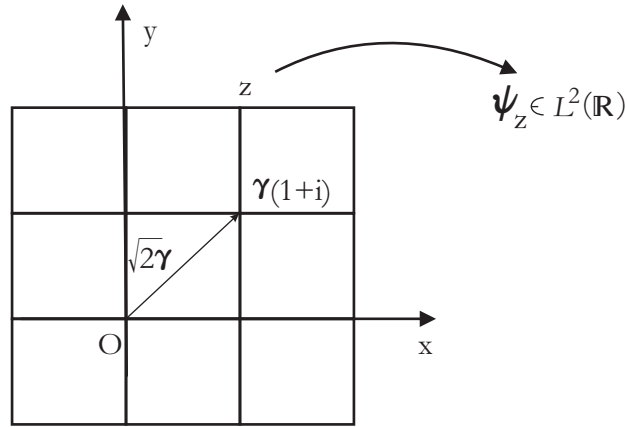


Figura 5.5: Los estados coherentes etiquetados por z

para obtener algunas propiedades básicas. Para cualquier estado $\langle f, \cdot \rangle$ tenemos

$$\langle f, \psi_z \rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\sqrt{n!}} z^n = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} F(z)$$

donde

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\sqrt{n!}} z^n.$$

Así que $F(z) = e^{\frac{1}{2}|z|^2} \langle f, \psi_z \rangle$ y, aplicando la desigualdad de Schwarz

$$\begin{aligned} |F(z)| &= e^{\frac{1}{2}|z|^2} |\langle f, \psi_z \rangle| \leq e^{\frac{1}{2}|z|^2} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\psi_z\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= e^{\frac{1}{2}|z|^2} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \cdot 1 \end{aligned}$$

esto es, la función entera $F(z)$ es de orden ρ que no excede 2 y si es de orden 2 su tipo τ no excede $1/2$ es decir es de crecimiento $(2, \frac{1}{2})$.

Así que podemos considerar el espacio de Hilbert de las funciones enteras de crecimiento $(\rho, \tau) = (2, \frac{1}{2})$ y de cuadrado integrable, lo que planteamos es lo siguiente: saber si este espacio es completo en el sentido de que nos genere todo $\mathcal{HL}^2(\mathbb{C})$ y que condiciones de densidad tienen que cumplir los puntos z de la latiz del plano complejo para que el conjunto ψ_z sea completo.

5.6.1. Retículos finos.

Si un vector $f \in L^2(\mathbb{R})$ es ortogonal a un estado dado ψ_z , se tiene $\langle f, \psi_z \rangle = 0$ entonces $|f(z)| = e^{-|z|^2/2} |\langle f, \psi_z \rangle| = 0$, de donde $f(z) = 0$, para ese z específico.

Un conjunto de vectores dados es **total** si dado un vector f , ortogonal a todos sus elementos trae como consecuencia que f sea idénticamente nula.

De aquí que un conjunto de estados coherentes, $\{\psi_{z'}\} \subset \{\psi_z\}_{z \in \mathbb{C}}$ es total si y solo si para cualquier función entera de cuadrado integrable con respecto a la medida $\mu(t) = e^{-|z|^2/2}$ de crecimiento $(\rho, \tau) = (2, \frac{1}{2})$ que se anula en cada uno de los puntos $\{z'\}$, resulta ser idénticamente nula.

Si aplicamos el Teorema (5.7) a esta última afirmación, esta se cumple si resultan ciertas cualquiera de las dos condiciones siguientes

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{n_{z'}(r)}{r^2} > \tau\rho = \frac{1}{2} \cdot 2$$

o

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{n_{z'}(r)}{r^2} > e\tau\rho = e \frac{1}{2} \cdot 2.$$

Donde $n_{z'}(r)$ denota el conjunto de puntos $z' \in \mathbb{C}$ donde $f(z') = 0$ y además $|z'| \leq r$ y e es la base de los logaritmos naturales.

De estas dos últimas desigualdades solo nos interesa la primera, ya que la segunda desigualdad

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} n_{z'}(r)/r^2 > e > 2$$

nos conduce a una función cuyo orden ρ es mayor que 2, lo que queda fuera de nuestro interés, ya que solo consideramos ρ 's menores que 2. Esto lo aclaramos con el siguiente Teorema.

Teorema 5.8. *Si se tiene una función entera f para la cual se cumple*

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} n_{z'}(r)/r^2 > e > 2$$

entonces el orden ρ es mayor que 2.

Demostración. Consideremos dos circunferencias en el plano complejo con centros en origen y radios R_0 y R_1 respectivamente, y sean R_0 y R_1 lo suficientemente grandes como para que en el interior del círculo que tiene radio R_0 , y en el interior del círculo que tiene radio R_1 existan por lo menos eR_0^2 y eR_1^2 raíces respectivamente.

Así que en la banda formada por los círculos R_0 y R_1 habrá por lo menos $eR_1^2 - eR_0^2$ raíces.

Por otro lado sean k y k' positivos tales que $R_0^{2+k} = eR_0^2$ y $R_1^{2+k'} = eR_1^2$, evidentemente se tiene que

$$0 < k' < k,$$

Pues e , la base de los logaritmos naturales es estrictamente mayor que 0, y como R_1 es más grande que R_0 cuesta menos encontrar k' tal que $R_1^{k'} = e$.

Sea $\{z_s\}_{s \in S}$ el conjunto de ceros de la función f en el plano complejo contando multiplicidades que se encuentran en la banda formada por los círculos de radios R_0 y R_1 , de donde para cada $s \in S$

$$R_0 < |z_s| < R_1.$$

Así

$$\frac{1}{R_1} < \frac{1}{|z_s|} < \frac{1}{R_0}$$

tomamos la primera desigualdad y tomemos un k'' tal que $0 < k'' < k' < k$

$$\frac{1}{|z_s|} > \frac{1}{R_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|z_s|^{2+k''}} > \frac{1}{R_1^{2+k''}}.$$

Así que

$$\sum_{s \in S} \frac{1}{|z_s|^{2+k''}} > \frac{R_1^{2+k'} - R_0^{2+k}}{R_1^{2+k''}} = R_1^{k'-k''} - \left(\frac{R_0}{R_1}\right)^{k-k''}.$$

En esta última desigualdad, fijemos R_0 y movamos R_1 , esto significa dejar fija a k y mover k' y k'' pero conservando $k' - k'' > 0$, en el lado derecho

de la desigualdad $R_1^{k'-k''}$ se puede hacer tan cercano a uno como se quiera, haciendo R_1 suficientemente grande, mientras que $(R_0/R_1)^{k'-k''}$ tan pequeño como se quiera, de donde, podemos hacer esta suma mayor que $1/2$ para luego fijar R_1 . Pero este proceso lo podemos continuar para radios R_{l-1} y R_l , con l entero mayor que uno, de donde la suma, para los puntos $\{z_s\}$, con un $\varepsilon > 0$, $\varepsilon = \varepsilon(k)$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{|z_s|^{2+\varepsilon}} \text{ diverge.}$$

Esta sucesión $\{z_s\}$ además de ser infinita, no posee puntos de acumulación, pues de tener alguno entonces la función f , por el Teorema de Morera, debería ser idénticamente nula.

De donde $\lambda > 2$ con $\lambda = \inf_{\alpha} \{ \sum \frac{1}{|z|^\alpha} < \infty \}$ del Teorema de Hadamard y del hecho que σ coincide con λ (véase el Teorema 5.4), tenemos $\rho \geq \sigma = \lambda > 2$. \square

Volviendo de nuevo a la primera condición

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{n_{z'}(r)}{r^2} > 1.$$

Tratemos de encontrar las condiciones de densidad de los z' . Para ello consideremos el círculo de radio r en la retícula de cuadros de lado γ (véase la figura 5.6).

Donde cada cuadro de la retícula tiene lado γ y area γ^2 , a cada cuadro le asignaremos el punto inferior izquierdo, de donde habrá cuadros que se salgan de la circunferencia mientras que quedan porciones del círculo sin recubrir.

Sean $n(r)$ el número de puntos de la retícula que están dentro del círculo de radio r , el número $n(r)$ es igual al área de la región F conformada por los cuadros que semicubren al círculo, además $n(r) = \gamma(m + in)$ con $m, n \in \mathbb{Z}$ tal que $\sqrt{\gamma^2(m^2 + n^2)} < r$. Tracemos dos círculos C_1 y C_2 centrados en el origen y de radios $r - (\sqrt{2}/2)\gamma$ y $r + (\sqrt{2}/2)\gamma$ con lo que tenemos

$$C_1 \subset F \subset C_2$$

por lo tanto

$$\pi \left(\frac{r}{\sqrt{2}\gamma} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \leq n(r) \leq \pi \left(\frac{r}{\sqrt{2}\gamma} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2$$

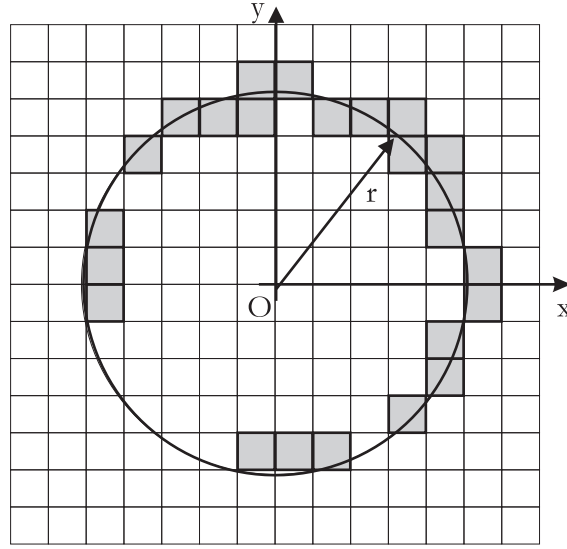


Figura 5.6: Puntos en el interior del círculo de radio r .

de donde

$$n(r) = \frac{\pi r^2}{2\gamma^2} + O(r).$$

Si hacemos $\frac{\pi}{2\gamma^2} > 1$ nos aseguramos que $\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{n_{z'}(r)}{r^2} > 1$ y esto ocurre para el retículo $z_{mn} = \gamma(m + in)$ con $0 < \sqrt{2}\gamma < \sqrt{\pi}$ este conjunto es sobrecompleto y es lo suficientemente denso como para generar un subconjunto de estados coherentes, donde el borrado de un número finito de estos no invalida la condición $\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{n_{z'}(r)}{r^2} > 1$.

Lo siguiente que vamos a probar es que la desigualdad $\gamma < \sqrt{\pi}/\sqrt{2}$ puede ser extendida a $\gamma < \sqrt{\pi}$ y en vez de retículos cuadrados podemos trabajar con retículos generadas por las combinaciones lineales de dos números complejos. Esta vez, en lugar de utilizar el lado γ , usaremos el elemento de área $a = \gamma^2$, demostraremos por tanto que con $a < \pi$ se preserva la completez.

Consideremos en el plano complejo el arreglo de puntos.

$$z_{n_1, n_2} = 2(n_1\omega_1 + n_2\omega_2)$$

donde $2\omega_1$ y $2\omega_2$ no son colineales y $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, (veáse la figura 5.7).

Asumimos que $\text{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$ pues con

$$z_{n_1, n_2} = 2(n_1\omega_1 + n_2\omega_2) \quad \text{y} \quad \bar{z}_{n_1, n_2} = 2(n_1\bar{\omega}_1 + n_2\bar{\omega}_2)$$

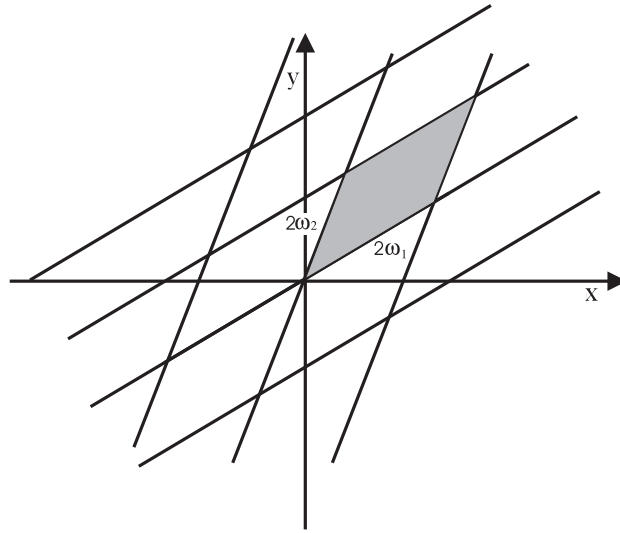


Figura 5.7: Los puntos del tipo $z_{n_1, n_2} = 2(n_1\omega_1 + n_2\omega_2)$.

tenemos la siguiente ecuación de matrices con entradas en \mathbb{C}

$$\begin{pmatrix} z_{n_1, n_2} \\ \bar{z}_{n_1, n_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\omega_1 & 2\omega_2 \\ 2\bar{\omega}_1 & 2\bar{\omega}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4(\omega_1\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1\omega_2)} \begin{pmatrix} 2\bar{\omega}_2 & -2\omega_2 \\ -2\bar{\omega}_1 & 2\omega_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_{n_1, n_2} \\ \bar{z}_{n_1, n_2} \end{pmatrix}$$

por tanto

$$\begin{aligned} 4(\omega_1\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1\omega_2) &= 4(\omega_1\bar{\omega}_2 - \overline{\omega_1\bar{\omega}_2}) = 4 \cdot 2i \cdot \text{Im}(\omega_1\bar{\omega}_2) \\ &= 4 \cdot 2i \cdot |\omega_2|^2 \cdot \text{Im}(\omega_1\bar{\omega}_2/|\omega_2|^2) \\ &= 4 \cdot 2i \cdot |\omega_2|^2 \cdot \text{Im}(\omega_1/\omega_2) \quad \Rightarrow \quad \text{Im}(\omega_2/\omega_1) \neq 0. \end{aligned}$$

Dado que deseamos una orientación positiva para los puntos del paralelogramo adoptamos $\text{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$.

El área de la celda básica (esto es, el paralelogramo con lados $2\omega_1, 2\omega_2$) está dado por

$$a = \begin{vmatrix} 2\text{Re}(\omega_1) & 2\text{Im}(\omega_1) \\ 2\text{Re}(\omega_2) & 2\text{Im}(\omega_2) \end{vmatrix}$$

por tanto

$$\begin{aligned}
 a &= 4(\operatorname{Re}(\omega_1) \cdot \operatorname{Im}(\omega_2) - \operatorname{Re}(\omega_2) \cdot \operatorname{Im}(\omega_1)) \\
 &= 4 \cdot \operatorname{Im}(\bar{\omega}_1 \omega_2) = 4(1/2i)(\bar{\omega}_1 \omega_2 - \overline{\bar{\omega}_1 \omega_2}) \\
 &= 4(-1/2i)(\overline{\bar{\omega}_1 \omega_2} - \bar{\omega}_1 \omega_2) \\
 &= 2i(\omega_1 \bar{\omega}_2 - \omega_2 \bar{\omega}_1).
 \end{aligned}$$

Utilizamos los mismos argumentos que para el retículo de cuadros, es decir, a cada paralelogramo le asociamos el punto izquierdo inferior, por tanto el número de puntos en el arreglo de paralelogramos depende del área del círculo que cubre a tales paralelogramos, por lo tanto

$$n(r) = \frac{\pi r^2}{a} + O(r)$$

de aquí si $a < \pi$ se cumple la condición $\liminf_r n(r)/r^2 > 1$, el conjunto de estados coherentes es total. En particular el retículo cuadrado

$$z_{m,n} = \gamma(m + in), \quad \text{con } 0 < \gamma < \pi$$

es por tanto completo.

5.7. La función σ de Weierstrass.

Consideremos ahora el caso $a > \pi$. Deseamos demostrar que este conjunto no es lo suficientemente denso en el sentido que el conjunto de las funciones $\{\psi_z\}_z$ no es completo, dicho de otro modo, podemos encontrar una función f entera no trivial, que se anula en cada uno de los puntos del retículo y que es de cuadrado integrable con respecto a μ , tal función la generaremos a partir de la función $\sigma(z)$ de Weierstrass definida como

$$\sigma(z) = z \prod'_{n_1, n_2} \left(1 - \frac{z}{z_{n_1, n_2}}\right) \exp \left[\frac{z}{z_{n_1, n_2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z_{n_1, n_2}} \right)^2 \right]$$

donde la comilla (') excluye la posibilidad de que n_1 y n_2 sean simultáneamente cero. Es evidente que $\sigma(z_{n_1, n_2}) = 0$ para todos los puntos del retículo. Lo que no es tan claro –y veremos a continuación– es que la función σ está bien definida en todo el plano complejo. Veamos las siguientes definiciones y algunos teoremas que aquí solo enunciaremos pero cuya demostración se encuentra en [11].

Definición 5.7. *El producto infinito*

$$u_1 \cdot u_2 \cdots u_\nu \cdots = \prod_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$$

en la cual los factores son números complejos arbitrarios, decimos que es convergente (en el sentido estricto) si y solo si para un cierto índice en él, digamos m , se cumple que para todo $\nu > m$, ningún factor es nulo y además

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{m+1} \cdot u_{m+2} \cdots u_n)$$

existe y tiene un valor distinto de cero. Si llamamos $U_m = \lim_n (u_{m+1} \cdot u_{m+2} \cdots u_n)$ entonces el número

$$U = u_1 \cdot u_2 \cdots u_{m+1} \cdot U_m$$

el cual es evidentemente independiente de m , a este número U le llamamos el valor del producto infinito $\prod_{\nu} u_\nu$.

Teorema 5.9. *Un producto convergente tiene el valor cero si y solo si uno de los factores se anula.*

Teorema 5.10. *El producto infinito $\prod_{\nu} u_\nu$ es convergente si, y solo si habiendo escogido $\varepsilon > 0$, podemos encontrar un índice n_0 tal que se cumpla*

$$|u_{n+1} \cdot u_{n+2} \cdots u_{n+r} - 1| < \varepsilon$$

para todo $n > n_0$ y todo $r \geq 1$.

En particular podemos empezar en $\nu = n + 1$ y dejar fijo a $r = 1$ de donde $|u_\nu - 1| < \varepsilon$ para $\nu = n + 1 > n_0$ de donde $\lim_{\nu \rightarrow \infty} u_\nu = 1$, así que en vez de trabajar con factores de la forma u_n podemos trabajar con factores de la forma $1 + c_n$ de donde para el producto

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} (1 + c_\nu)$$

la condición $c_\nu \rightarrow 0$ es necesaria (más no suficiente).

Definición 5.8. Se dice que $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1 + c_{\nu})$ es absolutamente convergente si

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}(1 + |c_{\nu}|)$$

converge.

Teorema 5.11. Si $\prod(1 + |c_{\nu}|)$ converge, entonces $\prod(1 + c_{\nu})$, converge, es decir, la convergencia absoluta es una condición suficiente para la convergencia ordinaria.

El siguiente teorema es uno de los más importantes en esta sección, ya que relaciona la convergencia de la suma y el producto.

Teorema 5.12. El producto $\prod(1 + \gamma_{\nu})$ con $\gamma_{\nu} \geq 0$ es convergente si y solo si $\sum \gamma_{\nu}$ converge.

Teorema 5.13. Para que $\prod(1 + c_{\nu})$ converja absolutamente, es necesario y suficiente que $\sum c_{\nu}$ converja absolutamente.

Estamos interesados en las condiciones de convergencia para productos de la forma

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}(1 + f_{\nu}(z)).$$

Designamos como \mathcal{M} la región de convergencia de $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1 + f_{\nu}(z))$ que es el conjunto de todos los puntos z para los cuales se tiene:

- a) Pertenecen al dominio de definición para cada $f_{\nu}(z)$.
- b) El producto $\prod_{\nu}(1 + f_{\nu}(z))$ converge.

De acuerdo a a) y a b) la aplicación $z \rightarrow \prod_{\nu}(1 + f_{\nu}(z))$ para todo $z \in \mathcal{M}$ es univaluada. Nos es de mucho interés conocer cuando el producto $\prod_{\nu}(1 + f_{\nu}(z))$ representa una función analítica para cada $z \in \mathcal{M}$. El siguiente teorema es el adecuado

Teorema 5.14. Sean $f_1(z), f_2(z), \dots, f_{\nu}(z), \dots$ una sucesión infinita de funciones, y supongamos que para una región G cada una de estas funciones es regular en cada punto de G . Sea $\sum_{\nu=1}^{\infty} |f_{\nu}(z)|$ uniformemente convergente en cada subregión cerrada $G' \subset G$. Entonces el producto $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1 + f_{\nu}(z))$ es convergente en toda la región G y representa una función regular en G .

Más aun, como hemos visto $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1 + f_{\nu}(z))$ es cero para un z particular si y solo si uno de sus factores $1 + f_{\nu}(z)$ es cero para ese z y el orden de cada cero en el producto es la suma de cada uno de los ordenes de esa raíz en cada uno de sus factores.

Para el producto

$$F(z) = g_1(z) \cdot g_2(z) \cdot \dots \cdot g_k(z)$$

si suponemos que cada uno de los factores $g_i(z)$ con $1 \leq i \leq k$ es diferenciable y distinto de cero en z_0 entonces

$$\frac{F'(z_0)}{F(z_0)} = \frac{g_1'(z_0)}{g_1(z_0)} + \frac{g_2'(z_0)}{g_2(z_0)} + \dots + \frac{g_k'(z_0)}{g_k(z_0)}.$$

Al cociente $F'(z_0)/F(z_0)$ le llamamos la *derivada logarítmica* de F en z_0 ya que se tiene la siguiente relación

$$\frac{d}{dz}(\log(F(z))) = \frac{1}{F(z)} \cdot F'(z).$$

La derivada logarítmica puede ser extendida al producto infinito

$$F(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty}(1 + f_{\nu}(z))$$

con

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{f'_{\nu}(z)}{1 + f_{\nu}(z)}.$$

Para ver que la derivada logarítmica de esta $F(z)$ está bien definida tenemos el siguiente Teorema.

Teorema 5.15. *Bajo las mismas condiciones del Teorema 5.14*

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{f'_{\nu}(z)}{1 + f_{\nu}(z)}$$

con $F(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty}(1 + f_{\nu}(z))$, para cada $z \in G$ con $F(z) \neq 0$, esto es, la serie $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{f'_{\nu}(z)}{1 + f_{\nu}(z)}$ es convergente para cada z y además determina la derivada logarítmica de $F(z)$.

Si un polinomio tiene raíces finitas z_1, z_2, \dots, z_k con ordenes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ entonces el producto

$$(z - z_1)^{\alpha_1} (z - z_2)^{\alpha_2} \dots (z - z_k)^{\alpha_k}.$$

posee las mismas raíces con sus respectivos ordenes y solo se diferencia del polinomio por una constante o una función entera sin ceros.

Por otro lado el producto

$$\left(1 - \frac{z}{z_1}\right)^{\alpha_1} \left(1 - \frac{z}{z_2}\right)^{\alpha_2} \dots \left(1 - \frac{z}{z_k}\right)^{\alpha_k}$$

cumple estas mismas condiciones de ceros y ordenes de estos ceros. Tratemos de extender esto a un producto infinito con una cantidad infinita de ceros $z_1, z_2, \dots, z_\nu, \dots$ de la forma

$$\left(1 - \frac{z}{z_1}\right)^{\alpha_1} \left(1 - \frac{z}{z_2}\right)^{\alpha_2} \dots \left(1 - \frac{z}{z_k}\right)^{\alpha_k} \dots$$

con sus respectivos ordenes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu, \dots$

Estas raíces z_ν son todas distintas de cero y no poseen puntos límites, pues de otro modo la función que define debe ser idénticamente nula, por tanto

$$z_\nu \rightarrow \infty \quad \text{en el sentido de} \quad |z_\nu| \rightarrow +\infty.$$

En consecuencia podemos encontrar un conjunto de puntos $k_1, k_2, \dots, k_\nu, \dots$ tal que la serie

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \left(\frac{z}{z_\nu}\right)^{k_\nu}$$

es absolutamente convergente para cada z . De hecho es suficiente con tomar $k_\nu = \nu + \alpha_\nu$. Con un z fijo y como $z_\nu \rightarrow \infty$ podemos encontrar un ν suficientemente grande tal que $|z/z_\nu| < 1/2$ y de aquí

$$\begin{aligned} \left| \alpha_\nu \left(\frac{z}{z_\nu}\right)^{k_\nu} \right| &< \left| \alpha_\nu \left(\frac{z}{z_\nu}\right)^{\nu + \alpha_\nu} \right| \\ &< \alpha_\nu \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu + \alpha_\nu} \\ &= \left(\frac{\alpha_\nu}{2^{\alpha_\nu}}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^\nu \leq 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^\nu \end{aligned}$$

de donde

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \alpha_\nu \left(\frac{z}{z_\nu}\right)^{k_\nu} \right| < \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^\nu < \infty.$$

Si hacemos que estos numeros k_ν conserven la condición $k_\nu = \alpha + \nu$ entonces podemos afirmar que el producto

$$G_0(z) = z_{\alpha_0} \cdot \prod_{\nu=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{z_\nu}\right) \cdot \exp \left\{ \frac{z}{z_\nu} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z_\nu}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{k_\nu - 1} \left(\frac{z}{z_\nu}\right)^{k_\nu - 1} \right\} \right]^{\alpha_\nu}$$

representa una función entera con las propiedades requeridas, la exponencial en $G_0(z)$ con los corchetes nos asegura la convergencia del producto que de otro modo, en general, diverge, a este teorema se le conoce como el Teorema de factores de Weierstrass.

Teorema 5.16. (factores de Weierstrass). $G_0(z)$ está bien definida, es entera y sus únicas raíces son $\{z_\nu\}_\nu$.

Demostración. Para $G_0(z)$ la parte del producto está representada como $\prod_\nu (1 + f_\nu(z))$ por tanto nos queda demostrar que la serie

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |f_\nu(z)| = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \left[\left(1 - \frac{z}{z_\nu}\right) \cdot \exp \left\{ \frac{z}{z_\nu} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z_\nu}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{k_\nu - 1} \left(\frac{z}{z_\nu}\right)^{k_\nu - 1} \right\} \right]^{\alpha_\nu} - 1 \right|$$

converge uniformemente en cada región acotada, la convergencia uniforme de esta serie en el círculo con centro en el origen y radio $R > 0$ lo establecemos a continuación. Dado que la serie $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \left(\frac{z}{z_\nu}\right)^{k_\nu}$ converge también para z con $|z| = R$, como $z_\nu \rightarrow \infty$ podemos escoger m entero positivo tal que

$$\text{si } \frac{|z|}{|z_\nu|} = \frac{R}{|z_\nu|} < \frac{1}{2} \quad \text{implica} \quad \alpha_\nu \left| \frac{R}{z_\nu} \right|^{k_\nu} < \left(\frac{1}{2}\right)^\nu < \frac{1}{2} \quad \text{para todo } \nu > m.$$

Entonces para $\nu > m$ el ν -ésimo termino de la suma tiene la forma

$$|f_\nu(z)| = \left| \left[\left(1 - \frac{z}{z_\nu}\right) \cdot \exp \left\{ \frac{z}{z_\nu} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z_\nu}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{k_\nu - 1} \left(\frac{z}{z_\nu}\right)^{k_\nu - 1} \right\} \right]^{\alpha_\nu} - 1 \right|.$$

Para $\omega \in \mathbb{C}$ con $-1 < |\omega| \leq 1$ tenemos

$$\ln(1 + \omega) = \omega - \frac{\omega^2}{2} + \frac{\omega^3}{3} - \frac{\omega^4}{4} + \cdots$$

Así que

$$\ln\left(1 - \frac{z}{z_\nu}\right) = -\frac{z}{z_\nu} - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_\nu}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{z}{z_\nu}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{z}{z_\nu}\right)^4 - \dots$$

de donde

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{z}{z_\nu}\right) &= \exp\left(\ln\left(1 - \frac{z}{z_\nu}\right)\right) \\ &= \exp\left\{-\frac{z}{z_\nu} - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_\nu}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{z}{z_\nu}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{z}{z_\nu}\right)^4 - \dots\right\} \end{aligned}$$

pues $|\frac{z}{z_\nu}| < \frac{1}{2} < 1$, por tanto $|f_\nu(z)|$ queda como

$$\begin{aligned} |f_\nu(z)| &= \left| \left[\exp\left\{-\frac{z}{z_\nu} - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_\nu}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{z}{z_\nu}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{z}{z_\nu}\right)^4 - \dots\right\} \cdot \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \exp\left\{\frac{z}{z_\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_\nu}\right)^2 + \dots + \frac{1}{k_\nu - 1}\left(\frac{z}{z_\nu}\right)^{k_\nu - 1}\right\} \right]^{\alpha_\nu} - 1 \right| \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} |f_\nu(z)| &= \left| \left[\exp\left\{-\frac{1}{k_\nu}\left(\frac{z}{z_\nu}\right)^{k_\nu} - \frac{1}{k_\nu + 1}\left(\frac{z}{z_\nu}\right)^{k_\nu + 1} - \dots\right\} \right]^{\alpha_\nu} - 1 \right| \\ &= \left| \left[\exp\left\{\alpha_\nu\left(-\frac{1}{k_\nu}\left(\frac{z}{z_\nu}\right)^{k_\nu} - \frac{1}{k_\nu + 1}\left(\frac{z}{z_\nu}\right)^{k_\nu + 1} - \dots\right)\right\} \right] - 1 \right|. \end{aligned}$$

Para $\omega \in \mathbb{C}$ se tiene en general que

$$|e^\omega - 1| \leq |\omega| + |\omega|^2/2! + \dots = e^{|\omega|} - 1.$$

Además, como tenemos $|z/z_\nu| < 1/2$ entonces

$$\begin{aligned} 1 + \left|\frac{z}{z_\nu}\right| + \left|\frac{z}{z_\nu}\right|^2 + \dots &= 1 + \left|\frac{z}{z_\nu}\right|(1 + \left|\frac{z}{z_\nu}\right| + \left|\frac{z}{z_\nu}\right|^2 + \dots) \\ &= 1 + \frac{\left|\frac{z}{z_\nu}\right|}{1 - \left|\frac{z}{z_\nu}\right|} \leq 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 2. \end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned} |f_\nu(z)| &\leq \exp\left(\left|\alpha_\nu\left(\frac{z}{z_\nu}\right)^{k_\nu}\left(-\frac{1}{k_\nu} - \frac{1}{k_\nu + 1}\left(\frac{z}{z_\nu}\right) - \dots\right)\right|\right) - 1 \\ &\leq \exp\left(\left|\alpha_\nu\left|\frac{z}{z_\nu}\right|^{k_\nu}\left(1 + \left|\frac{z}{z_\nu}\right| + \left|\frac{z}{z_\nu}\right|^2 + \dots\right)\right|\right) - 1 \\ &\leq \exp\left(\left|\alpha_\nu\left|\frac{z}{z_\nu}\right|^{k_\nu} \cdot 2\right|\right) - 1. \end{aligned}$$

Además, para $x > 0$ tenemos

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \cdots = x \left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots \right) \leq x e^x$$

entonces

$$\begin{aligned} |f_\nu(z)| &\leq 2\alpha_\nu \left| \frac{z}{z_\nu} \right|^{k_\nu} \exp(2\alpha_\nu \left| \frac{z}{z_\nu} \right|^{k_\nu}) \leq 2\alpha_\nu \left| \frac{z}{z_\nu} \right|^{k_\nu} e^1 \\ &< 2 \cdot 3\alpha_\nu \left| \frac{z}{z_\nu} \right|^{k_\nu} = 6\alpha_\nu \left| \frac{z}{z_\nu} \right|^{k_\nu} \end{aligned}$$

en esta última desigualdad hemos usado el hecho ya visto que $|\alpha_\nu(z/z_\nu)^{k_\nu}| < 1/2$ y que la función exponencial preserva para números positivos el sentido de la desigualdad. Así

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |f_\nu(z)| < 6 \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \left| \frac{z}{z_\nu} \right|^{k_\nu} \leq 6 \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \left| \frac{R}{z_\nu} \right|^{k_\nu} < \infty.$$

De aquí, por el criterio-M de Weierstrass la serie $\sum_\nu |f_\nu(z)|$ es uniformemente convergente en el círculo de radio R y centro en el origen, y de esta forma completamos la demostración de el teorema de factores de Weierstrass. \square

Retomemos la función $\sigma(z)$ de Weierstrass con el retículo de puntos de la forma

$$z_\nu = z_{n_1, n_2} = 2(n_1\omega_1 + n_2\omega_2) \quad \text{con} \quad n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$$

y con $\sigma(z)$ definida como

$$\begin{aligned} \sigma(z) &= z \prod'_{n_1, n_2} \left(1 - \frac{z}{z_{n_1, n_2}} \right) \exp \left[\frac{z}{z_{n_1, n_2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z_{n_1, n_2}} \right)^2 \right] \\ &= z \prod'_\nu \left(1 - \frac{z}{z_\nu} \right) \exp \left[\frac{z}{z_\nu} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z_\nu} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

vamos a enumerar de manera adecuada los puntos $z_\nu = z_{n_1, n_2}$ de la siguiente forma, (veáse la figura 5.8).

Para el paralelogramo $BDFH$ comenzaremos en $A = 2(\omega_1)$ luego $B = 2(\omega_1 + \omega_2)$, recorridos en sentido positivo, $C = 2(\omega_2)$, $D = 2(-\omega_1 + \omega_2)$, $E = 2(-\omega_1)$, $F = 2(-\omega_1 - \omega_2)$, $G = 2(-\omega_2)$, $H = 2(\omega_1 - \omega_2)$.

Para el siguiente paralelogramo, en este caso el $WKOS$ comenzamos en

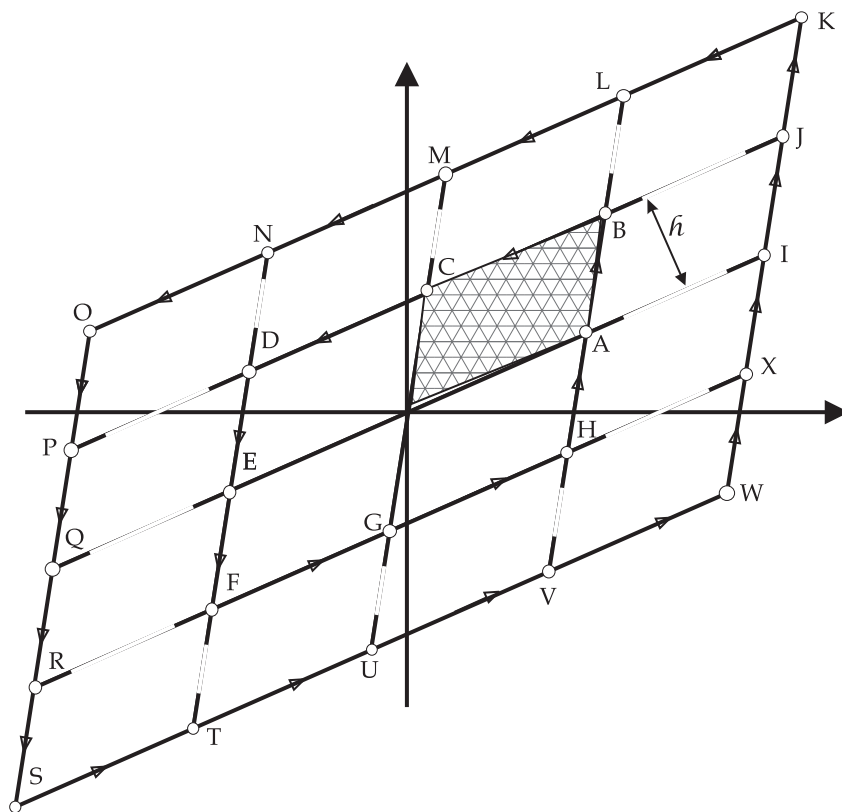


Figura 5.8: Puntos $z_\nu = z_{n_1, n_2}$ del retículo de paralelogramos.

$I = 2(2\omega_1)$, luego con $J = 2(2\omega_1 + \omega_2)$, etc, hasta llegar a $X = 2(2\omega_1 - \omega_2)$. El primer paralelogramo, el $BDFH$ contiene 8 puntos z_ν del retículo; el segundo paralelogramo, el $WKOS$ contiene $16 = 2 \cdot 8$ puntos z_ν del retículo, no es difícil ver— bajo un argumento inductivo— que en el p -ésimo paralelogramo existirán exactamente $8 \cdot p$ puntos z_ν del retículo, ya que por cada dos puntos del paralelogramo en el $p - 1$ -ésimo nivel habrá otro punto más en el medio de ellos en el nivel p -ésimo.

Por otro lado, si denotamos como h a la menor de las alturas del paralelogramo básico que tiene como vértices el origen y los puntos A, B y C entonces cada punto z_ν del p -ésimo paralelogramo tiene un módulo mayor que ph .

Lo siguiente que vamos a demostrar es que para estos puntos z_ν del retículo-

lo, la serie

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{z}{z_{\nu}}\right)^3$$

es absolutamente convergente para cada z . Si logramos demostrar esto, entonces tendremos $\sum_{\nu} \alpha_{\nu} (z/z_{\nu})^{k_{\nu}} < \infty$ con $k_{\nu} = 3$ y $\alpha_{\nu} = 1$, recordemos que α_{ν} denota el orden de las z_{ν} , y cada z_{ν} es raíz de la función σ de Weierstrass, y con ello podremos aplicar el teorema de los factores de Weierstrass, como mas adelante veremos. Por lo pronto consideremos la serie parcial hasta el $(p-1)$ -ésimo paralelogramo

$$\sum_{\nu=1}^{8(p-1)} \left(\frac{z}{z_{\nu}}\right)^3.$$

Los puntos z_{ν} del p -ésimo paralelogramo cumplen $|z_{\nu}| > ph$ y contribuyen al siguiente nivel de la suma en a lo más

$$8p \left(\frac{|z|^3}{ph}\right) = \frac{8|z|^3}{h^3} \cdot \frac{1}{p^2}.$$

De donde

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left|\frac{z}{z_{\nu}}\right|^3 \leq \frac{8|z|^3}{h^3} \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} < \infty.$$

Aplicando el teorema de factores de Wierstrass tenemos entonces asegurada la convergencia absoluta con $\alpha_{\nu} = 1$ y $k_{\nu} = 3$ de

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{z_{\nu}}\right) \cdot \exp \left\{ \frac{z}{z_{\nu}} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z_{\nu}}\right)^2 \right\} \right]^1 - 1$$

lo cual a su vez nos asegura la convergencia uniforme de

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_{\nu}}\right) \exp \left[\frac{z}{z_{\nu}} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z_{\nu}}\right)^2 \right]$$

y por tanto la convergencia uniforme de $\sigma(z)$.

Definimos la función zeta de Weierstrass como

$$\zeta(z) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}.$$

Dado que la función sigma de Weierstrass converge absolutamente, trae como consecuencia la convergencia absoluta y casi uniforme de la serie

$$\log \frac{\sigma(z)}{z} = \sum'_{n_1, n_2} \left(\log \left(1 - \frac{z}{z_{n_1, n_2}} \right) + \frac{z}{z_{n_1, n_2}} + \frac{z^2}{2z_{n_1, n_2}^2} \right)$$

donde la prima (') denota la exclusión del caso simultaneo $n_1, n_2 = 0$.

Así

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left[\log \frac{\sigma(z)}{z} \right] &= \frac{z}{\sigma(z)} \cdot \left[\frac{z \cdot \sigma'(z) - \sigma(z)}{z^2} \right] \\ &= \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} - \frac{1}{z} = \zeta(z) - \frac{1}{z} \\ &= \frac{d}{dz} \left[\sum'_{n_1, n_2} \left(\log \left(1 - \frac{z}{z_{n_1, n_2}} \right) + \frac{z}{z_{n_1, n_2}} + \frac{z^2}{2z_{n_1, n_2}^2} \right) \right] \\ &= \sum'_{n_1, n_2} \left(\frac{-1/z_{n_1, n_2}}{1 - z/z_{n_1, n_2}} + \frac{1}{z_{n_1, n_2}} + \frac{z}{z_{n_1, n_2}^2} \right). \end{aligned}$$

De donde

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum'_{n_1, n_2} \left(\frac{1}{z - z_{n_1, n_2}} + \frac{1}{z_{n_1, n_2}} + \frac{z}{z_{n_1, n_2}^2} \right).$$

Esta igualdad es válida en un entorno de cero y por el principio de prolongación analítica se cumple en todo el plano complejo. Veamos que la serie que está contenida en $\zeta(z)$ converge uniformemente en todo compacto que no contenga a los puntos z_{n_1, n_2} del retículo. Se tiene entonces para $z \neq 0$ fijo y z_{n_1, n_2} el término general de la serie

$$\begin{aligned} \sum'_{n_1, n_2} \left| \frac{1}{z - z_{n_1, n_2}} + \frac{1}{z_{n_1, n_2}} + \frac{z}{z_{n_1, n_2}^2} \right| &= \sum'_{n_1, n_2} \left| \frac{z^2}{z_{n_1, n_2}^2 (z - z_{n_1, n_2})} \right| \\ &= |z|^2 \cdot \sum'_{n_1, n_2} \left| \frac{1}{z_{n_1, n_2}} \right|^3 < \infty. \end{aligned}$$

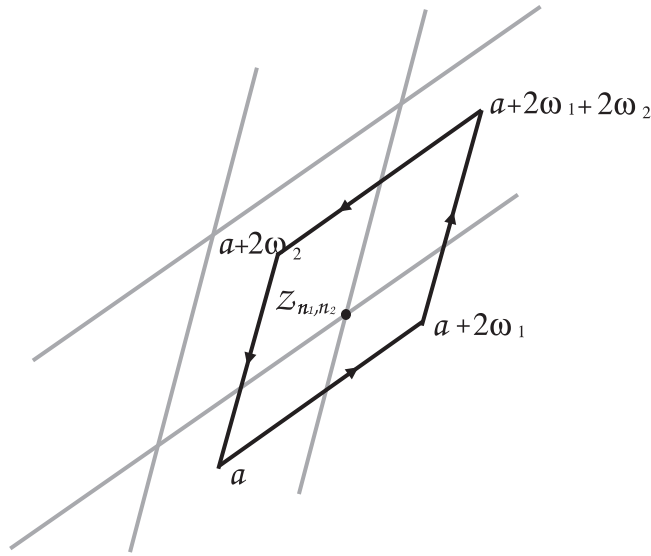


Figura 5.9: z_{n_1, n_2} es un polo de ζ y cero de σ .

Además por su expresión como serie de Laurent ζ tiene residuo 1 en cada uno de sus polos, que son precisamente los puntos z_{n_1, n_2} . Sea $a \in \mathbb{C}$ un punto que no está en el retículo y sea R la trayectoria que está definida por el paralelogramo que tiene como vértices los puntos $a, a + 2\omega_1, a + 2\omega_1 + 2\omega_2$ y $a + 2\omega_2$ nombrados en el sentido positivo, pasa por uno y exactamente uno de los puntos del retículo z_{n_1, n_2} (véase la figura 5.9).

De donde por el teorema del residuo

$$\frac{1}{2\pi i} \int_R \zeta(z) dz = 1. \quad (5.19)$$

Resultado que usaremos mas adelante .

Derivando a ζ

$$\zeta'(z) = -\frac{1}{z^2} - \sum'_{n_1, n_2} \left(\frac{1}{(z - z_{n_1, n_2})^2} - \frac{1}{z_{n_1, n_2}^2} \right).$$

Definimos la función \wp de Weierstrass como

$$\wp(z) = -\zeta'(z) = \frac{1}{z^2} + \sum'_{n_1, n_2} \left(\frac{1}{(z - z_{n_1, n_2})^2} - \frac{1}{z_{n_1, n_2}^2} \right).$$

Tenemos que \wp es meromorfa en el plano complejo, y los puntos z_{n_1, n_2} del retículo son polos dobles de \wp , la serie que define a \wp converge uniformemente en todo compacto que no contenga puntos del retículo, lo mismo sucede con la serie que queda determinada por \wp' al derivar término a término.

$$\wp'(z) = -2 \sum_{n_1, n_2} \frac{1}{(z - z_{n_1, n_2})^3}$$

aquí hemos omitido la coma (') de la suma puesto que el término $-1/z^3$ ya incluye el caso simultáneo $n_1, n_2 = 0$. Es evidente que $\wp(-z) = \wp(z)$ y $\wp(-z) = -\wp'(z)$ por los exponentes 2 y 3 de los denominadores en sus series respectivas, es decir \wp es par, mientras que \wp' es impar.

Veamos que

$$\wp'(z + 2\omega_1) = \wp'(z).$$

Pues

$$\begin{aligned} \wp'(z + 2\omega_1) &= -2 \sum_{n_1, n_2} \frac{1}{(z + 2\omega_1 + z_{n_1, n_2})^3} \\ &= -2 \sum_{n_1, n_2} \frac{1}{(z + 2\omega_1 + 2n_1\omega_1 + 2n_2\omega_2)^3} \\ &= -2 \sum_{n_1, n_2} \frac{1}{(z + 2(n_1 + 1)\omega_1 + 2n_2\omega_2)^3} = \wp'(z). \end{aligned}$$

Del mismo modo $\wp'(z + 2\omega_2) = \wp'(z)$ de donde

$$\wp'(z + 2\omega_1) - \wp'(z) = 0$$

y de aquí

$$\wp(z + 2\omega_1) - \wp(z) = c$$

donde c denota una constante. Vamos a mostrar que esta constante debe ser igual a cero, como $\wp(z)$ es par, en particular para $z = -\omega_1$ tenemos

$$\wp(-\omega_1 + 2\omega_1) - \wp(-\omega_1) = c = \wp(\omega_1) - \wp(\omega_1) = 0$$

por tanto

$$\begin{aligned} \wp(z + 2\omega_1) &= \wp(z) \\ \wp(z + 2\omega_2) &= \wp(z). \end{aligned}$$

Como $\wp(z) = -\zeta'(z)$ entonces $\zeta(z + 2\omega_1)$ y $\zeta(z)$ solo se diferencian por una constante $2\eta_1$, de donde

$$\begin{aligned}\zeta(z + 2\omega_1) &= \zeta(z) + 2\eta_1 \\ \zeta(z + 2\omega_2) &= \zeta(z) + 2\eta_2.\end{aligned}$$

Para encontrar la relación entre η_1 y η_2 calculemos la integral de $\zeta(z)$ a lo largo de la trayectoria R que hemos mencionado anteriormente.

$$\begin{aligned}\int_R \zeta(z) dz &= \int_a^{a+2\omega_1} \zeta(z) dz + \int_{a+2\omega_1}^{a+2\omega_1+2\omega_2} \zeta(z) dz + \int_{a+2\omega_1+2\omega_2}^{a+2\omega_2} \zeta(z) dz + \int_{a+2\omega_2}^a \zeta(z) dz \\ &= \int_0^{2\omega_1} \zeta(z) dz + \int_0^{2\omega_2} \zeta(z + 2\omega_1) dz - \int_0^{2\omega_1} \zeta(z + 2\omega_2) dz - \int_0^{2\omega_2} \zeta(z) dz \\ &= \int_0^{2\omega_1} \zeta(z) dz - \int_0^{2\omega_1} \zeta(z + 2\omega_2) dz + \int_0^{2\omega_2} \zeta(z + 2\omega_1) dz - \int_0^{2\omega_2} \zeta(z) dz \\ &= -2\eta_2 \int_0^{2\omega_1} dz + 2\eta_1 \int_0^{2\omega_2} dz \\ &= -4\omega_1\eta_2 + 4\omega_2\eta_1 \\ &= 2\pi i.\end{aligned}$$

De donde obtenemos la identidad de Legendre

$$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \frac{1}{2}\pi i.$$

Retomando

$$\zeta(z + 2\omega_\alpha) = \zeta(z) + 2\eta_\alpha \quad \text{con } \alpha = 1, 2$$

recordamos que $\zeta(z) = \sigma'(z)/\sigma(z)$

$$\begin{aligned}\frac{\sigma'(z + 2\omega_\alpha)}{\sigma(z + 2\omega_\alpha)} &= \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} + 2\eta_\alpha \quad \text{con } \alpha = 1, 2 \Rightarrow \\ \frac{d}{dz} \left[\log(\sigma(z + 2\omega_\alpha)) \right] &= \frac{d}{dz} \left[\log \sigma(z) \right] + 2\eta_\alpha \Rightarrow \\ \log(\sigma(z + 2\omega_\alpha)) &= \log \sigma(z) + 2\eta_\alpha z + C_\alpha \Rightarrow \\ \sigma(z + 2\omega_\alpha) &= c_\alpha \sigma(z) e^{2\eta_\alpha z} \quad \text{con } c_\alpha > 0.\end{aligned}$$

Para poder determinar el valor de $c_\alpha > 0$ hagamos la siguiente observación; la función σ de Wierstrass es impar, para ver esto veamos que en la parte del producto que corresponden a los elementos del tipo $1 - z/z_{n_1, n_2}$ no se alteran cuando intercambiamos z por $-z$ ya que los n_1 y n_2 recorren todos los enteros; lo mismo sucede con la parte $\exp\{z/z_{n_1, n_2} + (1/2)(z/z_{n_1, n_2})^2\}$.

Sin embargo, la parte que si queda alterada por un signo menos es la z anterior al comienzo del producto; de donde $\sigma(-z) = -\sigma(z)$. Así, sustituyendo para $z = -\omega_\alpha$

$$\begin{aligned}\sigma(-\omega_\alpha + 2\omega_\alpha) &= c_\alpha \sigma(-\omega_\alpha) e^{-2\eta_\alpha \omega_\alpha} \\ \sigma(\omega_\alpha) &= -c_\alpha \sigma(\omega_\alpha) e^{-2\eta_\alpha \omega_\alpha} \\ c_\alpha &= -e^{2\eta_\alpha \omega_\alpha}.\end{aligned}$$

De donde

$$\sigma(z + 2\omega_\alpha) = -\sigma(z) e^{2\eta_\alpha(z + \omega_\alpha)} \quad \text{con } \alpha = 1, 2.$$

Con el objeto de encontrar como evoluciona $\sigma(z + z_{n_1, n_2})$ con respecto a $\sigma(z)$ enunciamos el siguiente teorema.

Teorema 5.17. *Para la función σ de Weierstrass y para m, n enteros se tiene*

$$\begin{aligned}\sigma(z + 2m\omega_1 + 2n\omega_2) &= \\ (-1)^{m+n+mn} \cdot \exp\{(m\eta_1 + n\eta_2)(2z + 2m\omega_1 + 2n\omega_2)\} \cdot \sigma(z)\end{aligned}$$

Demostración. Es fácil ver que

$$\sigma(z + 2m\omega_1) = (-1)^m \cdot \exp\{2\eta_1(mz + m^2\omega_1)\} \cdot \sigma(z)$$

bajo un argumento de inducción, si suponemos para k entero, cierta la afirmación

$$\begin{aligned}\sigma(z + 2(k-1)\omega_1) &= \\ (-1)^{k-1} \cdot \exp\{2\eta_1((k-1)z + (k-1)^2\omega_1)\} \cdot \sigma(z)\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\sigma(z + 2k\omega_1) &= \sigma(z + 2(k-1)\omega_1 + 2\omega_1) \\ &= (-1) \cdot \exp\{2\eta_1(z + 2(k-1)\omega_1 + \omega_1)\} \cdot \sigma(z + 2(k-1)\omega_1) \\ &= (-1) \cdot (-1)^{k-1} \cdot \exp\{2\eta_1(z + 2(k-1)\omega_1 + \omega_1)\} \cdot \\ &= \exp\{2\eta_1((k-1)z + (k-1)^2\omega_1)\} \cdot \sigma(z) \\ &= (-1)^k \cdot \exp\{2\eta_1(kz + k^2\omega_1)\}\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}\sigma(z + 2m\omega_1) &= (-1)^m \cdot \exp\{2\eta_1(mz + m^2\omega_1)\} \cdot \sigma(z) \quad \text{y} \\ \sigma(z + 2n\omega_2) &= (-1)^n \cdot \exp\{2\eta_2(nz + n^2\omega_2)\} \cdot \sigma(z).\end{aligned}$$

Por un lado con $v = z + 2m\omega_1$ se tiene

$$\begin{aligned}\sigma(z + 2m\omega_1 + 2n\omega_2) &= \sigma(v + 2n\omega_2) \\ &= (-1)^n \cdot \exp\{2\eta_2(nv + n^2\omega_2)\} \cdot \sigma(v) \\ &= (-1)^n \cdot \exp\{2\eta_2(n(z + 2m\omega_1) + n^2\omega_2)\} \cdot \sigma(z + 2m\omega_1) \\ &= (-1)^n \exp\{2\eta_2nz + 4mn\omega_1\eta_2 + 2n^2\eta_2\omega_2\} \cdot (-1)^m \exp\{2\eta_1mz + 2m^2\eta_1\omega_1\} \cdot \sigma(z) \\ &= (-1)^{m+n} \exp\{2\eta_1mz + 2\eta_2nz + 2m^2\eta_1\omega_1 + 2n^2\eta_2\omega_2 + 4mn\omega_1\eta_2\} \cdot \sigma(z).\end{aligned}$$

Aplicando la identidad de Legendre $\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \frac{1}{2}\pi i$ a $4mn\omega_1\eta_2$ tenemos

$$\begin{aligned}4mn\omega_1\eta_2 &= 2mn\omega_1\eta_2 + 2mn\omega_1\eta_2 \\ &= 2mn(\eta_1\omega_2 - \frac{1}{2}\pi i) + 2mn\omega_1\eta_2 \\ &= 2mn\omega_2\eta_1 - \pi imn + 2mn\omega_1\eta_2\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}\exp(4mn\omega_1\eta_2) &= \exp(-\pi imn) \cdot \exp\{2mn\omega_1\eta_2 + 2mn\omega_2\eta_1\} \\ &= (-1)^{mn} \cdot \exp\{2mn\omega_1\eta_2 + 2mn\omega_2\eta_1\}\end{aligned}$$

sustituyendo este factor $\exp(4mn\omega_1\eta_2)$ en $\sigma(z + 2m\omega_1 + 2n\omega_2)$ tenemos

$$\begin{aligned}\sigma(z + 2m\omega_1 + 2n\omega_2) &= \\ &= (-1)^{m+n+mn} \cdot \exp\{(m\eta_1 + n\eta_2)2z + (n\eta_2)2m\omega_1 \\ &\quad + (m\eta_1)2n\omega_2 + (n\eta_2)2n\omega_2 + (m\eta_1)2m\omega_1\}\end{aligned}$$

finalmente

$$\begin{aligned}\sigma(z + 2m\omega_1 + 2n\omega_2) &= \\ &= (-1)^{m+n+mn} \cdot \exp\{(m\eta_1 + n\eta_2)(2z + 2m\omega_1 + 2n\omega_2)\}.\end{aligned}$$

□

Corolario 2. Para un punto $z_{n_1, n_2} = 2n_1\omega_1 + 2n_2\omega_2$ del retículo se tiene

$$\sigma(z + z_{n_1, n_2}) = (-1)^{n_1+n_2+n_1n_2} \cdot \exp\{(n_1\eta_1 + n_2\eta_2)(2z + z_{n_1, n_2})\}.$$

Podemos en general hacer

$$\sigma(v + z_{n_1, n_2}) = (-1)^{n_1 + n_2 + n_1 n_2} \sigma(v) \exp \psi$$

donde

$$\psi = (n_1 \eta_1 + n_2 \eta_2)(2v + z_{n_1, n_2})$$

Ahora es fácil obtener una estimación precisa de $|\sigma(z)|$. Para cualquier complejo z existe un vector z_{n_1, n_2} en el retículo tal que el vector $v = z - z_{n_1, n_2}$ pertenece a la que llamaremos celda básica B , es decir, al conjunto de puntos de puntos de la forma $v = \xi_1 \omega_1 + \xi_2 \omega_2$ donde $-1 \leq \xi_1, \xi_2 \leq 1$. Con la ayuda de las dos ecuaciones

$$\begin{aligned} z - v &= 2n_1 \omega_1 + 2n_2 \omega_2 \\ \bar{z} - \bar{v} &= 2n_1 \bar{\omega}_1 + 2n_2 \bar{\omega}_2. \end{aligned}$$

Recordemos que

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4(\omega_1 \bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1 \omega_2)} \begin{pmatrix} 2\bar{\omega}_2 & -2\omega_2 \\ -2\bar{\omega}_1 & 2\omega_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_{n_1, n_2} \\ \bar{z}_{n_1, n_2} \end{pmatrix}$$

donde además $a = 2i(\omega_1 \bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1 \omega_2)$ es el área del paralelogramo con vertices $0, 2\omega_1, 2\omega_1 + 2\omega_2, 2\omega_2$, y $z_{n_1, n_2} = z - v$, podemos expresar a n_1, n_2 en función de $z - v$ y $\bar{z} - \bar{v}$, por tanto tenemos.

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2ai} \begin{pmatrix} 2\bar{\omega}_2 & -2\omega_2 \\ -2\bar{\omega}_1 & 2\omega_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z - v \\ \bar{z} - \bar{v} \end{pmatrix}.$$

Así

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{2\bar{\omega}_2(z - v) - 2\omega_2(\bar{z} - \bar{v})}{-2ia} \\ n_2 &= \frac{-2\bar{\omega}_1(z - v) + 2\omega_1(\bar{z} - \bar{v})}{-2ia} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} n_1 \eta_1 &= \frac{2\bar{\omega}_2 \eta_1 (z - v) - 2\omega_2 \eta_1 (\bar{z} - \bar{v})}{-2ia} \\ n_2 \eta_2 &= \frac{-2\bar{\omega}_1 \eta_2 (z - v) + 2\omega_1 \eta_2 (\bar{z} - \bar{v})}{-2ia}. \end{aligned}$$

Sumando ambas igualdades y aplicando la identidad de Legendre.

$$\begin{aligned}
& n_1\eta_1 + n_2\eta_2 \\
&= \frac{2(\bar{\omega}_2\eta_1 - \bar{\omega}_1\eta_2)(z - v) - 2(\omega_2\eta_1 - \omega_1\eta_2)(\bar{z} - \bar{v})}{-2ia} \\
&= \frac{2(\eta_1\bar{\omega}_2 - \eta_2\bar{\omega}_1)(z - v) - 2(\frac{1}{2}\pi i)(\bar{z} - \bar{v})}{-2ia} \\
&= i\left(\frac{\eta_1\bar{\omega}_2 - \eta_2\bar{\omega}_1}{a}\right)(z - v) + \frac{\pi}{2a}(\bar{z} - \bar{v}).
\end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned}
\psi &= (n_1\eta_1 + n_2\eta_2)(2v + z_{n_1, n_2}) \\
&= (n_1\eta_1 + n_2\eta_2)(v + v + z_{n_1, n_2}) \\
&= (n_1\eta_1 + n_2\eta_2)(v + z) \\
&= \left\{i\left(\frac{\eta_1\bar{\omega}_2 - \eta_2\bar{\omega}_1}{a}\right)\right\}(z^2 - v^2) + \frac{\pi}{2a}(|z|^2 - |v|^2) + \frac{\pi}{2a}(\bar{z}v - z\bar{v}) \\
&= \frac{\pi}{2a}|z|^2 + \left\{i\left(\frac{\eta_1\bar{\omega}_2 - \eta_2\bar{\omega}_1}{a}\right)\right\}z^2 - \left(\frac{\pi}{2a}|v|^2 + \left\{i\left(\frac{\eta_1\bar{\omega}_2 - \eta_2\bar{\omega}_1}{a}\right)\right\}v^2\right) \\
&\quad + \frac{\pi}{2a}(\bar{z}v - z\bar{v}) \\
&= \psi_0(z) - \psi_0(v) + \psi_1(z, v).
\end{aligned}$$

Con

$$\begin{aligned}
\psi_0(z) &= \frac{\pi}{2a}|z|^2 + bz^2, & \psi_0(v) &= \frac{\pi}{2a}|v|^2 + bv^2, \\
\psi_1(z, v) &= \frac{\pi}{2a}(\bar{z}v - z\bar{v}) & \text{y } b &= i\left(\frac{\eta_1\bar{\omega}_2 - \eta_2\bar{\omega}_1}{a}\right).
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\sigma(z) &= \sigma(v + z_{n_1, n_2}) \\
&= (-1)^{n_1+n_2+n_1n_2}\sigma(v) \exp \psi \\
&= (-1)^{n_1+n_2+n_1n_2}\sigma(v) \exp \{\psi_0(z) - \psi_0(v) + \psi_1(z, v)\}.
\end{aligned}$$

La función f definida por

$$f(z) = e^{-bz^2} \cdot \sigma(z)$$

tiene las propiedades requeridas. (1) Se anula en cada uno de los puntos del retículo. (2) Es una función entera de crecimiento $(\rho, \tau) = (2, \pi/2a)$, esto por

que ψ_1 es imaginaria y $\exp(-\psi_0(v))$ está acotada porque v se encuentra en la celda básica B que define una función entera; la parte de $\exp(bz^2)$ en $\psi_0(z)$ queda anulada por $\exp(-bz^2)$ de $f(z)$; por lo que en $f(z)$ el crecimiento que importa está determinado por $\exp(\frac{\pi}{2a}|z|^2)$.

Se sigue que

$$|f(z)| \leq c \cdot \exp\left\{\frac{\pi}{2a}|z|^2\right\} \quad \text{con} \quad c = \sup_{v \in B} |\sigma(v) \cdot \exp(-\psi_0(v))|.$$

Si $a = \pi$ la función ya no es de μ cuadrado integrable, pues $f(z)$ se vuelve asintóticamente equivalente a $e^{\frac{1}{2}|z|^2}$ y esta última función no está en $L^2(\mathbb{R})$ con la medida μ .

En el caso de un retículo cuadrado ($\omega_2 = i\omega_1$), la constante $b = 0$. Para nuestro retículo básico $z_{m,n} = \gamma(m + in)$ con $\gamma = \sqrt{a} > \sqrt{\pi}$, lo que hemos argumentado anteriormente nos da una función no nula que es de cuadrado integrable con respecto a la medida μ y que se anula en cada uno de los puntos del retículo. Así, tal retículo de estados coherentes no es lo suficientemente denso.

5.8. El retículo de von-Neumann, $\gamma = \sqrt{\pi}$.

En el caso del retículo de von-Neumann ($\gamma = \sqrt{\pi}$) los argumentos de analiticidad no son suficientes y tendremos que hacer uso de la integrabilidad cuadrática de las funciones involucradas para establecer la completez. La representación de la configuración de Schrödinger [16] nos permite escribir

$$\mathcal{B}\psi(z) = \mathcal{B}\psi_z = e^{-\frac{1}{2}ipq} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi_0(x)} e^{ipq} \psi(x+q) dx$$

donde φ_0 es la función inicial de la representación de Schrödinger, por conveniencia adoptamos

$$z = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}}q + i(2\pi)^{-\frac{1}{2}}p}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad \varphi_0(x) = 2^{\frac{1}{2}}e^{-\pi x^2}$$

El porque escogemos $\varphi_0(x) = 2^{\frac{1}{2}}e^{-\pi x^2}$ en particular, se debe a lo siguiente.

Para la transformada de Bargmann \mathcal{B} que va de $L^2(\mathbb{R}^n)$ a $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n)$ se define con $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, como

$$\mathcal{B}\psi(z) = \frac{1}{\pi^{n/4}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}(z^2+x^2-2\sqrt{2}z \cdot x)} \psi(x) dx$$

en específico para $n = 1$

$$\mathcal{B}\psi(z) = \frac{1}{\pi^{1/4}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(z^2+x^2-2\sqrt{2}zx)} \psi(x) dx$$

y con el z particular $z = ((2\pi)^{\frac{1}{2}}q + i(2\pi)^{-\frac{1}{2}}p)/\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}\psi(z) &= \frac{1}{\pi^{1/4}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(\pi q^2 + ipq - \frac{p^2}{4\pi})\right) \\ &\quad \cdot \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2 + (\sqrt{2\pi}q + \frac{ip}{\sqrt{2\pi}})x\right) \psi(x) dx. \end{aligned}$$

El argumento de la exponencial bajo la integral, lo podemos ver como

$$-\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2\pi}qx + \frac{ip}{\sqrt{2\pi}}x = -\frac{1}{2}(x - \sqrt{2\pi}q)^2 + \pi q^2 + \frac{ip}{\sqrt{2\pi}}x$$

de donde $\mathcal{B}\psi(z)$ queda como

$$\begin{aligned} \mathcal{B}\psi(z) &= \frac{1}{\pi^{1/4}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(\pi q^2 + ipq - \frac{p^2}{4\pi})\right) \\ &\quad \cdot \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \sqrt{2\pi}q)^2 + \pi q^2 + \frac{ip}{\sqrt{2\pi}}x\right) \psi(x) dx. \end{aligned}$$

Hacemos el cambio de variable

$$x - \sqrt{2\pi}q = \sqrt{2\pi}x' \quad \text{de donde} \quad x = \sqrt{2\pi}(q + x') \quad \text{y} \quad dx = \sqrt{2\pi}dx'.$$

Así que $\mathcal{B}\psi(z)$ con z fija queda como

$$\begin{aligned} \mathcal{B}\psi(z) &= \frac{1}{\pi^{1/4}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(\pi q^2 + ipq - \frac{p^2}{4\pi})\right) \exp(\pi q^2) \cdot \sqrt{2\pi} \\ &\quad \cdot \int_{\mathbb{R}} \exp(-\pi x'^2) \exp\left(\frac{ip}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}(q + x')\right) \psi(\sqrt{2\pi}(q + x')) dx'. \end{aligned}$$

Simplificamos la integral, desarrollamos el factor que queda fuera de ella, y renombramos x' como x tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{B}\psi(z) &= 2^{1/2}\pi^{1/4} \exp\left(\frac{\pi q^2}{2} - \frac{ipq}{2} - \frac{p^2}{8\pi}\right) \\ &\quad \cdot \int_{\mathbb{R}} \exp(-\pi x^2) \exp(ip(q + x)) \psi(\sqrt{2\pi}(q + x)) dx. \end{aligned}$$

Como hemos adoptado $z = ((2\pi)^{\frac{1}{2}}q + i(2\pi)^{-\frac{1}{2}}p)/\sqrt{2}$ tenemos que $|z|^2 = \pi q^2 + \frac{p^2}{4\pi}$ y por tanto $-\frac{|z|^2}{2} = -\frac{\pi q^2}{2} - \frac{p^2}{8\pi}$. Así

$$\mathcal{B}\psi(z) = 2^{1/2}\pi^{1/4}e^{(-\frac{|z|^2}{2} - \frac{ipq}{2})} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} e^{ip(q+x)} \psi(\sqrt{2\pi}(q+x)) dx.$$

Si especificamos $(q, p) = (m, 2\pi n)$ con $m, n \in \mathbb{Z}$ entonces z se convierte en

$$z = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}}q + i(2\pi)^{-\frac{1}{2}}p}{\sqrt{2}} = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}}m + i(2\pi)^{-\frac{1}{2}}2\pi n}{\sqrt{2}} = \sqrt{\pi}(m + in)$$

entonces $e^{ipq} = e^{i2\pi mn} = 1$ y $e^{-i\frac{2q}{2}} = e^{i\pi mn} = (-1)^{mn}$.

Por tanto

$$\mathcal{B}\psi(z) = 2^{1/2}\pi^{1/4}e^{-\frac{|z|^2}{2}} (-1)^{mn} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} e^{-i2\pi nx} \psi(\sqrt{2\pi}(q+x)) dx.$$

Como z está fijo, lo mismo pasa con $e^{-\frac{|z|^2}{2}}$, es así como escogemos $\varphi_0(x) = 2^{1/2}e^{-\pi x^2}$ y definimos la función χ con $m, n \in \mathbb{Z}$ y con un factor $(-1)^{mn}$ omitido

$$\chi_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi_0(x)} e^{-i2\pi nx} \psi(\sqrt{2\pi}(x+q)) dx.$$

Afirmamos que $\mathcal{B}\psi = 0$ implica $\chi_{mn} = 0$, lo cual demostraremos en el siguiente teorema. Queda pendiente la proposición recíproca, que si $\chi_{mn} = 0$ para cada $m, n \in \mathbb{Z}$, entonces $\mathcal{B}\psi$ debe ser cero, lo cual demostraremos un poco más adelante.

Teorema 5.18. *Sea $f \in \mathcal{B}$ en el espacio de Bargmann tal que $f(z_{mn}) = 0$*

donde $z = z_{mn} = 2\left(m\frac{\gamma}{2} + ni\frac{\gamma}{2}\right) = \gamma(m + in)$ y $\gamma = \sqrt{\pi}$. Afirmamos entonces que f tiene que ser nula.

Demostración. Sea $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ tal que para la transformada de Bargmann \mathcal{B} se tiene $f = \mathcal{B}\psi$, es decir ψ es la preimagen de f bajo la transformada de Bargmann. Entonces probar que $f \equiv 0$ es equivalente a probar que $\psi \equiv 0$.

Sea χ_{mn} como lo hemos definido anteriormente

$$\begin{aligned} \chi_{m,n} &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi_0(x)} e^{-i2\pi nx} \psi(\sqrt{2\pi}(x+q)) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x) e^{-i2\pi nx} \psi(\sqrt{2\pi}(x+q)) dx \end{aligned}$$

con $\varphi_0(x) = 2^{1/2}e^{-\pi x^2}$.

Como $f(z_{mn}) = \mathcal{B}\psi(z_{mn}) = 0$ implica que $\chi_{mn} = 0$ para todo $m, n \in \mathbb{Z}$.

Ahora supongamos $\chi_{mn} = 0$ y hagamos la siguiente observación

$$\int_0^1 \sum_{r=-\infty}^{\infty} |\psi(x+r)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx$$

esto porque si aplicamos el Teorema de Convergencia Monótona a

$$\int_0^1 \lim_{N \rightarrow \infty} G_N(x) dx \quad \text{con} \quad G_N(x) = \sum_{r=-N}^{r=N} |\psi(x+r)|^2$$

tendremos el intercambio de la suma y la integral

$$\int_0^1 \sum_{r=-\infty}^{\infty} |\psi(x+r)|^2 dx = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_0^1 |\psi(x+r)|^2 dx.$$

Si hacemos el cambio de variable $y = x + r$, $dy = dx$ como $x \in [0, 1]$ entonces $y = (x + r) \in [r, r + 1]$, de donde

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sum_{r=-\infty}^{\infty} |\psi(x+r)|^2 dx &= \\ \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_0^1 |\psi(x+r)|^2 dx &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_r^{r+1} |\psi(y)|^2 dy = \\ \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx &< \infty \quad \text{dado que} \quad \psi \in L^2(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Vemos como $\sum_{r=-\infty}^{\infty} |\psi(x+r)|^2 < \infty$ a partir del hecho que $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ para casi todo $x \in [0, 1]$, esta misma suma con una $m \in \mathbb{Z}$ fija es equivalente a $\sum_{r=-\infty}^{\infty} |\psi(x+r+m)|^2 < \infty$. En particular $\sum_{r=-\infty}^{\infty} |\psi(\sqrt{2\pi} \cdot (x+r+m))|^2 < \infty$. Aplicando el mismo criterio, si $\varphi_0 \in L^2(\mathbb{R})$ entonces $\sum_{r=-\infty}^{\infty} |\varphi_0(x+r)|^2 < \infty$.

Esto quiere decir que los elementos $\{\varphi_0(x+r)\}_{r \in \mathbb{Z}}$ y $\{\psi(\sqrt{2\pi} \cdot (x+r+m))\}_{r \in \mathbb{Z}}$ expresados como

$$\{\varphi_0(x+r)\}_{r \in \mathbb{Z}} = (\dots, \varphi_0(x-1), \varphi_0(x+0), \varphi_0(x+1), \dots)$$

$$\{\psi(\sqrt{2\pi}(x+r+m))\}_{r \in \mathbb{Z}}$$

$$=(\dots, \psi(\sqrt{2\pi}(x-1+m)), \psi(\sqrt{2\pi}(x+0+m)), \psi(\sqrt{2\pi}(x+1+m)), \dots)$$

con $m \in \mathbb{Z}$ fija. Son elementos de el espacio de Hilbert $\ell^2(\mathbb{Z})$ para los cuales es valida la desigualdad de Schwarz.

$$\left| \left\langle \{\varphi_0(x+r)\}_{r \in \mathbb{Z}} \cdot \{\psi(\sqrt{2\pi}(x+r+m))\}_{r \in \mathbb{Z}} \right\rangle \right| \leq \\ \|\{\varphi_0(x+r)\}_{r \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \cdot \|\{\psi(\sqrt{2\pi}(x+r+m))\}_{r \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}.$$

Esta desigualdad, por los mismos criterios mencionados, sigue siendo valida para los elementos de $\ell^2(\mathbb{Z})$

$$\{|\varphi_0(x+r)|\}_{r \in \mathbb{Z}} \quad \text{y} \quad \{|\psi(\sqrt{2\pi}(x+r+m))|\}_{r \in \mathbb{Z}}$$

por tanto

$$\left| \left\langle \{|\varphi_0(x+r)|\}_{r \in \mathbb{Z}} \cdot \{|\psi(\sqrt{2\pi}(x+r+m))|\}_{r \in \mathbb{Z}} \right\rangle \right| \leq \\ \|\{\varphi_0(x+r)\}_{r \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \cdot \|\{\psi(\sqrt{2\pi}(x+r+m))\}_{r \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} < \infty$$

esto queda como

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} |\varphi_0(x+r) \cdot \psi(\sqrt{2\pi}(x+r+m))| = \\ \sum_{r=-\infty}^{\infty} |\varphi_0(x+r)| \cdot |\psi(\sqrt{2\pi}(x+r+m))| \leq \\ \left(\sum_{r=-\infty}^{\infty} |\varphi_0(x+r)|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{r=-\infty}^{\infty} |\psi(\sqrt{2\pi}(x+r+m))|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Para casi todo $x \in [0, 1]$, podemos ser más específicos con respecto a las x en que se da la convergencia al afirmar la existencia de un conjunto E , con $x \in E$ tal que E es un subconjunto de $[0, 1]$ y el complemento de E con respecto a $[0, 1]$ tiene medida cero.

Volviendo a la función χ_{mn} definida como

$$\chi_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x) e^{-i2\pi nx} \psi(\sqrt{2\pi}(x+q)) dx$$

con $\varphi_0(x) = 2^{1/2} e^{-\pi x^2}$, recordemos que $(q, p) = (m, 2\pi n)$, en específico $q = m$, por lo tanto

$$\chi_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x) e^{-i2\pi nx} \psi(\sqrt{2\pi}(x+m)) dx$$

dividamos el intervalo $[-\infty, \infty]$ en intervalos de longitud uno etiquetados por la variable r

$$\chi_{mn} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_r^{r+1} \varphi_0(x) e^{-i2\pi nx} \psi(\sqrt{2\pi}(x+m)) dx$$

hagamos el cambio de variable $y = x - r$ dentro de la integral, como $x \in [r, r+1]$, se tiene $y = (x - r) \in [0, 1]$

$$\chi_{mn} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_0^1 \varphi_0(y+r) e^{-i2\pi n(y+r)} \psi(\sqrt{2\pi}(y+r+m)) dy.$$

Para $n, r \in \mathbb{Z}$, $e^{-i2\pi n(y+r)} = e^{-i2\pi ny}$, renombrando y como x

$$\chi_{mn} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_0^1 \varphi_0(x+r) e^{-i2\pi nx} \psi(\sqrt{2\pi}(x+r+m)) dx$$

intercambiando la suma y la integral

$$\chi_{mn} = \int_0^1 \left(\sum_{r=-\infty}^{\infty} \varphi_0(x+r) \psi(\sqrt{2\pi}(x+r+m)) \right) e^{-i2\pi nx} dx$$

esto lo hacemos porque podemos probar que $|\chi_{m,n}| < \infty$ para $m, n \in \mathbb{Z}$ fijos y $r \in \mathbb{Z}$ corriendo en todos los enteros, como a continuación se indica

$$\begin{aligned} |\chi_{mn}| &= \left| \int_0^1 \left(\sum_r \varphi_0(x+r) \psi(\sqrt{2\pi}(x+r+m)) \right) e^{-i2\pi nx} dx \right| \\ &\leq \int_0^1 \left| \sum_r \varphi_0(x+r) \psi(\sqrt{2\pi}(x+r+m)) \right| e^{-i2\pi nx} dx \\ &= \int_0^1 \left| \sum_r \varphi_0(x+r) \psi(\sqrt{2\pi}(x+r+m)) \right| dx \\ &\leq \int_0^1 \sum_r |\varphi_0(x+r) \psi(\sqrt{2\pi}(x+r+m))| dx \\ &= \int_0^1 \sum_r |\varphi_0(x+r)| \cdot |\psi(\sqrt{2\pi}(x+r+m))| dx \\ &\leq \int_0^1 \left(\sum_r |\varphi_0(x+r)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_r |\psi(\sqrt{2\pi}(x+r+m))|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz a $|\chi_{mn}|$ en $L^2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} |\chi_{mn}| &\leq \left(\int_0^1 \sum_r |\varphi_0(x+r)|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^1 \sum_r |\psi(\sqrt{2\pi}(x+r+m))|^2 \right)^{1/2} \\ &= \|\varphi_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \cdot \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} < \infty. \end{aligned}$$

Bien pudimos haber aplicado la desigualdad de Cauchy-Schwarz directamente de la definición de integral de χ_{mn} , sin embargo lo hicimos de esta otra manera para hacer hincapie en la dependencia de χ_{mn} con elementos de $\ell^2(\mathbb{Z})$ que veremos como coeficientes de Fourier más adelante.

Lo que tenemos hasta ahora es que χ_{mn} está definido como

$$\chi_{mn} = \int_0^1 \left\{ \sum_{r=-\infty}^{\infty} \varphi_0(x+r)\psi(\sqrt{2\pi}(x+r+m)) \right\} e^{-i2\pi nx} dx.$$

Consideremos ahora el espacio de Hilbert $L^2([0,1])$ generado por la base $\{e^{-i2\pi kx}/\sqrt{2\pi}\}_{k \in \mathbb{Z}}$, donde una función que pertenezca a ese espacio tendrá una expansión canónica

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle a_k(x), \frac{e^{-i2\pi kx}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle e^{-i2\pi kx}$$

donde para un l fijo el l -ésimo coeficiente de Fourier está definido como

$$\left\langle a_l(x), \frac{e^{-i2\pi kx}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle_{k \in \mathbb{Z}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{[0,1]} \overline{a_l(x)} e^{-i2\pi xl} dx$$

para $l = k$ y 0 para cualquier otro caso.

Si vemos a χ_{mn} , como el n -ésimo coeficiente de Fourier para la función $\sum_r \varphi_0(x+r)\psi(\sqrt{2\pi}(x+r+m))$, entonces la afirmación

$$\chi_{mn} = 0 \quad \text{para todo } m, n \in \mathbb{Z}$$

implicaría que

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} \varphi_0(x+r)\psi(\sqrt{2\pi}(x+r+m)) = 0$$

para todo m y para todo $x \in E'$ donde E' es un conjunto que tiene un comportamiento semejante con el conjunto E , es decir, es también un subconjunto de $[0,1]$ y su complemento con respecto a $[0,1]$ tiene medida cero.

Si tomamos una $x \in \tilde{E} = E \cap E'$, este \tilde{E} nos asegura la convergencia de las series etiquetadas con φ_0 y ψ , la nulidad de la función de la cual χ_{mn} representa sus coeficientes de Fourier, y de que \tilde{E} tenga como complemento con respecto a $[0, 1]$ un conjunto de medida cero.

Para $x \in \tilde{E} = E \cap E'$ y $y \in [0, 1]$ definimos

$$M_x(y) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \varphi_0(x+r)e^{-2\pi iry}$$

$$P_x(y) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \psi(\sqrt{2\pi}(x+s))e^{2\pi isy}$$

y ambas convergen puesto que $\sum_r |\varphi_0(x+r)|^2 < \infty$ y $\sum_s |\psi(\sqrt{2\pi}(x+s))|^2 < \infty$ para todo $x \in \tilde{E}$. Con esto hacemos

$$\begin{aligned} & \int_0^1 M_x(y)P_x(y)e^{-2\pi imy}dy \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{r=-\infty}^{\infty} \varphi_0(x+r)e^{-2\pi iry} \right) \left(\sum_{s=-\infty}^{\infty} \psi(\sqrt{2\pi}(x+s))e^{2\pi isy} \right) e^{-2\pi imy} dy \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{r=-\infty}^{\infty} \varphi_0(x+r)e^{-2\pi iry} \right) \left(\sum_{s=-\infty}^{\infty} \psi(\sqrt{2\pi}(x+s))e^{-2\pi i(s-m)y} \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{r=-\infty}^{\infty} \varphi_0(x+r)e^{-2\pi iry} \right) \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} \psi(\sqrt{2\pi}(x+m+l))e^{-2\pi ily} \right) dy \\ &= \int_0^1 \overline{\left(\sum_{r=-\infty}^{\infty} \varphi_0(x+r)e^{-2\pi iry} \right)} \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} \psi(\sqrt{2\pi}(x+m+l))e^{-2\pi ily} \right) dy \\ &= \sqrt{2\pi} \left\langle \overline{\sum_{r=-\infty}^{\infty} \varphi_0(x+r)e^{2\pi iry}}, \sum_{l=-\infty}^{\infty} \psi(\sqrt{2\pi}(x+l+m))e^{-2\pi ily} \right\rangle \\ &= \sqrt{2\pi} \left\langle \sum_{r=-\infty}^{\infty} \varphi_0(x+r)e^{2\pi iry}, \sum_{l=-\infty}^{\infty} \psi(\sqrt{2\pi}(x+l+m))e^{-2\pi ily} \right\rangle \\ &= \sqrt{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \varphi_0(x+r)\psi(\sqrt{2\pi}(x+r+m)) = 0 \end{aligned}$$

de esto deducimos que

$$M_x(y)P_x(y) = 0$$

para $x \in \tilde{E}$ y para casi todo y con $y \in [0, 1]$.

Si suponemos que $M_x(y)$ es cero en a lo más un número finito de puntos en el intervalo $[0, 1]$, y si además suponemos que $P_x(y) = 0$ para casi toda $y \in [0, 1]$ y para toda $x \in \tilde{E}$ tendremos.

$$\begin{aligned}\psi(x + s') &= \int_0^1 e^{-2\pi i s' y} P_x(y) dy = \\ &= \int_0^1 e^{-2\pi i s' y} \sum_s \psi(x + s) e^{2\pi i s y} dy = 0\end{aligned}$$

para todo s' y para todo $x \in \tilde{E}$ y de aquí

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx = \sum_{s'=-\infty}^{\infty} \int_{\tilde{E} \subset [0,1]} |\psi(x + s')|^2 dx = 0.$$

Solo queda convencernos de que $M_x(y)$ debe ser cero en a lo más un número finito de puntos en $[0, 1]$. De la forma que tiene $\varphi_0(x) = 2^{1/4} e^{-\pi x^2}$ encontramos que

$$\begin{aligned}M_x(y) &= 2^{1/4} \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+r)^2 - 2\pi i r y} \\ &= 2^{1/4} e^{\pi(-y^2 + 2ixy)} \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+iy+r)^2}.\end{aligned}$$

De donde $M_x(y)$ es un múltiplo no nulo de la función entera $\sum_r e^{-\pi(x+iy+r)^2}$, que a su vez depende de la variable compleja $\tilde{z} = x + iy$. Por tanto $M_x(y)$ solo puede tener a lo mas un número finito de ceros en el intervalo $x, y \in [0, 1]$.

En consecuencia, la suposición que habíamos hecho de $M_x(y)$ nula en a lo más un número finito de puntos es cierta. De donde la afirmación acerca de

$$\mathcal{B}\psi(z) = 0 \quad \text{con} \quad z = \sqrt{\pi}(m + in)$$

Para todo $m, n \in \mathbb{Z}$ implica que $\psi \equiv 0$ y por tanto $f \equiv 0$, queda demostrada. \square

Capítulo 6

Marcos en los espacios de Bargmann

El propósito de este capítulo es usar técnicas de la Teoría de Operadores para no solo enunciar las condiciones de completez para estados coherentes que hemos visto a lo largo de este trabajo, sino además dar la recuperación de una función $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ de manera explícita a través de los así llamados marcos de funciones. Los marcos de funciones según Daubechies y Grossman [8], es un conjunto de funciones $\{e_{m,n} : m, n \in \mathbb{Z}\}$ en $\mathcal{HL}^2(\mathbb{C})$ junto con las constantes $\mathbf{m} > 0$ y $\mathbf{M} < \infty$ que acotan a $\|f\|_{\mathcal{HL}^2(\mathbb{C})}^{-2} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle e_{mn}, f \rangle_{\mathcal{HL}^2(\mathbb{C})}|^2$ del siguiente modo

$$\mathbf{m} \leq \|f\|^{-2} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle e_{mn}, f \rangle|^2 \leq \mathbf{M}$$

donde e_{mn} son funciones que dependen del núcleo reproductor del espacio de Bargmann .

Bajo la transformada inversa de Bargmann $U_B^{-1}e_{mn} = \varphi_{mn}$ donde los $\{\varphi_{mn}\}$ son al mismo tiempo estados coherentes canónicos y wavelets de Gabor. La recuperación buscada es entonces $\psi = \sum_{mn} c_{mn}\varphi_{mn}$, donde los subíndices m, n dependen de \mathbf{m} y \mathbf{M} .

Los números \mathbf{m} y \mathbf{M} nos permiten establecer criterios de completez de los estados coherentes φ_{mn} en base a la conexión que existen entre estas cotas y la transformada de Zak de cierta subfamilia de operadores de Weyl, que nos resultarán en combinaciones de funciones theta de Jacobi. Es el teorema espectral de operadores [17] el que nos permite predecir la existencia de esas cotas, traducidas en una operación de multiplicación.

Este apartado está basado en el artículo de Daubechies, Groossmann [8], sin embargo se ha desarrollado de manera minuciosa las afirmaciones que se dan en tal artículo.

Reajustamos nuestro núcleo reproductor conocido $K(z, w)$ por un factor $e^{-|w|^2/4}$ y a este nuevo núcleo lo llamamos $e_w(z)$

$$e_w(z) = e^{-|w|^2/4} K(z, w) = e^{-|w|^2/4} \cdot e^{z\bar{w}/2}.$$

Aquí tenemos que $e_w \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, recordemos que w es solo una etiqueta, y la variable con la que se trabaja es z por lo que $e_w(z) = e^{-|w|^2/4} \cdot e^{z\bar{w}/2}$ es una función entera, además $\|e_w\|_{\mathcal{H}L^2(\mathbb{C})} = 1$ pues de la ecuación anterior con $z = x + iy$, y $w = u + iv$ fijo

$$\begin{aligned} \|e_w\|_{\mathcal{H}L^2(\mathbb{C})}^2 &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}|w|^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{1}{2}z\bar{w} + \frac{1}{2}\bar{z}w\right) e^{-\frac{1}{2}|z|^2} dx dy \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}|w|^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \exp(ux + vy) e^{-\frac{1}{2}|z|^2} dx dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-u)^2\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}(y-v)^2\right\} dx dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \cdot e^{-y^2/2} dx dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{2\pi} \sqrt{2\pi} = 1. \end{aligned}$$

Para cada $f \in \mathcal{H}L^2(\mathbb{C})$ se tiene, por las propiedades del núcleo reproductor $K(z, w)$

$$\begin{aligned} \langle e_w(\cdot), f \rangle_{\mathcal{H}L^2(\mathbb{C})} &= \left\langle e^{-|\cdot|^2/4} K(z, \cdot), f \right\rangle_{\mathcal{H}L^2(\mathbb{C})} \\ &= e^{-|w|^2/4} f(w). \end{aligned}$$

Los vectores de la familia $\{e_w; w \in \mathbb{C}\}$ no son ortogonales mutuamente, pues estos satisfacen

$$\begin{aligned} \langle e_w, e_{w'} \rangle_{\mathcal{H}L^2(\mathbb{C})} &= e^{-|w|^2/4} e^{-|w'|^2/4} \langle K(z, w), K(z, w') \rangle_{\mathcal{H}L^2(\mathbb{C})} \\ &= e^{-|w|^2/4} e^{-|w'|^2/4} \langle \overline{K(w, z)}, K(z, w') \rangle_{\mathcal{H}L^2(\mathbb{C})} \\ &= e^{-|w|^2/4} e^{-|w'|^2/4} K(w, w') \\ &= e^{-|w|^2/4} e^{-|w'|^2/4} e^{w\bar{w}'/2}. \end{aligned}$$

Además

$$|\langle e_w, e_{w'} \rangle_{\mathcal{H}L^2(\mathbb{C})}| = e^{|w-w'|^2/4}.$$

A lo largo de este trabajo hemos estado trabajando con la transformada de Bargmann que va de $L^2(\mathbb{R})$ a $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C})$ como

$$(\mathcal{B}_C\psi)(z) = \pi^{-1/4} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{1}{2}(z^2+x^2-2\sqrt{2}zx)}\psi(x)dx$$

con $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. Para ajustar conforme a Daubechies la transformada de Bargmann con la que trabajaremos será

$$(U_B\psi)(z) = \pi^{-1/4} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{1}{2}(\frac{z^2}{2}-x^2-2izx)}\psi(x)dx. \quad (6.1)$$

Por tanto el núcleo integral, es decir, la expresión que nos permite transportar una función en $L^2(\mathbb{R})$ a $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C})$ es

$$A(z, x) = \pi^{-1/4} e^{\frac{1}{2}(\frac{z^2}{2}-x^2-2izx)}. \quad (6.2)$$

Lema 6.1. *Para z fijo, $A(z, x) \in L^2(\mathbb{R})$.*

Demostración.

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} A(z, x) \overline{A(w, x)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \pi^{-1/2} e^{\frac{1}{2}(\frac{z^2}{2}-x^2-2izx)} \cdot e^{\frac{1}{2}(\frac{\bar{w}^2}{2}-x^2+2i\bar{w}x)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \pi^{-1/2} e^{\frac{1}{2}z\bar{w}} e^{-x^2-ix(z-\bar{w})+\frac{1}{4}(z-\bar{w})^2} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \pi^{-1/2} e^{\frac{1}{2}z\bar{w}} e^{-\{x-(\frac{i}{2}(z-\bar{w}))\}^2} dx \\ &= \pi^{-1/2} e^{\frac{1}{2}z\bar{w}} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du = \pi^{-1/2} \cdot \pi^{1/2} e^{\frac{1}{2}z\bar{w}} \\ &= e^{\frac{1}{2}z\bar{w}} \end{aligned}$$

□

Por tanto la transformada de Bargmann

$$U_B : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{H}L^2(\mathbb{C})$$

dada por

$$(U_{\mathcal{B}}\psi)(z) = \int_{\mathbb{R}} A(z, x)\psi(x)dx \quad \psi \in L^2(\mathbb{R})$$

es un operador bien definido. Esto lo podemos afirmar por el lema anterior, y por el hecho de que $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, aplicando entonces la desigualdad de Hölder, tendremos que $A(z, x)\psi \in L^1(\mathbb{R})$.

El mapeo dado por la ecuación (6.1) es unitario y además tenemos una expresión explícita para su inversa, lo cual veremos en el siguiente teorema.

Teorema 6.1. *El mapeo dado por*

$$U_{\mathcal{B}} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{H}L^2(\mathbb{C})$$

$$(U_{\mathcal{B}}\psi)(z) = \pi^{-1/4} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}z^2 - x^2 - 2izx)}\psi(x)dx$$

es unitario y tiene un inverso, dado para $f \in \mathcal{H}L^2(\mathbb{C})$

$$(U_{\mathcal{B}}^{-1}f)(x) = \pi^{-1/4} \int_{\mathbb{C}} e^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\bar{z}^2 - x^2 + 2i\bar{z}x)}f(z)d\mu(z) \quad (6.3)$$

donde la medida $d\mu(z)$ esta dada por

$$d\mu(z) = \frac{1}{2\pi} \exp\{-\frac{1}{2}|z|^2\}d(\operatorname{Re} z)d(\operatorname{Im} z).$$

Demostración. La prueba la realizaremos en cuatro pasos. El primero es comprobar que para cada $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ su transformada $U_{\mathcal{B}}\psi$ será analítica. El segundo paso es probar que $U_{\mathcal{B}}\psi$ estará en $L^2(\mathbb{C}, \rho(z))$ con $\rho(z) = (1/2\pi)e^{-|z|^2/2}$. El tercer paso es probar que $U_{\mathcal{B}}$ es una isometría y por último que es unitario.

Paso 1. Sea $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ y sea γ una curva cerrada en \mathbb{C} . Veamos que $A(z, x)\psi(x)$ debe de estar en $L^1(\mathbb{R} \times \gamma)$ esto es

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \int_{\mathbb{R}} |A(z, x)\psi(x)|dx dz & \\ & \leq \int_{\gamma} \|A(z, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} dz \\ & = \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \int_{\gamma} e^{\frac{1}{4}|z|^2} dz < \infty \end{aligned}$$

Con esto podemos utilizar el teorema de Fubini para el intercambio de integrales.

Para verificar que la transformada de Bargmann de ψ es analítica, usaremos el teorema de Morera, por lo que primero verificamos que es continua.

Sean $\{z_m\}$ y z_0 en \mathbb{C} tales que $z_m \rightarrow z$, tenemos entonces que demostrar $U_{\mathcal{B}}\psi(z_m) \rightarrow U_{\mathcal{B}}\psi(z_0)$. Así

$$\begin{aligned} & |U_{\mathcal{B}}\psi(z_m) - U_{\mathcal{B}}\psi(z_0)| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} [A(z_m, x) - A(z_0, x)] \psi(x) dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |A(z_m, x) - A(z_0, x)| \cdot |\psi(x)| dx \\ &= \pi^{-1/4} \int_{\mathbb{R}} |e^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}z_m^2 - x^2 - 2iz_mx)} - e^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}z_0^2 - x^2 - 2iz_0x)}| \cdot |\psi(x)| dx \\ &= \pi^{-1/4} \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)| \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot |e^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}z_m^2 - 2iz_mx)} - e^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}z_0^2 - 2iz_0x)}| dx. \end{aligned}$$

Como deseamos tomar el límite cuando $m \rightarrow \infty$ necesitamos acotar a

$$|e^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}z_m^2 - 2iz_mx)} - e^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}z_0^2 - 2iz_0x)}|.$$

Para esto consideremos la función analítica

$$g(h) := e^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(z_0+h)^2 - 2i(z_0+h)x)}.$$

Así por la formula integral de Cauchy, tenemos que para cualquier curva cerrada γ

$$g(h) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{g(\eta)}{\eta - h} d\eta$$

y

$$g(0) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{g(\eta)}{\eta} d\eta$$

entonces, como $\{z_m\}$ es de Cauchy, tomamos $N \in \mathbb{N}$ tal que $|h| < 1/2$ con $h = z_m - z_0$

$$\begin{aligned} & |e^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}z_m^2 - 2iz_mx)} - e^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}z_0^2 - 2iz_0x)}| \\ &= |g(h) - g(0)| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} |g(\eta)| \left| \frac{1}{\eta - h} - \frac{1}{\eta} \right| d|\eta| \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} |g(\eta)| \frac{|h|}{|\eta - h| \cdot |\eta|} d|\eta| \end{aligned}$$

si en particular γ es la circunferencia centrada en el origen de radio 1, entonces $|\eta - h| \geq 1/2$ y $|\eta| = 1$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} |g(\eta)| |d\eta| \leq \frac{1}{2} \max_{\eta \in \gamma} \{g(\eta)\}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{2}x^2} \left| e^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}z_m^2 - 2iz_mx)} - e^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}z_0^2 - 2iz_0x)} \right| \\ \leq e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot \frac{1}{2} \max_{\eta \in \gamma} \{g(\eta)\} \in L^1(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

con esto, como la función exponencial es continua, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \left| U_{\mathcal{B}}\psi(z_m) - U_{\mathcal{B}}\psi(z_0) \right| \\ \leq \pi^{-1/4} \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)| \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \lim_{m \rightarrow \infty} \left| e^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}z_m^2 - 2iz_mx)} - e^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}z_0^2 - 2iz_0x)} \right| \\ = 0. \end{aligned}$$

Tenemos entonces

$$\int_{\gamma} U_{\mathcal{B}}\psi(z) dz = \int_{\gamma} \int_{\mathbb{R}} A(z, x) \psi(x) dx dz$$

esta expresión tiene sentido pues $A(z, x)\psi(x) \in L^1(\mathbb{R} \times \gamma)$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} U_{\mathcal{B}}\psi(z) dz \\ = \pi^{-1/4} \int_{\mathbb{R}} \int_{\gamma} e^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}z^2 - x^2 - 2izx)} \psi(x) dx dz \\ = \pi^{-1/4} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \psi(x) \int_{\gamma} e^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}z^2 - 2izx)} dz dx \end{aligned}$$

además la función $e^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}z^2 - 2izx)}$ es analítica en z , y por el teorema de Cauchy

$$\int_{\gamma} e^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}z^2 - 2izx)} dz = 0$$

por tanto

$$\int_{\gamma} U_{\mathcal{B}}\psi(z) dz = 0.$$

Aplicando el teorema de Morera, tenemos que $U_{\mathcal{B}}\psi$ es analítica.

Paso 2. Para $0 < \lambda < 1$ verificamos que las siguientes integrales sean finitas

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left| A(\lambda z, x) \psi(x) \overline{A(\lambda z, y) \psi(y)} \right| dx dy \\ & \leq \|A(\lambda z, \cdot)\|_{L(\mathbb{R})} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}} \left| \overline{A(\lambda z, y) \psi(y)} \right| dy \quad (\text{A}) \\ & \leq \|A(\lambda z, \cdot)\|_{L(\mathbb{R})}^2 \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ & = e^{\frac{1}{2}\lambda^2|z|^2} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 < \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{R}^2} \left| A(\lambda z, x) \psi(x) \overline{A(\lambda z, y) \psi(y)} \right| dx dy d\mu(z) \\ & \leq \int_{\mathbb{C}} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 e^{-\frac{1}{2}\lambda^2|z|^2} d\mu(z) \quad (\text{B}) \\ & = (2\pi)^{-1} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \int_{\mathbb{C}} e^{\frac{1}{2}\lambda^2|z|^2} e^{-\frac{1}{2}|z|^2} dz < \infty \end{aligned}$$

pues $0 < \lambda < 1$.

Así, como $U_{\mathcal{B}}\psi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Sea

$$(U_{\mathcal{B}}\psi)_{\lambda}(z) = U_{\mathcal{B}}\psi(\lambda z) \quad \text{con } 0 < \lambda < 1$$

Esta construcción la hacemos con el propósito de usar el teorema de Fubini y para que el núcleo integral $A(\lambda z, x)$ esté en $L^2(\mathbb{C}, \mu)$ con $0 < \lambda < 1$. Entonces trataremos de usar una cota uniforme para $\|(U_{\mathcal{B}}\psi)_{\lambda}\|_{L^2(\mathbb{C}, d\mu)}$.

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{C}} (U_{\mathcal{B}}\psi)_{\lambda}(z) \overline{(U_{\mathcal{B}}\psi)_{\lambda}(z)} d\mu(z) \\ & = \int_{\mathbb{C}} \left(\int_{\mathbb{R}} A(\lambda z, x) \psi(x) dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{A(\lambda z, y) \psi(y)} dy \right) d\mu(z) \end{aligned}$$

por (A) aplicando Fubini, se tiene

$$= \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} A(\lambda z, x) \psi(x) \overline{A(\lambda z, y) \psi(y)} dx dy d\mu(z)$$

por (B) aplicando Fubini se tiene

$$= \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \overline{\psi(y)} \int_{\mathbb{C}} A(\lambda z, x) \overline{A(\lambda z, y)} d\mu(z) dx dy$$

Ahora supongamos por el momento que ψ es una función continua de soporte compacto, esto es, $\psi \equiv 0$ fuera de la esfera B_r centrada en el origen y de radio r .

En analogía a la ecuación (A) es fácil ver que si se realiza la integración en x e y en B_r , entonces, la integral anterior es absolutamente convergente.

Aplicando técnicas estándares de los espacios de Bargmann [2] tenemos

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1} \int_{\mathbb{C}} (U_{\mathcal{B}}\psi)_{\lambda}(z) \overline{(U_{\mathcal{B}}\psi)_{\lambda}(z)} = \int_{B_r} |\psi(s)|^2 ds = \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

Se sigue de aquí que las normas $\|(U_{\mathcal{B}}\psi)_{\lambda}\|_{L^2(\mathbb{C}, d\mu)}$ para $0 < \lambda < 1$ están uniformemente acotadas. Además, como $U_{\mathcal{B}}\psi$ es analítica se sigue que $(U_{\mathcal{B}}\psi)_{\lambda} \in \mathcal{HL}^2(\mathbb{C})$ y lo que es más, $U_{\mathcal{B}}\psi \in \mathcal{HL}^2(\mathbb{C})$. Por tanto

$$\|U_{\mathcal{B}}\psi\|_{L^2(\mathbb{C}, d\mu)}^2 = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \|(U_{\mathcal{B}}\psi)_{\lambda}\|_{L^2(\mathbb{C}, d\mu)}^2 = \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

Así $U_{\mathcal{B}}$ es una isometría sobre las funciones continuas en \mathbb{R} de soporte compacto.

Paso 3. Sea $\psi_0 \in L^2(\mathbb{R})$. Como el conjunto de funciones continuas de soporte compacto es denso en $L^2(\mathbb{R})$, existe una sucesión $\{\psi_j\}$ de estas funciones tales que convergen a ψ_0 en norma. Sean $f_0 = U_{\mathcal{B}}\psi_0$ y $f_j = U_{\mathcal{B}}\psi_j$. La sucesión $\{f_j\}$ es de Cauchy en $\mathcal{HL}^2(\mathbb{C})$ puesto que

$$\|f_j - f_k\|_{L^2(\mathbb{C}, d\mu)} = \|U_{\mathcal{B}}\psi_j - U_{\mathcal{B}}\psi_k\|_{L^2(\mathbb{C}, d\mu)} = \|\psi_j - \psi_k\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Entonces existe $g \in \mathcal{HL}^2(\mathbb{C})$ tal que $f_j \rightarrow g$ en norma. Nótese que en el espacio de Bargmann la convergencia en norma implica convergencia puntual en todas partes, esto es, por la existencia del núcleo reproductor se tiene que

$$f_j(z) = \left\langle \overline{K(z, \cdot)}, f_j \right\rangle = \left\langle \overline{K(z, \cdot)}, g \right\rangle = g(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Así $g(z) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(z)$ para cada z . Como $A(z, x) \in L^2(\mathbb{R})$ tenemos que

$$|f_0(z) - f_j(z)| \leq e^{\frac{1}{4}|z|^2} \|\psi_0 - \psi_j\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

lo cual implica que $f_0 = g$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \|U_{\mathcal{B}}\psi_0\|_{L^2(\mathbb{C}, d\mu)} &= \lim_{j \rightarrow \infty} \|U_{\mathcal{B}}\psi_j\|_{L^2(\mathbb{C}, d\mu)} \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \|\psi_j\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\psi_0\|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

establece que $U_{\mathcal{B}}$ es una isometría sobre $L^2(\mathbb{R})$.

Paso 4. Debido a que $U_{\mathcal{B}}$ es una isometría, implica que es inyectiva, por lo que solo queda por probar que es sobre, pero basta con mostrar que $\text{Ran } U_{\mathcal{B}}$ es denso en $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C})$. Como $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C})$ es un espacio de Hilbert podemos verlo como

$$\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}) = \overline{(\text{Ran } U_{\mathcal{B}})} \oplus (\text{Ran } U_{\mathcal{B}})^{\perp}.$$

Entonces nos queda por demostrar que $(\text{Ran } U_{\mathcal{B}})^{\perp} = \{0\}$. Para esto, sea $F \in (\text{Ran } U_{\mathcal{B}})^{\perp}$ y $e_w(z) = e^{-\frac{1}{2}z\bar{w}}$ el núcleo reproductor de este espacio de Bargmann, observemos que $e_w(z)$ está en el rango de $U_{\mathcal{B}}$ por tanto

$$\begin{aligned} (U_{\mathcal{B}}A(\bar{w}, \cdot))(z) &= \int_{\mathbb{R}} A(z, x)A(\bar{w}, x)dx \\ &= e_w(z) \end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned} \langle e_w(z), F \rangle_{\mathcal{H}L^2(\mathbb{C})} &= \langle K(z, \cdot), F \rangle_{\mathcal{H}L^2(\mathbb{C})} \\ &= \int_{\mathbb{C}} K(z, w)F(w)d\mu(w) = F(z). \end{aligned}$$

Por estar F en el complemento ortogonal del núcleo, $F(z) = 0$ para toda z . Por tanto el $\text{Ran } U_{\mathcal{B}}$ es denso y así, $U_{\mathcal{B}}$ es unitario.

Por la teoría estandar de los espacios de Bargmann, la inversa de $U_{\mathcal{B}}$ está dada como

$$\begin{aligned} (U_{\mathcal{B}}^{-1}f)(x) &= \int_{\mathbb{C}} \overline{A(z, x)}f(z)d\mu(z) \\ &= \pi^{-1/4} \int_{\mathbb{C}} e^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\bar{z}^2 - x^2 + 2i\bar{z}x)} f(z)d\mu(z) \end{aligned}$$

que es la ecuación (6.3) pero de manera similar a lo escrito por Bargmann al final de la sección uno de su artículo $A(\cdot, x) \notin L^2(\mathbb{C}, \rho)$ por lo que debemos definir a $U_{\mathcal{B}}^{-1}$ de otro modo. Para ello, dada [2] $f \in U_{\mathcal{B}}$ consideremos la familia $\{f_{\lambda}\}$ definida como

$$f_{\lambda}(z) = f(\lambda z).$$

Tenemos $f_{\lambda} \in \mathcal{H}L^2(\mathbb{C})$ pues $f \in \mathcal{H}L^2(\mathbb{C})$ utilizando la ecuación (2.2)

$$|f(\lambda z)|^2 \leq K(\lambda z, \lambda z)\|f_{\lambda}\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

de donde, para α una constante

$$|f_\lambda(z)| \leq \alpha \cdot e^{\frac{1}{4}\lambda^2|z|^2} \quad (6.4)$$

$$(U_{\mathcal{B}}^{-1}f)(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 1} (U_{\mathcal{B}}^{-1}f_\lambda)(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \int_{\mathbb{C}} \overline{A(z, \cdot)} f(\lambda z) d\mu(z)$$

otra versión de la inversa está dada como

$$U_{\mathcal{B}}^{-1}f = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_{|z| \leq \sigma} \overline{A(z, \cdot)} f(z) d\mu(z)$$

□

Un hecho por demás interesante es que la imagen de e_{p+iq} bajo la transformación $U_{\mathcal{B}}^{-1}$ va a parar a una función gaussiana, como lo veremos en el siguiente teorema

Teorema 6.2. *la imagen de e_{p+iq} bajo $U_{\mathcal{B}}^{-1}$ es la función $\varphi^{p,q}$, definida como*

$$\varphi^{p,q} = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{ixp} e^{-\frac{1}{2}ipq} e^{-\frac{1}{2}(x-q)^2} \quad \text{con } p, q \in \mathbb{R} \quad (6.5)$$

Demostración. Convenimos en que si

$$e_w(z) = e^{-\frac{1}{4}|w|^2} e^{\frac{1}{2}\overline{w}z} \quad \text{entonces} \quad e_{p+iq}(w) = e^{-\frac{1}{4}(p^2+q^2)} e^{\frac{1}{2}(p-iq)w}$$

de donde

$$\begin{aligned} & U_{\mathcal{B}}^{-1}e_{p+iq}(x) \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_{|w| \leq \sigma} \pi^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\overline{w}^2 - x^2 + 2i\overline{w}x)} e^{-\frac{1}{4}(p^2+q^2)} e^{\frac{1}{2}(p-iq)w} d\mu(w) \end{aligned}$$

en particular con

$$w = u + iv \quad \text{y} \quad d\mu(w) = e^{-\frac{1}{2}|w|^2} \frac{1}{2\pi} d(\operatorname{Re} w) d(\operatorname{Im} w)$$

se tiene

$$\begin{aligned} & U_{\mathcal{B}}^{-1}e_{p+iq}(x) \\ &= \pi^{-\frac{1}{4}} (2\pi)^{-1} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{-\frac{1}{4}(p^2+q^2)} \\ & \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{4}u^2 - \frac{3}{4}v^2 - \frac{1}{2}iuv + iux + vx} e^{\frac{1}{2}(pu+ipv-iq+qv)} dudv \end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned}
& U_{\mathcal{B}}^{-1} e_{p+iq}(x) \\
&= \pi^{-\frac{1}{4}} (2\pi)^{-1} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{-\frac{1}{4}(p^2+q^2)} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{4}[u+(iv-2ix-p+iq)]^2} du \\
&\quad e^{\frac{1}{4}(iv-2ix-p+iq)^2} e^{-\frac{3}{4}v^2+vx+\frac{1}{2}ipv+\frac{1}{2}qv} dv \\
&= \pi^{-\frac{1}{4}} (2\pi)^{-1} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{-\frac{1}{4}(p^2+q^2)} (4\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} e^{\frac{1}{4}(p^2-q^2)} \\
&\quad e^{ixp} e^{-\frac{1}{2}ipq} e^{xq} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-(v-x)^2} dv \right) \cdot e^{x^2} \\
&= \pi^{-\frac{1}{4}} (2\pi)^{-1} 2(\pi)^{\frac{1}{2}} (\pi^{\frac{1}{2}}) e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{xq} e^{-\frac{1}{2}q^2} e^{ixp} e^{-\frac{1}{2}ipq} \\
&= \pi^{-\frac{1}{4}} e^{ixp} e^{-\frac{1}{2}ipq} e^{-\frac{1}{2}(x-q)^2}.
\end{aligned}$$

□

De hecho $\varphi^{p,q}$ está en $L^2(\mathbb{R})$, y además $\|\varphi^{p,q}\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$, como a continuación se muestra

$$\begin{aligned}
& \|\varphi^{p,q}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}} |\pi^{-\frac{1}{4}} e^{ixp} e^{-\frac{1}{2}ipq} e^{-\frac{1}{2}(x-q)^2}|^2 dx \\
&= \pi^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} 1 \cdot 1 \cdot e^{-(x-q)^2} = \pi^{-1/2} \cdot \pi^{1/2} = 1.
\end{aligned}$$

El valor absoluto de $\varphi^{p,q}$ es una curva gaussiana con pico en $x = q$; el valor absoluto de la transformada de Fourier de $\varphi^{p,q}$ es también una curva gaussiana con pico en p , como a continuación se indica

$$\begin{aligned}
& \widehat{\varphi}^{p,q}(\xi) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}ipq} e^{ixp} e^{-\frac{1}{2}(x-q)^2} e^{-i\xi x} dx \\
&= \frac{\pi^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}ipq} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x-q)^2+ixp-i\xi x} dx.
\end{aligned}$$

la expresión que representa al exponente de la exponencial que se esta integrando puede ser reescrita como

$$-\frac{1}{2}(x-q)^2 + ixp - i\xi x = -\frac{1}{2}(x-q)^2 + i(p-\xi)x$$

haciendo $y = x - q$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2}y^2 + i(p - \xi)y + i(p - \xi)q \\ &= -\frac{1}{2}[y - i(p - \xi)]^2 + i(p - \xi)q - \frac{1}{2}(p - \xi)^2, \end{aligned}$$

si hacemos el cambio de variable $u = y - i(\xi + p)$, $du = dy = dx$ tendremos

$$\widehat{\varphi}^{p,q}(\xi) = \frac{\pi^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}ipq} e^{i(p-\xi)q} e^{-\frac{1}{2}(p-\xi)^2}$$

es decir

$$|\widehat{\varphi}^{p,q}(\xi)| = \text{const} \cdot e^{-\frac{1}{2}(p-\xi)^2}.$$

La función (6.5) es conocida en Física como estados coherentes canónicos y en Procesamiento de señales como wavelets de Gabor.

La motivación principal para el capítulo actual es el estudio de la descomposición de una $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ cualquiera, en la familia discreta de estados coherentes

$$\begin{aligned} \varphi_{mn} &= \varphi^{ma,nb} \quad m, n \in \mathbb{Z} \\ \varphi_{m,n}(x) &= \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}imnab} e^{imax} e^{-\frac{1}{2}(x-nb)^2}. \end{aligned}$$

Donde a y b son estrictamente positivas para diversos valores de a y b , vamos a analizar el tipo de expansiones que nos producen las familias $(\varphi_{mn})_{m,n \in \mathbb{Z}}$. Notemos que la familia $(\varphi_{mn})_{m,n \in \mathbb{Z}}$ corresponde a un retículo doblemente periódico de puntos en el plano complejo generados por los números a e ib .

$$\begin{aligned} U_B^{-1} \varphi_{mn} &= e_{z_{mn}}, \\ z_{mn} &= ma + inb. \end{aligned}$$

Como ya hemos visto en el capítulo anterior, la familia $(\varphi_{mn})_{m,n \in \mathbb{Z}}$ posee las siguientes características

- Si $ab > 2\pi$ entonces la familia $(\varphi_{mn})_{m,n \in \mathbb{Z}}$ no es completa en $L^2(\mathbb{R})$.
- Si $ab \leq 2\pi$ entonces los vectores $(\varphi_{mn})_{m,n \in \mathbb{Z}}$ pueden darnos una fórmula para la expansión de una ψ cualquiera en $L^2(\mathbb{R})$.

Es importante remarcar que para $ab \leq 2\pi$ los vectores φ_{mn} no son “ ω -independientes”. Según la siguiente definición.

Definición 6.1. ω -independencia. Decimos que un conjunto $\{\phi_m\}_{m \in \mathcal{A}}$ es ω -independiente si para todo $\phi' \in \{\phi_m\}_{m \in \mathcal{A}}$ se tiene

$$\phi' \notin \overline{\text{span}(\{\phi_m\}_{m \in \mathcal{A}} - \{\phi'\})}.$$

En caso contrario llamaremos a la familia $\{\phi_m\}_{m \in \mathcal{A}}$ ω -dependiente

Es decir

- Si $ab \leq 2\pi$ entonces existe al menos un vector φ' con $\varphi' \in \{\varphi_{m,n}\}_{mn}$ tal que

$$\varphi' \in \overline{\text{span}(\{\varphi_{mn}\}_{mn} - \{\varphi'\})}.$$

- Si $ab = 2\pi$, ocurre que al remover uno de los vectores de la familia φ_{mn} convierte al conjunto restante en un conjunto ω -independiente.
- Si $ab < 2\pi$, ocurre que la familia $(\varphi_{mn})_{m,n \in \mathbb{Z}}$ permanecerá ω -dependiente, aún cuando se remueva cualquier cantidad finita de φ_{mn} 's.

Estamos interesados en expansiones de la forma

$$\psi = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} c_{mn} \varphi_{mn} \quad (6.6)$$

para cualquier $\psi \in L^2(\mathbb{R})$.

A continuación enunciaremos las condiciones fundamentales para esta descomposición.

La familia de vectores $(\varphi_{mn})_{m,n \in \mathbb{Z}}$ define un mapeo T que va de los vectores en $L^2(\mathbb{R})$ a las sucesiones (m, n) de números complejos, por medio de la ecuación

$$(T\psi)_{mn} = \langle \varphi_{mn}, \psi \rangle \quad \psi \in L^2(\mathbb{R}). \quad (I)$$

Se sigue de argumentos que daremos más adelante, que este mapeo que va de $L^2(\mathbb{R})$ a $l^2(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ es acotado para todo $a, b > 0$. Esto es, para todo $\psi \in L^2(\mathbb{R})$.

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle \varphi_{mn}, \psi \rangle| \leq \mathbf{M}(a, b) \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2. \quad (II)$$

El adjunto de T es el mapeo que va de l^2 a $L^2(\mathbb{R})$ definido por

$$T^*c = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} c_{mn} \varphi_{mn}. \quad (III)$$

Para todo $c = (c_{mn})_{m,n \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$. Se tiene entonces que para todo $\psi \in L^2(\mathbb{R})$

$$T^*T\psi = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \varphi_{mn} \langle \varphi_{mn}, \psi \rangle \quad (\text{IV})$$

Si T^*T está acotado por la izquierda con cota mayor que cero, esto es, si existe una constante $\mathbf{m}(a, b) > 0$ tal que para todo $\psi \in L^2(\mathbb{R})$

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle \varphi_{mn}, \psi \rangle|^2 \geq \mathbf{m}(a, b) \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \quad (\text{V})$$

entonces el rango de T^*T es todo $L^2(\mathbb{R})$ y T^*T tiene inversa acotada. Para todo $g \in L^2(\mathbb{R})$, $g = T^*T\psi$, obtenemos de (IV) que

$$g = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \varphi_{mn} \langle \varphi_{mn}, (T^*T)^{-1}g \rangle. \quad (\text{VI})$$

Esto nos da una expresión de g en terminos de φ_{mn} . Notemos que (V) no es solo una condición suficiente, sino también necesaria para la existencia de una expansión del tipo (6.6) con coeficientes c_{mn} que son de cuadrado sumable para una $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ arbitraria.

Una vez que tengamos que (V) se cumpla, nuestro análisis y procedimiento de reconstrucción es como sigue. Para cada $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ le asociamos un conjunto de coeficientes bien definidos $c_{mn}(\psi)$ dados por

$$c_{mn}(\psi) = \langle \varphi_{mn}, (T^*T)^{-1}g \rangle \quad (\text{VII})$$

La sucesión $c(\psi) = (c_{mn}(\psi))_{m,n \in \mathbb{Z}}$ está en l^2 , la función ψ puede ser reconstruida desde esta sucesión por

$$\psi = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} c_{mn} \varphi_{mn} \quad (\text{VIII})$$

En general la sucesión $(c_{mn}(\psi))_{m,n \in \mathbb{Z}}$ no es la única sucesión que satisface (6.6) para una $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. Esto es porque el rango de T muy bien pudiera ser un subespacio cerrado propio de l^2 . De entre todas las sucesiones $(c_{mn})_{m,n \in \mathbb{Z}}$ que satisfacen (6.6), con ψ fija, la sucesión $(c_{mn}(\psi))_{m,n \in \mathbb{Z}}$ es la que tiene norma mínima. Vamos a probar más adelante que (V) se cumple con $\mathbf{m} > 0$, para $ab = 2\pi/N$, N entero $N \geq 2$ y daremos una fórmula explícita en este caso.

Las ecuaciones (VII) y (VIII) para el caso $ab = 2\pi$ nos conducirán a que (V) no se cumpla, dado que tenemos la función generada a partir de la función σ de Weierstrass – vista en el capítulo anterior – que nos ayudará a probar esta afirmación.

Con esto, tenemos las herramientas necesarias para enunciar el siguiente teorema

Teorema 6.3. *Definamos $z_{m,n} = ma + inb$ donde $a, b > 0$*

$$e_{mn} = e_{z_{mn}}$$

esto es

$$e_{mn}(z) = e^{-\frac{1}{4}|z_{mn}|^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}z \cdot \overline{z_{mn}}}.$$

Para N un entero $N \geq 1$ y $t, s \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ sea

$$\begin{aligned} S(b, N; t, s) &= \frac{b}{\sqrt{\pi}} e^{-s^2 b^2} \sum_{r=0}^{N-1} \left| \theta_3 \left(t - \frac{r}{N} - i \frac{b^2}{2\pi} s \middle| \frac{ib^2}{2\pi} \right) \right|^2 \\ &= \frac{b}{\sqrt{\pi}} \sum_{r=0}^{N-1} \left| \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i l (t - \frac{r}{N})} e^{-\frac{1}{2} b^2 (s-l)^2} \right|^2 \end{aligned}$$

donde θ_3 es una de las funciones theta de Jacobi con la notación de Bateman [5]

$$\begin{aligned} \theta_3(z|\tau) &= 1 + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \cos 2\pi l z \cdot e^{i\pi \tau l^2} \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{i2l\pi z} \cdot e^{i\pi \tau l^2}. \end{aligned}$$

Entonces

(C) para todo $a, b > 0$ y para toda $f \in \mathcal{HL}^2\mathbb{C}$

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle e_{mn}, f \rangle|^2 \leq \mathbf{M}_1(a, b) \cdot \|f\|^2 \quad (\text{IX})$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |f(z_{mn})|^2 e^{-\frac{1}{2}|z_{mn}|^2} &\leq \\ \mathbf{M}_1(a, b) \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(z)|^2 e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \frac{d(\operatorname{Re} z) d(\operatorname{Im} z)}{2\pi} & \quad (\text{X}) \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1(a, b) &= \theta_3\left(0 \middle| \frac{ia^2}{4\pi}\right) \cdot \theta_3\left(0 \middle| \frac{ib^2}{4\pi}\right) \\ &= \left(1 + 2 \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}a^2 l^2}\right) \cdot \left(1 + 2 \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}b^2 l^2}\right) \end{aligned} \quad (\text{XI})$$

(D) Para $ab = 2\pi/N$, con N un entero, $N \geq 1$, la desigualdad anterior es susceptible de ser afinada. Esto es (IX) y (X) se siguen cumpliendo si reemplazamos $\mathbf{M}_1(2\pi/Nb, b)$ por la constante mas pequeña

$$\mathbf{M}_2\left(\frac{2\pi}{Nb}, b\right) = \sup_{t, s \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} S(b, N; t, s). \quad (\text{XII})$$

Para el caso $ab = 2\pi/N$, (XII) es la mejor constante posible, pues tomando (IX)

$$\sup_{f \in \mathcal{HL}^2(\mathbb{C}), f \neq 0} \left(\|f\|^{-2} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} |\langle e_{mn}, f \rangle|^2 \right) = \mathbf{M}_2\left(\frac{2\pi}{Nb}, b\right) \quad (\text{XIII})$$

(E) Para $ab = 2\pi/N$ con N un entero, $N \geq 2$ tenemos mas aun que

$$\sum_{m, n \in \mathbb{Z}} |\langle e_{mn}, f \rangle|^2 \geq \mathbf{m}\left(\frac{2\pi}{Nb}, b\right) \cdot \|f\|^2 \quad (\text{XIV})$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} |f(z_{mn})|^2 e^{-\frac{1}{2}|z_{mn}|^2} &\geq \\ \mathbf{m}\left(\frac{2\pi}{Nb}, b\right) \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(z)|^2 e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \frac{d(\operatorname{Re} z) d(\operatorname{Im} z)}{2\pi} &\end{aligned} \quad (\text{XV})$$

con

$$\mathbf{m}\left(\frac{2\pi}{Nb}, b\right) = \inf_{t, s \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} S(b, N; t, s) > 0. \quad (\text{XVI})$$

De nuevo, esta es la mejor constante posible en las desigualdades (XIV) y (XV), esto es

$$\inf_{f \in \mathcal{HL}^2(\mathbb{C}), f \neq 0} \left(\|f\|^{-2} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} |\langle e_{mn}, f \rangle|^2 \right) = \mathbf{m}\left(\frac{2\pi}{Nb}, b\right) \quad (\text{XVII})$$

(F) En el caso $ab \geq 2\pi$, no hay una constante $\mathbf{m}(a, b) > 0$ para la cual (XIV) se cumpla para toda $f \in \mathcal{H}L^2(\mathbb{C})$. Es decir, hay al menos una $f \neq 0$ tal que

$$\inf_{f \in \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}), f \neq 0} \left(\|f\|^{-2} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} |\langle e_{mn}, f \rangle|^2 \right) = 0 \quad \text{si } ab \geq 2\pi \quad (\text{XVIII})$$

Por el momento dejamos pendiente las demostraciones de las afirmaciones anteriores, pues necesitamos ciertas interconexiones entre la transformada de Zak y los operadores de Weyl, lo cual veremos en la siguiente sección.

6.1. La transformada de Zak y los operadores de Weyl.

Definición 6.2. La transformada de Zak [1]. Para $\alpha > 0$ la transformada de Zak con $V_{z, \alpha} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$

$$V_{z, \alpha} f(t, s) = \sqrt{\alpha} \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i t l} f(\alpha(s - l)).$$

Estrictamente hablando, la serie en el lado derecho de la definición de la transformada de Zak no necesariamente converge para cualquier $f \in L^2(\mathbb{R})$. Para $f \in C_0^\infty$ es decir el conjunto C^∞ de las funciones infinito diferenciables con soporte compacto, la transformada de Zak está bien definida y se tiene que $\|V_{z, \alpha} f\|_Q = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$ con $Q = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ como a continuación verificamos en el siguiente teorema.

Teorema 6.4. La transformada de Zak es unitaria y va de $L^2(\mathbb{R})$ a $L^2([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$.

Demostración.

$$\begin{aligned} & \|V_{z, \alpha} f\|_Q^2 \\ &= \int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \alpha \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i t l} f(\alpha(s - l)) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{e^{2\pi i t k} f(\alpha(s - k))} ds dt \\ &= \alpha \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i t(l-k)} dt \int_{-1/2}^{1/2} f(\alpha(s - l)) \overline{f(\alpha(s - k))} ds \end{aligned}$$

la integral de $e^{2\pi it(l-k)}$ se anula excepto cuando k y l coinciden

$$= \alpha \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{-1/2}^{1/2} |f(\alpha(s-l))|^2 ds = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{-1/2}^{1/2} |f(\alpha s - \alpha l)|^2 d(\alpha s)$$

aplicando la relación de Parseval

$$= \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Se verifica la última igualdad pues $|f(\alpha s - \alpha l)|^2$ se anula fuera de un compacto.

Dado que C_0^∞ es denso en $L^2(\mathbb{R})$, podemos extender $V_{z,\alpha}$ a todo $L^2([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$. De aquí $V_{z,\alpha}$ es unitaria. \square

La inversa de la transformada de Zak [1] se escribe como

$$(V_{z,b}^{-1}\varphi)(x) = \sqrt{b} \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi it \lfloor \frac{x}{b} + \frac{1}{2} \rfloor} \varphi\left(t, \frac{x}{b} - \left\lfloor \frac{x}{b} + \frac{1}{2} \right\rfloor\right) dt$$

donde la notación $\lfloor y \rfloor$ denota el más grande entero que no excede a y .

Ahora definamos los operadores de Weyl.

Definición 6.3. *Los operadores de Weyl son una familia de operadores unitarios $W(p, q)$ en $L^2(\mathbb{R})$, con*

$$[W(p, q)f](x) = e^{-\frac{1}{2}ipq} e^{ipx} f(x - q) \quad \text{con } f \in L^2(\mathbb{R})$$

Los operadores de Weyl, como vimos en el capítulo 3 son de importancia fundamental en la Mecánica cuántica, puesto que cada estado coherente $\varphi^{p,q}$ puede ser visto como una órbita de la familia de operadores de Weyl actuando en el estado base $\varphi^{0,0}$

$$\varphi^{p,q} = W(q, p)\varphi^{0,0} \quad \text{con } \varphi^{0,0} = \pi^{-1/4} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Para cualquier $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ la subfamilia de operadores de Weyl $W(m2\pi/\alpha, n\alpha)$ con $m, n \in \mathbb{Z}$ es abeliana, como a continuación verificamos

$$\begin{aligned} \left[W\left(m\frac{2\pi}{\alpha}, n\alpha\right) f \right](x) &= e^{-imn\pi} e^{im\frac{2\pi}{\alpha}x} f(x - n\alpha) \\ &= (-1)^{mn} e^{im\frac{2\pi}{\alpha}x} f(x - n\alpha) \end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned} & \left[W\left(m'\frac{2\pi}{\alpha}, n'\alpha\right) W\left(m\frac{2\pi}{\alpha}, n\alpha\right) f \right](x) \\ &= (-1)^{m'n'} (-1)^{mn} e^{im'\frac{2\pi}{\alpha}x} \cdot e^{im'\frac{2\pi}{\alpha}(x-n'\alpha)} \cdot f(x - n'\alpha - n\alpha). \end{aligned}$$

Mientras que si invertimos los factores

$$\begin{aligned} & \left[W\left(m\frac{2\pi}{\alpha}, n\alpha\right) W\left(m'\frac{2\pi}{\alpha}, n'\alpha\right) f \right](x) \\ &= (-1)^{m'n'} (-1)^{mn} e^{im'\frac{2\pi}{\alpha}x} \cdot e^{im'\frac{2\pi}{\alpha}(x-n\alpha)} \cdot f(x - n'\alpha - n\alpha) \end{aligned}$$

ambas expresiones solo difieren por los factores $e^{im'\frac{2\pi}{\alpha}(-n'\alpha)}$ y $e^{im'\frac{2\pi}{\alpha}(-n\alpha)}$ que son exactamente igual a 1, por tanto la subfamilia es abeliana.

La siguiente relación nos vincula la subfamilia abeliana con la transformada de Zak

$$\begin{aligned} & \left[V_{Z,\alpha} W\left(m\frac{2\pi}{\alpha}, n\alpha\right) f \right](t, s) \\ &= (-1)^{mn} \sqrt{\alpha} \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{2\pi itl} e^{im2\pi(s-l)} \cdot f(\alpha s - \alpha l - n\alpha) \\ &= (-1)^{mn} e^{-2\pi itn} e^{2\pi ims} \cdot [V_{z,\alpha} f](t, s). \end{aligned}$$

Esto implica que para todo $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ con $Q = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$$\begin{aligned} & \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \left| \langle W\left(m\frac{2\pi}{\alpha}, n\alpha\right) f, g \rangle \right|^2 \\ &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \left| \langle V_{Z,\alpha} W\left(m\frac{2\pi}{\alpha}, n\alpha\right) f, V_{Z,\alpha} g \rangle_Q \right|^2 \\ &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \left| \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi itn} e^{-2\pi ims} \overline{(V_{Z,\alpha} f)(t, s)} (V_{Z,\alpha} g)(t, s) \right|^2 ds dt \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} |(V_{Z,\alpha} f)(t, s)|^2 |(V_{Z,\alpha} g)(t, s)|^2 ds dt. \end{aligned}$$

Apliquemos esto al problema que tenemos a la mano. Supongamos que $ab = 2\pi/N$ con N un entero, $N \geq 1$, tomemos $\alpha = b$. Para $m = Nk + r$ con $k, r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < N$

$$\begin{aligned} \varphi_{mn} &= W(ma, nb) \varphi_{00} = W\left(k\frac{2\pi}{b} + r\frac{2\pi}{Nb}, nb\right) \varphi_{00} \\ &= e^{i\pi r \frac{n}{N}} W\left(k\frac{2\pi}{b}, nb\right) W\left(\frac{2\pi}{Nb}r, 0\right) \varphi_{00}. \end{aligned}$$

Además, por otro lado

$$\begin{aligned} & \left[V_{Z,b} W\left(\frac{2\pi}{Nb}r, 0\right) \varphi_{00} \right](t, s) \\ &= \sqrt{b\pi}^{-1/4} \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i t l} e^{i 2\pi \frac{r}{N}(s-l)} e^{-\frac{1}{2}b^2(s-l)^2} \\ &= \sqrt{b\pi}^{-1/4} e^{2\pi i r \frac{s}{N}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i l(t - \frac{r}{N})} e^{-\frac{1}{2}b^2(s-l)^2}. \end{aligned}$$

De aquí

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^{N-1} \left| \left[V_{Z,b} W\left(\frac{2\pi}{Nb}r, 0\right) \varphi_{00} \right](t, s) \right|^2 \\ &= \frac{b}{\sqrt{\pi}} \sum_{r=0}^{N-1} \left| \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i l(t - \frac{r}{N})} e^{-\frac{1}{2}b^2(s-l)^2} \right|^2 \\ &= S(b, N; t, s). \end{aligned}$$

Verificadas estas relaciones, podemos demostrar el siguiente teorema que es de lo más importante en este capítulo.

Teorema 6.5. $V_{Z,b} T^* T V_{Z,b}^{-1}$ visto como operador, es la multiplicación por $S(b, N; t, s)$.

Demostración.

$$\begin{aligned} \langle f, T^* T f \rangle &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle \varphi_{mn}, f \rangle|^2 \\ &= \sum_{k,n \in \mathbb{Z}} \sum_{r=0}^{N-1} \left| \langle W\left(k \frac{2\pi}{b}, nb\right) W\left(\frac{2\pi}{Nb}r, 0\right) \varphi_{00}, f \rangle \right|^2 \\ &= \sum_{r=0}^{N-1} \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} \left| \left[V_{Z,b} W\left(\frac{2\pi}{Nb}r, 0\right) \varphi_{00} \right](t, s) \right|^2 |(V_{Z,b} f)(t, s)|^2 ds dt \end{aligned}$$

aplicando la identidad de Parseval

$$= \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} S(b, N; t, s) |(V_{Z,b} f)(t, s)|^2 ds dt.$$

□

6.1. LA TRANSFORMADA DE ZAK Y LOS OPERADORES DE WEYL.125

Una consecuencia inmediata de este teorema es que podemos recuperar de forma explícita $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ en términos de los estados coherentes, φ_{mn} como en (VII) y (VIII). Esto lo hacemos en el siguiente teorema.

Teorema 6.6. *Sean $a, b > 0$ tal que $2\pi/ab$ es un entero $N \geq 2$. Sea φ_{mn} la familia de estados coherentes asociados*

$$\varphi_{mn}(x) = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\pi i \frac{m}{N}} e^{2\pi i m \frac{x}{Nb}} e^{-\frac{1}{2}(x-nb)^2}$$

entonces $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ puede ser escrita como

$$\psi = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} c_{mn}(\psi) \varphi_{mn}$$

con $m = Nk + r$, $m, k, r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < N$.

Demostración.

$$\begin{aligned} c_{mn}(\psi) &= c_{Nk+r,n}(\psi) = \langle \varphi_{Nk+r,n}, (T * T)^{-1} \psi \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \left\langle V_{Z,b} \varphi_{Nk+r,n}, \frac{1}{S(b, N; t, s)} V_{Z,b} \psi \right\rangle_Q \end{aligned}$$

haciendo uso de que $\varphi_{Nk+r,n}$ se puede escribir en términos de la subfamilia conmutativa de los operadores de Weyl y del estado base φ_{00}

$$\begin{aligned} &= \left\langle V_{Z,b} \left(e^{i\pi r \frac{r}{N}} W \left(k \frac{2\pi}{b}, nb \right) \left(\frac{2\pi}{Nb} r, 0 \right) \varphi_{00} \right), \frac{1}{S(b, N; t, s)} V_{Z,b} \psi \right\rangle_Q \\ &= \sqrt{b} \pi^{-\frac{1}{4}} (-1)^{kn} e^{i\pi n \frac{r}{N}} \cdot \\ &\quad \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i s(k + \frac{r}{N})} e^{2\pi i t n} e^{-\frac{1}{2} b^2 s^2} \\ &\quad \theta_3 \left(t - \frac{r}{N} - i \frac{b^2}{2\pi} s \middle| \frac{i b^2}{2\pi} \right) \frac{(V_{Z,b} \psi)(t, s)}{S(b, N; t, s)} ds dt. \end{aligned}$$

Esto es fácil de ver pues

$$\begin{aligned}
& V_{Z,b} \left(e^{i\pi r \frac{n}{N}} W \left(k \frac{2\pi}{b}, nb \right) W \left(\frac{2\pi}{Nb} r, 0 \right) \varphi_{00} \right) \\
&= (-1)^{kn} e^{i\pi r \frac{n}{N}} e^{-2\pi i t n} e^{2\pi i k s} \left(V_{Z,b} W \left(\frac{2\pi}{Nb} r, 0 \right) \varphi_{00} \right) (t, s) \\
&= (-1)^{kn} e^{i\pi r \frac{n}{N}} e^{-2\pi i t n} e^{2\pi i k s} \sqrt{b\pi}^{-\frac{1}{4}} e^{2\pi i r \frac{s}{N}} \\
&\quad \cdot \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i l (t - \frac{r}{N})} e^{-\frac{1}{2} b^2 (s-l)^2} \\
&= \sqrt{b\pi}^{-\frac{1}{4}} (-1)^{kn} e^{i\pi n \frac{r}{N}} e^{2\pi i s (k + \frac{r}{N})} e^{-2\pi i t n} e^{-\frac{1}{2} b^2 s^2} \\
&\quad \cdot \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i l (t - \frac{r}{N})} e^{-\frac{1}{2} b^2 (-2sl + l^2)} \\
&= \sqrt{b\pi}^{-\frac{1}{4}} (-1)^{kn} e^{i\pi n \frac{r}{N}} e^{2\pi i s (k + \frac{r}{N})} e^{-2\pi i t n} e^{-\frac{1}{2} b^2 s^2} \\
&\quad \cdot \theta_3 \left(t - \frac{r}{N} - i \frac{b^2}{2\pi} s \middle| \frac{i b^2}{2\pi} \right).
\end{aligned}$$

□

A lo largo de esta sección es como hemos construido herramientas muy poderosas para el estudio de los retículos. Con estas herramientas nos preparamos para demostrar los incisos (I) al (XVIII) que quedaron pendientes.

6.2. Demostraciones de (I) al (XVIII).

Para dos estados coherentes cualesquiera $\varphi_{m,n}$ y $\varphi_{m',n'}$ tenemos

$$\begin{aligned}
& |\langle \varphi_{m,n}, \varphi_{m',n'} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}| \\
&= |\langle U_{\mathcal{B}}^{-1} e_{z_{m,n}}, U_{\mathcal{B}}^{-1} e_{z_{m',n'}} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}| \\
&= |\langle e_{z_{m,n}}, e_{z_{m',n'}} \rangle_{\mathcal{H}L^2(\mathbb{C})}| \\
&= e^{-\frac{1}{4}(m-m')^2 a^2 - \frac{1}{4}(n-n')^2 b^2}.
\end{aligned}$$

De hecho para todo $m', n' \in \mathbb{Z}$ aplicando Schwarz

$$\begin{aligned} \sum_{m', n' \in \mathbb{Z}} |\langle \varphi_{m, n}, \varphi_{m', n'} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}| \\ \leq \left[\sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{1}{4}m^2 a^2} \right] \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{1}{4}n^2 b^2} \right] \\ = \theta_3\left(0 \middle| \frac{ia^2}{4\pi}\right) \theta_3\left(0 \middle| \frac{ib^2}{4\pi}\right) \\ = M = \mathbf{M}_1(a, b). \end{aligned}$$

Una condición suficiente para que la matriz hermitiana infinita $(\langle \varphi_{m, n}, \varphi_{m', n'} \rangle)_{m, n, m', n'}$ defina un operador acotado en $l^2(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ está dada de la siguiente manera

$$\sum_{m', n' \in \mathbb{Z}} |\langle \varphi_{m, n}, \varphi_{m', n'} \rangle| \leq M$$

y esta es precisamente la desigualdad que ya tenemos verificada con $M = \mathbf{M}_1(a, b)$. Por otro lado, T es el operador que va de $L^2(\mathbb{R})$ a l^2 definido por $(Tf)_{mn} = \langle \varphi_{mn}, f \rangle$; mientras que para $c = (c_{mn})_{m, n \in \mathbb{Z}} \in l^2$, TT^*c está dada por

$$(TT^*c)_{mn} = \sum_{m', n' \in \mathbb{Z}} \langle \varphi_{m, n}, \varphi_{m', n'} \rangle c_{m', n'}$$

que es equivalente a

$$T^*T = U_{\mathcal{B}}^{-1} \left(\sum_{m, n \in \mathbb{Z}} e_{mn} \langle e_{mn}, \cdot \rangle \right) U_{\mathcal{B}} = \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \varphi_{m, n} \langle \varphi_{m, n}, \cdot \rangle$$

así, tenemos

$$\|TT^*\| \leq \mathbf{M}_1(a, b) \quad \text{ó} \quad \|T\| \leq \mathbf{M}_1(a, b)^{1/2}.$$

Con lo cual probamos las cotas de (IX) y (XI); (X) es equivalente a (IX). Del teorema espectral de operadores [17] tenemos que un operador acotado es equivalente a un operador de multiplicación. Para el caso de $T^*T \in \text{Bound } L^2(\mathbb{R})$ hemos visto a lo largo de la sección anterior que es unitariamente equivalente a la multiplicación por $S(b, N; t, s)$.

Hemos probado que para $ab = 2\pi/N$, N entero, $N \geq 1$

$$V_{Z, b} T^* T V_{Z, b}^{-1} = \text{multiplicación por } S(b, N; t, s).$$

En consecuencia

$$\inf_{t,s \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} S(b, N; t, s) \leq T^*T \leq \sup_{t,s \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} S(b, N; t, s)$$

lo cual prueba (XII),(XIII) y (XIV),(XV). La continuidad de la función $S(b, N; \cdot, \cdot)$ implica, más aun, que estas son las mejores cotas inferior y superior respectivamente.

Para $ab = 2\pi$, ($N = 1$), T^*T es unitariamente equivalente a la multiplicación por $S(b, 1; t, s)$, dado que

$$\theta_3\left(\frac{1}{2} - i\frac{b^2}{4\pi} \middle| \frac{ib^2}{2\pi}\right) = 0 \quad \text{tenemos que} \quad S(b, 1; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 0.$$

Esto implica que el espectro de T^*T es de la forma $[0, \Gamma]$. De aquí se sigue (XVIII).

Si de forma afortunada $ab = 2\pi/N$ con N un entero, $N \geq 2$, entonces $(\sqrt{\pi}/b)S(b, N; t, s)$ es la suma de al menos dos cuadrados de valores absolutos de funciones θ_3 , esto implica

$$\inf_{t,s \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} S(b, N; t, s) > 0 \quad \text{ó} \quad \mathbf{m}\left(\frac{2\pi}{Nb}, b\right) > 0.$$

A continuación, damos dos tablas que nos dan los valores numéricos para las constantes $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$, para $ab = 2\pi$; y de $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{m}$, para $ab = 2\pi$
Tabla I.

b	$\mathbf{M}_1(2\pi/b, b)$	$\mathbf{M}_2(2\pi/b, b)$
.5	7.090	7.090
1.0	3.545	3.545
1.5	2.422	2.365
2.0	2.073	1.824
2.5	2.015	1.669
3.0	2.050	1.769
3.5	2.159	1.992
4.0	2.339	2.260

Tabla II.

b	$\mathbf{M}_1(\pi/b, b)$	$\mathbf{M}_2(2\pi/b, b)$	$\mathbf{m}(\pi/b, b)$
.5	7.091	7.090	.0007
1.0	4.146	3.546	.601
1.5	4.001	2.482	1.540
2.0	4.000	2.425	1.600
2.5	4.014	2.843	1.178
3.0	4.100	3.387	.713
3.5	4.319	3.949	.369
4.0	4.679	4.514	.165

6.3. Conclusiones.

En el presente trabajo se ha realizado un análisis detallado de las condiciones de completez para los retículos de estados coherentes. Dado un retículo fijo, las condiciones para poder recuperar una función en $L^2(\mathbb{R})$ se obtienen bajo dos esquemas teóricos; uno (Bargmann *et al.*, [2]) haciendo uso del comportamiento asintótico de las funciones enteras, el otro (Daubechies *et al.*, [8]) hace uso de los métodos de la teoría de operadores.

Daubechies y Grossman [8] hacen uso de la transformada de Bargmann para establecer el problema de la completez de la siguiente manera: Dada una función que se anula en los puntos de una retícula encontrar el escenario en que se anula en todo el espacio de Bargmann. La recuperación de una función $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ se da entonces de forma explícita usando el teorema espectral de operadores. Toman en cuenta que si a una cierta subfamilia conmutativa de operadores de Weyl aplicada sobre una función f , le aplican la transformada de Zak, lo que obtienen será la transformada de Zak de la función f multiplicada por un factor del tipo $(-1)^{mn}e^{-2\pi tn}$. Luego para $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, $\psi = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} c_{mn} \varphi_{mn}$, y los c_{mn} dependen de la transformada de Zak y de las funciones θ_3 de Jacobi.

Es precisamente este último método el que nos interesa en un futuro inmediato pues queremos realizar este mismo estudio de condiciones de completez para los estados coherentes sobre la esfera S^2 , siguiendo el trabajo de Villegas-Blas [21], [22], [23], es decir, analizar las condiciones de recuperación del espacio $L^2(S^2)$ teniendo una transformada semejante a la de Zak que preserve simetrías y alguna periodicidad.

También como proyecto futuro queremos trabajar la teoría de Wavelets relacionada a este tipo de problemas, ya que, como vimos en este trabajo aparecen cuando a un estado coherente le aplicamos la transformada inversa de Bargmann, además, participan en la recuperación de la $\psi \in L^2(\mathbb{R})$.

Bibliografía

- [1] H. Bacry, A. Grossman, J.Zak. *Proof of completeness of lattice states in the kq representation*. Phys. Review. Vol 12, 4 (1975).
- [2] V. Bargmann. *On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform. Part I*. Comm. Pure Appl. Math. Vol 14, 187 (1961).
- [3] V. Bargmann, P. Butera, L. Girardello and J. R. Klauder. *On the completeness of coherent states*, Rep. on Math. Phys, Vol 2, 4 (1971).
- [4] S. Bergman. *The kernel function and conformal mapping*. Mathematical Surveys and Monographs. AMS. 1970.
- [5] H. Bateman. *Higher transcendental functions*. McGraw-Hill. 1953.
- [6] R. P. Boas. *Entire functions*. Academic Press. 1954.
- [7] J. B. Conway. *Functions of One Complex Variable I*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag. 1978.
- [8] I. Daubechies, A. Grossmann. *Frames in the Bargmann space of entire functions*. Comm. Pure and Appl. Math. Vol 41, 2 (1988).
- [9] B. C. Hall. *Holomorphic methods in Analysis and Mathematical Physics*. Contemporary Mathematics Vol.260. AMS. 2000.
- [10] B. C Hall. *Lie Groups, Lie Algebras and representations*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag. 2003.
- [11] K. Knopp. *Theory of Functions*. Dover. 1996.
- [12] B.Ya. Levin. *Lectures on Entire Functions*, Translations of Mathematical Monographs Vol.150. AMS. 1996.

- [13] E. H Lieb, M. Loss. *Analysis*, Graduate Studies in Mathematics. AMS. 2001.
- [14] J. E. Marsden, M.Hoffman. *Análisis Básico de Variable Compleja* . Trillas. 2000.
- [15] A.M.Perelomov. *On the completeness of a system of coherent states*, Teor. Mat. Fiz. Vol 6, 213 (1971).
- [16] A.M.Perelomov. *Generalized Coherent States and their applications*. Text and monographs in Physics. Springer-Verlag. 1986.
- [17] M.Reed, B.Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics Vol. I : Functional Analysis*. Academic Press. 1980.
- [18] M.Reed, B.Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics Vol. II : Fourier Analysis, Self Adjointness*. Academic Press. 1980.
- [19] W. Rudin.*Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill. 1970.
- [20] E. Schrödinger. *Naturwissenschaften* Vol 14, 664 (1926).
- [21] C. Villegas-Blas. *The Bargmann transform and canonical transformations*. J. Math. Phys. Vol.43, 5, (2002).
- [22] C. Villegas-Blas. *The Bargmann transform for $L^2(S^3)$ and regularizations of the Kepler problem*. Contemporary Mathematics Vol.307. AMS-SMM. (2002).
- [23] C. Villegas-Blas. *The Bargmann transform and regularization of the 2,3,5-dimensional Kepler problem*. J. Math. Phys , 47, 062110-35 (2006).