Un Teorema de Extensión Equivariante

Alumno: Saúl Juárez Ordóñez

Tutor: Sergey Antonyan

Índice general

Introducción

Este trabajo se enmarca dentro de la teoría equivariante de retractos, la cual surge al considerar conceptos y problemas análogos a los de la teoría de retractos dentro de la teoría de grupos topológicos de transformaciones.

La introducción del concepto de grupo en otras ramas de la matemática enriqueció profundamente su estudio. En geometría ésto resultó esencial. A finales del siglo XIX, en una conferencia conocida como el Programa de Erlangen, el matemático alemán Felix Klein propuso la definición general de geometría:

Geometría es la ciencia que estudia las propiedades de las figuras que se preservan bajo transformaciones de un cierto grupo de transformaciones, o bien, la ciencia que estudia los invariantes de un grupo de transformaciones.

Aún más preciso[1], un sistema geométrico queda determinado por un espacio geométrico o dominio de acción X, un grupo G de simetrías o transformaciones de X, que preserven las propiedades interesantes de las figuras en X y el elemento generador o elemento más simple en X que construye a todas las figuras por considerar.

En el otro sentido, la teoría de grupos también se enriquecío al introducir conceptos topológicos en su estudio, surgiendo así el concepto de grupo topológico, es decir, un grupo G junto con una topología que hace continuas a las operaciones del grupo:

$$(g,h) \mapsto gh \ ; \ g \mapsto g^{-1},$$

[1] Una discusión detallada de esta definición se puede encontrar en [11, cap. 7].

Luego, al considerar como dominio de acción a un espacio topológico X y al grupo de simetrías G como un grupo topológico, se llega al concepto de grupo topológico de transformaciones. Formalmente, dados un espacio topológico X y un grupo topológico G tal que cada $g \in G$ es un homeomorfismo de X en X:

$$\theta(g, x) = g(x) \in X \ ; \ g \in G, \ x \in X,$$

a la terna (G, X, θ) o algunas veces a G mismo, se le llama un grupo topológico de transformaciones si para cada $g, h \in G$ y $x \in X$,

$$g(h(x)) = gh(x)$$

y si $\theta(g, x) = g(x)$ es continua simultáneamente en $x \in X$ y en $g \in G$. Al ser cada $g \in G$ inyectiva, se sigue que para cada $x \in X$,

$$e(x) = x$$

donde e es la identidad en G. A $\theta : G \times X \to X$ se le llama una acción de G en X.

En este sentido, dado un grupo topológico G, a la categoría de los espacios topológicos en donde G actúa se le denota por G-$\mathcal{TOP}$, a los objetos de esta categoría se les llama G-espacios y los morfismos son funciones continuas, llamadas funciones equivariantes, $X \xrightarrow{f} Y$ que conmutan con la acción de G:

$$g(f(x)) = f(g(x)) \ ; \ g \in G, \ x \in X.$$

Cuando la acción de G es trivial ($g(x) = x$; $g \in G$, $x \in X$), la categoría G-$\mathcal{TOP}$ coincide con la categoría de los espacios topológicos y funciones continuas $\mathcal{TOP}$. Por esta razón, el estudio de los G-espacios generaliza en cierto sentido el de los espacios topológicos. Problemas y conceptos puramente topológicos pueden tener su análogo equivariante en la categoría G-$\mathcal{TOP}$. En particular, el problema de extensión de funciones continuas y el concepto de retracción, que estan íntimamente relacionados, se formulan de la siguiente manera:

En el problema de extensión de funciones equivariantes, nos preguntamos cuándo es posible extender equivariantemente una función equivariante f de un subconjunto cerrado e invariante A de un G-espacio X, en un G-espacio

Y a todo X, o bien a una vecindad de A en X.

Una retracción equivariante es simplemente una extensión equivariante de la identidad en Y a todo X, o bien a una vecindad de Y en X y Y es llamado un G-retracto, o bien un G-retracto de vecindad de X. De esta manera surge la teoría equivariante de retractos. Nuevamente, si la acción es trivial, el problema de extensión de funciones equivariantes se reduce al de extensión de funciones continuas y una retracción equivariante es simplemente una retracción. Por esta razón, resulta interesante estudiar el otro sentido, es decir, determinar cuando una propiedad $\mathcal{P}$, que concierne a espacios topológicos, implica su análogo equivariante G-$\mathcal{P}$ en la categoría G-$\mathcal{TOP}$ cuando la acción de G no es trivial.

En este trabajo se estudia un teorema de extensión equivariante que nos muestra precisamente el hecho de cuándo una propiedad no equivariante $\mathcal{P}$, implica la existencia de una propiedad equivariante íntimamente relacionada a $\mathcal{P}$, cuando la acción de G no necesariamente es trivial. Este resultado es muy importante, pues del mismo se sigue una caracterización de espacios G-AR (G-ANR) métricos separables de dimensión finita con un número finito de tipos orbitales [5, Teorema 4.2]. El resultado es debido a Jan Jaworowski y dice lo siguiente:

Sean G un grupo topológico compacto de Lie, X un G-espacio métrico separable, A un subconjunto cerrado e invariante de X tal que $X - A$ es de dimensión finita y tiene un solo tipo orbital (H) y $f : A \to Y$ una función equivariante a un G-espacio metrizable Y. Si el conjunto de puntos fijos Y^H es un retracto absoluto (retracto absoluto de vecindad), entonces f se extiende equivariantemente a todo X (a una vecindad de A en X).

El primer capítulo introduce formalmente la teoría de grupos topológicos de transformaciones. El segundo capítulo estudia los resultados fundamentales que se usan en la demostración del Teorema de Extensión de Jaworowski y aunque no se reproducen todas las demostraciones debido a lo extenso del tema, se menciona una referencia adecuada.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se introducen los conceptos básicos de la teoría de grupos topológicos de transformaciones y de la teoría de haces fibrados. Se trata el caso particular de acciones de grupos compactos.

1.1. Grupos Topológicos de Transformaciones

Un ***grupo topológico de transformaciones*** es una terna (G, X, θ), donde G es un grupo topológico, X es un espacio topológico de Hausdorff y $\theta : G \times X \to X$ es una función continua tal que:

(1) $\theta(g, \theta(h, x)) = \theta(gh, x)$, para todo $g, h \in G$ y $x \in X$;

(2) $\theta(e, x) = x$, para todo $x \in X$, donde e es la identidad de G.

A θ se le llama una ***acción*** de G en X y a X junto con una acción dada θ de G, un ***G-espacio*** (izquierdo). El concepto análogo de G-espacio derecho es cuando $\theta : X \times G \to X$ es continua y satisface las versiones correspondientes (1) y (2). También se dice que G ***actúa*** en X via θ.

En la literatura se usa la notación $g(x)$, $g \cdot x$ o simplemete gx para $\theta(g, x)$ cuando θ se entienda del contexto y no haya confusión. Igualmente, para $H \subset G$ y $A \subset X$, escribimos

$$HA = \{gx : g \in H, x \in A\}$$

para $\theta(H \times A)$. En particular, para cada $x \in X$,

$$Gx = \{gx : g \in G\}$$

es llamada la ***órbita*** de x (bajo G) y a un subconjunto A de X que cumpla que $GA = A$, se le llama ***invariante*** (respecto de la acción dada de G en X). Así, un subconjunto invariante de un G-espacio, es también un G-espacio. En particular, cada órbita es un conjunto invariante.

Un grupo topológico G puede ser visto como un G-espacio, con las acciones de translación por izquierda $g(h) = gh$, translación por derecha $g(h) = hg^{-1}$ o por conjugación $g(h) = ghg^{-1}$. También, un espacio cociente G/H, con H un subgrupo cerrado de G, es un G-espacio con la acción $k(gH) = kgH$.

Ahora bien, para cada $g \in G$, la acción θ de G en X induce naturalmente la función continua $\theta_g : X \to X$ definida por:

$$\theta_g(x) = \theta(g, x) = gx.$$

Así, tenemos que $\theta_g\theta_h = \theta_{gh}$ y $\theta_e = 1_X$, donde 1_X es la identidad en X. Luego, $\theta_{g^{-1}} = \theta_g^{-1}$ y por lo tanto θ_g es un homeomorfismo para cada $g \in G$.

En virtud de lo anterior, tenemos la siguiente proposición, que empieza a distinguir a las acciones de grupos compactos.

Proposición 1.1.1 *La acción θ de G en X es abierta y si G es compacto, la acción θ también es cerrada.*

Demostración. Sea $H \times A$ un abierto básico en $G \times X$. Entonces $HA = \bigcup_{h\in H} hA = \bigcup_{h\in H} \theta_h(A)$ es abierto en X pues θ_g es un homeomorfismo para cada $g \in G$. Ahora, supongamos que G es compacto y sean C cerrado en $G \times X$ y $x \in \overline{\theta(C)}$. Entonces existe una red (g_i, x_i) en C tal que $\theta(g_i, x_i) = g_i x_i \to x$. Como G es compacto, podemos suponer que $g_i \to g \in G$ y por lo tanto $g_i^{-1} \to g^{-1}$. Luego, $x_i = \theta(g_i^{-1}, g_i x_i) = g_i^{-1}(g_i x_i) \to g^{-1}x$. Así, $(g_i, x_i) \to (g, g^{-1}x) \in C$ pues C es cerrado y por lo tanto $x = \theta(g, g^{-1}x) \in \theta(C)$. ∎

Corolario 1.1.1 *Si A es cerrado (compacto) en un G-espacio X y G es compacto, entonces GA es cerrado (compacto) en X.*

Demostración. Basta notar que si A es cerrado (compacto) en X, entonces $G \times A$ es cerrado (compacto) en $G \times X$. ∎

Observemos que dos órbitas Gx y Gy o bien son iguales o ajenas, pues si $kx = hy$ para $k, h \in G$ y $x, y \in X$ entonces, para cada $g \in G$, sucede que $gx = gk^{-1}kx = gk^{-1}hy \in Gy$ y así, $Gx \subset Gy$. Análogamente se tiene que $Gy \subset Gx$.

De lo anterior, se obtiene una descomposición de X en clases de equivalencia. Al conjunto de clases de equivalencia se le denota por X/G y, a la función $\pi : X \to X/G$ que asocia a cada $x \in X$ su clase de equivalencia, es decir, su órbita Gx, se le llama ***proyección orbital***. Así, a X/G dotado de la topología cociente via π se le llama ***espacio orbital*** de X (con respecto de G). Si $A \subset X$ y $x \in \pi^{-1}\pi(A)$, entonces $Gx \subset GA$ y, si $ga \in GA$, entonces $\pi(ga) = \pi(a) \in \pi(A)$. Luego, se tiene que $\pi^{-1}\pi(A) = GA$ y se le llama la ***saturación*** de A.

Algunas propiedades topológicas importantes como ser primero y segundo numerable son invariantes bajo identificaciones abiertas, y otras como la metrizabilidad lo son para funciones perfectas ([8, Proposición 2.3] y [3, Cap. 3 Sec. 7]). Recordemos que una función perfecta $f : X \to Y$, es una función cerrada con fibras compactas, es decir, para cada $y \in Y$, sucede que $f^{-1}(y)$ es compacto. La siguiente proposición nos muestra la riqueza de las acciones de grupos compactos.

Proposición 1.1.2 *La proyección orbital $\pi : X \to X/G$ es una función abierta y, si G es compacto, entonces π es cerrada y, mas aún, π es perfecta.*

Demostración. Sea U abierto en X. Como θ_g es un homeomorfismo para cada $g \in G$, $\pi^{-1}\pi(U) = GU = \bigcup_{g\in G} gU = \bigcup_{g\in G} \theta_g(U)$ es abierto en X y por lo tanto $\pi(U)$ es abierto en X/G. Ahora, supongamos que G es compacto y sea C cerrado en X. Entonces $\pi^{-1}\pi(C) = GC$ es cerrado en X por el Corolario 1.1.1 y por lo tanto $\pi(C)$ es cerrado en X/G. Finalmente, $\pi^{-1}(Gx) = Gx$ es compacto por el Corolario 1.1.1. ∎

Cuando el grupo topológico G está fijo, los G-espacios forman una categoria, denotada G-$\mathcal{TOP}$, cuyos morfismos son llamados funciones equivariantes. Así pues, una función ***equivariante*** $\phi : X \to Y$ entre dos G-espacios es una función continua que conmuta con las acciones del grupo, es decir, para cada $g \in G$ y $x \in X$, se tiene que

$$\phi(gx) = g\phi(x).$$

Una función equivariante $\phi : X \to Y$ que también es un homeomorfismo es llamada una ***equivalencia*** de G-espacios. En este caso, la inversa ϕ^{-1} de ϕ también es equivariante pues si $y = \phi(x)$ y $g \in G$, entonces:

$$\phi^{-1}(gy) = \phi^{-1}(g\phi(x)) = \phi^{-1}\phi(gx) = gx = g\phi^{-1}(y).$$

Otro ejemplo de un G-espacio se obtiene mediante un producto fibrado, ésto es, dados tres G-espacios X, Y y Z y dos funciones equivariantes $f : X \to Z$ y $h : Y \to Z$, el ***producto fibrado*** o ***pull-back*** es el subespacio $X \times_Z Y = \{(x, y) : f(x) = h(y)\}$ de $X \times Y$. Con la acción diagonal $g(x, y) = (gx, gy)$, $X \times_Z Y$ es un G-espacio y las proyecciones proj_X y proj_Y son funciones equivariantes.

El G-espacio $X \times_Z Y$ satisface la propiedad universal del pull-back, es decir, si W es un G-espacio y $\alpha : W \to X$ y $\beta : W \to Y$ son funciones equivariantes tales que $f\alpha = h\beta$, entonces existe una única función equivariante $\Theta : W \to X \times_Z Y$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, dotted, "\Theta"] \arrow[drr, bend left, "\alpha"] \arrow[ddr, bend right, "\beta"'] & & \\
& X \times_Z Y \arrow[r, "\mathrm{proj}_X"] \arrow[d, "\mathrm{proj}_Y"] & X \arrow[d, "f"] \\
& Y \arrow[r, "h"] & Z
\end{tikzcd} \tag{1.1}$$

conmuta. De hecho, Θ esta dada por $\Theta(w) = (\alpha(w), \beta(w))$ para cada $w \in W$.

Ahora, para cada $x \in X$, el conjunto

$$G_x = \{g \in G : gx = x\}$$

es un subgrupo de G y es llamado el ***subgrupo estabilizador*** de G en x, o el ***grupo de isotropía*** de x. Si $G_x = G$ para algún $x \in X$, se dice que x es un ***punto fijo*** de la acción de G en X y al conjunto de puntos fijos se le denota por X^G, el cual es cerrado en X [8, Proposición 2.8].

Luego, si $\phi : X \to Y$ es una función equivariante entre G-espacios, entonces $G_x \subset G_{\phi(x)}$ para cada $x \in X$. En particular, si $x \in X^G$, entonces $\phi(x) \in Y^G$.

Ahora bien, para cada $x \in X$, la acción θ de G en X induce naturalmente la función continua $\theta^x : G \to Gx$, llamada ***movimiento***, definida por:

$$\theta^x(g) = \theta(g, x) = gx.$$

Una consecuencia directa de la continuidad de θ^x es que si G es compacto (conexo), entonces las órbitas son compactas (conexas). Si además G es compacto y X es T_1, los subgrupos estabilizadores de G son compactos pues $G_x = (\theta^x)^{-1}(x)$ es cerrado en G para cada $x \in X$.

Se dice que una acción de G en X es ***transitiva*** si tiene una sola órbita, es decir, si $Gx = X$ para cada $x \in X$.

Como G actúa transitivamente por translación en G y en Gx, la función movimiento θ^x es equivariante para cada $x \in X$. Por el Teorema de Transgresión aplicado a la proyección orbital $q : G \to G/G_x$ donde G_x actúa por translación en G, tenemos que θ^x induce una única función continua

$$\overline{\theta^x} : G/G_x \to Gx$$

tal que $\overline{\theta^x}q = \theta^x$, es decir, $\overline{\theta^x}$ esta definida por $\overline{\theta^x}(gG_x) = \theta^x(g) = gx$. Como $gx = hx$ si y solo si $h^{-1}g \in G_x$ tenemos que $\overline{\theta^x}$ está bien definida y es inyectiva. Además es suprayectiva y por lo tanto es una biyección. Más aún, cuando G actúa por translación en G/G_x, $\overline{\theta^x}$ es equivariante, pues

$$\overline{\theta^x}(g'gG_x) = g'gx = g'\overline{\theta^x}(gG_x).$$

Observación. Cuando G es compacto y X es de Hausdorff, la función $\overline{\theta^x}$ es cerrada y por lo tanto un homeomorfismo, o bien, una equivalencia de G-espacios. De hecho, G/H y Gx son equivalentes para todo subgrupo H de G en la clase de conjugación $(G_x) = \{gG_xg^{-1} : g \in G\}$.

Ahora, dado un grupo compacto G, a la subcategoría de G-$\mathcal{TOP}$ de los G-espacios transitivos y funciones equivariantes se le llama la ***categoría de***

las G-órbitas. Por la observación anterior, tenemos que cada objeto de esta categoría es equivalente a un espacio de clases laterales G/H, para algún subgrupo cerrado H de G. Así, los morfismos en esta categoría quedan caracterizados por funciones equivariantes entre espacios de clases laterales.

Para ésto, se define una relación $\leq$ entre clases conjugadas de subgrupos cerrados H y K de G de la siguiente forma:

$$(H) \leq (K) \text{ si y solo si existe } K' \in (K) \text{ tal que } H \subset K'.$$

De [8, Proposición 5.10], tenemos que $\leq$ es un orden parcial y por lo tanto que dos G-espacios transitivos de Hausdorff X y X' son equivalentes si y sólo si los grupos de isotropía de puntos en X y en X' son conjugados, o bien, que pertenecen a una misma clase de conjugación (H) y ambos son equivalentes a G/H. Notemos que toda órbita Gx es un G-espacio transitivo.

Así, se dice que un G-espacio X tiene un solo ***tipo de órbitas*** (H) si para cada $x \in X$, $G_x \in (H)$. Decimos que una acción de G en X es ***libre*** si $G_x = \{e\}$ para cada $x \in X$. Claramente un G-espacio libre tiene un solo tipo de órbitas (G_x).

1.2. Haces Fibrados

En esta sección se define la noción de haz fibrado. Éstos generalizan a los espacios producto y sus proyecciones. El estudio de dos espacios X y Y y funciones continuas $f : X \to Y$, es equivalente al estudio del espacio producto $X \times Y$, sus proyecciones en X y en Y y las gráficas de las funciones continuas $f : X \to Y$.

En un haz fibrado, el espacio producto se remplaza por un espacio haz Z y a la proyección en Y se remplaza por una familia de funciones continuas $\{Y_x \to Y : x \in X\}$ tales que cualesquiera dos de ellas difieren por un elemento de un grupo G que actúa en Y. A las gráficas de las funciones continuas $f : X \to Y$ se les remplaza por secciones cruzadas de $Z \to X$.

Se dice que una acción de G en X es ***efectiva*** si $\bigcap_{x\in X} G_x = \{e\}$. Si el G-espacio X no es efectivo, siempre se puede obtener de manera natural un G-espacio efectivo a partir de este [2, Proposición 1.1]. Por esta razón, siempre podemos considerar G-espacios efectivos.

Sean X y B espacios de Hausdorff, G un grupo topológico y Y un G-espacio efectivo derecho. Un ***haz fibrado*** sobre B (llamado ***espacio base***), con ***espacio total*** o ***espacio haz*** X, ***fibra*** Y y ***grupo de estructura*** G, es una función continua

$$p : X \to B$$

llamada ***proyección***, junto con una familia Φ de homeomorfismos

$$\phi : Y \times U \to p^{-1}(U)$$

con U abierto en B, llamados ***cartas sobre*** U tales que:

(1) el diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \times U \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\mathrm{proj}_U"'] & & p^{-1}(U) \arrow[dl, "p"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

conmuta para cada carta $\phi \in \Phi$ sobre U;

(2) para cada $b \in B$ existe una vecindad para la cual hay una carta $\phi \in \Phi$;

(3) si ϕ es una carta sobre U, y $V \subset U$ es abierto, entonces $\phi\mid_V \in \Phi$;

(4) si $\phi, \varphi \in \Phi$ son cartas sobre U, entonces existe una función continua $\Theta : U \to G$ llamada ***función transición*** para las cartas ϕ y φ tal que:

$$\varphi(y, u) = \phi(y \cdot \Theta(u), u),$$

para cada $(y, u) \in Y \times U$;

(5) la familia Φ es maximal entre todas las familias que satisfagan las condiciones anteriores.

En la literatura se usa simplemente a la proyección $p : X \to B$ para denotar al haz fibrado y se le llama simplemente haz.

Ahora, una ***sección cruzada*** para $p : X \to B$ es una función continua $\sigma : B \to X$ tal que $p\sigma = 1_B$. El siguiente teorema nos dice cuando una sección de un haz $p : X \to B$, definida en un subconjunto cerrado de B, se puede extender a todo el espacio base. Este teorema es fundamental en la demostración del Teorema de Jaworowski.

Recordemos que un espacio metrizable Y es un ***retracto absoluto*** (AR) (***retracto absoluto de vecindad*** (ANR)) si es retracto (retracto de vecindad) de cada espacio metrizable en el cual se pueda encajar como subconjunto cerrado. En la clase de los espacios metrizables, ser AR (ANR) es equivalente a ser un ***extensor absoluto*** (AE) (***extensor absoluto de vecindad***(ANE)), precisamente, un espacio $Y \in$ AE (ANE) si para cada par metrizable (A, X) (es decir, A es un subconjunto cerrado de un espacio metrizable X), toda función continua $f : A \to Y$ se puede extender continuamente a todo X (a una vecindad de A en X).

Teorema 1.2.1 *Sea B un espacio métrico separable. Si $p : X \to B$ es un haz con fibra $Y \in$AR (ANR) y A es un subconjunto cerrado de B, entonces toda sección f sobre A de p se puede extender a una sección sobre B de p (sobre una vecindad de A en B).*

Demostración. Haremos la demostración del caso AR. El caso ANR es similar[1].

Como p es un haz, existen una cubierta abierta $\{V_j\}_{j\in J}$ de B y para cada $j \in J$, un homeomorfismo

$$\phi_j : Y \times V_j \to p^{-1}(V_j)$$

tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \times V_j \arrow[rr, "\phi_j"] \arrow[dr, "\mathrm{proj}_j"'] & & p^{-1}(V_j) \arrow[dl, "p"] \\ & V_j & \end{tikzcd}$$

conmuta.

[1]Ver la observación 1.2 inmediata a la demostración del caso AR.

Como B es regular, para todo $b \in B$ existen $j \in J$ y un abierto U_b de B tal que $b \in U_b \subset \overline{U_b} \subset V_j$. Luego, $\{U_b\}_{b \in B}$ es una cubierta abierta de B. Como B es de Lindelöf, existe una subcubierta numerable $\{U_1, U_2, ...\}$ de $\{U_b\}_{b \in B}$.

Definamos $A_0 = A$, $f_0 = f$ e inductivamente, $A_n = \overline{U}_n \cup A_{n-1}$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que para toda $i < n$, existen secciones f_i sobre A_i de p tales que $f_i |_{A_{i-1}} = f_{i-1}$ y construyamos una sección sobre A_n de p de la siguiente manera[2].

Sean $j \in J$ tal que $\overline{U}_n \subset V_j$, $C_n = \overline{U}_n \cap A_{n-1}$ y $g : C_n \to Y$ definida por:

$$g(b) = p_j f_{n-1}(b),$$

donde $p_j : p^{-1}(V_j) \to Y$ es la función continua definida por:

$$p_j(x) = \phi^{-1}_{j,p(x)}(x)$$

y para todo $b \in V_j$, $\phi_{j,b} : Y \to p^{-1}(b)$ es la función continua definida por:

$$\phi_{j,b}(y) = \phi_j(b, y),$$

por lo tanto g es una función continua.

Como C_n es cerrado en $\overline{U}_n$ y $Y \in$ AR, existe una extensión continua h de g a $\overline{U}_n$. Sea $k : \overline{U}_n \to p^{-1}(V_j)$ definida por:

$$k(b) = \phi_j(b, h(b)),$$

entonces k es una función continua tal que $pk(b) = b$ y si $b \in C_n$, entonces

$$h(b) = g(b) = p_j f_{n-1}(b) = \phi^{-1}_{j,pf_{n-1}(b)}(f_{n-1}(b)) = \phi^{-1}_{j,b}(f_{n-1}(b))$$

pues f_{n-1} es una sección sobre A_{n-1} de p y por lo tanto

$$k(b) = \phi_j(b, h(b)) = \phi_{j,b}(h(b)) = f_{n-1}(b),$$

es decir, $k |_{C_n} = f_{n-1} |_{C_n}$.

[2]Ver la observación 1.2 inmediata a esta demostración.

Sea $f_n : A_n \to X$ definida por:

$$f_n(b) = \begin{cases} f_{n-1}(b) & si\ b \in A_{n-1}, \\ k(b) & si\ b \in \overline{U}_n. \end{cases}$$

Entonces f_n es una sección sobre A_n de p. Por inducción, existen secciones f_n sobre A_n tales que $f\mid_{A_{n-1}} = f_{n-1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Notemos que para toda $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{int} A_n \neq \emptyset$ ya que $\operatorname{int} U_n \subset A_n$ y que $A \subset \bigcup$por lo tanto que $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{int} A_n$.

Definamos para toda $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n = f_n\mid_{\operatorname{int} A_n}$. Entonces φ_n es una sección sobre $\operatorname{int} A_n$ de p y si $b \in \operatorname{int} A_{n-1}$, entonces

$$\varphi_n(b) = f_n(b) = f_{n-1}(b) = \varphi_{n-1}(b)$$

para toda $n > 1$, es decir, $\varphi_n\mid_{\operatorname{int} A_{n-1}} = \varphi_{n-1}$.

Finalmente, definamos $F : B \to X$ de la siguiente manera:

$$F(b) = \varphi_n(b) \ \ si \ \ b \in \operatorname{int} A_n.$$

Notemos que F esta bien definida pues $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{int} A_n$ y $\varphi_n\mid_{\int A_{n-1}} = \varphi_{n-1}$ para toda $n > 1$, que extiende a f, pues si $a \in A$, entonces $a \in \operatorname{int} A_n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto

$$F(a) = \varphi_n(a) = f_n(a) = f(a),$$

y que es continua pues si U es abierto en X, entonces $\varphi_n^{-1}(U)$ es abierto en $\operatorname{int} A_n$ y por lo tanto abierto en B para toda $n \in \mathbb{N}$. Luego, $F^{-1}(U) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n^{-1}(U)$ es abierto en B. ∎

Observación. En el caso ANR se prueba por inducción lo siguiente:

Sean $O_0 = \emptyset$, $A_0 = A$ y $f_0 = f$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un cerrado O_n de X con $\operatorname{int} O_n \neq \emptyset$ tal que:

$$C_n = (\overline{U}_n \cap A) \cup (\overline{U}_n \cap \bigcup_{i=0}^{n-1} O_i) \subset O_n \subset \overline{U}_n$$

y existe una sección $f_n : A_n \to B$ *de* p *tal que* $f_n \mid_{A_{n-1}} = f_{n-1}$ *donde* $A_n = A \cup \bigcup_{i=0}^{n} O_i$.

Ahora, si un haz tiene fibra G y grupo de estructura G actuando por translación, se dice que es un ***G-haz principal***. El siguiente teorema tiene un corolario muy importante. Sus demostraciones se pueden leer en [2, p. 72]

Teorema 1.2.2 *Sea* $p : X \to B$ *un haz con fibra* Y *y grupo de estructura* G*. Si* Y *es un* K*-espacio izquierdo y las acciones de* G *y de* K *conmutan, es decir,* $(ky)g = k(yg)$*, entonces existe una única acción de* G *en* X *tal que cada carta* $\phi : Y \times U \to p^{-1}(U)$ *es equivariante, donde* K *actúa en* $Y \times U$ *por* $k \cdot (y, u) = (ky, u)$*.*

Corolario 1.2.1 *Si* $p : X \to B$ *es un G-haz principal, entonces existe una acción libre* θ *de* G *en* X *y* p *induce un homeomorfismo* $X/G \to B$*, y por lo tanto se puede pensar que* p *es la proyección orbital de la acción libre* θ*.*

En el siguiente capítulo, veremos que cuando el grupo G es compacto de Lie y X es completamente regular, se tiene que toda acción libre viene dada por un G-haz principal (Teorema 2.0.4). En este caso, la noción de un G-haz principal y de una acción libre de G en X son equivalentes.

Capítulo 2

Teorema de Extensión de Jaworowski

En este capítulo, se introducen los conceptos de producto torcido, haz asociado y tubo. Se muestra la importancia de las acciones de grupos compactos de Lie mediante un teorema de Gleason y Mostow, el cual asegura la existencia de tubos cuando el grupo que actúa es compacto de Lie y el espacio es completamente regular.

Sean X un G-espacio derecho y Y un G-espacio izquierdo. Se define una acción de G en $X \times Y$ por medio de la fórmula:

$$g(x, y) = (xg^{-1}, gy).$$

Al espacio orbital de esta acción se le llama el ***producto torcido*** de X y Y y se denota por $X \times_G Y$. Un elemento en $X \times_G Y$ se denota por $[x, y]$, es decir, $[x, y]$ es la órbita de (x, y) en $X \times Y$. De modo que dos órbitas $[x, y]$ y $[x', y']$ son iguales si y solo si existe $g \in G$ tal que $x' = xg^{-1}$ y $y' = gy$. En particular, $[xg, y] = [x, gy]$.

Ahora bien, si $p : X \to B$ es un K-haz principal y Y es un K-espacio derecho, entonces la función continua $\pi : Y \times_K X \to B$ definida por:

$$\pi[y, x] = p(x)$$

es un haz con fibra Y y grupo de estructura K y se le llama el Y-***haz asociado*** a p. La demostración de que π es realmente un haz, se puede encontrar en [2, p. 74].

El siguiente teorema nos dice que estudiar las funciones K-equivariantes $f : X \to Y$, es equivalente a estudiar las secciones del Y-haz asociado a un K-haz principal. Para demostrarlo, usaremos el siguiente lema cuya prueba se puede encontrar en [2, p. 75].

Lema 2.0.1 *Si $\pi : Y \times_K X \to B$ es el Y-haz asociado al K-haz principal $p : X \to B$, entonces el espacio producto $Y \times X$ es homeomorfo al producto fibrado de (X, p) y $(Y \times_K X, \pi)$ y, en este caso, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} Y \times X \arrow[r, "\mathrm{proj}_X"] \arrow[d] & X \arrow[d, "p"] \\ Y \times_K X \arrow[r, "\pi"] & B \end{tikzcd}$$

es un diagrama pull-back (ver diagrama 1.1).

Teorema 2.0.3 *Sea $p : X \to B$ un K-haz principal y Y un K-espacio izquierdo y dejemos actuar a K por la derecha así: $yk = k^{-1}y$. Entonces hay una correspondencia biyectiva entre las funciones K-equivariantes $f : X \to Y$ y las secciones cruzadas $\tilde{f}$ del Y-haz asociado $\pi : Y \times_K X \to B$ y la correspondecia esta dada por la fórmula:*

$$\tilde{f}(p(x)) = [f(x), x].$$

Demostración. Por el Corolario 1.2.1, podemos pensar que X es un K-espacio libre, que $B \approx X/K$ y que p es la proyección orbital de esta acción. Veamos que la correspondencia $f \mapsto \tilde{f}$ está bien definida. Sea $f : X \to Y$ una función K-equivariante. Entonces f induce una función continua $\hat{f} : X \to Y \times_K X$, definida para cada $x \in X$, por:

$$\hat{f}(x) = [f(x), x].$$

La función $\hat{f}$ es continua por ser composición de $x \mapsto (f(x), x) \mapsto [f(x), x]$, donde $(f(x), x) \mapsto [f(x), x]$ es la proyección orbital $\tilde{p} : Y \times X \to Y \times_K X$.

Ahora notemos que, para cada órbita Kx en X/K, $\hat{f}(Kx) = [f(x), x]$ pues si $kx \in Kx$, entonces

$$\hat{f}(kx) = [f(kx), kx] = [kf(x), kx] = [f(x)k^{-1}, kx] = [f(x), x] = \hat{f}(x).$$

Así, $\hat{f}$ induce la función continua $\tilde{f} : X/K \to Y \times_K X$ definida por:

$$\tilde{f}(p(x)) = [f(x), x].$$

La función $\tilde{f}$ es continua pues si U es abierto en $Y \times_K X$, entonces $\hat{f}^{-1}(U)$ es abierto en X. Como p es abierta, $p\hat{f}^{-1}(U)$ es abierto en X/K y $\tilde{f}^{-1}(U) = p\hat{f}^{-1}(U)$. Además como π es asociado de p, tenemos que

$$\pi\tilde{f}(p(x)) = \pi[f(x), x] = p(x).$$

Luego, $\tilde{f}$ es una sección de π.

Veamos que $f \mapsto \tilde{f}$ es inyectiva. Sean $f_1, f_2 : X \to Y$ funciones K-equivariantes tales que $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$. Entonces $[f_1(x), x] = [f_2(x), x]$ para cada $x \in X$ y, por lo tanto, existe $k \in K$ tal que $x = kx$ y $f_2(x) = f_1(x)k^{-1}$. Como X es un K-espacio libre, $k = e$ y por lo tanto $f_1(x) = f_2(x)$ para cada $x \in X$, es decir $f_1 = f_2$.

Ahora, sea $\tilde{s}$ una sección de π. Entonces $\pi\tilde{s}p(x) = p(x)$ para cada $x \in X$. Como $Y \times X$ es homeomorfo al producto fibrado $X \times_{X/K} (Y \times_K X)$ (Lema 2.0.1), por la propiedad universal del pull-back, existe una única función K-equivariante $\Phi : X \to Y \times X$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dotted, "\Phi"] \arrow[drr, bend left, "1_X"] \arrow[ddr, bend right, "\tilde{s}p"'] & & \\
& Y \times X \arrow[r, "\mathrm{proj}_X"] \arrow[d, "\tilde{p}"] & X \arrow[d, "p"] \\
& Y \times_K X \arrow[r, "\pi"] & X/K
\end{tikzcd}$$

conmuta, es decir, $\mathrm{proj}_X \Phi = 1_X$ y $\tilde{p}\Phi = \tilde{s}p$. Sea $s = \mathrm{proj}_Y \Phi : X \to Y$. Entonces s es una función K-equivariante tal que $s \mapsto \tilde{s}$, pues $[s(x), x] = [\mathrm{proj}_Y \Phi(x), x] = \tilde{p}\Phi(x) = \tilde{s}p(x)$. Por lo tanto $f \mapsto \tilde{f}$ es biyectiva. ∎

Sea G un grupo compacto, X un G-espacio y P una órbita de tipo (H). Un ***tubo*** alrededor de P es una G-equivalencia

$$\varphi : G \times_H A \to U$$

donde U es una vecindad abierta de P en X y A es algún H-espacio.

La demostración del siguiente teorema y de una consecuencia importante (Teorema 2.0.5), se pueden encontrar en [2, p. 86-88].

Teorema 2.0.4 (Gleason-Mostow) *Si G es compacto de Lie, entonces exis-te un tubo alrededor de cualquier órbita en un G-espacio completamente re-gular.*

Denotemos por $N = N(H)$ al subgrupo ***normalizador*** de H en G, es decir, $N(H) = \{g \in G : gHg^{-1} = H\}$. Vimos que G actúa en un espacio co-ciente G/H por translación $(g'(gH) = g'gH)$. Igualmente, N y N/H actúan por translación en G/H: $nH(gH) = ngH$. Además, si X es un G-espacio, N/H actúa en X^H de manera natural: $nH(x) = nx \in X^H$.

Teorema 2.0.5 *Si G es un grupo compacto de Lie y X un G-espacio comple-tamente regular con un solo tipo orbital (H), entonces la proyección orbital $\pi : X \to X/G$ es la proyección en un haz fibrado con fibra G/H y grupo N/H.*

Observación. De la teoría de grupos topológicos y de grupos de Lie, se sabe que si G es compacto de Lie y H es un subgrupo cerrado de G, entonces N es cerrado en G y además, N y N/H también son compactos de Lie. Así, del teorema anterior se sigue que si P es un N/H-espacio libre y metrizable, entonces la proyección orbital $\rho : P \to P/K$ es un K-haz principal, donde $K = N/H$. Más aún, si P es un K-espacio métrico separable, entonces P/K es métrico separable, por la proposición 1.1.2.

El siguiente teorema lo aplicaremos en la demostración del Teorema de Jaworowski, considerando al conjunto invariante $X_{(H)} = \{x \in X : G_x \in (H)\}$, es decir, a los puntos de X que tienen tipo orbital (H). Tal conjunto es en verdad invariante, pues si $x \in X_{(H)}$, entonces $G_{gx} = gG_xg^{-1} \in (H)$ [8, Proposición 1.4]. A sus H-puntos fijos los denotamos por $X^H_{(H)} = X_{(H)} \cap X^H = X_H$. La demostración se puede leer en [2, pag. 89.].

Teorema 2.0.6 *Sean G un grupo compacto y X un G-espacio con un solo tipo orbital (H), entonces la función $\phi : G \times_N X^H \to X$, definida por:*

$$\phi[g, x] = gx$$

es una equivalencia, donde $N = N(H)$.

La demostración del siguiente lema se puede encontrar en [1, p. 4].

Lema 2.0.2 *Cualquier G-espacio libre y normal X de dimensión finita, admite una función equivariante a un G-espacio libre, compacto y metrizable Z de dimensión finita.*

Estamos en condiciones de demostrar el Teorema de Jaworowski:

Teorema 2.0.7 (Jaworowski) *Sean X un G-espacio y A un subespacio cerrado e invariante de X, tales que $X - A$ tiene un solo tipo de órbita (H) y es de dimensión finita. Si $f : A \to Y$ es una función equivariante con Y un G-espacio metrizable y $Y^H \in$ ANR (AR), entonces existe una extensión equivariante de f a una vecindad de A (a X).*

Demostración. Para extender a f, basta extender la función K-equivariante $f^H = f\mid_{A^H} \colon A^H \to Y^H$ a una vecindad V de A^H (a X^H) donde $K = N(H)/H$, pues si $F^H : V \to Y^H$ ($X^H \to Y^H$) es dicha extensión de f^H, entonces la función $F : GV \to GY^H \subset Y$ ($GX^H \to GY^H$) definida por:

$$F(gx) = gF^H(x)$$

resulta continua, equivariante y coincide con f en $GV \cap A$ ($GX^H \cap A$). Así, f se extiende a una vecindad $GV \cup A$ de A (a $X = GX^H \cup A$).

Veamos que así definida, F es continua. Sean U un subconjunto abierto de GY^H y $gx \in F^{-1}(U)$. Entonces $W = g^{-1}U \cap Y^H$ es abierto en Y^H y $x \in (F^H)^{-1}(W)$ que es abierto en V (X^H). Entonces $g(F^H)^{-1}(W)$ es abierto en GV (GX^H) y está contenido en $F^{-1}(U)$.

La función F es equivariante pues $F(g'gx) = g'gF^H(x) = g'F(gx)$ y si $gx \in GV \cap A$ ($GX^H \cap A$), entonces $x \in V \cap A$ ($X^H \cap A$). Por tanto $x \in A^H$, luego $F(gx) = gF^H(x) = gf^H(x) = gf(x) = f(gx)$. También, por el Teorema 2.0.6 tenemos que $X - A \subset X_{(H)} \approx G \times_N X_H$. Luego, $X - A \subset GX^H$ pues si $x \in X - A$, entonces existen $g \in G$ y $x' \in X_H$ tales que $x = gx' \in GX^H$, por lo tanto $X = GX^H \cup A$.

Notemos que $X^H - A^H$ es un K-espacio libre de dimensión finita, pues $X^H - A^H \subset X - A$ y si $x \in X^H - A^H$, entonces $K_x = \{nH : nH \cdot x = x\} = \{nH : n \in G_x\} \subset G_x/H \approx H/H = \{H\}$ y por lo tanto $K_x = \{H\}$ para todo $x \in X^H - A^H$. Por el lema 2.0.2, existe una función K-equivariante $\phi : X^H - A^H \to Z$, donde Z es un K-espacio libre y compacto.

Sean $P = X^H \times Z$ y $Q = A^H \times Z$. Entonces P es un K-espacio libre con la acción diagonal y, por lo tanto, por el teorema 2.0.5, la proyección orbital $\rho : P \to P/K$ es un K-haz principal. Como Y^H es un K-espacio izquierdo y también derecho con la acción: $yk = k^{-1}y$, por el teorema 2.0.3, existe una biyección entre las funciones K-equivariantes de P en Y^H y las secciones del Y^H-haz $\delta : Y^H \times_K P \to P/K$ asociado al haz ρ. Igualmente, hay una biyección entre las funciones K-equivariantes de Q en Y^H y las secciones del Y^H-haz $\gamma : Y^H \times_K Q \to Q/K$ asociado al haz $\rho\mid_Q$.

Como P/K es métrico separable[1] y $Y^H \in$ ANR (AR), por el teorema 1.2.1, toda sección sobre Q/K de δ se extiende a una vecindad de Q/K (a P/K) y equivalentemente, toda función K-equivariante de Q en Y^H se extiende a una vecindad de Q (a P).

Luego, $f^H \operatorname{proj}_{A^H} : Q \to Y^H$ es una función K-equivariante y, por lo tanto, tiene una extensión K-equivariante

$$\varphi : V' \to Y^H \;\; (P \to Y^H)$$

a una vecindad V' de Q en P (a P). Como Z es compacto, por el Lema del Tubo, podemos pensar que $V' = V \times Z$ donde V es una vecindad de A^H en X^H. Definamos $F^H : V \to Y^H$ $(X^H \to Y^H)$ por:

$$F^H\mid_{A^H} = f^H \;\; ; \;\; F^H\mid_{V - A^H (X^H - A^H)} = \varphi(i, \phi),$$

donde $(i, \phi) : V - A^H \to P$ $(X^H - A^H \to P)$ está definida por:

$$(i, \phi)(x) = (x, \phi(x)).$$

[1] Ver observación inmediata al teorema 2.0.5

Luego, basta verificar la continuidad de F^H en los puntos de la frontera δA^H de A^H. Sean $a \in \delta A^H \subset A^H$ y $\epsilon > 0$. Como φ es continua en (a, z) para cada $z \in Z$, existe una vecindad $U_z \times V_z$ de (a, z) en V' (en P) tal que, para cada $(x, z') \in U_z \times V_z$, sucede que $d(\varphi(a, z)), (\varphi(x, z')) < \epsilon$.

Como Z es compacto, podemos encontrar una vecindad U de a en V (en X^H) tal que para cada $x \in U$ y $z \in Z$, $d(\varphi(x, z), (\varphi(a, z))) < \epsilon$. En particular, para cada $x \in U \cap (X^H - A^H)$ se tiene que $d(\varphi(x, \phi(x)), \varphi(a, \phi(x))) < \epsilon$, pero $\varphi(a, \phi(x)) = f^H(a)$. También, como f^H es continua, podemos escoger U suficientemente pequeña, tal que para cada $x \in U \cap A^H$ se cumpla que $d(f^H(x), f^H(a)) < \epsilon$. Luego, para cada $x \in U$, $d(F^H(x), F^H(a)) < \epsilon$.

Así, F^H es continua, K-equivariante y extiende a f^H. ∎

Este resultado se extiende, por inducción, cuando $X - A$ tiene un número finito de tipos orbitales y $Y^H \in$ AR (ANR) para cada tipo orbital (H) en $X - A$ [6, Teorema A]. Finalmente, para subrayar la importancia de este resultado, mencionemos que éste conduce a la caracterización de G-AR (G-ANR) métricos separables de dimensión finita con un número finito de tipos orbitales. A saber, se tiene el siguiente resultado:

*Sea X un G-espacio métrico separable de dimensión finita, con un número finito de tipos orbitales. Entonces X es un G-*AR *(G-*ANR*) si y solo si para cada subgrupo cerrado H de G, X^H es un* AR *(*ANR*).*

Su demostración, queda lejos de los alcances de este trabajo, y puede verse en [5, Teorema 4.2].

Bibliografía

[1] N. Antonyan, *Equivariant embeddings and compactifications of free G-spaces*, Int. J. Math. Math. Sci., vol. 2003, no. 1, 1-14.

[2] G. Bredon, *Introduction to Compact Transformation Groups*, Academic Press, New York, 1972.

[3] R. Engelking, *General Topology*, Monografie Matematyczne, Polish Scientific Pub., Warsaw, 1977.

[4] S.-T. Hu, *Theory of Retracts*, Wayne State University Press, Detroit, 1965.

[5] J. Jaworowski, *An equivariant extension theorem and G-retracts with a finite structure*, Manuscripta Math. 35 (1981), no. 3, 323-329.

[6] R. Lashof, *The equivariant extension theorem*, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 83, no. 1 (1981), 138-140.

[7] D. Montgomery and L. Zippin, *Topological Transformation Groups*, Interscience Pub. Inc., New York, 1955.

[8] S. de Neymet, *Introducción a los Grupos Topológicos de Transformaciones*, Soc. Mat. Mex., México, 2005.

[9] N. Steenrod, *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton University Press, New Jersey, 1951.

[10] M. Tkačenko, L. M. Villegas Silva, C. Hernandez García, O. J. Rendón Gómez, *Grupos Topológicos*, Universidad Autónoma Metropolitana, México, 1997.

[11] I. M. Yaglom, *Felix Klein and Sophus Lie, Evolution of the Idea of Symmetry in the Nineteenth Century*, Birkhäuser, Basel·Boston, 1988.

Índice alfabético