UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ADECUACIONES AL PROGRAMA DE CÁLCULO DIFERENCIAL PARA EL BACHILLERATO EN PLAN SEP

REPORTE DE
ACTIVIDAD DOCENTE

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

P R E S E N T A :

LAURA ANGÉLICA ALBARRAN ITURBE

TUTORA

M. en C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA

2010

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo es una propuesta de reestructuración para el curso de Cálculo Diferencial impartido en las escuelas que tienen el bachillerato incorporado al plan de estudios de la SEP. Esta propuesta surge a partir de la experiencia docente que he tenido durante más de 12 años impartiendo los diferentes cursos de matemáticas en el nivel medio superior. Los cursos dividen los contenidos en:

- Matemáticas I: Álgebra.
- Matemáticas II: Geometría y Trigonometría.
- Matemáticas III: Geometría Analítica.
- Matemáticas IV: Funciones.
- Matemáticas V: Cálculo Diferencial.
- Matemáticas VI: Cálculo Integral.

El programa de la SEP el curso de cálculo Diferencial está estructurado en tres unidades, considerando 48 horas de tiempo para abordar los temas.

Unidad 1: Límites.
Unidad 2: La razón de cambio y la derivada.
Unidad 3: Valores máximos y mínimos relativos y sus aplicaciones.

En este programa de clase se considera que los alumnos tienen un conocimiento suficiente y acabado de los conceptos de álgebra, de geometría y de funciones, que son necesarios para abordar las temáticas del curso de cálculo. Es decir, que los conceptos que se han abordado en los cursos anteriores han sido comprendidos por los alumnos y que son capaces de usarlos de manera adecuada. Sin embargo, en el desarrollo de las clases nos encontramos con que esto no es así, ya que los estudiantes tienen poca habilidad para desarrollar y aplicar las herramientas del álgebra, la geometría y las funciones. Por otro lado el tiempo asignado al curso da poco espacio a la práctica que se requiere para su comprensión.

En este trabajo se propone hacer algunas adecuaciones al programa de la SEP en dos aspectos:

1) Enfatizar los temas más importantes de cada unidad con el fin de optimizar la comprensión operativa de los conceptos abordados; en la perspectiva de que el alumno de bachillerato aún está en un proceso de formación propedéutica, y la especialización - y por tanto la aplicación del cálculo - dependerá de la formación profesional que elija.

2) Otro elemento de esta propuesta de reestructuración es realizar una *introducción* en aquellos temas de álgebra, geometría y funciones que se han abordado en los cursos previos, y que forman la base sobre la cual se estructura el curso de cálculo diferencial.

A continuación se presenta una tabla, donde se muestran los contenidos del Programa de estudios que tiene la SEP, y los contenidos que tiene la propuesta de este trabajo, con las adecuaciones mencionadas arriba.

Programa de la SEP	**Propuesta de Reestructuración**
Unidad 1	**Unidad 1**
1. Límites 1.1. Noción intuitiva de los límites. 1.2. Teoremas de los límites. 1.3. Límites de funciones: • Polinomiales • Racionales • Trigonométricas • Logarítmicas • Exponenciales 1.4. Límites infinitos y límites en el infinito. 1.5. Teorema de continuidad de una función. 1.5.1. Condiciones de continuidad. 1.5.2. Teoremas del valor intermedio y de valores extremos.	1. Precálculo 1.1. Leyes de los exponentes 1.2. Productos notables 1.3. Factorización 1.4. Fracciones algebraicas. 1.5. Operaciones con fracciones algebraicas. 1.5.1. Multiplicación de fracciones algebraicas. 1.5.2. División de fracciones algebraicas. 1.5.3. Multiplicación y división combinadas. 1.5.4. Suma y resta de fracciones algebraicas. 1.5.5. Fracciones mixtas.
Unidad 2	**Unidad 2**
2. La derivada 2.1. Razón de cambio promedio e instantánea. 2.2. Interpretación geométrica de la derivada. 2.3. Diferenciabilidad en un intervalo. 2.4. Reglas de derivación. 2.4.1. Regla de la potencia. 2.4.2. Reglas del producto y del	2. Funciones y límites. 2.1. Definición de función. 2.2. Elementos de una función. 2.3. Intervalos. 2.3.1. Intervalo abierto. 2.3.2. Intervalo cerrado. 2.3.3. Intervalo infinito. 2.4. Evaluación de funciones. 2.5. Tipos de funciones.

cociente. 2.4.3. Derivadas de funciones trigonométricas y funciones trigonométricas inversas. 2.4.4. Derivadas de funciones exponencial y logarítmica. 2.4.5. Regla de la cadena. 2.5. Derivación implícita. 2.6. Ecuaciones de la tangente y normal, longitudes de la subtangente y la subnormal.	2.5.1. Funciones algebraicas. • Polinómicas. • Racionales. • Radicales. 2.5.2. Funciones trascendentes. • Trigonométricas. • Logarítmicas • Exponenciales. 2.6. Dominio natural y gráfica de funciones. 2.6.1. Funciones polinomiales. 2.6.2. Funciones racionales. 2.6.3. Funciones radicales. 2.7. Operaciones con funciones. 2.7.1. Operaciones aritméticas. 2.7.2. Composición de funciones. 2.8 Límites 2.8.1. Noción de límite. 2.8.2. Propiedades de los límites. 2.8.3. Límites indeterminados del tipo 0/0. • Usando factorización. • Usando racionalización. • Usando división sintética.
Unidad 3	**Unidad 3**
3. Aplicaciones de la derivada. 3.1. Cálculo de valores máximos y mínimos relativos con el criterio de la primera derivada. 3.2. Derivadas de orden superior. 3.3. Cálculo de valores máximos y mínimos con el criterio de la segunda derivada. 3.4. Funciones crecientes y decrecientes. 3.5. Concavidad. 3.5.1. Criterio de la segunda derivada. 3.5.2. Puntos de inflexión. 3.5.3. Trazado de curvas. 3.6. Aplicaciones de la derivada. 3.6.1. Problemas prácticos de máximos y mínimos. 3.6.2. Aplicaciones en las ciencias	3. Derivadas. 3.1. Interpretación geométrica de la derivada. 3.2. Definición de la derivada. 3.3. Derivación usando la definición de la derivada. 3.4. Derivadas algebraicas. 3.4.1. Fórmulas de derivación. 3.4.2. Derivada del producto y del cociente de funciones. 3.4.3. Derivada de la composición de funciones. 3.5. Derivada de funciones trigonométricas. 3.6. Derivadas de orden superior. 3.7. Derivadas de funciones implícitas.

naturales, económico-administrativas y sociales.	
	Unidad 4
	4. Aplicaciones de la derivada. 4.1. Introducción y contexto 4.2. Valores máximos y mínimos. 4.2.1. Criterio de la primera derivada. 4.2.2. Cálculo de valores máximos y mínimos relativos con el criterio de la primera derivada. 4.2.3. Criterio de la segunda derivada. 4.2.4. Cálculo de valores máximos y mínimos con el criterio de la segunda derivada. 4.3. Problemas de aplicación de máximos y mínimos.

Como se ve en la comparación de los dos programas, los contenidos están organizados de diferente manera, y esto tiene la intención de proponer un conjunto de temas preparatorios que ayuden a mejorar la comprensión de los temas que, en el caso del programa de la SEP son temas que se presentan en primer lugar y que presuponen el dominio de las temáticas previas, situación que no se cumple la mayoría de las veces.

Otro aspecto que se ve en la propuesta de reestructuración, es que hay algunos temas que no se consideran y esto es con el objetivo de optimizar tiempos, aunque también es con el ánimo de enfocar otras temáticas que faciliten la comprensión, dando espacio para que los alumnos practiquen en el salón de clase. Hay que señalar que estos temas que no se abordan en el curso de cálculo diferencial, se han podido trabajar en el curso siguiente de cálculo integral, y que en ese contexto han tenido mejor comprensión y fluidez.

También se ve en el tema de las aplicaciones de las derivadas, una concentración en el cálculo de los máximos y mínimos, en el procedimiento algebraico y en el planteamiento de problemas prácticos. Dejando para el inicio del siguiente curso –

cálculo integral - las aplicaciones geométricas y el análisis general de las funciones y sus gráficas (rectas tangentes y normales, funciones crecientes y decrecientes, concavidad de una curva, puntos de inflexión, límites infinitos). Cuando inicia el segundo semestre del último año del bachillerato , en el curso de cálculo integral, los alumnos se han familiarizado con las derivadas y han desarrollado las habilidades que les permitan aplicar el cálculo diferencial en el análisis de funciones y posteriormente abordar las integrales.

Mientras que en el caso del programa de la SEP, las aplicaciones de la derivada se presentan combinando el análisis de funciones y sus gráficas mezclado con los máximos y mínimos, dificultando al alumno diferenciar una línea de aplicación de la otra.

Por último, el texto que presento a continuación está estructurado de tal manera que pueda servir como material de apoyo al docente, porque cada tema cuenta con un conjunto de ejercicios acordes a la complejidad de los ejemplos presentados, que le ayudarán a reforzar cada lección. Y como un material de estudio para el alumno, porque cada lección contiene explicaciones sobre la teoría, ejemplos que van de menor a mayor complejidad, y ejercicios que le permitan poner en práctica lo aprendido, ya que la estrategia de enseñanza que se propone permite a los alumnos *comprender, practicar e integrar* los conceptos que se abordan.

- Comprender: Para que el alumno pueda comprender cada tema, es necesario que el profesor explique suficientemente y ejemplifique los temas con ejercicios que vayan de menor a mayor complejidad. Por eso se presenta un conjunto de ejemplos y ejercicios en cada tema que cumplen con esta característica.

- Practicar: En la medida que el alumno resuelve ejercicios de un tema, variando la complejidad de los mismos, es capaz de comprender el proceso y adquirir la habilidad para resolver los ejercicios y no solo la aplicación de las fórmulas.

- Integrar conceptos: En este aspecto lo que se pretende es que el alumno sea capaz de aplicar los diferentes recursos de las matemáticas - álgebra, geometría, cálculo - usándolos de manera que le permitan resolver problemas.

Esta propuesta de reestructuración del curso de cálculo diferencial, la he trabajado con los alumnos del tercer año de bachillerato y hemos experimentado el beneficio que tiene para el alumno retomar aquellos elementos previos que son necesarios para la mejor comprensión del cálculo, dentro del mismo curso, e incluso con la metodología del profesor que lo imparte. De otro modo, el profesor ve limitados los alcances de los contenidos que puede abordar, ya que la mayoría de los alumnos no recuerda, o no sabe como aplicar los conocimientos previos. Por parte de los alumnos, al no “recordar” cómo simplificar, factorizar, resolver ecuaciones, etcétera, generalmente se desanima y se “frustra” por no poder avanzar en los nuevos contenidos que le presenta el cálculo.

La forma en que está estructurado este texto permitirá al alumno tener una visión integral de las matemáticas y romper con el esquema de que éstas son un conjunto de temas inconexos que no tienen que ver entre si.

UNIDAD 1

1. PRECÁLCULO

Antes de abordar los contenidos del curso de cálculo diferencial, comenzaremos retomando algunos temas de álgebra, con la finalidad de que el estudiante los recuerde ya que le ayudarán a trabajar los contenidos de la materia.
Esta lección comenzará con las leyes de los exponentes y la factorización, dado que son fundamentales en álgebra para el desarrollo de operaciones. También abordaremos la simplificación de expresiones algebraicas.

1.1 LEYES DE LOS EXPONENTES

Sean a y $b \in \Re$, m y $n \in \mathbf{N}$ entonces:

1. $a^m a^n = a^{m+n}$.
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.
3. $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$.
4. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.
5. $(ab)^n = a^n b^n$.
6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.
7. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

A partir de estás propiedades se pueden efectuar y simplificar diferentes expresiones aritméticas y algebraicas.

Ejemplos

Simplificar las siguientes expresiones usando las leyes de los exponentes:

1. $5^7 \bullet 5^4 = 5^{7+4} = 5^{11}$.
2. $\dfrac{3^5}{3^3} = 3^{5-3} = 3^2$.

3. $\left(7^5\right)^4 = 7^{5\bullet 4} = 7^{20}.$

4. $(4\bullet 5)^{10} = 4^{10}\bullet 5^{10}.$

5. $\left(\dfrac{11}{3}\right)^4 = \dfrac{11^4}{3^4}.$

6. $a^7b^7c^7 = (abc)^7.$

7. $x^{-4}y^5 = \left(\dfrac{1}{x^4}\right)y^5 = \dfrac{y^5}{x^4}.$

8. $\left(6a^3b^4\right)^2 = 6^2a^{3\bullet 2}b^{4\bullet 2} = 36a^6b^8.$

9. $\left(\dfrac{x^4y^7z^5}{2xy^2}\right)^3 = \left(\dfrac{x^{12}y^{21}z^{15}}{2^3x^3y^6}\right) = \dfrac{x^{12-3}y^{21-6}z^{15}}{8} = \dfrac{x^9y^{15}z^{15}}{8}.$

Otro camino es simplificar el cociente antes de aplicar el exponente de la fracción:

$$\left(\frac{x^4y^7z^5}{2xy^2}\right)^3 = \left(\frac{x^3y^5z^5}{2}\right)^3 = \frac{x^9y^{15}z^{15}}{2^3} = \frac{x^9y^{15}z^{15}}{8}.$$

10. $\sqrt[4]{r^3t^8} = r^{3/4}t^{8/4} = r^{3/4}t^2.$

11. $\sqrt{x^2y^6z^8} = \left(x^2y^6z^8\right)^{1/2} = \left(x^2\right)^{1/2}\left(y^6\right)^{1/2}\left(z^8\right)^{1/2} = |x|y^3z^8$ **.**

Ejercicios

Simplifica las siguientes expresiones, usando las leyes de los exponentes.

1. $\left(a^3b^2\right)^{-3}.$

2. $\left(\dfrac{x^{-2}}{y^3}\right)^{-2}.$

3. $\dfrac{5\left(x^2y^5z\right)^{1/2}}{15\left(x^4y^6z^3\right)^{3/4}}.$

4. $\left(\dfrac{x^2y^4z^6}{x^{-2}y^{-4}z^6}\right)^{\frac{1}{2}}.$

5. $\left(\dfrac{a^{-2}b^{\frac{1}{4}}c^{3}}{a^{2}b^{-\frac{1}{4}}c^{-3}}\right)^{\frac{2}{5}}.$

6. $\left(\dfrac{\sqrt{a^{4}b^{5}c^{6}}}{a^{2}b^{3}c^{3}}\right)^{3}.$

7. $\left(\left(x^{5/3}y^{3/4}\right)\left(x^{1/3}y^{5/4}\right)\right)^{6}.$

8. $\left(\dfrac{a^{2}b^{-3}}{a^{3}b^{-2}}\right)^{-2}\left(\dfrac{a^{-2}b^{-3}}{a^{-3}b^{4}}\right)^{-3}.$

1.2 PRODUCTOS NOTABLES

Los productos notables son productos que dadas ciertas características pueden calcularse a través de fórmulas establecidas.

Las principales fórmulas de los productos notables son:

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ *Cuadrado de una suma*
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ *Cuadrado de una resta*
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ *Cubo de una suma*
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ *Cubo de una resta*
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ *Binomios conjugados*
- $(a+b)(a+c) = a^2 + a(b+c) + bc$ *Binomios con término común*
- $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$ *Binomios sin término común*

Ejemplos

Efectuar los siguientes productos notables:

1. $$\begin{aligned}(2x+1)^2 &= (2x)^2 + 2(2x)(1) + (1)^2\\ &= 4x^2 + 4x + 1.\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}\left(\frac{1}{3}ab^2 - 6a^4\right)^2 &= \left(\frac{1}{3}ab^2\right)^2 - 2\left(\frac{1}{3}ab^2\right)\left(6a^4\right) + \left(6a^4\right)^2\\ &= \frac{1}{9}a^2b^4 - 4a^5b^2 + 36a^8.\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}(x-5y^2)^3 &= (x)^3-3(x)^2(5y^2)+3(x)(5y^2)^2-(5y^2)^3\\ &= x^3-15x^2y^2+75xy^4-125y^6.\end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned}\left(\frac{4}{7}x+\frac{2}{9}y^4\right)\left(\frac{4}{7}x-\frac{2}{9}y^4\right) &= \left(\frac{4}{7}x\right)^2-\left(\frac{2}{9}y^4\right)^2\\ &= \frac{16}{49}x^2-\frac{4}{81}y^8.\end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned}(t^5+11)(t^5+7) &= (t^5)^2+t^5(11+7)+(11)(7)\\ &= t^{10}+18t^5+77.\end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned}(4x-1)\left(\frac{1}{3}x+2\right) &= (4x)\left(\frac{1}{3}x\right)+(4x)(2)+(-1)\left(\frac{1}{3}x\right)+(-1)(2)\\ &= \frac{4}{3}x^2+8x-\frac{1}{3}x-2\\ &= \frac{4}{3}x^2+\frac{23}{3}x-2.\end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned}(2x+3y-z)(2x+3y+z) &= ((2x+3y)-z)((2x+3y)+z)\\ &= (2x+3y)^2-z^2\\ &= 4x^2+12xy+9y^2-z^2.\end{aligned}$$

Ejercicios

Resuelve los siguientes productos usando las fórmulas de los productos notables.

1. $\left(\frac{w}{5}+9\right)^2.$

2. $\left(y+\frac{7}{4}\right)^2.$

3. $\left(\frac{5}{7}cd^2+\frac{7}{4}c^2d\right)^2.$

4. $\left(\frac{4x}{5}+9y\right)^3.$

5. $\left(y^2+\frac{7y}{4}\right)^3.$

6. $\left(\frac{2}{3}cd^2+\frac{3}{5}c^2d\right)^3.$

7. $(x+y+x)^2$.

8. $(2m+3n+p)^2$.

9. $(w+3y-z)(w-3y-z)$.

10. $(3x^5-2y^4)(3x^5+2y^4)$.

11. $\left(\frac{3x^5}{2}+\frac{2y^4}{5}\right)\left(\frac{3x^5}{2}-\frac{2y^4}{5}\right)$.

12. $\left(\frac{3}{x^5}+6\right)\left(\frac{3}{x^5}-6\right)$.

13. $(w^7-9z)(2w-3z^4)$.

14. $\left(t^2-\frac{12}{5}\right)\left(t-\frac{1}{8}\right)$.

.

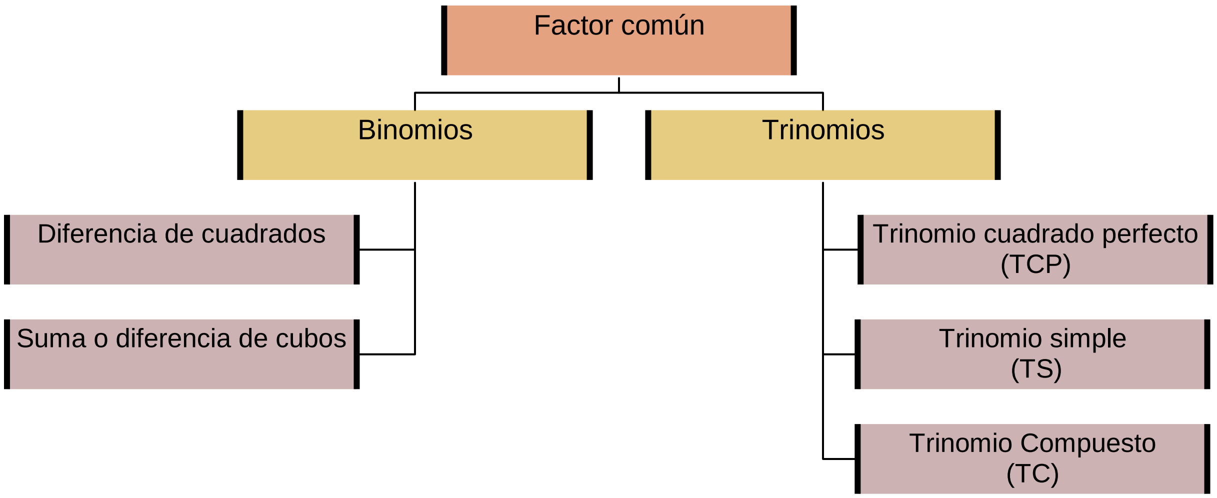
1.3 FACTORIZACIÓN

La factorización es el proceso inverso al desarrollo de los productos notables, factorizar una expresión algebraica consiste en escribirla en forma de multiplicación. Podemos agrupar los diferentes métodos de factorización de acuerdo a sus características.

Las principales fórmulas de factorización son:

- $ax+ay+az=a(x+y+z)$
- $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
- $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
- $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
- $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$
- $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$
- $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$
- $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

ESQUEMA DE FACTORIZACIÓN



La factorización de un factor común se da cuando todos los términos de la expresión algebraica tienen un término que se repite, es decir, un factor común que puede ser un monomio o un polinomio el cual se factoriza.

Ejemplos

1. $6xy^2 - 15x^2y + 21x^2y^2 = 3xy(2y - 5x + 7xy)$, el factor común es $3xy$.

2. $\dfrac{5x^6}{3z^2} - \dfrac{10x^2}{27z} - \dfrac{20x^3}{9z^4} = \dfrac{5x^2}{3z}\left(\dfrac{x^4}{z} - \dfrac{2}{9} - \dfrac{4x}{3z^3}\right)$, el factor común es $\dfrac{5x^2}{3z}$.

3. $(a+b)(a+c) - 4m^3(a+b) = (a+b)(a+c-4m^3)$, el factor común es $a+b$.

Para factorizar los binomios debemos poner atención en las potencias de los términos, así como también se debe valorar si los coeficientes de los términos tienen raíz cuadrada o cúbica.

Ejemplos

1. $4x^4 - 25 = (2x^2 - 5)(2x^2 + 5)$.

2. $\dfrac{x^6}{27} - 8 = \left(\dfrac{x^2}{3} - 2\right)\left(\dfrac{x^4}{9} + \dfrac{2x^2}{3} + 4\right)$.

3. $\dfrac{1}{4a^2b^2} - \dfrac{25}{9x^2y^2} = \left(\dfrac{1}{2ab} - \dfrac{5}{3xy}\right)\left(\dfrac{1}{2ab} + \dfrac{5}{3xy}\right)$.

En el caso de los trinomios, son expresiones de la forma $ax^2 + bx + c$ donde a, b, c y x representan números reales. Se pueden factorizar de acuerdo a las siguientes reglas:

- Si el primer y el tercer términos tienen raíz cuadrada, y el doble producto de éstas coincide con el segundo término, entonces es un trinomio cuadrado perfecto TCP.

Ejemplos

1. $x^4 - 10x^2 + 25 = (x^2 - 5)^2$.

2. $9x^2 + 24x + 16 = (3x + 4)^2$.

3. $4 + 20y^3 + 25y^6 = (2 + 5y^3)^2$.

En caso de que el trinomio no cumpla con las condiciones del TCP, entonces se analizan los coeficientes del término de mayor potencia.

- Si éste es uno, es decir, si el trinomio es de la forma $x^2 + bx + c$, entonces es un *trinomio simple TS.* Es decir, hay que buscar dos números cuyo producto sea c y cuya suma sea b .

Ejemplos

1. $a^2 + 8a + 12 = (a + 2)(a + 6)$.

2. $y^4 + y^2 - 56 = (y^2 + 8)(y^2 - 7)$.

3. $x^2 - 23x + 132 = (x-12)(x-11).$

- Si el coeficiente del término de mayor potencia es diferente a uno, entonces, el trinomio es de la forma $ax^2 + bx + c$ con $c \neq 0$, decimos que es un *trinomio compuesto* *TC*. Para factorizar estos trinomios debemos descomponer el término bx en una suma de dos términos, es decir , tenemos que buscar dos números p y q tales que su suma sea b y su producto sea $a\,c$. De tal modo que:

$$p + q = b$$
$$p\,q = a\,c.$$

Ejemplos

1. $2x^2 + 5x + 2 = (2x+1)(x+2).$

2. $8a^2 - 2a - 15 = (2a-3)(4a+5).$

3. $3y^6 - 7y^3 + 2 = (3a^3 - 1)(a^3 - 2).$

Finalmente, tenemos la factorización combinada, que se da cuando una expresión algebraica utiliza dos o más procesos de factorización.

Ejemplos

1.
$$\begin{aligned} x^7 - 14x^6 + 49x^5 &= x^5(x^2 - 14x + 49) \\ &= x^5(x-7)^2. \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} a^4b^4 - 16 &= (a^2b^2 - 4)(a^2b^2 + 4) \\ &= (ab-2)(ab+2)(a^2b^2 + 4). \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} \frac{8}{t^6} + \frac{125}{t^3} &= \frac{1}{t^3}\left(\frac{8}{t^3} + 125\right) \\ &= \frac{1}{t^3}\left(\frac{2}{t} + 5\right)\left(\frac{4}{t^2} - \frac{10}{t} + 25\right). \end{aligned}$$

Ejercicios

Factorizar las siguientes expresiones algebraicas usando el método más conveniente.

1. $a^3 - a^2x + ax^2$.
2. $9a^2 - 12ab + 15a^3b^2 - 24ab^3$.
3. $9a^2 - 4b^2$.
4. $5c^3 - 10x^2 + 15x$.
5. $7a^2b^2 - 14b^2 + 28b$.
6. $x(a+b) + y(a+b)$.
7. $3(x-1) + b(x-1)$.
8. $ax - bx + ay - by$.
9. $x^2 + 8x + 15$.
10. $x^2 - x - 6$.
11. $6y^2 + 7y + 2$.
12. $12x^2 - 5x - 2$.
13. $216a^3 - 8b^9$.
14. $1 + y^3$.
15. $27x^3 - 64y^6$.
16. $6x - 15x^2 + 12x^3$.
17. $8m^2 - 24m$.
18. $9x^2 + 27x^4$.
19. $36x^3 + 12x^4 + 27x^3y$.
20. $13ab - 26a^3$.
21. $x^2 - 16x + 64$.
22. $m^2 - 10m + 25$.
23. $4x^2 - 12x + 9$.
24. $1 + 12x + 36x^2$.
25. $4a^2 - 4ab^3 + b^6$.
26. $36x^2 + 12xy + 1$.
27. $m^2 - 3m - 28$.
28. $x^2 + 25x + 150$.
29. $a^2 + 294x - 35a$.
30. $a^2 - 2ab + 15b^2$.
31. $4mx + 3x + m^2$.
32. $x^2 - 54 + 3x$.
33. $x^2 - 22xy + 120y^2$.
34. $10x^2 + 47x + 9$.
35. $4m^2 - 8m - 5$.
36. $6m^2 + 17m + 7$.
37. $10x^2 + 13x - 231$.
38. $6a^4 - 11a^2b + 35b^2$.
39. $24x^2 - 38x + 3$.
40. $25m^6 10m^3 + 1$.
41. $(x^2 - 1) - (1 - x^2)$.
42. $9x^2 - 1$.
43. $36x^2 - 9y^6$.
44. $a^2 - 25$.
45. $4a^2 - 16$.
46. $1 - 9x^2$.
47. $9x^2 - 49y^6$.
48. $49y^6 - 1$.
49. $81x^4 - 4$.
50. $a^3 - 1$.
51. $x^3 - y^3$.
52. $27m^3 - 8m^3$.
53. $64a^3 - b^6$.
54. $x^6 + y^3z^6$.
55. $1^3 - 8m^{12}$.
56. $8a^5 - 125$.
57. $27x^{12} + 8y^6$.
58. $(x+1)^3 - (x+1)^3$.
59. $12x^4y^4 + x^3y^3 - 20x^2y^2$.

1.4 FRACCIONES ALGEBRAICAS

Introducción

Esta lección trata sobre las expresiones racionales, o fracciones algebraicas que son cocientes de polinomios, por ejemplo:

$$\frac{3x+8}{5x^2+3}, \qquad \frac{4x^2-81}{2x+9} \quad \text{y} \quad \frac{6xy^3+12x^2y-36}{3x-2}$$

Un recurso importante en el trabajo con las expresiones racionales es el de la evaluación, que significa cambiar las variables por números determinados.

Ejemplos

Evaluar las siguientes fracciones en los valores determinados.

1. $\dfrac{2x^2+3x+6}{5x+7}$ en $x=-1.$

En este caso, se sustituye el valor –1 en cada x de la fracción:

$$\frac{2(-1)^2+3(-1)+6}{5(-1)+7}=\frac{5}{2}.$$

2. $\dfrac{9xy^2-2x^3}{4y+5x}$ en $\begin{matrix} x=2 \\ y=0 \end{matrix}$

Se sustituyen ahora los dos valores dados en las variables correspondientes:

$$\frac{9(2)(0)^2-2(2)^3}{4(0)+5(2)}=\frac{-16}{10}=\frac{-8}{5}.$$

En este proceso de evaluación se debe tener cuidado de que el valor asignado a la variable no anule el denominador, en caso de que esto suceda se dice que la expresión racional *no está definida.*

Ejemplo

Evaluar $\dfrac{x^2+9x-36}{x-3}$ en $x=3$.

En este caso no es posible ya que $x-3$ se anula cuando $x=3$ porque $3-3=0$.
Por tanto, esta expresión racional no está definida en $x=3$.

Ejercicios

Evalúa las siguientes expresiones racionales e indica cuando no estén definidas en el valor dado.

1. $\dfrac{3y^3-4y^2+1}{2y-7}$ en $y=-2$.

2. $\dfrac{4w+24w^2}{2w-4}$ en $w=2$.

3. $\dfrac{8t^6-27}{2t^2-3}$ en $t=4$.

4. $\dfrac{7a^4+6a^3-2a^2}{a^2-5}$ en $a=\frac{1}{2}$.

5. $\dfrac{18-3x^2}{2x-6}$ en $x=3$.

6. $\dfrac{6b+15}{b^3-64}$ en $b=-5$.

Simplificación

Para simplificar una fracción es necesario que el numerador y el denominador tengan un factor común.

- **Caso1:** Si la fracción está formada por monomios, la simplificación se hace de forma directa, es decir aplicando las leyes de los exponentes.

Ejemplos

Simplificar las siguientes fracciones algebraicas:

1. $\dfrac{8a^2b^4c^6}{3ab^7c^3} = \dfrac{8ac^3}{3b^3}.$

2. $\dfrac{17x^3y^4z^6}{34x^7} = \dfrac{y^4z^6}{2x^4}.$

3. $\dfrac{-30a^6b^{11}}{21a^6b^2} = \dfrac{-10b^9}{7}.$

- **Caso 2:** Si la fracción está formada por polinomios, es necesario factorizar antes de simplificar.

Ejemplos

Factorizar y simplificar las siguientes fracciones:

1. $\dfrac{a^3 - a^2b}{a-b} = \underbrace{\dfrac{a^2(a-b)}{a-b}}_{\substack{\text{factoriza el numerador} \\ \text{y cancela los términos} \\ \text{iguales}}} = a^2$ si $a-b \neq 0$.

2. $\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + 2xy + y^2} = \underbrace{\dfrac{(x-y)(x+y)}{(x+y)^2}}_{\substack{\text{se factoriza los polinomios} \\ \text{y se simplifican los términos}}} = \underbrace{\dfrac{x-y}{x+y}}_{\substack{\text{Esta expresión ya} \\ \text{no se puede reducir}}}$ si $x+y \neq 0$.

3. $$\dfrac{a^2 - 4ab + 4b^2}{a^3 - 8b^3} = \dfrac{(a-2b)^2}{(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)}$$
$$= \dfrac{a-2b}{a^2+2ab+4b^2} \text{ si } a-2b \neq 0$$
.

4.
$$\frac{a^3-25a}{2a^3+8a^2-10a}=\frac{a(a^2-25)}{2a(a^2+4a-5)}$$
$$=\underbrace{\frac{a(a-5)(a+5)}{2a(a+5)(a-1)}}_{\substack{\text{Se factorizan los polinomios}\\ \text{y se reducen a la mínima expresión}}}$$
$$=\frac{a-5}{2(a-1)}\ \text{ si }\ a+5\neq 0\ \text{ y }\ a\neq 0.$$

5.
$$\frac{x^2-(y-z)^2}{(x+y)^2-z^2}=\frac{[x-(y-z)][x+(y-z)]}{[(x+y)-z][(x+y)+z]}$$
$$=\frac{(x-y+z)(x+y-z)}{(x+y-z)(x+y+z)}$$
$$=\frac{x-y+z}{x+y+z}\quad \text{si }\ x+y-z\neq 0.$$

Ejercicios

Dadas las siguientes fracciones algebraicas, simplifícalas reduciéndolas a su mínima expresión.

1. $\left(\dfrac{18x^2y^4z^6}{6x^{-2}y^{-4}z^6}\right).$

2. $\left(\dfrac{32a^{-2}b^{\frac{1}{4}}c^3}{24a^2b^{-\frac{1}{4}}c^{-3}}\right).$

3. $\left(\dfrac{5a^4b^6c^7}{15a^2b^3c^3}\right).$

4. $\dfrac{e^4w^5+e^3w^6s}{5e^3w^3}.$

5. $\dfrac{7f^8w^5+f^3u^6s}{5f^3k^3}.$

6. $\dfrac{6q^3y^2+18q^6u^3m}{6q^2r^5}.$

7. $\dfrac{m^6-n^4}{m^3+n^2}.$

8. $\dfrac{y^4-z^6}{y^2-z^3}.$

9. $\dfrac{4x^2 - y^2}{2x - y}$.

10. $\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 - 2xy - y^2}$.

11. $\dfrac{m^2 - n^2}{m^2 + 2mn + n^2}$.

16. $\dfrac{2a^2 + a - 3}{1 - a^3}$.

12. $\dfrac{25m^2 - 9n^2}{25m^2 - 30mn + 9n^2}$.

17. $\dfrac{2x^2 + 5x + 2}{x^2 + 3x + 2}$.

13. $\dfrac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$.

18. $\dfrac{x^3 - 6x^2}{x^2 - 12x + 36}$.

14. $\dfrac{8a^3 - 64b^3}{4a^2 - 16b^2}$.

19. $\dfrac{x^2 - 4x + 4}{4x^2 - x^4}$.

15. $\dfrac{w^4 - 5w^2 - 10}{w^4 - 14w^2 + 49}$.

20. $\dfrac{7x^2 - 60x + 32}{x^2 - 5x - 24}$.

1.5 OPERACIONES CON FRACCIONES ALGEBRAICAS

1.5.1 Multiplicación de fracciones algebraicas

La multiplicación de expresiones racionales la realizamos del mismo modo que en los números racionales, es decir, multiplicamos los numeradores, formando el numerador de la nueva fracción y después multiplicamos los denominadores, formando el denominador de la nueva fracción y simplificamos reduciendo a la mínima expresión.

Cuando las expresiones están formadas por **monomios** se pueden simplificar antes o después de multiplicar; cuando están formadas por **polinomios** debemos factorizar y simplificar antes de hacer la multiplicación.

Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son expresiones racionales, donde $b \neq 0$ y $d \neq 0$, entonces,

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \left(\frac{ac}{bd}\right)$$

Ejemplos

Multiplicar y simplificar las siguientes expresiones racionales.

1. $\left(\frac{2a^2}{3b}\right)\left(\frac{6b^4}{5a^6}\right) = \frac{(2)(6)a^2b^4}{(3)(5)a^6b} = \frac{4b^3}{5a^4}.$

2. $\left(\frac{7x}{4y^2z}\right)\left(\frac{2x^3y^4}{3z}\right)\left(\frac{3y^3z^2}{14x^5}\right) = \frac{(7)(2)(3)x^4y^7z^2}{(4)(3)(14)x^5y^2z^2} = \frac{y^5}{4x}.$

3.

$$\left(\frac{5x+25}{14}\right)\left(\frac{7x+7}{10x+50}\right) = \underbrace{\left(\frac{5(x+5)}{14}\right)\left(\frac{7(x+1)}{10(x+5)}\right)}_{\text{Se factoriza cada expresión}}$$

$$= \underbrace{\frac{(5)(7)(x+5)(x+1)}{(14)(10)(x+5)}}_{\text{Se deja indicada la multiplicación}}$$

$$= \underbrace{\frac{x+1}{4}}_{\substack{\text{se eliminan los términos} \\ \text{semejantes y se simplifica la} \\ \text{expresión numérica}}}.$$

4.

$$\left(\frac{2x^2-3x-2}{6x+3}\right)\left(\frac{3x+6}{x^2-4}\right)=\left(\frac{(2x+1)(x-2)}{3(2x+1)}\right)\left(\frac{3(x+2)}{(x-2)(x+2)}\right)$$

$$=\underbrace{\left(\frac{x-2}{3}\right)\left(\frac{3}{x-2}\right)}_{\substack{\text{se simplifican los términos}\\ \text{antes de multiplicar}}}$$

$$=\frac{3(x-2)}{3(x-2)}$$

$$=1.$$

5.

$$\left(\frac{x^3-27}{a^3-1}\right)\left(\frac{a^2+a+1}{x^2+3x+9}\right)=\frac{\left[(x-3)(x^2+3x+9)\right](a^2+a+1)}{\left[(a-1)(a^2+a+1)\right](x^2+3x+9)}$$

$$=\frac{x-3}{a-1}.$$

6.

$$\left(\frac{a^2-5a+6}{3a-15}\right)\left(\frac{6a}{a^2-a-30}\right)\left(\frac{a^2-25}{2a-4}\right)=\frac{\left[(a-3)(a-2)\right]6a\left[(a-5)(a+5)\right]}{\left[3(a-5)\right]\left[(a-6)(a+5)\right]\left[2(a-2)\right]}$$

$$=\frac{6a(a-3)(a-2)(a-5)(a+5)}{6(a-5)(a-6)(a+5)(a-2)}=\frac{a(a-3)}{a-6}$$

$$=\frac{a^2-3a}{a-6}.$$

1.5.2 División de fracciones algebraicas

En el caso de la división se multiplica el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda formando el numerador de la nueva fracción y el denominador de la primera por el numerador de la segunda formando el denominador de la nueva fracción.

Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son expresiones racionales, donde $b\neq 0$, $c\neq 0$ y $d\neq 0$, entonces

$$\left(\frac{a}{b}\right)\div\left(\frac{c}{d}\right)=\left(\frac{ad}{bc}\right)$$

Otra forma de presentarse la división es:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}.$$

Conocida como la "ley del sándwich".

También se puede realizar la división con una tercera opción:

$$\left(\frac{a}{b}\right) \div \left(\frac{c}{d}\right) = \left(\frac{a}{b}\right) \times \left(\frac{d}{c}\right) = \left(\frac{ad}{bc}\right)$$

Ejemplos

Dividir y simplificar las siguientes expresiones racionales.

1. $\frac{10m^2}{21n^3} \div \frac{5m^6}{7n^4}$.

Solución:

$$\frac{10m^2}{21n^3} \div \frac{5m^6}{7n^4} = \frac{(10)(7)m^2n^4}{(21)(5)m^6n^3} = \frac{2n}{3m^4}.$$

2. $\frac{x^3 - x}{2x^2 + 6x} \div \frac{5x^2 - 5x}{4x + 12}$.

Solución:

$$\frac{x^3 - x}{2x^2 + 6x} \div \frac{5x^2 - 5x}{4x + 12} = \underbrace{\frac{x(x-1)(x+1)}{2x(x+3)} \div \frac{5x(x-1)}{4(x+3)}}_{\text{se factotiza cada polinomio}}$$

$$= \underbrace{\frac{4x(x-1)(x+1)(x+3)}{(2)(5)x^2(x+3)(x-1)}}_{\substack{\text{se aplica la regla de la división} \\ \text{dejando el producto indicado}}}$$

$$= \underbrace{\frac{2(x+1)}{5x}}_{\substack{\text{se simplifica, eliminando} \\ \text{los términos semejantes}}}.$$

3. $\dfrac{3a^2}{a^2+6ab+9b^2} \div \dfrac{5a^3}{a^2b+3ab^2}$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{3a^2}{a^2+6ab+9b^2} \div \frac{5a^3}{a^2b+3ab^2} &= \frac{3a^2}{(a+3b)^2} \div \frac{5a^3}{ab(a+3b)} \\
&= \frac{3a^3b(a+3b)}{5a^3(a+3b)^2} \\
&= \frac{3b}{5(a+3b)}.
\end{aligned}$$

4. $\dfrac{\dfrac{6}{x^2-x-30}}{\dfrac{2}{x^2+x-42}}$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{\dfrac{6}{x^2-x-30}}{\dfrac{2}{x^2+x-42}} &= \frac{\dfrac{6}{(x-6)(x+5)}}{\dfrac{2}{(x+7)(x-6)}} \\
&= \frac{6(x+7)(x-6)}{2(x-6)(x+5)} \\
&= \frac{3(x+7)}{x+5}.
\end{aligned}$$

5. $\dfrac{\dfrac{16x^2-24xy+9y^2}{16x-12y}}{\dfrac{64x^3-27y^3}{32x^2+24xy+18y^2}}$.

Solución:

$$\frac{\dfrac{16x^2-24xy+9y^2}{16x-12y}}{\dfrac{64x^3-27y^3}{32x^2+24xy+18y^2}}=\frac{\dfrac{(4x-3y)^2}{4(4x-3y)}}{\dfrac{(4x-3y)(16x^2+12xy+9y^2)}{2(16x^2+12xy+9y^2)}}$$
$$=\frac{\dfrac{4x-3y}{4}}{\dfrac{4x-3y}{2}}$$
$$=\frac{2(4x-3y)}{4(4x-3y)}$$
$$=\frac{1}{2}.$$

Ejercicios

Realiza las siguientes multiplicaciones y divisiones. Simplifica el resultado reduciéndolo a la mínima expresión.

1. $\left(\dfrac{2x^2+2x}{2x^2}\right)\left(\dfrac{x^2-3x}{x^2-2x-3}\right).$

2. $\left(\dfrac{2x^2-3x-2}{6x+3}\right)\left(\dfrac{3x+6}{x^2-4}\right).$

3. $\left(\dfrac{x^2+4x}{x^2+4x+4}\right)\left(\dfrac{x^2-2x-8}{x^3+x^2}\right)\left(\dfrac{x^2+2x}{x^2-16}\right).$

4. $\left(\dfrac{2a-4}{a^2-4a+3}\right)\left(\dfrac{a}{a-2}\right)\left(\dfrac{a^2-5a+6}{6a}\right).$

5. $\left(\dfrac{m^3-n^3}{3n}\right)\left(\dfrac{3mn}{m^2+mn+n^2}\right)\left(\dfrac{1}{2m}\right).$

6. $\left(\dfrac{x^2-xy+x-y}{x^2+2x+1}\right)\left(\dfrac{3}{6x^2-6xy}\right).$

7. $\left(\dfrac{a-6}{a-2}\right)\left(\dfrac{a^2-a-2}{a^2-9a+18}\right)\left(\dfrac{2a}{a+1}\right).$

8. $\left(\dfrac{x^3-x}{x+1}\right)\left(\dfrac{2a^3+2ab^2}{a^2x+b^2x}\right)\left(\dfrac{x}{2ax^2-2ax}\right)$

9. $\left(\dfrac{a^2-6a+5}{a^2-15a+56}\right)\div\left(\dfrac{a^2+2a-35}{a^2-5a-24}\right).$

10. $\left(\dfrac{a^2-b^2}{a^3-b^3}\right)\div\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right).$

11. $\left(\dfrac{a-3}{a-5}\right)\div\left(\dfrac{a^2-8a+15}{a^2-11a+30}\right).$

12. $\left(\dfrac{2xy}{8y^2}\right) \div \left[\left(\dfrac{2m}{m-1}\right) \div \left(\dfrac{3my}{2m-2}\right)\right].$

13.
$\left(\dfrac{ac-ad-bc+bd}{a^2-b^2}\right) \div \left(\dfrac{c^2-d^2}{a^2+2ab+b^2}\right).$

14. $\left(\dfrac{1}{z^2-z-30}\right) \div \left(\dfrac{2}{z^2+z-42}\right).$

15. $\dfrac{\dfrac{ax^2+5}{4a^2-1}}{\dfrac{a^3x^2+5a^2}{2a-1}}.$

16. $\dfrac{\dfrac{16x^2-24xy+9y^2}{16x-12y}}{\dfrac{64x^3-27y^3}{32x^2+24xy+18y^2}}.$

17. $\dfrac{\dfrac{a^2-6a}{a^3+3a^2}}{\dfrac{a^2+3a-54}{a^2+9a}}.$

18. $\dfrac{\dfrac{m^2-6m+9}{4m^2-1}}{\dfrac{m^2+5m-24}{2m^2+17m+8}}.$

1.5.3 Multiplicación y división combinadas

Cuando se presentan la multiplicación y la división combinadas, conviene factorizar todos los polinomios e invertir la división para aplicar la regla de la multiplicación.

Ejemplos

1. $\dfrac{a^2+1}{3a-6} \div \left(\dfrac{a^3+a}{6a-12}\right)\left(\dfrac{a^2x+2a}{x-3}\right).$

Solución: Se factorizan los polinomios que sean factorizables, y después se aplican las reglas de la multiplicación o división. Por último se simplifica la expresión resultante.

$$\frac{a^2+1}{3a-6} \div \left(\frac{a^3+a}{6a-12}\right)\left(\frac{a^2x+2a}{x-3}\right) = \frac{a^2+1}{3(a-2)} \div \left(\frac{a(a^2+1)}{6(a-2)}\right)\left(\frac{a(ax+2)}{x-3}\right)$$

$$= \frac{a^2+1}{3(a-2)} \div \frac{a^2(a^2+1)(ax+2)}{6(a-2)(x-3)}$$

$$= \frac{6(a^2+1)(a-2)(x-3)}{3a^2(a-2)(a^2+1)(ax+2)}$$

$$= \frac{2(x-3)}{a^2(ax+2)}.$$

2. $\left(\dfrac{x^2-8x+7}{x^2-11x+30}\right)\left(\dfrac{x^2-36}{x^2-1}\right) \div \dfrac{x^2-x-42}{x^2-4x-5}.$

Solución:

$$\left(\frac{x^2-8x+7}{x^2-11x+30}\right)\left(\frac{x^2-36}{x^2-1}\right)\div\frac{x^2-x-42}{x^2-4x-5}=\left(\frac{(x-7)(x-1)}{(x-6)(x-5)}\right)\left(\frac{(x-6)(x+6)}{(x-1)(x+1)}\right)\div\frac{(x-7)(x+6)}{(x-5)(x+1)}$$

$$=\frac{(x-7)(x-1)(x-6)(x+6)}{(x-6)(x-5)(x-1)(x+1)}\div\frac{(x-7)(x+6)}{(x-5)(x+1)}$$

$$=\frac{(x-7)(x+6)}{(x-5)(x+1)}\div\frac{(x-7)(x+6)}{(x-5)(x+1)}=\frac{(x-7)(x+6)(x-5)(x+1)}{(x-5)(x+1)(x-7)(x+6)}$$

$$=1.$$

Ejercicios

Resuelve y simplifica las siguientes operaciones.

1. $\dfrac{5a}{b}\div\left[\left(\dfrac{2a}{b^2}\right)\left(\dfrac{5x}{4a^2}\right)\right].$

2. $\left[\left(\dfrac{x^2-x-12}{x^2-49}\right)\left(\dfrac{x^2-x-56}{3x^2+3x-60}\right)\right]\div\left(\dfrac{2x^2-10x-48}{3x+15}\right).$

3. $\left(\dfrac{y^2+20y+100}{y^2+7y-30}\right)\left[\left(\dfrac{y^4-27y}{y^3+3y^2+9y}\right)\div\left(\dfrac{y^2-100}{y-3}\right)\right].$

4. $\left[\left(\dfrac{x^2+7x+10}{x^2+2x-3}\right)\div\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)\right]\left(\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-25}\right).$

5. $\left(\dfrac{2a}{a-2}\right)\left[\left(\dfrac{a^2-4}{a^2+a}\right)\div\left(\dfrac{a+2}{a^2-1}\right)\right].$

6. $\left[\left(\dfrac{x^2-x-20}{x^2+2x-8}\right)\left(\dfrac{x^2+5x}{x^2-25}\right)\right]\div\left(\dfrac{x^2-x-2}{x+1}\right).$

7. $\left(\dfrac{(t+9)^2}{8a^2+9ab}\right)\div\left[\left(\dfrac{64a^2-81b^2}{t^2-81}\right)\left(\dfrac{(t-9)^2}{8a-9b}\right)\right].$

8. $\left[\left(\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2-4}\right)\div\left(\dfrac{3x^2-x-2}{x^2-x-6}\right)\right]\left(\dfrac{3x^2-4x-4}{2x^2-7x+3}\right).$

9. $\left[\left(\dfrac{2t-2}{4t^2-100}\right)\left(\dfrac{2t^2-8t-10}{3t+3}\right)\right]\div\left(\dfrac{t^3-125}{6t^2-12t}\right).$

10. $\left[\left(\dfrac{m^3-m^2x}{m^2+2mx+x^2}\right)\left(\dfrac{m^2-x^2}{m^3+mx^2}\right)\right]\div\left[\left(\dfrac{(m^2-mx)^2}{m^2+x^2}\right)\left(\dfrac{1}{m^3+m^2x}\right)\right].$

1.5.4 Suma y resta de fracciones algebraicas

Caso 1: Las expresiones racionales tienen el mismo denominador

Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{b}$ son expresiones racionales donde $b \neq 0$, entonces,

$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$, y del mismo modo la resta, $\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$.

Ejemplos

Efectuar las siguientes operaciones.

1. $\frac{3x+5}{2x-3}+\frac{5x}{2x-3}+\frac{7}{2x-3}=\frac{(3x+5)+(5x)+(7)}{2x-3}=\frac{8x+12}{2x-3}.$

2. $\frac{x^2-7x+1}{x^2+6x+9}-\frac{4-9x}{x^2+6x+9}=\frac{(x^2-7x+1)-(4-9x)}{x^2+6x+9}=\frac{x^2-7x+1-4+9x}{x^2+6x+9}$
$=\frac{x^2+2x-3}{x^2+6x+9}=\frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)^2}=\frac{x-1}{x+3}.$

3. $\frac{2x-2}{x+6}+\frac{3x-1}{x+6}-\frac{4x-4}{x+6}=\frac{(2x-2)+(3x-1)-(4x-4)}{x+6}=\frac{x+1}{x+6}.$

Ejercicios

Resuelve y simplifica las siguientes operaciones

1. $\frac{y-7}{y+5}+\frac{y+3}{y+5}.$

2. $\frac{x^2-3x}{2x-1}-\frac{x^2-3}{2x-1}.$

3. $\frac{5a^2-15}{2a^2-5}+\frac{4a^2-10}{2a^2-5}-\frac{a^2}{2a^2-5}.$

4. $\frac{9}{3t-4}+\frac{2t}{3t-4}+\frac{7t+5}{3t-4}.$

5. $\frac{2a(a+4)}{a^2-20a}-\frac{3a(a+6)}{a^2-20a}+\frac{2a(a-5)}{a^2-20a}$.

6. $\frac{x^2-7x+1}{x^2+5x+6}-\frac{2x^2-6x}{x^2+5x+6}+\frac{x^2+x+2}{x^2+5x+6}$.

7. $\frac{2t^2+3t+6}{t^2-121}+\frac{t^2-6t+8}{t^2-121}-\frac{3t^2-4t+3}{t^2-121}$.

8. $\frac{3a^2}{3a-4b}-\frac{3a(a+4)}{3a-4b}+\frac{16ab}{3a-4b}$.

Caso 2: Las expresiones racionales tienen diferente denominador

Recordemos cuáles son las reglas aritméticas de este tipo de operaciones.

Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son expresiones racionales donde $b,d \neq 0$, entonces,

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd} \quad \text{y} \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}.$$

En otras palabras, el procedimiento es:

- *Paso 1*: Factorizar y simplificar las fracciones dadas, reduciéndolas a su mínima expresión.
- *Paso 2*: Se reducen las fracciones de los denominadores al mínimo común denominador (m. c. m.)
- *Paso 3*: Se efectúan las multiplicaciones correspondientes de acuerdo a la regla aritmética.
- *Paso 4*: Se suman las expresiones del numerador, y se simplifica la expresión resultante.

Ejemplos

Resuelve y simplifica las siguientes operaciones.

1. $\frac{1}{3x+3}+\frac{1}{2x-2}+\frac{1}{x^2-1}$.

Solución:

P1: Se factorizan los denominadores:

$$3(x+1),\ 2(x-1),\ (x+1)(x-1)$$

P2: El m. c. m.

$$6(x+1)(x-1)$$

P3 y *P4*:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3x+3}+\frac{1}{2x-2}+\frac{1}{x^2-1}&=\frac{1}{3(x+1)}+\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{(x+1)(x-1)}\\&=\frac{2(x-1)+3(x+1)+6}{6(x+1)(x-1)}\\&=\frac{2x-2+3x+3+6}{6(x+1)(x-1)}\\&=\frac{5x+7}{6(x+1)(x-1)}.\end{aligned}$$

2. $\dfrac{1}{a^2-ab}+\dfrac{1}{ab}-\dfrac{a^2+b^2}{a^3b-ab^3}.$

Solución:

P1: Factorizando los denominadores:

$$a(a-b),\ ab\ ,ab(a-b)(a+b)$$

P2: El m. c. m.

$$ab(a-b)(a+b)$$

P3 y *P4*:

$$\frac{1}{a^2-ab}+\frac{1}{ab}-\frac{a^2+b^2}{a^3b-ab^3}=\frac{1}{a(a-b)}+\frac{1}{ab}-\frac{a^2+b^2}{ab(a-b)(a+b)}$$

$$=\frac{b(a+b)+(a-b)(a+b)-1(a^2+b^2)}{ab(a-b)(a+b)}$$

$$=\frac{ab+b^2+a^2-b^2-a^2-b^2}{ab(a-b)(a+b)}$$

$$=\frac{ab-b^2}{ab(a-b)(a+b)}$$

$$=\frac{b(a-b)}{ab(a-b)(a+b)}$$

$$=\frac{1}{a(a+b)}.$$

3. $\frac{x-2}{x^2-x}-\frac{x+3}{x^2+3x-4}+\frac{x^2+12x+6}{x^4+3x^3-4x^2}.$

Antes de realizar la suma, factorizamos los denominadores de cada fracción, entonces la expresión anterior se expresa como:

$$\frac{x-2}{x(x-1)}-\frac{x+3}{(x+4)(x-1)}+\frac{x^2+12x+6}{x^2(x+4)(x-1)}.$$

Aplicando los procedimientos descritos anteriormente tenemos que:

m. c. m.= $x^2(x-1)(x+4)$,

Por tanto, la operación es:

$$\frac{x-2}{x^2-x}-\frac{x+3}{x^2+3x-4}+\frac{x^2+12x+6}{x^4+3x^3-4x^2}=\frac{x-2}{x(x-1)}-\frac{x+3}{(x+4)(x-1)}+\frac{x^2+12x+6}{x^2(x+4)(x-1)}$$

$$=\frac{x(x+4)(x-2)-x^2(x+3)+\left(x^2+12x+6\right)}{x^2(x-1)(x+4)}$$

$$=\frac{x^3+2x^2-8x-x^3-3x^2+x^2+12x+16}{x^2(x-1)(x+4)}$$

$$=\frac{4x+16}{x^2(x-1)(x+4)}=\frac{4(x+4)}{x^2(x-1)(x+4)}$$

$$=\frac{4}{x^2(x-1)}.$$

Ejercicios

Resuelve y simplifica las siguientes operaciones

1. $\frac{3b}{a-b}+\frac{3a}{b-a}.$

2. $\frac{7x-4}{4}+\frac{3x+2}{3}.$

3. $\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{1-2x^2}{x^3}.$

4. $\frac{1}{m+1}+\frac{2m+1}{m^2+2m+1}-\frac{5-m^2}{m^2-1}.$

5. $\frac{5}{x^3}-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x}.$

6. $\frac{2x-1}{x+3}+\frac{3x+1}{x+5}-\frac{5x^2+19x-2}{x^2+8x+15}.$

7. $\frac{1}{t+2}+\frac{2+t}{t^2+4t+4}-\frac{2-t}{t^2-4}.$

8. $\frac{m+1}{m-4}+\frac{2m}{m^2-9m+20}+\frac{m+2}{m-5}.$

9. $\frac{3a}{3a^2+15a}+\frac{4a}{a^2+8a+15}+\frac{2a^2-3a}{3a^2+9a}.$

10. $\frac{x-4}{3x^2+12x}-\frac{2x-4}{x^2+x-12}-\frac{4-2x}{2x^2-6x}.$

11. $\frac{n+5}{n^2+5n+4}-\frac{n+4}{n^2-4n-5}+\frac{n+1}{n^2-n-20}.$

12. $\frac{2x}{x-1}+\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{2x^3+2x^2}{1-x^3}.$

1.5.5 Fracciones mixtas

En esta sección abordaremos la simplificación de expresiones fraccionarias que combinan las cuatro operaciones básicas, suma, resta, multiplicación y división.

Para reducir estas fracciones se aplican las reglas de simplificación vistas anteriormente.

Ejemplos

Simplificar:

1. $\left(x+3-\frac{5}{x-1}\right)\left(x-2+\frac{5}{x+4}\right).$

En este ejemplo conviene simplificar cada factor antes de efectuar la multiplicación, para facilitar este proceso les llamaremos *factor A* y *factor B*, así entonces:

$$A:\quad \begin{aligned}\left(x+3-\frac{5}{x-1}\right)&=\frac{(x+3)(x-1)-5}{x-1}=\frac{x^2+3x-x-3-5}{x-1}\\&=\frac{x^2+2x-8}{x-1}=\frac{(x+4)(x-2)}{x-1}.\end{aligned}$$

$$B:\quad \begin{aligned}\left(x-2+\frac{5}{x+4}\right)&=\frac{(x+4)(x-2)+5}{x+4}=\frac{x^2+2x-8+5}{x+4}\\&=\frac{x^2+2x-3}{x+4}=\frac{(x+3)(x-1)}{x+4}.\end{aligned}$$

Una vez que se han simplificado, se efectúa la multiplicación. Debemos tener cuidado de no efectuar los productos “internos”, éstos se deben dejar indicados para poder cancelarlos más adelante:

$$\begin{aligned}\left(x+3-\frac{5}{x-1}\right)\left(x-2+\frac{5}{x+4}\right)&=\left(\frac{(x+4)(x-2)}{x-1}\right)\left(\frac{(x+3)(x-1)}{x+4}\right)\\&=\frac{(x+4)(x-2)(x+3)(x-1)}{(x-1)(x+4)}\\&=(x-2)(x+3).\end{aligned}$$

2. $$\frac{\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a+1}}{\frac{a}{a-1}-\frac{1}{a+1}}.$$

En este caso consideraremos como *A* la fracción que está en el numerador principal, y como *B* la fracción que está en el denominador principal:

$$A:\ \frac{1}{a-1}-\frac{1}{a+1}=\frac{(a+1)-(a-1)}{(a-1)(a+1)}=\frac{a+1-a+1}{(a-1)(a+1)}=\frac{2}{\underbrace{(a-1)(a+1)}_{\text{Aquí conviene dejar indicados los factores del denominador.}}}.$$

$$B:\ \frac{a}{a-1}-\frac{1}{a+1}=\frac{a(a+1)-(a-1)}{(a-1)(a+1)}=\frac{a^2+a-a+1}{(a-1)(a+1)}=\frac{a^2+1}{\underbrace{(a-1)(a+1)}_{\text{Aquí conviene dejar indicados los factores del denominador.}}}.$$

Ahora se sustituyen estas fracciones simplificadas en la división inicial y se resuelve siguiendo la regla de la división, entonces:

$$\frac{\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a+1}}{\frac{a}{a-1}-\frac{1}{a+1}}=\frac{\frac{2}{(a-1)(a+1)}}{\frac{a^2+1}{(a-1)(a+1)}}$$

$$=\frac{2}{a^2+1}.$$

3. $$\frac{x-2}{x-\frac{1}{1-\frac{2}{x+2}}}.$$

En este caso, seccionaremos la fracción de abajo hacia arriba, resolviendo y sustituyendo en este orden, entonces:

$$\left[\frac{x-2}{\left[x-\frac{1}{\left[1-\frac{2}{x+2}\right]A}\right]B}\right]C$$

$$A\text{: } 1-\frac{2}{x+2}=\frac{x+2-2}{x+2}=\frac{x}{x+2}.$$

Ahora sustituimos este resultado en *B*

$$B\text{: } x-\frac{1}{\frac{x}{x+2}}=x-\frac{x+2}{x}=\frac{x^2-(x+2)}{x}=\frac{x^2-x-2}{x}=\frac{(x-2)(x+1)}{x}.$$

Finalmente sustituimos *B* en la fracción *C*, y el resultado obtenido es el resultado final.

$$C\text{: } \frac{x-2}{\frac{(x-2)(x+1)}{x}}=\frac{x}{x+1}.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\frac{x-2}{x-\frac{1}{1-\frac{2}{x+2}}}&=\frac{x-2}{x-\frac{1}{\frac{x}{x+2}}}\\&=\frac{x-2}{\frac{(x-2)(x+1)}{x}}\\&=\frac{x(x-2)}{(x-2)(x+1)}\\&=\frac{x}{x+1}.\end{aligned}$$

4. $$\dfrac{\dfrac{t+1-\dfrac{6t+12}{t+2}}{t-5}}{\dfrac{t-4+\dfrac{11t-22}{t-2}}{t+7}}.$$

Nuevamente resolvemos agrupando y efectuando las divisiones *A, B, C y D,* para finalmente simplificar $\dfrac{B}{D}$.

Entonces:

$$\dfrac{\left[\dfrac{\left[t+1-\dfrac{6t+12}{t+2}\right]A}{t-5}\right]B}{\left[\dfrac{\left[t-4+\dfrac{11t-22}{t-2}\right]C}{t+7}\right]D}$$

$$A:\quad t+1-\frac{6t+12}{t+2}=t+1-\frac{6(t+2)}{t+2}=t+1-6=t-5.$$

$$B:\quad \frac{t-5}{t-5}=1.$$

$$C:\quad t-4+\frac{11t-22}{t-2}=t-4+\frac{11(t-2)}{t-2}=t-4+11=t+7.$$

$$D:\quad \frac{t+7}{t+7}=1.$$

Finalmente,

$$\frac{B}{D}=\frac{1}{1}=1.$$

Por lo tanto:

$$\frac{\dfrac{t+1-\dfrac{6t+12}{t+2}}{t-5}}{\dfrac{t-4+\dfrac{11t-22}{t-2}}{t+7}}=1.$$

Ejercicios

Resuelve y simplifica las siguientes fracciones mixtas.

1. $\left(a+\dfrac{a}{b}\right)\left(a-\dfrac{a}{b+1}\right).$

2. $\left(2+\dfrac{2}{y+1}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(3-\dfrac{6}{y+2}\right).$

3. $\left(\dfrac{a}{a+x}+\dfrac{x}{a+x}\right)\left(\dfrac{a^2+2ax+x^2}{a+x}\right).$

4. $\left(\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x}{x-1}-1\right)\left(x^2-1\right).$

5. $\dfrac{x-\dfrac{xy}{x+y}}{x+\dfrac{xy}{x-y}}.$

6. $\dfrac{x-1-\dfrac{5}{x+3}}{x+5-\dfrac{35}{x+3}}.$

7. $\dfrac{\dfrac{w}{w-3}-\dfrac{3}{w+3}}{\dfrac{1}{w-3}-\dfrac{1}{w+3}}.$

8. $\dfrac{x-1}{x+2-\dfrac{x^2+2}{x-\dfrac{x-2}{x+1}}}.$

9. $1-\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{\dfrac{a}{3}-1}}.$

10. $3-\dfrac{3}{3-\dfrac{3}{1-\dfrac{3}{3-\dfrac{3}{x^2}}}}.$

UNIDAD 2

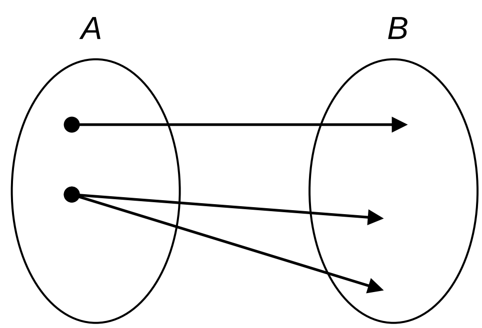
2. FUNCIONES

El tema de funciones ha sido abordado en otros cursos, principalmente y de manera abundante en el curso de matemáticas 4, por esa razón daremos un breve repaso de los elementos principales que conciernen a las funciones.

2.1 DEFINICIÓN DE RELACIÓN Y FUNCIÓN

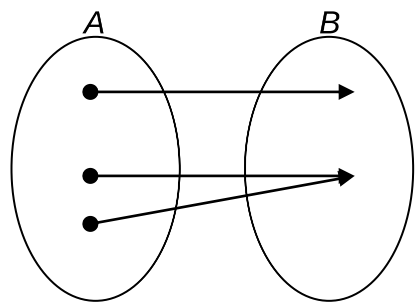
Para poder entender qué es una función, vamos a comenzar definiendo una relación.

Una RELACIÓN es una expresión en donde dos o más variables se comparan o interactúan mediante una regla de correspondencia. Es decir, es una regla en la que se asocian los elementos de un conjunto ***A*** llamado *dominio* con los elementos de un conjunto ***B*** llamado *contradominio*.



Esta asociación sólo es una relación.

La FUNCIÓN es un caso particular de las relaciones en donde: a todo elemento de un conjunto ***A*** le corresponde uno y sólo un elemento del conjunto ***B***, mientras que en las relaciones a todos o algunos elementos del conjunto A se les puede asociar uno o más elementos del conjunto *B*.



Este tipo de asociación es una función.

2.2 ELEMENTOS DE UNA FUNCIÓN

Una función tiene:

- Un conjunto *A* llamado dominio de la función.
- Un conjunto *B* llamado contradominio de la función.
- Una regla de correspondencia que asocia a cada elemento de *A*, un único un elemento de *B*.

Esta regla de correspondencia debe tener las siguientes propiedades:

1° Ningún elemento del dominio puede quedar sin asociado en el contradominio.

2° Ningún elemento del dominio puede tener más de un asociado en el contradominio, aunque es posible que varios elementos del dominio tengan al mismo asociado en el contradominio.

Ahora, la regla de correspondencia se puede dar en forma de ecuación, tabla de valores o en forma gráfica, y se representa por $f(x),\ g(x),\ h(x)$ etc.

Sean *A* y *B* conjuntos y f la regla de correspondencia que los relaciona, entonces:

$f: A \to B$ se lee: " f va de A a B "

si x es un elemento de *A*, entonces el elemento de *B* asociado a x mediante f es $f(x)$ y se lee " f de x "

Ejemplos

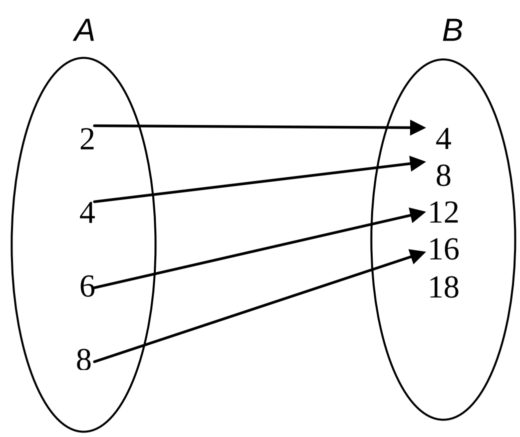
Determina si las siguientes relaciones son funciones o no.

1. Sean $A = \{2,4,6,8\}$ y $B = \{4,8,12,16,18\}$ con $f: A \to B$ y $f(x) = 2x$

Para saber si es función o no, sustituimos cada valor de *A* en $f(x)$ de tal modo que:

$$
\begin{aligned}
f(2) &= 2(2) = 4 \\
f(4) &= 2(4) = 8 \\
f(6) &= 2(6) = 12 \\
f(8) &= 2(8) = 16
\end{aligned}
$$

En el diagrama:



Entonces, como 4, 8,12 y 16 están en *B* y a cada elemento de *A* le corresponde un solo elemento de *B*, entonces sí es función.

2. Sean $C = \{1,4,9\}$ y $D = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ con $f : C \to D$ y $f(x) = \pm\sqrt{x}$

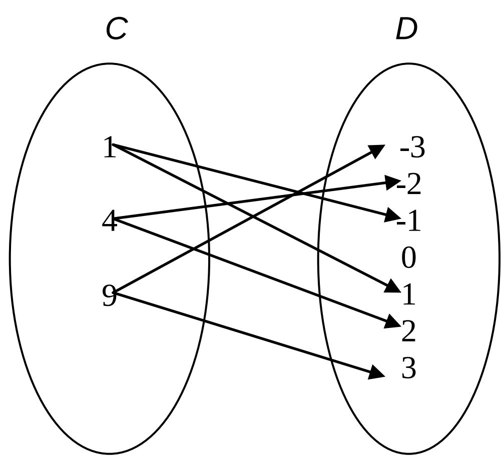
Entonces

$f(1) = \pm\sqrt{1} = \pm 1$, es decir, $\begin{array}{l} f(1) = 1 \\ f(1) = -1 \end{array}$

$f(4) = \sqrt{4} = \pm 2$, es decir, $\begin{array}{l} f(4) = 2 \\ f(4) = -2 \end{array}$

$f(9) = \sqrt{9} = \pm 3$, es decir, $\begin{array}{l} f(9) = 3 \\ f(9) = -3 \end{array}$

En el diagrama:



En este caso cada elemento de C se asocia con dos elementos de D, por lo tanto no es función.

2.3 INTERVALOS

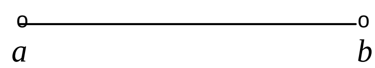
Un elemento que se usa frecuentemente en el desarrollo de funciones es la restricción de los valores que se asignan a la variable independiente que es un subconjunto de los números reales llamado *intervalo.*

Sean a y b dos números reales tales que $a<b$ tenemos:

2.3.1 Intervalo abierto

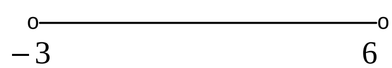
Es $\{x \in \Re / a < x < b\}$, que corresponde a los puntos de la recta que están entre a y b, es decir, son los números reales mayores que a *y menores que* b. La forma de denotarlo es (a,b).

En forma gráfica tenemos:



Ejemplo

$-3< x<6$ se representa por $x\in(-3,6)$ y gráficamente como:

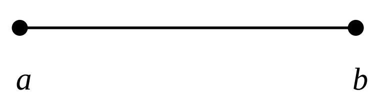


donde los puntos –3 y 6 no están en el intervalo.

2.3.2 Intervalo cerrado

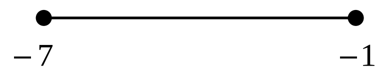
Es $\{x \in \Re / a \le x \le b\}$, que corresponde a los puntos de la recta que están entre a y b, o que coinciden con a y b. Es decir, es un intervalo en el que se incluyen los extremos. La forma de denotarlo es $[a,b]$.

En forma gráfica tenemos:



Ejemplo

$-7 \leq x \leq -1$ se representa por $x \in [-7, -1]$ y gráficamente como:



En donde -7 y -1 sí forman parte del intervalo.

Dicho de otro modo, -7 es el primer valor del intervalo y -1 es el último.

2.3.3 Intervalo infinito

Sea a un número real, entonces:

Se dice que el intervalo $\{x \in \Re / x > a\}$, correspondiente a todos los puntos de la recta que se encuentran a la derecha de a, denotado con (a, ∞).

El intervalo $\{x \in \Re / x < a\}$, correspondiente a todos los puntos de la recta que se encuentran a la izquierda de a, denotado con $(-\infty, a)$.

El intervalo $\{x \in \Re / x \geq a\}$, que corresponde a todos los puntos de la recta que se encuentran a la derecha o coinciden con a, denotado con $[a, \infty)$.

El intervalo $\{x \in \Re / x \leq a\}$ que corresponde a todos los puntos de la recta que se encuentran a la izquierda o coinciden con a, denotado con $(-\infty, a]$.

Los números reales $\Re$, se representan por el intervalo $(-\infty, \infty)$.

A manera de síntesis, podemos obtener algunas combinaciones con los diferentes intervalos y agruparlos como muestra la siguiente tabla.

Tipo de intervalo	Notación con paréntesis	Expresión algebraica
Abierto	(a,b)	$a<x<b$
Cerrado	$[a,b]$	$a\leq x\leq b$
Semiabiertos	$(a,b]$	$a<x\leq b$
	$[a,b)$	$a\leq x<b$
Infinitos	(a,∞)	$x>a$
	$(-\infty,a)$	$x<a$
	$[a,\infty)$	$x\geq a$
	$(-\infty,a]$	$x\leq a$
	$(-\infty,\infty)$	$x\in\Re$

2.4 EVALUACIÓN DE FUNCIONES

Para estudiar una función $y = f(x)$ es necesario conocer los valores que se pueden asignar a la variable independiente y que se expresan en su dominio.

Ejemplos

Hallar los valores que toma la función en los valores dados.

1. Si $f(x) = 2x^2 + 1$ obtener $f(1)$, $f(-3)$ y $f\left(\frac{x}{2}\right)$.

Solución:

Sustituimos cada valor dado en la función, así:

- $f(1) = 2(1)^2 + 1 = 2(1) + 1 = 2 + 1 = 3.$
- $f(-3) = 2(-3)^2 + 1 = 2(9) + 1 = 18 + 1 = 19.$
- $f\left(\frac{x}{2}\right) = 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1 = 2\left(\frac{x^2}{4}\right) + 1 = \frac{2x^2}{4} + 1 = \frac{x^2}{2} + 1.$

2. Si $f(x) = \frac{1}{x}$ obtener $f(-2)$, $f\left(\frac{3}{4}\right)$, $f(5x^2)$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$ y $3f(1) - 4f(-2)$.

Solución:

- $f(-2) = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}.$
- $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}.$
- $f(5x^2) = \frac{1}{5x^2}.$
- $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x.$

- $$\begin{aligned} 3f(1)-4f(-2) &= 3\left(\frac{1}{1}\right)-4\left(\frac{1}{-2}\right) \\ &= 3(1)-4\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 3+\frac{4}{2} \\ &= 3+2=5. \end{aligned}$$

3. Si $g(x)=\operatorname{sen} x$ hallar $g(0)$, $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ y $g(x^2)$.

Solución:

- $g(0)=\operatorname{sen}(0)=0.$
- $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$
- $g(x^2)=\operatorname{sen}(x^2).$

4. Si $h(x)=\begin{cases} 2x & \text{si } x\geq 5 \\ x+1 & \text{si } x<5 \end{cases}$ hallar $h(6)$, $h\left(\frac{1}{2}\right)$, $h\left(\frac{20}{3}\right)$ y $h(-4)$.

Solución:

En este caso, debemos sustituir los valores en la ecuación que corresponda al intervalo en el que se encuentra dicho valor.

Así, para:

- $h(6)$, como $6>5$ entonces $h(6)=2(6)=12.$
- $h\left(\frac{1}{2}\right)$, como $\frac{1}{2}<5$ entonces $h\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}.$

- $h\left(\frac{20}{3}\right)$, como $\frac{20}{3} > 5$ entonces $h\left(\frac{20}{3}\right) = 2\left(\frac{20}{3}\right) = \frac{40}{3}$.
- $h(-4)$, como $-4 < 5$ entonces $h(-4) = (-4) + 1 = -3$.

Ejercicios

Determina cuáles de las siguientes son funciones y elabora el diagrama correspondiente.

1. Sean $A = \{1,2,3,4,5\}$ y $B = \{-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2\}$
$f : A \to B$ Con $f(x) = x - 5$.

2. Sean $C = \{-5,-4,0,4,5\}$ y $D = \{0,1,2,3,4,5\}$
$f : C \to D$ Con $f(x) = |x|$.

3. Sean $M = \{-1,-2,0,1,2\}$ y $N = \{0,\sqrt{3},2,4\}$
$f : M \to N$ Con $f(x) = \pm\sqrt{4 - x^2}$.

4. Sean $A = \{2,4,6\}$ y $B = \{4,6,8,10\}$
$f : A \to B$ Con $f(x) = x + 2$.

Evalúa las siguientes funciones y obtén los resultados correspondientes.

1. $f(x) = \frac{x}{x-1}$ calcular $f(4)$, $8f(2)$ y $7f(-1) + 5f(-3)$.

2. $g(x) = \sqrt{x+1}$ calcular $g(3)$, $g(x^2 - 10)$, $g(3x - 5)$ y $4g(15) - 3g(8)$.

3. $f(x) = \operatorname{sen} 2x + \cos x$ calcular $f(0)$, $6f\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $f(\pi)$ y $5f(\sqrt{x})$.

4. $g(t) = \frac{(t-1)^2}{t+1}$ calcular $g(0)$, $g\left(\frac{-3}{4}\right)$, $g(3)$, $g\left(\frac{1}{t}\right)$ y $-3g(0) + 8g(1)$.

5. $h(x)=\dfrac{8x+9}{3-2x}$ calcular $h\left(\dfrac{3}{2}\right),\ h\left(\dfrac{5}{x^2}\right)$ y $h\left(\dfrac{5x-2}{2x+3}\right)$.

6. $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x<1 \\ \\ 2 & \text{si } x\leq 1 \end{cases}$

Calcular $f(-6),\ f(-1),\ f(5),\ f(0)$ y $f(7)$.

7. $h(x)=\begin{cases} x+5 & \text{si } x\in(-\infty,-3] \\ x^2-4 & \text{si } x\in(-3,2) \\ \sqrt{x} & \text{si } x\in[2,\infty) \end{cases}$

Calcular $h(-6),\ h(0),\ h(-2),\ h\left(\dfrac{3}{2}\right),\ h(9),\ h(4)\ y\ h\left(\dfrac{11}{4}\right)$.

2.5 TIPOS DE FUNCIONES

Un elemento importante en una función es su representación algebraica, de aquí, que una de las clasificaciones que hay sobre las funciones es respecto a su expresión algebraica.

2.5.1 Funciones algebraicas

- **Polinomiales**

Son funciones de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Donde $a_i \in \Re$ $a_n \neq 0$ y $n \in \mathbf{N}$

Ejemplos

1. $f(x) = x^3 + 5x^2 - 3x + 1$.

2. $g(x) = x^4 - 64$.

3. $f(x) = \frac{x^2}{4} - 3x + 9$.

- **Racionales**

Son funciones de la forma

$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ donde P y Q son funciones polinomiales y $Q(x) \neq 0$.

Ejemplos

1. $f(x) = \frac{-2x}{x+6}$.

2. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

3. $g(x) = \frac{2x-5}{4-3x}$.

4. $h(x)=\dfrac{7}{x(x-2)(x+4)(x-5)}$.

- **Radicales**

En este tipo de funciones, la variable independiente aparece dentro de algún radical, es decir, es de la forma:

$$f(x)=\sqrt[n]{P(x)} \quad \text{con} \quad n\in\aleph \text{ y si } n \text{ es par, entonces} \quad P(x)\geq 0$$

Ejemplos

1. $f(x)=\sqrt{3x-7}$.

2. $g(x)=\sqrt[3]{27-x}$.

3. $g(x)=-\sqrt{16-x^2}$.

2.5.2 Funciones trascendentes

- **Trigonométricas**

Directas

$f(x)=\operatorname{sen} x$ $\qquad$ $f(x)=\csc x$
$f(x)=\cos x$ $\qquad$ $f(x)=\sec x$
$f(x)=\tan x$ $\qquad$ $f(x)=\cot x$

Inversas

$g(x)=\operatorname{arcsen} x$ $\qquad$ $g(x)=\operatorname{arccsc} x$
$g(x)=\arccos x$ $\qquad$ $g(x)=\operatorname{arc\,sec} x$
$g(x)=\arctan x$ $\qquad$ $g(x)=\operatorname{arc\,cot} x$

- **Logarítmicas**

$f(x) = \ln x$ logaritmo natural.

$f(x) = \log_b x$ logaritmo base b.

- **Exponenciales**

$f(x) = e^x$ exponencial base e.
$f(x) = b^x$ exponencial base b con b constante b > 0 y b distinta de 1.

Ejercicios

Identifica según su expresión algebraica, el tipo al que pertenece cada función.

1. $f(x) = \dfrac{x^3}{2} + 8$.
2. $f(x) = \operatorname{arcsen} 2x$.
3. $f(x) = 3\log_2 7x$.
4. $g(x) = \dfrac{5x+1}{9-x^2}$.
5. $g(x) = 10^{8x}$.
6. $f(x) = 4x^6 + \dfrac{8x^3}{3} + \dfrac{4}{9}$.
7. $h(x) = \tan \dfrac{x}{x+1}$.
8. $h(x) = \sqrt{x-7}$.
9. $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$.
10. $g(x) = \dfrac{x+3}{3x-1}$.

2.6 DOMINIO NATURAL Y GRÁFICA DE FUNCIONES

Introducción

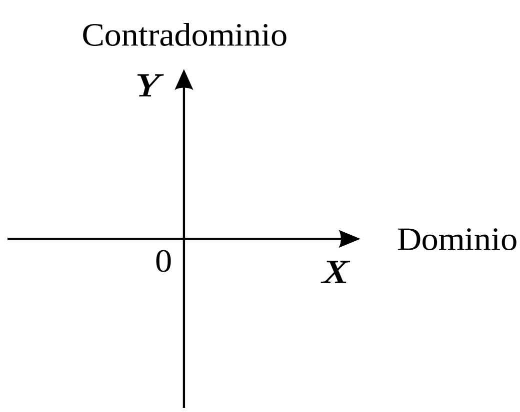
En ésta lección estudiaremos a las funciones algebraicas, su dominio y representación gráfica.

Antes de abordar los casos particulares, daremos una definición del dominio y la gráfica de una función. Posteriormente se abundará y ejemplificará cada caso.

Gráfica de una función

El plano cartesiano se forma por la intersección de dos rectas perpendiculares. Al eje horizontal se le conoce como eje de las abscisas y es donde se encuentran los valores de x, y al eje vertical llamado eje de las ordenadas, es el que contiene los valores de y.

Entonces el dominio de las funciones está en el eje de las x mientras que el contradominio está en el eje de las y. De aquí tenemos que la forma de representar gráficamente a una función es a partir de un conjunto de puntos de la forma $P(x, f(x))$, o $P(x, y)$.



Dominio Natural

Una **función real de variable real**, es una función entre dos subconjuntos de $\Re$. En éste tipo de funciones es frecuente que la regla de correspondencia se dé explícitamente mediante una fórmula, sin especificar el dominio de dicha función, en ese caso, se considera como dominio de la función, al conjunto de los reales x para cada uno de los cuales la fórmula toma un único valor real y. A este conjunto se le llama *dominio natural de la función.*
En adelante cuando se hable de una función debe entenderse que se trata de una función real.

Para ejemplificar el dominio y la gráfica de las funciones algebraicas, vamos a comenzar con las funciones polinomiales.

2.6.1 Funciones Polinomiales

Como explicamos anteriormente estas funciones son polinomios de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 + a_0 \text{ donde } a_i \notin \Re,\ a_n \neq 0 \text{ y } n \in \mathbf{N}$$

en estas funciones el dominio natural está definido en todo el conjunto de los números reales, es decir, la función está definida para cualquier valor x con $x \in \Re$, dicho de otro modo el dominio de la función es: $Dom_f = (-\infty, \infty)$.

Una vez que se ha determinado el dominio podemos elegir una serie de valores o un subconjunto del dominio para tabular y obtener una representación gráfica de la función.

Este procedimiento lo desglosaremos en pasos.

- *Paso 1*. Calcular el dominio de la función y lo representaremos como Dom_f.
- *Paso 2*. Elegir el conjunto de valores, subconjunto del dominio y evaluarlos en la función $f(x)$, para elaborar la tabla de valores.
- *Paso 3*. Localizar en el plano los puntos obtenidos y graficar la función.

Ejemplos

1. Sea $f(x) = 2x - 3$ hallar el dominio, la tabla de valores y la gráfica.

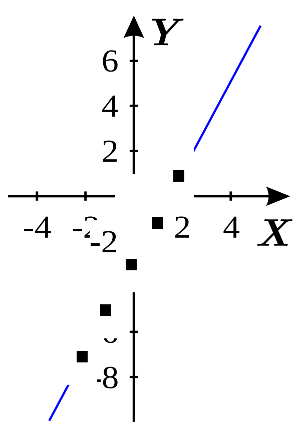
Solución:

Paso 1. El dominio de f está dado en $Dom_f = (-\infty, \infty)$ o $Dom_f = \Re$.

Paso 2. Una vez determinado el dominio, elegimos un conjunto de números para calcular la tabla de valores, sustituyendo cada uno en $f(x) = 2x - 3$.

x	$f(x)$
-2	-7
-1	-5
0	-3
1	-1
2	1

Paso 3. Ahora localizamos en el plano los puntos obtenidos y los unimos para formar la gráfica.



2. Hallar el dominio, la tabla de valores y la gráfica de la función $g(x) = x^2 + 4x + 4$.

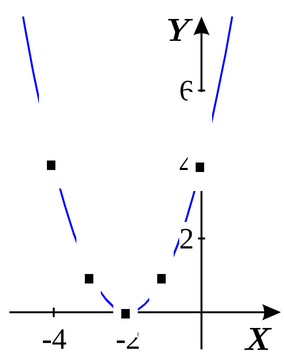
Solución:

Paso 1. El dominio es $Dom_g = (-\infty, \infty)$.

Paso 2. Tabulación:

x	$g(x)$
-4	4
-3.5	2.25
-3	1
-2.5	.0.25
-2	0
-1.5	0.25
-1	1
-0.5	2.25
0	4
0.5	6.25

Paso 3. Ahora localizamos en el plano los puntos obtenidos y los unimos para formar la gráfica:



3. Hallar el dominio, la tabla de valores y la gráfica de la función $h(x) = x^3 - 4x$.

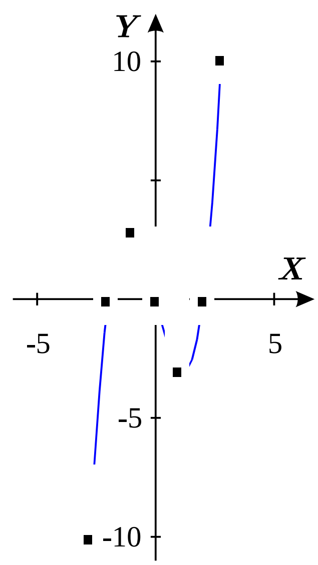
Solución:

Paso 1. El dominio es $Dom_h = (-\infty, \infty)$.

Paso 2. Tabulación:

x	$h(x)$
-3	-15
-2.5	-5.62
-2	0
-1.5	2.62
-1	3
-0.5	1.87
0	0
0.5	-1.87
1	-3
1.5	-2.62
2	0
2.5	5.62
3	15

Paso 3. La gráfica es:



Ejercicio

Calcular el dominio, la tabla de valores y la gráfica de las siguientes funciones.

1. $f(x) = 9 - x^2$.

2. $g(x) = 3x + 2$.

3. $f(x) = x^3 - 8$.

4. $h(x) = x^4 - x^2$.

5. $f(x) = x^2 - 8x + 15$.

6. $f(x) = \frac{x}{3} - 7$.

7. $g(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$.

8. $h(x) = -(x+5)^2$.

2.6.2 Funciones Racionales

Recordemos que las funciones racionales son de la forma

$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ donde , $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones polinomiales y $Q(x) \neq 0$.

Esta precisión respecto a $Q(x) \neq 0$ es fundamental para orientarnos sobre las condiciones que debemos analizar para obtener el dominio de éstas funciones, ya que el dominio está restringido para aquellos valores en los que el denominador es diferente a cero.

Antes de calcular la tabla de valores y la gráfica para este tipo de funciones, vamos a ver algunos ejemplos en los que solamente calcularemos el dominio de diferentes funciones racionales, con la finalidad de familiarizarnos con el procedimiento.

Ejemplos

Hallar el dominio de las siguientes funciones:

1. $f(x)=\dfrac{x}{5x-3}$.

Solución:

Para que el cociente $\dfrac{x}{5x-3}$ esté definido, es necesario que el denominador sea diferente a cero, entonces tenemos que encontrar los valores de x para los cuales $5x-3=0$ y eliminarlos del conjunto de los $\Re$.

Entonces $x=\dfrac{3}{5}$.

Por tanto el dominio de la función es el conjunto de los números reales excepto el punto $x=\dfrac{3}{5}$, es decir:

$$Dom_f=\Re-\left\{\frac{3}{5}\right\}$$, en forma de intervalo

$$Dom_f=\left(-\infty,\frac{3}{5}\right)\cup\left(\frac{3}{5},\infty\right).$$

2. $g(x)=\dfrac{-2}{x^2-4}$.

Solución:

En este caso, debemos hallar los valores para los cuales $x^2-4=0$, tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}x^2-4&=0\\x^2&=4\\x&=\pm 2\end{aligned}$$

Es decir $x=2$ y $x=-2$, el dominio de la función es:

$$Dom_g = \Re - \{-2,2\}, \quad \text{o el intervalo}$$
$$Dom_g = (-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,\infty).$$

3. $h(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x - 10}$.

Solución:

Para encontrar los valores en los que $x^2 - 3x - 10 = 0$ podemos resolver esta ecuación factorizando e igualando a cero cada factor,

$$\begin{gathered} x^2 - 3x - 10 = 0 \\ (x-5)(x+2) = 0 \\ x-5=0 \quad x=5 \\ x+2=0 \quad x=-2 \end{gathered}$$

Entonces $x=5$ y $x=-2$, el dominio de la función es:

$$Dom_h = \Re - \{-2,5\} = Dom_h = (-\infty,-2) \cup (-2,5) \cup (5,\infty).$$

4. $f(x) = \dfrac{3}{x^2+1}$.

Solución:

En este ejemplo, podemos ver que si $x^2+1=0$ las soluciones no son reales, es decir, no hay valores reales que satisfagan la ecuación $x^2=-1$, por lo tanto el dominio es:

$$Dom_f = \Re = (-\infty,\infty).$$

Ejercicio

Para cada una de las siguientes funciones, determina únicamente los valores críticos y el dominio correspondiente.

1. $f(x) = \dfrac{x-7}{x+7}$.

2. $f(x) = \dfrac{4}{2x-3}$.

3. $g(x) = \dfrac{6x}{5-4x}$.

4. $h(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$.

5. $f(t) = \dfrac{t}{9-t^2}$.

6. $h(x) = \dfrac{-1}{x^2-10x+25}$.

7. $g(t) = \dfrac{2t-1}{2t+1}$.

8. $f(x) = \dfrac{10}{x^3-16x}$.

9. $h(t) = \dfrac{7}{t^2+4t-12}$.

10. $g(x) = \dfrac{1}{9-4x^2}$.

Gráfica de las funciones racionales

Para graficar las funciones racionales debemos considerar un elemento importante en la gráfica de éstas, las *asíntotas*.

Una *asíntota* es una recta a la cual se aproxima la gráfica sin tocarla o cruzarla.

Una función racional puede tener solamente una asíntota horizontal, mientras que en el caso de las asíntotas verticales, puede tener más de una.

Para calcular las ***asíntotas verticales*** se utilizan los valores en los que no está definida la función, es decir en aquellos valores en los que el denominador es igual a cero.

Para calcular la ***asíntota horizontal*** podemos usar al criterio que compara el grado de los polinomios de la fracción:

Si $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+...b_1 x + b_0}$ es una función con $P(x)$ y $Q(x)$

funciones polinomiales con $Q(x)\neq 0$ y $n,m \in \aleph$, entonces la función $f(x)$ tiene asíntota cuando:

- $n > m$, $f(x)$ no tiene asíntota horizontal.
- $n = m$, la asíntota horizontal de la función es la recta $y=\dfrac{a}{b}$.
- $n < m$, la asíntota horizontal es el eje X .

Una vez establecido el criterio para determinar las asíntotas, vamos a describir los pasos necesarios para graficar las funciones racionales.

- Paso 1. Hallar el dominio de la función.
- Paso 2. Hallar las asíntotas horizontales y verticales.
- Paso 3. Calcular la tabla de valores considerando de manera especial a aquellos valores que están alrededor de los valores donde el denominador se hace cero.
- Paso 4. Localizar en el plano las asíntotas y los puntos obtenidos en la tabla de valores y graficar.

Ejemplos

Obtener el dominio, las asíntotas y la gráfica de cada una de las siguientes funciones.

1. $f(x)=\dfrac{2x}{x+4}$.

Solución:

***Paso 1*. Dominio de** $f(x)$

$f(x)=\dfrac{2x}{x+4}$ si $x+4=0$ entonces $x=4$.

$$Dom_f=(-\infty,-4)\cup(-4,\infty).$$

***Paso 2*. Asíntotas**

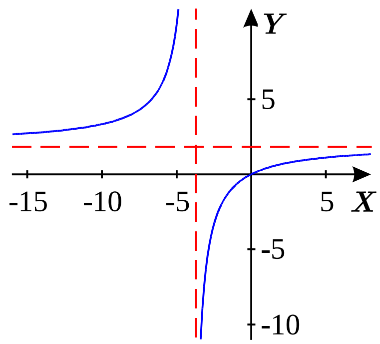
- Verticales: es la recta $x=-4$.
- Horizontal: Como el grado del numerador es igual al del denominador, entonces la asíntota es la recta $y=\dfrac{2}{1}=2$.

***Paso 3*. Tabulación**

Tomamos valores alrededor de $x=-4$, entonces

x	$f(x)$
- 6	6
- 5	10
- 4.5	18
- 3.5	-14
- 3	- 6
- 2	- 2

***Paso 4*. Gráfica**



2. $g(t)=\dfrac{10}{t^2-4}$.

Solución:

***Paso 1*. Dominio**

$g(t)=\dfrac{10}{t^2-4}$ si $t^2-4=0$ entonces $t=2$ y $t=-2$.

$$Dom_g=(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,\infty).$$

***Paso 2*. Asíntotas**

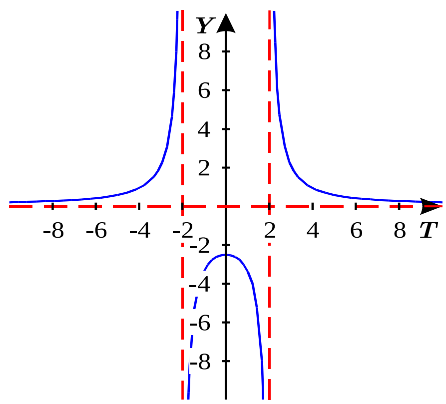
- Verticales: son las rectas $t=2$ y $t=-2$.
- Horizontal: como el grado del numerador es menor que el del denominador, entonces la asíntota es el eje X, o la recta $y=0$.

***Paso 3*. Tabulación**

En este caso, se consideran valores alrededor de $t=-2$ y valores alrededor de $t=2$.

t	$g(t)$
- 4	0.8
- 3	2
- 2.5	4.4
- 1.5	- 5.7
-1	-3.3
0	-2.5
1	-3.3
1.5	- 5.7
2.5	4.4
3	2
4	0.8

***Paso 4.* Gráfica**



3. $h(x) = \dfrac{3}{1-x^2}$.

Solución:

***Paso 1.* Dominio**

$h(x) = \dfrac{3}{1-x^2}$ si $1-x^2=0$ entonces $x=1$ y $x=-1$.

$$Dom_g = (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,\infty).$$

***Paso 2*. Asíntotas**

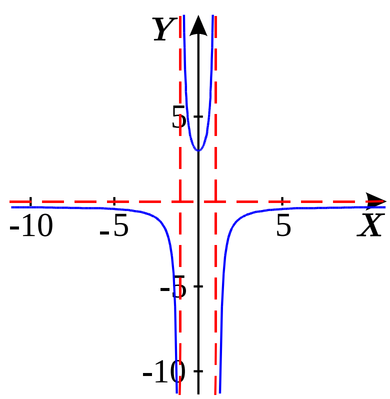
- Verticales: son las rectas $x=1$ y $x=-1$.
- Horizontal: como el grado del numerador es menor que el del denominador, entonces la asíntota es el eje X, o la recta $y=0$.

***Paso 3*. Tabulación**

Consideramos los valores alrededor de cada valor .

x	$h(x)$
- 3	- .37
- 2	-1
- 1.5	- 2.4
- 0.5	4
0	3
0.5	4
1.5	- 2.4
2	- 1
3	- .37

***Paso 4*. Gráfica**



Ejercicios

Calcular el dominio, las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales, la tabla de valores y la gráfica de las siguientes funciones.

1. $f(x)=\dfrac{1}{4x+3}$.

2. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-9}$.

3. $f(t)=\dfrac{-2}{(x-5)(x+5)}$.

4. $g(x)=\dfrac{5x+1}{6x-1}$.

5. $h(t)=\dfrac{x^2+1}{x^2-16}$.

6. $h(x)=\dfrac{6x-4}{2(x-1)}$.

7. $g(t)=\dfrac{4}{2x^2+1}$.

8. $f(x)=\dfrac{-3}{x^2-36}$.

9. $f(x)=\dfrac{1}{81-x^2}$.

10. $g(x)=\dfrac{-1}{x^2+9x+14}$.

2.6.3 Funciones radicales

Introducción

Las funciones radicales, también son llamadas funciones irracionales y son de la forma:

$$f(x) = \sqrt[n]{P(x)} \text{ con } n \in \aleph \text{ y } P(x) \text{ es una función polinomial.}$$

Centraremos el análisis en aquellas funciones en donde el índice del radical es igual a dos, es decir en las raíces cuadradas de funciones polinomiales.

Ejemplos

1. $f(x) = \sqrt{3x+1}$.
2. $f(x) = \sqrt{4-9x}$.
3. $f(x) = -\sqrt{9x^2-4}$.
4. $f(x) = \dfrac{-5\sqrt{16-25x^2}}{7}$.

Para que estas funciones sean reales debemos asegurar que todos los valores que se obtengan de evaluar la función polinomial que se encuentra dentro del radical, sean siempre positivos, ya que de otro modo, se tendrían raíces de números negativos y éstos no son valores reales. Así entonces las funciones que vamos a analizar se representan por:

$$f(x) = \sqrt{P(x)} \text{ con } P(x) \geq 0$$

Para calcular el dominio de estas funciones debemos resolver la desigualdad que satisfaga que $P(x) \geq 0$, y una vez que se tenga el dominio, se calcula la tabla de valores para posteriormente graficarlas.

Antes, vamos a recordar algunas de las propiedades de las desigualdades.

Propiedades de las desigualdades

Dada la desigualdad $a > b$ con $a, b \in \Re$ tenemos que:

1. $a + c > b + c$ *y* $a - c > b - c$ *con* $c \in \Re$.
2. $ac > bc$ *y* $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ *con* $c > 0$.
3. $ac < bc$ *y* $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ *con* $c < 0$.
4. $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ *con* $n > 0$.
5. *Si* $a > b$ *y* $c > d$ *entonces* $a + c > b + d$.
6. *Si* $a > b$ *y* $b > c$ *entonces* $a > c$.
7. *Si* a, b, c y d *son todos positivos y,* $a > b$ *y* $c > d$ *entonces* $ac > bd$.
8. *Si* $|x| \geq a$ *entonces* $x \geq a$ *o* $x \leq -a$.
9. *Si* $|x| \leq a$ *entonces* $-a \leq x \leq a$.

Estás propiedades las utilizaremos para simplificar las desigualdades, y poder así obtener el dominio de las funciones radicales. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplos

Hallar el dominio, la tabla de valores y la gráfica de cada una de las siguientes funciones.

1. $f(x) = \sqrt{3x - 5}$.

Solución:
Se deben hallar los valores de x para los cuales,

$$3x - 5 \geq 0$$
$$3x \geq 5$$
$$x \geq \frac{5}{3}$$

Entonces, el dominio de $f(x)$ es:

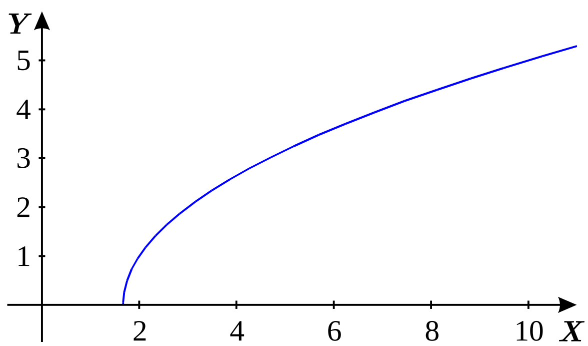
$$Dom_f = \left[\frac{5}{3}, \infty\right).$$

Una vez que se ha calculado el dominio elegimos algunos valores dentro de este intervalo para la tabulación.

Tabulación:

x	$f(x)$
5/3	0
2	1
3	2
4	2.6
5	3.2

Gráfica:



2. $g(x)=\sqrt{9-4x}$.

Solución:

Buscamos los valores de x que satisfacen:

$$9-4x\geq 0$$

$$-4x\geq -9$$

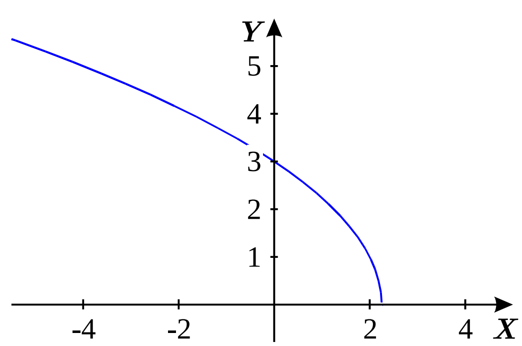
$$x\leq \frac{9}{4} \quad (\textit{Propiedad } 3)$$

Por lo tanto $Dom_g=\left(-\infty,\frac{9}{4}\right]$.

Tabulación:

x	$g(x)$
- 1	3.6
0	3
1	2.2
2	1
9/4	0

Gráfica:



3. $f(x)=\sqrt{x^2-4}$.

Solución:

Buscamos los valores de x que satisfacen:

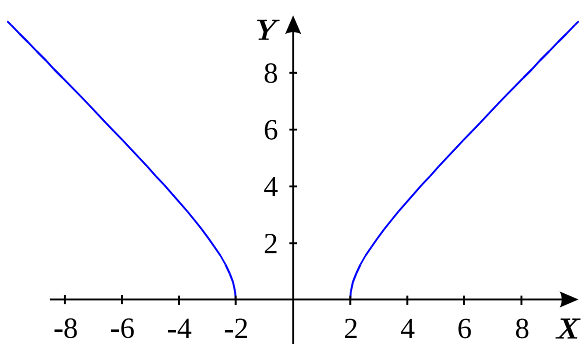
$$x^2-4\geq 0$$
$$x^2\geq 4$$
$$|x|\geq 2$$
$$x\geq 2 \text{ o } x\leq -2 \quad (\textit{Propiedad 8})$$

$$Dom_f=(-\infty,-2]\cup[2,\infty).$$

Tabulación: Se eligen valores en ambos intervalos.

t	$f(t)$
- 4	3.4
- 3	2.2
- 2	0
2	0
3	2.2
4	3.4

Gráfica:



4. $h(x) = -\sqrt{16 - x^2}$.

Solución:

Resolviendo la desigualdad,

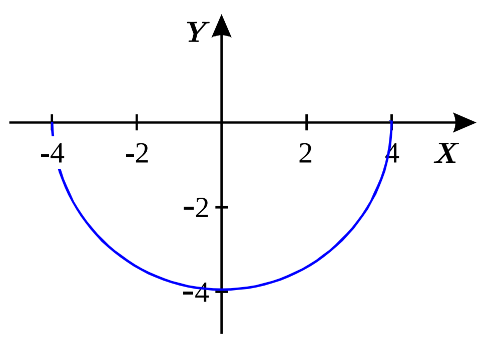
$$\begin{aligned} 16 - x^2 &\geq 0 \\ -x^2 &\geq -16 \\ x^2 &\leq 16 \\ |x| &\leq 4 \\ -4 \leq x &\leq 4 \quad (\textit{Propiedad 9}) \end{aligned}$$

El dominio es $Dom_h = [-4, 4]$.

Tabulación:

x	$h(x)$
- 4	0
- 2	- 3.4
- 1	- 3.8
0	- 4
1	- 3.8
2	- 3.4
4	0

Gráfica:



5. $f(x)=\sqrt{x^2+3x-10}$.

$$x^2+3x-10\geq 0$$
$$(x+5)(x-2)\geq 0$$

En este caso, como el producto de los factores es positivo, entonces ambos deben ser positivos o ambos negativos.

Si ambos son positivos, entonces

$$x+5\geq 0 \quad \text{y} \quad x-2\geq 0$$
$$x\geq -5 \quad \text{y} \quad x\geq 2$$

Expresadas estas desigualdades como intervalos tenemos $[-5,\infty)\cap[2,\infty)$ de aquí la solución es $[2,\infty)$.

Si ambos son negativos, entonces

$$x+5\leq 0 \quad \text{y} \quad x-2\leq 0$$
$$x\leq -5 \quad \text{y} \quad x\leq 2$$

En forma de intervalo tenemos $(-\infty,-5]\cap(-\infty,2]$ de aquí la solución es $(-\infty,-5]$.

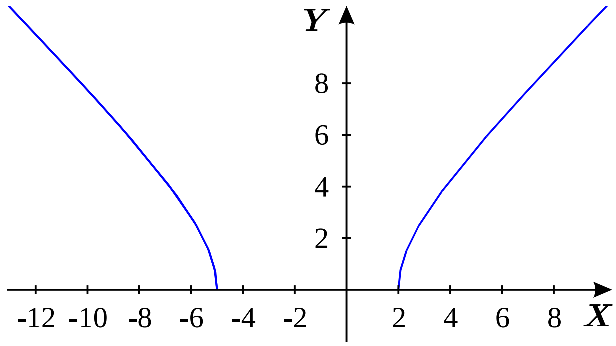
Por lo tanto, el dominio de la función es:

$$Dom_f=(-\infty,-5]\cup[2,\infty).$$

Tabulación:

x	$f(x)$
- 7	4.2
- 6	2.8
- 5	0
2	0
3	2.8
4	4.2

Gráfica:



6. $g(t)=\sqrt{\dfrac{36-4t^2}{9}}$.

Solución:
Para calcular el dominio, si:

$$\frac{36-4t^2}{9}\geq 0$$
$$36-4t^2\geq 0$$
$$t^2\leq 9$$
$$|t|\leq 3$$
$$-3\leq t\leq 3$$

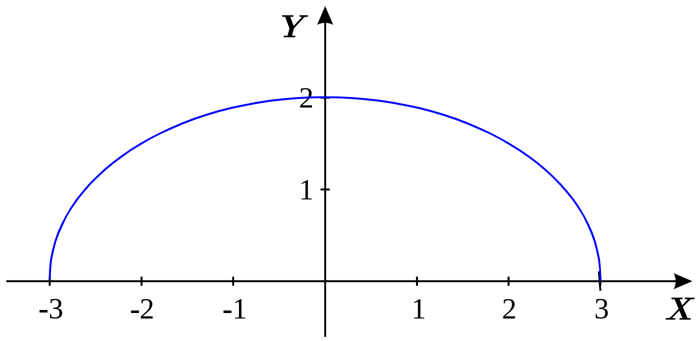
Entonces el dominio es:

$$Dom_g=[-3,3].$$

Tabulación:

t	$g(t)$
- 3	0
- 2	1.5
- 1	1.8
0	2
1	1.8
2	1.5
3	0

Gráfica:



Ejercicios

En cada una de las siguientes funciones, hallar el dominio, la tabla de valores y la gráfica correspondiente.

1. $f(x)=\sqrt{7x-21}$.

2. $f(x)=-\sqrt{9-2x}$.

3. $h(x)=\sqrt{x^2-25}$.

4. $g(t)=\sqrt{(7-t)(7+t)}$.

5. $g(x)=-\sqrt{\dfrac{x}{3}+1}$.

6. $f(t)=\sqrt{t^2-8t-9}$.

7. $h(x)=\sqrt{\dfrac{100-25x^2}{4}}$.

8. $f(x)=\sqrt{\dfrac{8}{3}-\dfrac{4x}{5}}$.

9. $g(x)=\sqrt{3x^2+5x-8}$.

10. $f(t)=-\sqrt{2t^2-t-3}$.

2.7 OPERACIONES CON FUNCIONES

En esta lección vamos a estudiar las operaciones que se pueden realizar con las funciones.

2.7.1 Operaciones aritméticas

Sean f y g funciones reales con Dom_f el dominio de f, y Dom_g el dominio de g.
Se definen las operaciones de la suma, diferencia, producto y cociente como:

- $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ si $x\in Dom_{(f+g)}=Dom_f\bigcap Dom_g$.
- $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ si $x\in Dom_{(f-g)}=Dom_f\bigcap Dom_g$.
- $(fg)(x)=f(x)g(x)$ si $x\in Dom_{(fg)}=Dom_f\bigcap Dom_g$.
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ si $x\in Dom_{(\frac{f}{g})}=Dom_f\bigcap Dom_g-\{x\in Dom_g\ /\ g(x)=0\}$.

Ejemplos

Hallar para cada par de funciones, las operaciones $f+g,\ f-g,\ fg$ y $\frac{f}{g}$, así como sus dominios.

1. $f(x)=3x$ y $g(x)=x^2-1$

Solución:
Comenzamos calculando el dominio de cada función, utilizando los criterios que hemos visto en las lecciones anteriores, entonces:

$$Dom_f=\Re.$$
$$Dom_g=\Re.$$

Entonces,
$$Dom_f\bigcap Dom_g=\Re\bigcap\Re=\Re.$$

Calculamos las operaciones correspondientes:

- $(f+g)(x)=3x+x^2-1=x^2+3x-1$.

$$Dom_{(f+g)}=Dom_f\bigcap Dom_g=\Re.$$

- $(f-g)(x) = 3x - (x^2-1) = -x^2+3x+1$.

$$Dom_{(f-g)} = Dom_f \bigcap Dom_g = \Re .$$

- $(fg)(x) = (3x)(x^2-1) = 3x^3-3x$.

$$Dom_{(fg)} = Dom_f \bigcap Dom_g = \Re .$$

En la división se debe eliminar del dominio a aquellos valores en los que $g(x)=0$
Es decir, los valores en los que:

$$x^2-1=0$$
$$x=1 \quad \text{y} \quad x=-1.$$

Por lo tanto, el dominio es

$$Dom_{\left(\frac{f}{g}\right)} = \Re - \{-1,1\} = (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,\infty).$$

Y la regla de correspondencia es:

- $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{3x}{x^2-1}$.

2. $f(x)=\sqrt{2x}$ y $g(x)=\dfrac{1}{x}$.

Solución:
Calculamos el dominio de cada función.

Para $f(x)$:

$$2x \geq 0$$
$$x \geq 0.$$
$$Dom_f = [0,\infty).$$

Para $g(x)$:

El denominador se hace cero cuando $x=0$ entonces,

$$Dom_g = \Re - \{0\} = (-\infty,0) \cup (0,\infty).$$

Ahora vamos a determinar la intersección de los dominios:

$$\begin{aligned} Dom_f \cap Dom_g &= [0,\infty) \cap ((-\infty,0) \cup (0,\infty)) \\ &= ([0,\infty) \cap (-\infty,0)) \cup ([0,\infty) \cap (0,\infty)) \\ &= \phi \cup (0,\infty) \\ &= (0,\infty). \end{aligned}$$

Una vez determinada la intersección de los dominios, vamos a calcular las operaciones entre las funciones.

- $(f+g)(x) = \sqrt{2x} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x\sqrt{2x}+1}{x} = \dfrac{\sqrt{2x^3}+1}{x}.$

$$Dom_{(f+g)} = Dom_f \cap Dom_g = (0,\infty).$$

- $(f-g)(x) = \sqrt{2x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x\sqrt{2x}-1}{x} = \dfrac{\sqrt{2x^3}-1}{x}.$

$$Dom_{(f-g)} = Dom_f \cap Dom_g = (0,\infty).$$

- $(fg)(x) = \left(\sqrt{2x}\right)\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\sqrt{2x}}{x} = \sqrt{\dfrac{2}{x}}.$

$$Dom_{(fg)} = Dom_f \cap Dom_g = (0,\infty).$$

- $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\sqrt{2x}}{\frac{1}{x}} = x\sqrt{2x}.$

$$Dom_{\left(\frac{f}{g}\right)} = Dom_f \cap Dom_g = (0,\infty).$$

3. $g(x)=\dfrac{2}{x-5}$ y $h(x)=\dfrac{x}{x+2}$.

Solución:

Calculamos el dominio de cada función.

Para $g(x)$: El denominador se hace cero cuando:

$$\begin{aligned} x-5&=0 \\ x&=5. \end{aligned}$$

$$Dom_g=\Re-\{5\}=(-\infty,5)\cup(5,\infty).$$

Para $h(x)$: El denominador se hace cero cuando:

$$\begin{aligned} x+2&=0 \\ x&=-2. \end{aligned}$$

$$Dom_h=\Re-\{-2\}=(-\infty,-2)\cup(-2,\infty).$$

Ahora la intersección de los dominios es:

$$\begin{aligned} Dom_g\cap Dom_h&=(\Re-\{5\})\cap(\Re-\{-2\}) \\ &=\Re-\{-2,5\} \\ &=(-\infty,-2)\cup(-2,5)\cup(5,\infty) \end{aligned}.$$

Realizamos las operaciones entre las funciones:

- $$\begin{aligned} (f+g)(x)&=\frac{2}{x-5}+\frac{x}{x+2} \\ &=\frac{2(x+2)+x(x-5)}{(x-5)(x+2)} \\ &=\frac{2x+4+x^2-5x}{x^2-3x-10} \\ &=\frac{x^2-3x+4}{x^2-3x-10}. \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}(f-g)(x) &= \frac{2}{x-5}-\frac{x}{x+2} \\ &= \frac{2(x+2)-x(x-5)}{(x-5)(x+2)} \\ &= \frac{2x+4-x^2+5x}{x^2-3x+10} \\ &= \frac{-x^2+7x+4}{x^2-3x-10}\,.\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}(fg)(x) &= \left(\frac{2}{x-5}\right)\left(\frac{x}{x+2}\right) \\ &= \frac{2x}{(x-5)(x+2)} \\ &= \frac{2x}{x^2-3x-10}\,.\end{aligned}$$

Para cada una de estas operaciones el dominio está definido en:

$$\begin{aligned}Dom_g \cap Dom_h &= (\Re-\{5\})\cap(\Re-\{-2\}) \\ &= \Re-\{-2{,}5\} \\ &= (-\infty,-2)\cup(-2{,}5)\cup(5,\infty)\,.\end{aligned}$$

Ahora calcularemos el cociente de las funciones:

El dominio es el conjunto $\Re-\{-2{,}5\}$, excepto aquellas x que anulan al denominador, en este caso $h(x)=\dfrac{x}{x+2}$.
El denominador se hace cero en $x=0$. Así, el dominio de esta función es el conjunto $\Re-\{-2{,}0{,}5\}$.

$$\begin{aligned}Dom_{\left(\frac{f}{g}\right)} &= \Re-\{-2{,}0{,}5\} \\ &= (-\infty,-2)\cup(-2{,}0)\cup(0{,}5)\cup(5,\infty).\end{aligned}$$

Ahora calculamos la regla de correspondencia para la división.

- $$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\dfrac{2}{x-5}}{\dfrac{x}{x+2}}=\frac{2(x+2)}{x(x-5)}.$$

4. Dadas las funciones $f(x)=x-4$ y $g(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\in[-5,-1) \\ 2x+1 & \text{si } x\in[-1,3] \end{cases}$

Hallar $g-f$ y $\dfrac{g}{f}$ así como los dominios correspondientes.

Solución:

El dominio de $f(x)=\Re$.

Entonces:

- $$(g-f)(x)=\begin{cases} x^2-x-4 & \text{si } x\in[-5,-1) \\ \\ (2x+1)-(x-4) & \\ =2x+1-x+4 & \\ =x+5 & \text{si } x\in[-1,3] \end{cases}$$

En este caso, el dominio está bien definido porque el punto donde el denominador se hace cero es en $x=4$ y este valor queda fuera de los intervalos donde está definida la función.

- $$\left(\frac{g}{f}\right)(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{x-4} & \text{si } x\in[-5,-1) \\ \\ \dfrac{x+5}{x-4} & \text{si } x\in[-1,3] \end{cases}$$

5. Dadas las funciones $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x<0 \\ x^2 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$ y $g(x)=\begin{cases} 5x-2 & \text{si } x<1 \\ 3x+1 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$

Hallar las funciones suma $f+g$ y producto $f\,g$.

Solución:
Debemos considerar los intervalos donde se pueden realizar las operaciones.

Observemos que cuando $x<0$ se tiene $f(x)=x$ y $g(x)=5x-2$.
De modo que la función suma es, en este intervalo,

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x+5x-2=6x-2.$$

Y la función producto es:

$$(f\,g)(x)=f(x)g(x)=(x)(5x-2)=5x^2-2x.$$

Cuando $x\geq 0$ y $x<1$, se tiene $f(x)=x^2$ y $g(x)=5x-2$. Entonces, para $0\leq x<1$ tenemos:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^2+5x-2=x^2+5x-2.$$

Y

$$(f\,g)(x)=f(x)g(x)=(x^2)(5x-2)=5x^3-2x^2.$$

Finalmente, para $x\geq 1$ se tiene $f(x)=x^2$ y $g(x)=3x+1$, de modo que en este intervalo tenemos:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^2+3x+1.$$

Y

$$(f\,g)(x)=f(x)g(x)=(x^2)(3x+1)=3x^3+x^2.$$

En síntesis, tenemos:

$$(f+g)(x)=\begin{cases} 6x-2 & \text{si } x<0 \\ x^2+5x-2 & \text{si } 0\leq x<1 \\ x^2+3x+1 & \text{si } x\geq 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad (f\,g)(x)=\begin{cases} 5x^2-2x & \text{si } x<0 \\ 5x^3-2x^2 & \text{si } 0\leq x<1 \\ 3x^3+x^2 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$

Ejercicios

En cada caso, encuentra el dominio de cada función y las operaciones $f+g$, fg, $\frac{f}{g}$ así como el dominio de las funciones obtenidas.

1. $f(x)=5x+7$ y $g(x)=4-x^2$.

2. $f(x)=x^2+2x$ y $g(x)=x+3$.

3. $f(t)=3t+12$ y $g(t)=t-4$.

4. $f(t)=\sqrt{2t-7}$ y $g(t)=\sqrt{t}$.

5. $f(x)=\dfrac{x}{x+3}$ y $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$.

6. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-16}$ y $g(x)=\sqrt{2x-5}$.

7. $f(t)=\sqrt{4t+12}$ y $g(t)=\sqrt{11-t}$.

8. $f(x)=x^2+3$ y $g(x)=2x+8$.

9. $f(t)=\dfrac{t^2+1}{t}$ y $g(t)=\dfrac{3t}{t^2+1}$.

10. $f(x)=\sqrt{9x-18}$ y $g(x)=\dfrac{-2}{x-2}$.

11. $f(x)=\begin{cases} 4x+3 & \text{si } x<1 \\ x^3 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$ y $g(x)=x+2$.

12. $f(x)=\begin{cases} x-3 & \text{si } x<0 \\ x+3 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$ y $g(x)=x^2-9$.

13. $f(t)=\begin{cases} t^2 & \text{si } t\in(-\infty,0) \\ -t^2 & \text{si } t\in[0,\infty) \end{cases}$ y $g(t)=2t+1$.

2.7.2 Composición de funciones

Otra operación importante que se realiza entre las funciones es la *composición.*

Sean f y g funciones reales con Dom_f el dominio de f y Dom_g el dominio de g, la composición de g con f se define como

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Se lee "g compuesta con f", o "g seguida de f", y el dominio es:

$$Dom_{(f \circ g)} = \{\, x \in Dom_g \mid g(x) \in Dom_f \,\}.$$

La operación de la composición también se puede ver como la "sustitución de una función en otra".

Ejemplos

1. Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3x + 1$,obtener $f \circ g$, $g \circ f$, y los respectivos dominios.

Solución:
Comenzamos encontrando el dominio de cada función:

$$Dom_f = \Re .$$

$$Dom_g = \Re .$$

- Para la composición $f \circ g$ tenemos:

$$\begin{aligned} Dom_{(f \circ g)} &= \{\, x \in Dom_g \mid g(x) \in Dom_f \,\} \\ &= \{\, x \in \Re \mid 3x + 1 \in \Re \,\} \\ &= \Re . \end{aligned}$$

Ahora, obtenemos la regla de correspondencia

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x + 1) = (3x + 1)^2 .$$

- Para la composición $g \circ f$ tenemos:

$$
\begin{aligned}
Dom_{(g\circ f)} &= \{\, x \in Dom_f \mid f(x) \in Dom_g \,\} \\
&= \{ x \in \Re \mid x^2 \in \Re \} \\
&= \Re .
\end{aligned}
$$

La regla de correspondencia es:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 3(x^2) + 1 = 3x^2 + 1 .$$

De lo anterior, concluimos que:

$$(f \circ g)(x) = (3x+1)^2 \quad \text{y} \quad (g \circ f)(x) = 3x^2 + 1 .$$

$$Dom_{(f\circ g)} = Dom_{(g\circ f)} = \Re .$$

Además, observamos que la composición *no es conmutativa*, es decir,

$$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x).$$

2. Sean $f(x) = \dfrac{x}{5} + 7$ y $g(x) = \sqrt{x+3}$, hallar $f \circ g$ y $g \circ f$, y el dominio de cada una.

Solución:

Calculamos el dominio de las funciones:

$$Dom_f = \Re .$$

$$Dom_g = [-3, \infty).$$

- Para $f \circ g$ tenemos:

$$\begin{aligned} Dom_{(f\circ g)} &= \{\, x \in Dom_g \mid g(x) \in Dom_f \,\} \\ &= \{ x \in [-3,\infty) \mid \sqrt{x+3} \in \Re \} \quad . \\ &= [-3,\infty) \end{aligned}$$

Y la regla de correspondencia es:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{x+3}\right) = \frac{\sqrt{x+3}}{5} + 7 \,.$$

- Para $g \circ f$ tenemos:

$$\begin{aligned} Dom_{(g\circ f)} &= \{\, x \in Dom_f \mid f(x) \in Dom_g \,\} \\ &= \left\{\, x \in \Re \mid \frac{x}{5} + 7 \in [-3,\infty) \right\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que encontrar los valores de x que satisfacen la condición $\frac{x}{5} + 7 \in [-3,\infty)$, es decir:

$$\frac{x}{5} + 7 \geq -3$$

$$\frac{x}{5} \geq -10$$

$x \geq -50$, de donde $x \in \Re \cap [-50,\infty) = [-50,\infty)$.

Entonces:

$$Dom_{(g\circ f)} = [-50,\infty).$$

La regla de correspondencia es

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x}{5} + 7\right) = \sqrt{\left(\frac{x}{5} + 7\right) + 3} = \sqrt{\frac{x}{5} + 10} \,.$$

3. Si $f(x)=\dfrac{1}{x}$ y $g(x)=\dfrac{x}{x-4}$ encontrar $f\circ g$, $g\circ f$ y $g\circ g$.

Solución:

Calculamos los dominios de f y de g .

$$Dom_f = \Re-\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,\infty).$$

$$Dom_g = \Re-\{4\}=(-\infty,4)\cup(4,\infty).$$

- Para $f\circ g$ tenemos:

$$\begin{aligned} Dom_{(f\circ g)} &= \{\, x\in Dom_g \mid g(x)\in Dom_f \,\} \\ &= \left\{\, x\in \Re-\{4\} \mid \frac{x}{x-4}\in \Re-\{0\} \right\}. \end{aligned}$$

Para encontrar los valores que satisfagan la condición $\dfrac{x}{x-4}\in\Re-\{0\}$, debemos resolver:

$$\frac{x}{x-4}=0$$

$$x=0.$$

Por lo tanto, $\dfrac{x}{x-4}$ es distinto de 0 siempre que $x\neq 0$.

Entonces el dominio son los puntos distintos de 4 y distintos de 0 , así

$$Dom_{f\circ g} = \Re-\{0,4\}=(-\infty,0)\cup(0,4)\cup(4,\infty).$$

La regla de correspondencia es:

$$(f\circ g)(x)= f(g(x))= f\left(\frac{x}{x-4}\right)=\frac{1}{\dfrac{x}{x-4}}=\frac{x-4}{x}.$$

- Para $g\circ f$ tenemos:

$$Dom_{(g\circ f)} = \{\, x\in Dom_f \mid f(x)\in Dom_g \,\}=\left\{\, x\in\Re-\{0\} \mid \frac{1}{x}\in\Re-\{4\}\right\}.$$

La última condición es que $\frac{1}{x}$ sea distinto de 4, entonces debemos resolver la igualdad para encontrar el valor que debemos eliminar. Así:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= 4 \\ 1 &= 4x \\ \frac{1}{4} &= x\,.\end{aligned}$$

Esto significa que $\frac{1}{x}$ es diferente a 4 siempre que $x \neq \frac{1}{4}$.

Por lo tanto, el dominio de $g \circ f$ son los puntos distintos de 0 y de $\frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned}Dom_{(g \circ f)} &= \Re - \left\{0, \frac{1}{4}\right\} \\ &= (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, \infty\right).\end{aligned}$$

La regla de correspondencia es:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{\frac{1}{x} - 4} = \frac{x}{\frac{1-4x}{x}} = \frac{x^2}{1-4x}\,.$$

Nota: Conviene obtener el dominio de la composición a partir de la definición, independientemente de la función que resulta una vez hecha la operación, pues si lo calculamos a partir de ésta, el resultado puede no ser el mismo.

Por ejemplo en la composición de $g \circ f$ tenemos:

$$(g \circ f)(x) = \frac{x^2}{1-4x}\,.$$

y el dominio natural de ésta función es $\Re - \left\{\frac{1}{4}\right\}$, que no es el dominio que obtuvimos anteriormente.

- Para $g \circ g$ tenemos:

$$Dom_{(g\circ g)} = \left\{ x \in Dom_g \mid \; g(x) \in Dom_g \right\}$$
$$= \left\{ x \in \Re - \{4\} \mid \; \frac{x}{x-4} \in \Re - \{4\} \right\}.$$

Aquí la condición es que $\frac{x}{x-4}$ sea distinto de 4, en éste caso debemos resolver la igualdad para encontrar el valor que debemos eliminar, entonces:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x-4} &= 4 \\ x &= 4x - 16 \\ -3x &= -16 \\ x &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

Esto significa que $\frac{x}{x-4}$ es diferente a 4 siempre que $x \neq \frac{16}{3}$. Por lo tanto, el dominio de $g \circ g$ son los puntos distintos de 4 y de $\frac{16}{3}$.

$$\begin{aligned} Dom_{(g\circ g)} &= \Re - \left\{4, \frac{16}{3}\right\} \\ &= (-\infty, 4) \cup \left(4, \frac{16}{3}\right) \cup \left(\frac{16}{3}, \infty\right). \end{aligned}$$

Por último, la regla de correspondencia de la composición es:

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g\left(\frac{x}{x-4}\right) = \frac{\frac{x}{x-4}}{\frac{x}{x-4} - 4} = \frac{\frac{x}{x-4}}{\frac{x-4(x-4)}{x-4}} = \frac{x}{x-4x+16} = \frac{x}{16-3x}.$$

Observación:

Conviene calcular el dominio de la composición de manera independiente a la regla de correspondencia, ya que si primero se obtiene la regla de correspondencia y después se calcula el dominio, éste puede no coincidir con el dominio de la composición. Por ejemplo, el dominio natural de

$$h(x)=\frac{x}{16-3x}$$

Es $\Re-\left\{\frac{16}{3}\right\}=\left(-\infty,\frac{16}{3}\right)\cup\left(\frac{16}{3},\infty\right)$, que no es el dominio de la composición $g\circ g$.

Ejercicios

Encuentra $f\circ g$ y $g\circ f$, además determina el dominio de cada una de las funciones.

1. $f(x)=2x+3$ y $g(x)=16-x^2$.
2. $f(x)=\sqrt{x+6}$ y $g(x)=\frac{x^2}{9}$.
3. $f(x)=x^2-3x-10$ y $g(x)=\frac{-1}{x}$.
4. $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ y $g(x)=\sqrt{3x}$.
5. $f(t)=\sqrt{t}$ y $g(t)=t^2$.
6. $f(t)=\frac{t}{t+5}$ y $g(t)=\frac{t+3}{t}$.
7. $f(x)=\sqrt{x^2-36}$ y $g(x)=\sqrt{4-x^2}$.
8. $f(x)=\sqrt{x-1}$ y $g(x)=9x+1$.
9. $f(t)=\frac{2t+3}{t-4}$ y $g(t)=\frac{t-5}{3t-2}$.
10. $f(x)=\sqrt{100-x^2}$ y $g(x)=\frac{x^2}{25-x^2}$.
11. Hallar $f\circ f$ si $f(x)=\sqrt{x^2-9}$.
12. Hallar $f\circ f$ y $g\circ g$ si $f(x)=\frac{x}{x+1}$ y $g(x)=\frac{x+5}{2x-4}$.

2.8 LÍMITES

Introducción

El concepto de límite es fundamental en el estudio de las funciones.
De hecho, los límites tienen una importante participación en el desarrollo del Cálculo. Por ejemplo:

a) La pendiente de la recta tangente a una curva es el *límite* de las pendientes de las rectas secantes.

b) La longitud de una curva es el *límite* de los caminos poligonales.

c) El área de una región limitada por curvas es el *límite* de la suma de las áreas de las regiones delimitadas por segmentos de rectas.

d) La velocidad instantánea es el *límite* de las velocidades medias.

Ya que este curso es el primer acercamiento que tienen los estudiantes a este concepto, no lo abordaremos desde la definición rigurosa, sino desde la noción intuitiva de *estar cerca de un valor.*
El objetivo del estudio de los límites se puede sintetizar como:

El comportamiento que tienen las imágenes de la función $f(x)$ cuando la variable x *se encuentra cerca del valor* a.

2.8.1 Noción de límite

Sea a un número real y f una función definida "cerca" de a aunque no necesariamente en a. El número L es el *límite cuando* x *se aproxima a* a, y se representa

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Si y sólo si los valores de la función $f(x)$ se aproximan, o tienden, a L cuando x *se aproxima a* a.

Se dice que el valor de una variable se aproxima o tiende a una constante como límite cuando la diferencia entre el valor de la constante y el valor de la variable se hace y llega a ser menor que cualquier cantidad, por pequeña que ésta sea.

Veamos algunos ejemplos de aproximación al concepto de límite de una función.

Ejemplos

1. Sea la función $f(x)=x^2$, encontrar su límite cuando x tiende a 4.

Solución:

Consideremos algunos valores de x cercanos a 4.

Tabla 1

x	$f(x)$
3.5	12.25
3.6	12.96
3.7	13.69
3.8	14.44
3.9	15.21
3.99	15.92
3.999	15.99

En la tabla 1, los valores de x son cercanos a 4 "por la izquierda", y el valor al que se aproxima $f(x)$ es 16. En este caso decimos que:

$$\lim_{x\to 4^-} x^2 = 16.$$

Tabla 2

x	$f(x)$
4.001	16.008
4.01	16.08
4.1	16.81
4.2	17.64
4.3	18.49
4.4	19.36
4.5	20.25

En la tabla 2, los valores de x son cercanos a 4 "por la derecha", y el valor al que se aproxima $f(x)$ es 16. En este caso decimos que:

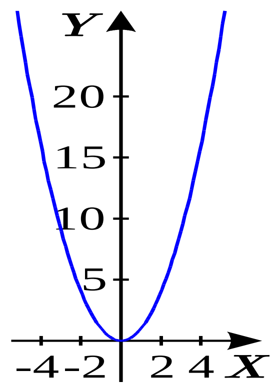
$$\lim_{x\to 4^+} x^2 = 16.$$

A estos límites $\lim_{x\to 4^-} x^2 = 16$ y $\lim_{x\to 4^+} x^2 = 16$ se les llama *límites laterales*.

Como son iguales, entonces concluimos que $\lim_{x\to 4} x^2 = 16$.

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x) \text{ ,si y sólo si } \lim_{x\to a} f(x) = L\,.$$

Podemos verificar gráficamente que $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$.



2. Sea la función $g(x) = \begin{cases} x \text{ si } x < 4 \\ -3 \text{ si } x \geq 4 \end{cases}$ hallar su límite cuando x tiende a 4.

Solución:
Calcularemos valores cuando x tiende a 4 por la izquierda:

x	$f(x)$
3.999	3.999
3.99	3.99
3.9	3.9
3.8	3.8
3.7	3.7
3.6	3.6
3.5	3.5

Entonces $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 4$.

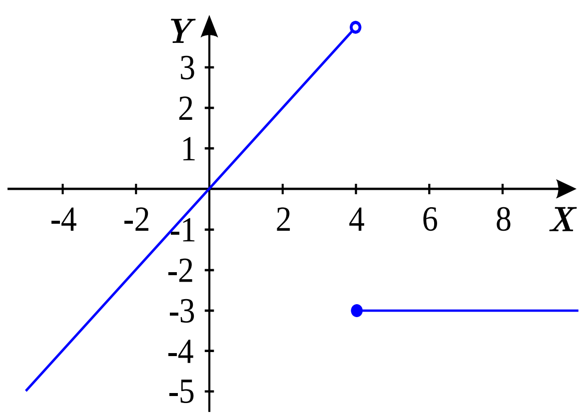
Ahora valores cuando x tiende a 4 por la derecha:

x	$f(x)$
4.001	-3
4.01	-3
4.1	-3
4.2	-3
4.3	-3
4.4	-3
4.5	-3

Entonces $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = -3.$

Por lo tanto, como $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$. Entonces $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ no existe.

Gráficamente lo podemos verificar:



2.8.2 Propiedades de los límites

1. Si $f(x)=c$, función constante, entonces el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es igual a c. Es decir,

$$\lim_{x\to a} c = c.$$

2. Si $f(x)=x$, la función identidad, entonces el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es igual a x. Es decir,

$$\lim_{x\to a} x = a.$$

3. Si $f(x)$ es una función polinomial de grado n, entonces :

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Si f y g son dos funciones tales que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=M$ y $c\in\Re$, entonces:

4. $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)=L+M$.

5. $\lim\limits_{x\to a}(f-g)(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)-\lim\limits_{x\to a} g(x)=L-M$.

6. $\lim\limits_{x\to a} cf(x)=c\lim\limits_{x\to a} f(x)=cL$.

7. $\lim\limits_{x\to a}(fg)(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\lim\limits_{x\to a} g(x)=LM$.

8. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\dfrac{L}{M}$, Si $g(x)\neq 0$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$. A partir de esta propiedad podríamos decir que:

Si $f(x)$ es una función racional y a es un punto del dominio de la función, entonces:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

9. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^n=\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n=L^n$.

10. $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}=\sqrt[n]{L}$,

Cuando n es par, la fórmula es válida si $\lim\limits_{x\to a} f(x)>0$.

A partir de las propiedades anteriores, es posible calcular el límite de muchas funciones.

Ejemplos

Calcular los siguientes límites.

1. $\lim_{x\to 4} 7 = 7$

Es el límite de una constante.

2. $\lim_{x\to 0} 3x^3 + 7x^2 - 2x + 1$.

Solución:

La función $f(x) = 3x^3 + 7x^2 - 2x + 1$ es una función polinomial, de modo que podemos usar la propiedad 3 para escribir:

$$\lim_{x\to 0} 3x^3 + 7x^2 - 2x + 1 = f(0) = 3(0)^3 + 7(0)^2 - 2(0) + 1 = 1.$$

El significado del resultado obtenido $\lim_{x\to 0} 3x^3 + 7x^2 - 2x + 1 = 1$ es que los valores que toma la función $f(x) = x^3 + 7x^2 - 2x + 1$ pueden estar tan cerca de 1 como se quiera, si se toma a x suficientemente cerca de 0.

3. $\lim_{x\to 1} \frac{5 + x^2}{x + 4}$.

Solución:

La función $f(x) = \frac{5 + x^2}{x + 4}$ es una función racional cuyo dominio son todos los números reales excepto los ceros del denominador : $x = -4$.

Como $x = 1$ se encuentra dentro del dominio de la función, podemos usar la propiedad 8 para calcular el límite, el cual es:

$$\lim_{x\to 1} \frac{5 + x^2}{x + 4} = f(1) = \frac{5 + 1^2}{1 + 4} = \frac{5 + 1}{1 + 4} = \frac{6}{5}.$$

4. $\lim\limits_{x \to -3} (x-2)^2 (4x+10)$.

Solución:

La función $f(x) = (x-2)^2 (4x+10)$ es una función polinomial, de modo que podemos usar la propiedad 3 para escribir:

$$\lim_{x \to -3} (x-2)^2 (4x+10) = f(-3) = (-3-2)^2 (4(-3)+10) = (-5)^2 (-2) = -50.$$

5. $\lim\limits_{x \to 7} \sqrt{\dfrac{x-2}{x}}$.

Solución:

Como $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{x-2}{x} = \dfrac{7-2}{7} = \dfrac{5}{7} \geq 0$, la propiedad 10 nos dice que:

$$\lim_{x \to 7} \sqrt{\frac{x-2}{x}} = \sqrt{\lim_{x \to 7} \frac{x-2}{x}} = \sqrt{\frac{5}{7}}.$$

Ejercicio

Calcula los siguientes límites.

1. $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x+6}{2x-1}$.

2. $\lim\limits_{t \to 0} 4a^2 + 7at^3$.

3. $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{6x^2+19}$.

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-3+x}{x^2+7}$.

5. $\lim\limits_{x \to 10} \sqrt[3]{x^2+3x-2}$.

6. $\lim\limits_{x \to 1/3} \dfrac{3x-1}{3x^2+5x-2}$.

7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x^2-4x+3}{2x^2+6x-8}$.

8. $\lim\limits_{y \to 1} \dfrac{4y-7}{y^3+1}$.

9. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{5x^3-4x+2}{x+5}$.

2.8.3 Límites indeterminados del tipo $\frac{0}{0}$

Ahora vamos a abordar el problema de calcular límites $\lim_{x\to a} f(x)$, cuando $f(a)$ no existe por ser una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$.

Para resolver este tipo de límites, vamos a abordar tres casos dependiendo del tipo de funciones polinomiales involucradas.

- **Caso 1: Usando factorización.**

Ejemplos

1. Calcular $\lim_{x\to 7} \frac{x^2-49}{x-7}$.

Solución:
Comenzaremos calculando el límite de cada polinomio, es decir:

$$\lim_{x\to 7} x^2 - 49 = 7^2 - 49 = 49 - 49 = 0$$
$$\lim_{x\to 7} x - 7 = 7 - 7 = 0$$

Por lo que no es posible calcular el cociente de los límites. En este caso el numerador se puede factorizar y la fracción se simplifica, entonces:

$$\frac{x^2-49}{x-7} = \frac{(x-7)(x+7)}{x-7} = x+7, \text{ si } x \neq 7$$

$$\text{y } \lim_{x\to 7} x+7 = 7+7 = 14.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 7} \frac{x^2-49}{x-7} = 14.$$

2. Calcular $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}$.

Solución:
Observamos que:

$$\lim_{x\to 3} x^2-9 = 3^2-9 = 9-9 = 0$$

$$\lim_{x\to 3} x^2-5x+6 = 3^2-5(3)+6 = 9-15+6 = 0$$

Por lo que no puede calcularse el límite como el cociente de los límites. Nuevamente factorizamos los polinomios para simplificar la función, entonces:

$$\frac{x^2-9}{x^2-5x+6} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-2)(x-3)} = \frac{x+3}{x-2}\text{, si } x\neq 3$$

y $$\lim_{x\to 3} = \frac{x+3}{x-2} = \frac{3+3}{3-2} = \frac{6}{1} = 6 \ .$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-5x+6} = 6.$$

3. Calcular $\lim_{x\to 4}\dfrac{x^3-64}{2x^2-16x+32}$.

Solución:
Observamos que:

$$\lim_{x\to 4} x^3-64 = 4^3-64 = 64-64 = 0$$

$$\lim_{x\to 4} 2x^2-16x+32 = 2(4)^2-16(4)+32 = 32-64+32 = 0$$

Por lo que el límite no puede calcularse como el cociente de los límites.

Factorizando el numerador y el denominador:

$$\frac{x^3-64}{2x^2-16x+32} = \frac{x^3-64}{2\left(x^2-8x+16\right)} = \frac{(x-4)(x^2+4x+16)}{2(x+4)(x-4)} = \frac{x^2+4x+16}{2(x+4)}\text{, si } x\neq 4$$

$$\text{y} \quad \lim_{x\to 4}\frac{x^2+4x+16}{2(x+4)}=\frac{4^2+4(4)+16}{2(4+4)}=\frac{48}{16}=3 \ .$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^3-64}{2x^2-16x+32}=3.$$

4. Calcular $\lim_{z\to 0}\frac{1}{z}\left(\frac{1}{7+z}-\frac{1}{7}\right)$.

Solución:
Observamos que:

Si $\frac{1}{z}\left(\frac{1}{7+z}-\frac{1}{7}\right)=\frac{\frac{1}{7+z}-\frac{1}{7}}{z}$, entonces $\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{7+z}-\frac{1}{7}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{\frac{1}{7+z}-\frac{1}{7}}{z}$.

De donde $\lim_{z\to 0}\frac{1}{7+z}-\frac{1}{7}=\frac{1}{7+0}-\frac{1}{7}=\frac{1}{7}-\frac{1}{7}=0$

y $\lim_{z\to 0} z=0$

Por lo que no podemos calcular el límite como el producto de los límites,
En este ejemplo, antes de factorizar es necesario resolver la fracción algebraica.

$$\frac{1}{z}\left(\frac{1}{7+z}-\frac{1}{7}\right)=\frac{\frac{1}{7+z}-\frac{1}{7}}{z}=\frac{\left(\frac{7-(7+z)}{7(7+z)}\right)}{z}=\frac{\left(\frac{7-7-z}{49+7z}\right)}{z}$$

$$=\frac{\left(\frac{-z}{49+7z}\right)}{z}=\frac{-z}{z(49+7z)}=\frac{-1}{49+7z}\quad \text{si } z\neq 0$$

$$\text{y} \quad \lim_{z\to 0}\frac{-1}{49+7z}=\frac{-1}{49+7(0)}=-\frac{1}{49}.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{z}\left(\frac{1}{7+z}-\frac{1}{7}\right)=-\frac{1}{49}.$$

5. Obtener $\lim_{y\to b^2} \dfrac{\dfrac{y}{b^2}-\dfrac{b^4}{y^2}}{y-b^2}$.

Solución:
Observamos que:

$$\lim_{y\to b^2} \frac{y}{b^2}-\frac{b^4}{y^2}=\frac{b^2}{b^2}-\frac{b^4}{(b^2)^2}=1-1=0.$$

$$\lim_{y\to b^2} y-b^2=b^2-b^2=0.$$

Entonces no es posible calcular el límite como el cociente de los límites.
Antes de calcular el límite resolvemos la fracción simplificándola a la mínima expresión:

$$\frac{\dfrac{y}{b^2}-\dfrac{b^4}{y^2}}{y-b^2}=\frac{\dfrac{y^3-b^6}{b^2y^2}}{y-b^2}=\frac{\dfrac{(y-b^2)(y^2+yb^2+b^4)}{b^2y^2}}{y-b^2}$$

$$=\frac{(y-b^2)(y^2+yb^2+b^4)}{(y-b^2)b^2y^2}=\frac{(y^2+yb^2+b^4)}{b^2y^2} \quad \text{si } y\neq b^2 .$$

y $$\lim_{y\to b^2}\frac{(y^2+yb^2+b^4)}{b^2y^2}=\frac{(b^2)^2+b^2b^2+b^4}{b^2b^2}=\frac{b^4+b^4+b^4}{b^4}=\frac{3b^4}{b^4}=3.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{y\to b^2} \frac{\dfrac{y}{b^2}-\dfrac{b^4}{y^2}}{y-b^2}=3.$$

Ejercicios

Calcula los siguientes límites.

1. $\lim_{x\to 6} \dfrac{x^2-6x}{x-6}$.

2. $\lim_{y\to 1/3} \dfrac{3y-1}{3y^2+5y-2}$.

3. $\lim_{x\to b} \dfrac{2x^2-2bx+xh-bh}{2x-2b}$.

4. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-2x-3}{3-x}$.

5. $\lim_{t\to 0} \dfrac{(2+t)^2-4}{t}$.

6. $\lim_{k\to 0} \dfrac{x^2k+3xk^2+k^3}{2xk+5k^2}$.

7. $\lim_{x\to 2} \sqrt{\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}}$.

8. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(5+h)^3-125}{h}$.

9. $\lim_{x\to 7} \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{7}}{x-7}$.

10. $\lim_{z\to 1} \dfrac{\sqrt{(z^2-1)^3}}{z^2-z}$.

11. $\lim_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x^2-16}}{x-4}$.

Sugerencia: factoriza el numerador y simplifica las potencias antes de calcular el límite.

12. $\lim_{x\to -2} \dfrac{\frac{1}{x+1}+1}{x+2}$.

13. $\lim_{t\to 3} \dfrac{\frac{1}{t+2}-\frac{1}{5}}{t-3}$.

14. $\lim_{x\to 5} \dfrac{\frac{x+1}{x-1}-\frac{3}{2}}{x-5}$.

15. $\lim_{x\to a} \dfrac{\frac{1}{a^2+1}-\frac{1}{x^2+1}}{x-a}$.

16. $\lim_{x\to 4} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}}{x-4}$.

- **Caso 2: Usando racionalización.**

Veamos el límite siguiente

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}.$$

En este caso, no es posible factorizar ninguno de los términos de la fracción, sin embargo al calcular el límite evaluando tanto el denominador como el denominador obtenemos:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{4+x}-2=\sqrt{4+0}-2=0.$$

$$\lim_{x\to 0} x=0.$$

Entonces no podemos calcular el límite como el cociente de los límites.

Vamos a simplificar la expresión, multiplicando el numerador y el denominador por el conjugado del numerador para eliminar la raíz cuadrada y poder factorizar.

Entonces:

$$\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}=\left(\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{4+x}+2}{\sqrt{4+x}+2}\right)=\frac{(\sqrt{4+x})^2-4}{x(\sqrt{4+x}+2)}$$

$$=\frac{4+x-4}{x(\sqrt{4+x}+2)}=\frac{x}{x(\sqrt{4+x}+2)}=\frac{1}{\sqrt{4+x}+2}\quad \text{si}\quad x\neq 0$$

De donde:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+x}+2}=\frac{1}{\sqrt{4+0}+2}=\frac{1}{4}.$$

Ejemplos

Calcula los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{7+x}-\sqrt{7}}{x}$.

Solución:

Observamos que,

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{7+x}-\sqrt{7} = 0.$$
$$\lim_{x\to 0} x = 0.$$

Por lo que no es posible calcular el límite como el cociente de los límites.

Entonces calculamos el límite multiplicando y dividiendo por el conjugado del numerador para eliminar la raíz cuadrada y poder factorizar.

$$\frac{\sqrt{7+x}-\sqrt{7}}{x} = \left(\frac{\sqrt{7+x}-\sqrt{7}}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{7+x}+\sqrt{7}}{\sqrt{7+x}+\sqrt{7}}\right) = \frac{(\sqrt{7+x})^2-(\sqrt{7})^2}{x(\sqrt{7+x}+\sqrt{7})}$$
$$= \frac{7+x-7}{x(\sqrt{7+x}+\sqrt{7})} = \frac{x}{x\sqrt{7+x}+\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7+x}+\sqrt{7}} \quad \text{si } \ x \neq 0$$

y $$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{7+x}+\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7+0}+\sqrt{7}} = \frac{1}{2\sqrt{7}}.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{7+x}-\sqrt{7}}{x} = \frac{1}{2\sqrt{7}}.$$

2. $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^2+3t-4}{\sqrt{t+3}-2}$.

Solución:
Observamos que:

$$\lim_{t\to 1} t^2+3t-4 = 1^2+3(1)-4 = 0\,.$$

$$\lim_{t\to 1}\sqrt{t+3}-2 = \sqrt{1+3}-2 = \sqrt{4}-2 = 2-2 = 0\,.$$

Por lo tanto, no podemos calcular el límite como el cociente de los límites.

Para eliminar la raíz cuadrada y poder factorizar, multiplicamos el numerador y el denominador por el conjugado del denominador, y calculamos el límite:

$$\frac{t^2+3t-4}{\sqrt{t+3}-2} = \left(\frac{t^2+3t-4}{\sqrt{t+3}-2}\right)\left(\frac{\sqrt{t+3}+2}{\sqrt{t+3}+2}\right) = \frac{\left(t^2+3t-4\right)\left(\sqrt{t+3}+2\right)}{\left(\sqrt{t+3}\right)^2-4}$$

$$= \frac{\left(t^2+3t-4\right)\left(\sqrt{t+3}+2\right)}{t+3-4} = \frac{(t+4)(t-1)\left(\sqrt{t+3}+2\right)}{t-1}$$

$$= (t+4)\left(\sqrt{t+3}+2\right) \text{ si } t \neq 1$$

así , $\lim\limits_{t\to 1}\,(t+4)\left(\sqrt{t+3}+2\right) = (1+4)\left(\sqrt{1+3}+2\right) = 5(4) = 20.$

De donde

$$\lim_{t\to 1}\frac{t^2+3t-4}{\sqrt{t+3}-2} = 20\,.$$

3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$.

Solución:
En este límite, observemos que al evaluarlo obtenemos:

$$\lim_{x \to 1} \sqrt[3]{x}-1 = \sqrt[3]{1}-1 = 1-1 = 0.$$
$$\lim_{x \to 1} x-1 = 1-1 = 0.$$

Por lo tanto, no podemos calcular el límite como el cociente de los límites.

Sin embargo a diferencia de los casos anteriores, no se puede multiplicar por el conjugado porque no es una raíz cuadrada, entonces para eliminar la raíz, debemos multiplicar la fracción por la expresión que "complete" la diferencia de cubos.

Recordemos que: $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$.

En este caso, si hacemos $a = \sqrt[3]{x}$ y $b = 1$ tenemos

$$a^2+ab+b^2 = \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{x}\right)(1) + 1^2 = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1.$$

Entonces, usando el producto notable mencionado arriba, si a la expresión $\sqrt[3]{x}-1$ la multiplicamos por $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1$, podremos eliminar las raíces cúbicas.

$$\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right) = (\sqrt[3]{x})^3 - 1^3 = x-1.$$

Entonces:

$$\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} = \left(\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}\right)\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}\right) = \frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}$$
$$= \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)} \quad \text{si } x \neq 1$$

y $$\lim_{x \to 1} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt[3]{1^2}+\sqrt[3]{1}+1} = \frac{1}{3}.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} = \frac{1}{3}.$$

Ejercicios

Calcula los siguientes límites.

1. $\lim_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{1+x}-3}{x-8}$.

2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}$.

3. $\lim_{t\to 11} \dfrac{t-11}{\sqrt{t}-\sqrt{11}}$.

4. $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$.

5. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{10-x}-\sqrt{8+x}}{x^3-1}$.

6. $\lim_{y\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{y+27}-3}{y}$.

7. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x^3-1}$.

8. $\lim_{x\to -64} \dfrac{x+64}{\sqrt[3]{x}+4}$.

9. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x+2}+x}$.

10. $\lim_{t\to 0} \dfrac{t}{\sqrt{t+25}-\sqrt{25-t}}$.

11. $\lim_{t\to 3} \dfrac{t^2-2t-3}{\sqrt{t^2-2t+6}-t}$.

12. $\lim_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{13-x}}{\sqrt{x}-2}$.

- **Caso 3: Factorización con división sintética.**

Hay algunos límites que al calcularlos dan como resultado una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, y que para factorizarlos debemos recurrir a la división de polinomios, o a la división sintética.

Veamos el siguiente límite:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^4+2x^3+2x^2+3x+2}{x^3+1}.$$

Al calcular el límite en cada polinomio obtenemos,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1} x^4+2x^3+2x^2+3x+2 &= (-1)^4+2(-1)^3+2(-1)^2+3(-1)+2\\ &= 1-2+2-3+2=0.\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to -1} x^3+1=(-1)^3+1=-1+1=0.$$

Por lo que no podemos calcular el límite como el cociente de los límites.

Trabajando los polinomios por separado, vamos a factorizarlos, dividiéndolos entre $x+1$, usando la división sintética, (sabemos que es divisible porque el resultado de la evaluación es cero, lo cual significa que -1 es raíz del polinomio).

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 2\\ & \downarrow & -1 & -1 & -1 & -2\\ \hline & 1 & 1 & 1 & 2 & 0\end{array}$$

El polinomio del numerador se factoriza como:

$$x^4+2x^3+2x^2+3x+2=(x+1)(x^3+x^2+x+2).$$

Ahora se factoriza el denominador, usando la diferencia de cubos, de tal modo que,

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1).$$

Entonces:

$$\frac{x^4+2x^3+2x^2+3x+2}{x^3+1}=\frac{(x+1)(x^3+x^2+x+2)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{x^3+x^2+x+2}{x^2-x+1}\quad si\ \ x\neq -1.$$

$$\text{y}\quad \lim_{x\to -1}\frac{x^3+x^2+x+2}{x^2-x+1}=\frac{1^3+1^2+1+2}{1^2-1+1}=\frac{5}{1}=5.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^4+2x^3+2x^2+3x+2}{x^3+1}=5.$$

Ejemplos

Calcula los límites siguientes.

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-2x^2-2x-3}{x^4-2x^3-27}$.

Solución:
Observamos que:

$$\lim_{x\to 3}\ x^3-2x^2-2x-3=3^3-2(3)^2-2(3)-3=27-18-6-3=0.$$
$$\lim_{x\to 3}x^4-2x^3-27=3^4-2(3)^3-27=81-54-27=0.$$

Por lo tanto, no podemos calcular el límite del cociente.

Factorizamos los polinomios dividiendo cada uno entre $x-3$. Usamos la división sintética en el numerador, de tal modo que,

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -2 & -3 \\ 3 & \downarrow & 3 & 3 & 3 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

El numerador factorizado es:

$$x^3-2x^2-2x-3=(x-3)(x^2+x+1).$$

Ahora realizamos la división sintética con el denominador,

$$\begin{array}{r|rrrrr} 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & -27 \\ & \downarrow & 3 & 3 & 9 & 27 \\ \hline & 1 & 1 & 3 & 9 & 0 \end{array}$$

y el denominador factorizado es:

$$x^4-2x^3-27=(x-3)(x^3+x^2+3x+9).$$

de donde,

$$\frac{x^3-2x^2-2x-3}{x^4-2x^3-27}=\frac{(x-3)(x^2+x+1)}{(x-3)(x^3+x^2+3x+9)}=\frac{x^2+x+1}{x^3+x^2+3x+9} \quad \text{si } x\neq 3$$

$$\text{y} \quad \lim_{x\to 3}\frac{x^2+x+1}{x^3+x^2+3x+9}=\frac{3^2+3+1}{3^3+3^2+3(3)+9}=\frac{13}{54}.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-2x^2-2x-3}{x^4-2x^3-27}=\frac{13}{54}.$$

2. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^4 - 5x^3 + 20x - 16}{x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 12x + 16}$.

Solución:
Calculando el límite de cada polinomio, observamos que:

$$\lim_{x\to 4} x^4 - 5x^3 + 20x - 16 = (4)^4 - 5(4)^3 + 20(4) - 16$$
$$= 256 - 320 + 80 - 16 = 0 \; .$$

$$\lim_{x\to 4} x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 12x + 16 = (4)^4 - 3(4)^3 - 8(4)^2 + 12(4) + 16$$
$$= 256 - 192 - 128 + 48 + 16 = 0 \; .$$

Por lo que no podemos calcular el límite como el cociente de los límites.

Factorizando mediante la división entre $x - 4$ tenemos que:

La división sintética en el numerador es:

$$\begin{array}{c|rrrrr} 4 & 1 & -5 & 0 & 20 & -16 \\ & \downarrow & 4 & -4 & -16 & 16 \\ \hline & 1 & -1 & -4 & 4 & 0 \end{array}$$

La factorización del numerador es:

$$x^4 - 5x^3 + 20x - 16 = (x-4)(x^3 - x^2 - 4x + 4).$$

Ahora realizamos la división sintética en el denominador:

$$\begin{array}{c|rrrrr} 4 & 1 & -3 & -8 & 12 & 16 \\ & \downarrow & 4 & 4 & -16 & -16 \\ \hline & 1 & 1 & -4 & -4 & 0 \end{array}$$

La factorización del denominador es:

$$x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 12x + 16 = (x-4)(x^3 + x^2 - 4x - 4).$$

de donde,

$$\frac{x^4-5x^3+20x-16}{x^4-3x^3-8x^2+12x+16}=\frac{(x-4)(x^3-x^2-4x+4)}{(x-4)(x^3+x^2-4x-4)}=\frac{(x^3-x^2-4x+4)}{(x^3+x^2-4x-4)}\ si\ x\neq 4$$

.

y $$\lim_{x\to 4}\frac{(x^3-x^2-4x+4)}{(x^3+x^2-4x-4)}=\frac{4^3-4^2-4(4)+4}{4^3+4^2-4(4)-4}=\frac{64-16-16+4}{64+16-16-4}=\frac{36}{60}=\frac{3}{5}.$$

Por lo tanto

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^4-5x^3+20x-16}{x^4-3x^3-8x^2+12x+16}=\frac{3}{5}.$$

Ejercicio

Calcula los siguientes límites.

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-1}{x^3+1}.$

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-2x-21}{x^4-27x}.$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+12x^2-10x-3}{x^3+9x^2-6x-4}.$

4. $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{2t^3-3t^2+2t-1}{t^4+3t^2+t-5}.$

5. $\lim\limits_{y\to 3}\dfrac{y^3-2y^2-2y-3}{y^4-2y^3-27}.$

6. $\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{t^3-7t+6}{t^4-4t^2+t-2}.$

7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-8x}{x^3-2x-4}.$

8. $\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{z^4+3z^3+7z^2-5z-6}{z^4+2z-3}.$

9. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)^4+3(x-4)^2+x^2-16}{x^3-64}.$

10. $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^4+5t^3-2t^2-2t-2}{t^5+3t^4-4t^3+8t^2-2t-6}.$

UNIDAD 3

3. DERIVADAS

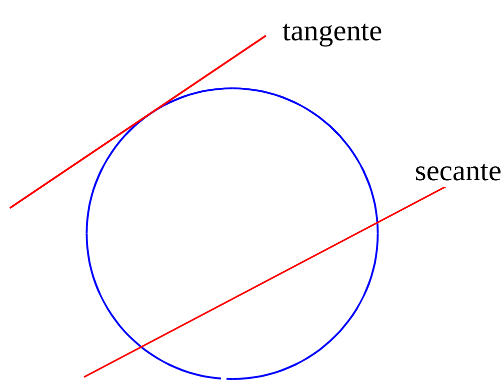
Introducción

En este capítulo abordaremos el tema de derivada de una función, para introducirnos en este concepto usaremos la noción geométrica. Más adelante veremos las principales fórmulas de derivación y por último la aplicación de las derivadas en la solución de problemas de máximos y mínimos.

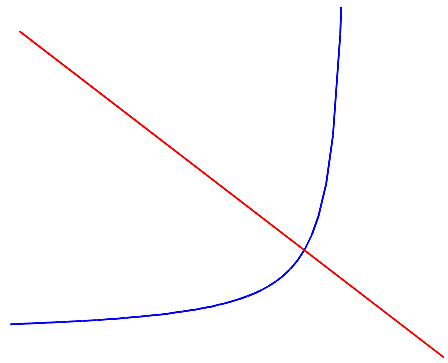
3.1 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

Tangente a una curva

Una tangente a una circunferencia es una línea recta que toca a la circunferencia en un sólo punto, el cual recibe el nombre de punto de tangencia. Una recta secante a una circunferencia es aquella que la corta en dos puntos.

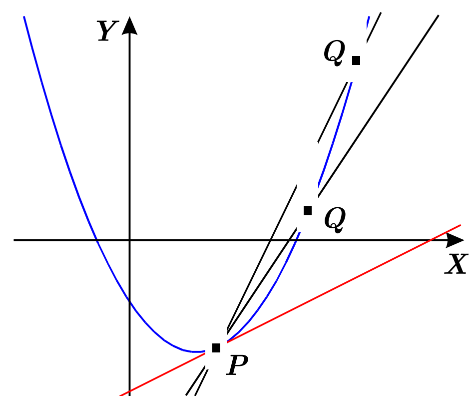


Esta definición solo puede ser aplicada a curvas cerradas pero no a curvas más generales. Por ejemplo:



En esta curva $\mathscr{C}$, aunque la recta ℓ la toca en un solo punto, la curva no queda de un solo lado de la recta. Este ejemplo no nos permite definir la tangente como una recta que toca a una curva en un solo punto, de manera que la curva quede de un solo lado de la recta.

Definimos la recta tangente a la curva en el punto *P* como la posición límite de la recta secante *PQ* cuando *Q* tiende a *P.*



La derivada de una función $f(x)$ en el punto *P* representa la pendiente *m* de la recta tangente a la curva en dicho punto.

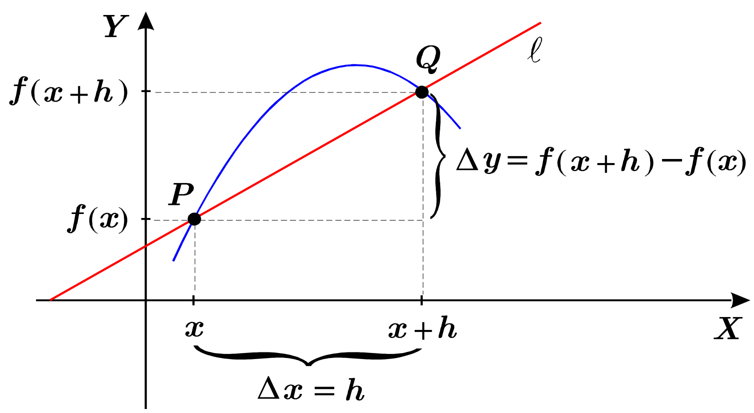
Recordemos que en geometría, dados dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ la pendiente queda definida por:

$$m_{PQ} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Ahora, calculamos la pendiente de la secante *PQ,* con $P(x, f(x))$ y $Q((x+h), f(x+h))$,

$$m=\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Entonces, gráficamente tenemos:



Cuando h tiende a cero, tenemos la pendiente de la recta tangente a la curva, y se expresa como:

$$m_{\tan gente}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Si el límite existe.

Ejemplos

1. Hallar la pendiente de la recta tangente a la curva cuya ecuación es $f(x)=x^2-3x+2$ en el punto $(4,6)$.

Solución:

Calculamos

$$f(x+h)=(x+h)^2-3(x+h)+2=x^2+2xh+h^2-3x-3h+2$$

Entonces

$$m=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-3x-3h+2-x^2+3x-2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2-3h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h-3)}{h}=\lim_{h\to 0}2x+h-3=2x-3\,.$$

En el punto $(4,6)$,

$$m=2x-3=2(4)-3=5.$$

Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente es $m=5$.

2. Hallar la pendiente de la recta tangente a la curva cuya ecuación es $f(x)=\frac{1}{x}$ en el punto $\left(\frac{1}{2},2\right)$.

Solución:

Calculamos

$$m=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x-x-h}{xh(x+h)}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{xh(x+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)}=\frac{-1}{x(x+0)}=\frac{-1}{x^2}.$$

En el punto $\left(\frac{1}{2},2\right)$,

$$m=\frac{-1}{x^2}=\frac{-1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{-1}{\frac{1}{4}}=-4\,.$$

Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente es $m=-4$.

Ejercicios

En cada caso, hallar la pendiente a la curva en el punto dado.

1. $f(x) = x^2$ en el punto $(-1,1)$.
2. $f(x) = \sqrt{x}$ en el punto $(4,2)$.
3. $f(x) = -x^3$ en el punto $(2,8)$.
4. $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ en el punto $\left(\dfrac{8}{3},-3\right)$.
5. $f(x) = x^2 + 4x + 4$ en el punto $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{25}{4}\right)$.
6. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ en el punto $(0,0)$.
7. $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ en el punto $(0,2)$.

3.2 DEFINICIÓN DE DERIVADA

Sea $f : I \subseteq \Re \to \Re$ una función definida en el intervalo abierto I de $\Re$, y sea x_0 un punto de I. Definimos la derivada de la función f en x_0, como el límite:

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ si el límite existe.

Denotamos a este límite por $f'(x_0)$. Y escribimos

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

El número $f'(x_0)$ se llama la derivada de f en el número x_0 y representa la pendiente de la tangente de la gráfica de la función $f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$

Si este límite existe decimos que la función f es derivable en x_0. Si la función es derivable en todo punto $x \in I$, decimos que es derivable en I.

Notación

Las formas más usadas de representar a la derivada de una función son:

1. ***Cauchy***

Si la función es $y = f(x)$, su derivada se representa por:

$$D_x y$$

Se lee: "derivada de y respecto a x".

2. ***Lagrange***

Si la función es $y = f(x)$, la derivada se representa por:

$$y' \quad \text{o} \quad f'(x)$$

Se lee: " y prima" o " f prima de x".

3. *Leibniz*

Si la función es $y = f(x)$, la derivada se representa por :

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{o} \quad \frac{df}{dx}$$

Se lee: "derivada de y con respecto a x" , o " derivada de f con respecto a x".

La notación que usaremos de aquí en adelante, será la de Lagrange, y' o $f'(x)$.

3.3 DERIVACIÓN USANDO LA DEFINICIÓN DE LA DERIVADA O LA REGLA DE LOS CUATRO PASOS.

A continuación veremos algunos ejemplos donde se calculan las derivadas de funciones, sustituyendo directamente en la fórmula de la definición.

Ejemplos

1. Calcular la derivada de la función $f(x) = x^2 + 7x + 10$, para una x cualquiera.

Solución:

Sustituimos la función en:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 + 7(x+h) + 10 - (x^2 + 7x + 10)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 7x + 7h + 10 - x^2 - 7x - 10}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2 + 7h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x + h + 7)}{h} = \lim_{h \to 0} 2x + h + 7 = 2x + 7.$$

Por lo tanto,

$$f'(x) = 2x + 7.$$

2. Hallar la derivada de $f(x) = x^3 - 1$, para una x cualquiera.

Solución:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - 1 - (x^3 - 1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 1 - x^3 + 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = \lim_{h\to 0} 3x^2 + 3xh + h^2 = 3x^2 \ .$$

Por lo tanto,

$$f'(x) = 3x^2 .$$

3. Hallar la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ para cualquier $x \geq 0$.

Solución:

Sustituyendo en la definición de la derivada ,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

Como se vio en el tema de límites, éste se resuelve racionalizando, entonces:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \left[\left(\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \right) \left(\frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right) \right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ .$$

Por lo tanto,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{si } x > 0.$$

4. Calcula la derivada de $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ para todo $x \neq 1$.

Solución:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{(x+h)}{(x+h)-1} - \dfrac{x}{x-1}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{(x+h)(x-1) - x(x+h-1)}{(x+h-1)(x-1)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 - x + xh - h - x^2 - xh + x}{h(x+h-1)(x-1)} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(x+h-1)(x-1)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(x+h-1)(x-1)} = \frac{-1}{(x-1)(x-1)} = \frac{-1}{(x-1)^2}.$$

Por tanto,

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} \quad \text{si } x \neq 1.$$

Ejercicios

Hallar la derivada de las siguientes funciones, usando la definición.

1. $f(x)=x^3+3x^2-5x+2$.
2. $f(x)=\frac{3}{2}x^2+7x$.
3. $f(x)=4x^2+\frac{5}{8}x-6$.
4. $f(x)=\frac{-3}{x^2}$.
5. $f(x)=\frac{7}{\sqrt{x}}$.
6. $f(x)=\sqrt{3+8x}$.
7. $f(x)=\frac{2x+1}{x}$.
8. $f(x)=\frac{-1}{x+9}$.
9. $f(x)=\sqrt[3]{x}$.
10. $f(x)=(1+2x)^3$.

3.4 DERIVADAS ALGEBRAICAS

En la lección anterior, calculamos la derivada de varias funciones, recurriendo a la definición,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Sin embargo, si las funciones que se quisieran derivar fueran del tipo:

- $f(x)=\left(x^3+2\right)^{15}$.
- $f(x)=\left(3x^8\right)+\dfrac{1}{2\sqrt{x^4}}$.
- $f(x)=\dfrac{\left(x^3+2\right)^7}{\sqrt[5]{x^4}}$.

O alguna otra expresión, las operaciones necesarias para calcular la derivada a partir de la definición serían muy complicadas. Por esta razón, introduciremos las herramientas que nos permitan obtener la derivada de funciones como las anteriores, sin recurrir a la definición.

A continuación se enlistan las principales "fórmulas de derivación", utilizando las propiedades algebraicas de la derivada.

1. Derivada de una constante.

Sea $f(x)$ una función constante y c un número real,

$$\text{si } f(x)=c \text{ entonces } f'(x)=(c)'=0.$$

2. Derivada de la función idéntica.

Si $f(x)=x$, entonces $f'(x)=(x)'=1$ para todo número real x.

3. Derivada de la potencia de x.

Sea $f(x)$ una función derivable, y n un número racional,

$$\text{Si } f(x)=x^n \text{ entonces } f'(x)=\left(x^n\right)'=nx^{n-1}.$$

4. Derivada de la suma y resta de funciones.

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables, entonces $(f+g)(x)$ y $(f-g)(x)$ son derivables y,

$$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x) \quad \text{y} \quad (f-g)'(x)=f'(x)-g'(x).$$

5. Derivada del producto de una constante por una función.

Sea $f(x)$ una función derivable y c una constante, entonces $cf(x)$ es derivable y,

$$(cf)'(x)=cf'(x).$$

6. Derivada de un producto de funciones.

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables, entonces la función producto $(fg)(x)$ es derivable y,

$$(fg)'(x)=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)\ .$$

7. Derivada de un cociente de funciones.

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables, entonces la función cociente $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ es derivable (donde $g(x)\neq 0$) y,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}\ .$$

8. Derivada del cociente de una función entre una constante.

Sea $f(x)$ una función derivable, y c una constante, entonces la función

$\frac{f(x)}{c}$ es derivable (donde $c\neq 0$), y,

$$\left(\frac{f(x)}{c}\right)'=\frac{f'(x)}{c}.$$

9. Derivada de una composición de funciones.

Esta derivada es conocida como la “Regla de la cadena” y se utiliza para derivar funciones compuestas.

Si g es derivable en x, y f es derivable en $g(x)$ entonces

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Si se aplica la regla de la cadena a la potencia de funciones, tenemos que:

Si n es cualquier número racional, y $f^n(x)$ es una función derivable, entonces

$$(f^n)'(x) = nf^{n-1}(x)f'(x).$$

3.4.1 Formulas de derivación

En resumen, las fórmulas de derivación que hemos visto son:

Función	Derivada
1. $y = c$	$y' = 0$
2. $y = x$	$y' = 1$
3. $y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
4. $y = u + v$ $y = u - v$	$y' = u' + v'$ $y' = u' - v'$
5. $y = cv$	$y' = cv'$
6. $y = uv$	$y' = u'v + v'u$
7. $y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
8. $y = \frac{v}{c}$	$y' = \frac{v'}{c}$
9. $y = v^n$	$y' = nv^{n-1}v'$

Con y, u, v funciones y c, n constantes.

En esta tabla se cambió la notación con el fin de simplificar las expresiones y facilitar la “memorización” de las fórmulas.

A continuación vamos a resolver varios ejemplos, donde se calculan las derivadas de funciones, usando las diferentes fórmulas.

Ejemplos

Hallar la derivada de las siguientes funciones, usando las fórmulas: 1-5, y 8.

1. $y = 7$. (fórmula 1)
$y' = 0$.

2. $y = x^3$. (fórmula 3)
$y' = 3x^{3-1}$
$= 3x^2$.

3. $y = 5x^2$. (fórmulas 5 y 3)
$y' = 5(2x^1)$
$= 10x$.

4. $y = 2x^4 - 3x^6 + x$. (fórmulas 2,3,4 y 5)
$y' = 2(4x^3) - 3(6x^5) + 1$
$= 8x^3 - 18x^5 + 1$.

5. $y = 4x^8 + 7x^5 - 6x^4 + 10$. (fórmulas 3 ,4 y 5)
$y' = 4(8x^7) + 7(5x^4) - 6(4x^3) + 0$
$= 32x^7 + 35x^4 - 24x^3$.

6. $y = 9x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{7}x + \frac{1}{6}$.

$$y' = 9(4x^3) - \frac{3}{2}(3x^2) + \frac{1}{4}(2x) - \frac{3}{7}(1) + 0$$
$$= 36x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{7}.$$

7. $y = \dfrac{7x^5}{2}$. (fórmulas 3,5 y 8)

$$y' = \frac{7(5x^4)}{2}$$
$$= \frac{35x^4}{2} = \frac{35}{2}x^4 .$$

8. $y = \dfrac{6}{x^9}$.

Para resolver este ejercicio, usaremos la potencia negativa para quitar el denominador, entonces:

$$y = \frac{6}{x^9} = 6x^{-9}$$

Y derivamos usando las fórmulas 3 y 5, de tal forma que,

$$\begin{aligned} y' &= 6\left(-9x^{-9-1}\right) = 6\left(-9x^{-10}\right) \\ &= -54x^{-10} \\ &= \frac{-54}{x^{10}}. \end{aligned}$$

9. $y = \sqrt[3]{x}$.

Antes de calcular esta derivada, conviene usar la potencia fraccionaria, entonces

$$\begin{aligned} y &= \sqrt[3]{x} \\ &= x^{1/3} \end{aligned}$$

y la derivada es:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{3}x^{-2/3} \\ &= \frac{1}{3x^{2/3}} \\ &= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}. \end{aligned}$$

10. $y = \dfrac{-2}{\sqrt{x}}$.

Antes de derivar, simplificamos la expresión usando las leyes de los exponentes.

$$y = -2x^{-1/2}$$

Y la derivada es:

$$y' = -2\left(\frac{-1}{2}x^{-3/2}\right)$$
$$= x^{-3/2}$$
$$= \frac{1}{x^{3/2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,.$$

Ejercicios

Hallar la derivada de las siguientes funciones, usando las fórmulas correspondientes. Simplificar los resultados hasta la mínima expresión.

1. $y = 3x^2 + 10x\,.$

2. $y = -x^3 + 4x^2 - 9\,.$

3. $y = \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{3}{x}\,.$

4. $y = \dfrac{1}{x^5} - \dfrac{1}{x^4} + x - 5\,.$

5. $y = \dfrac{3}{5}x^4 - \dfrac{4}{3}x^3 + \dfrac{9}{2}x^2 + 1\,.$

6. $y = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - \sqrt[5]{x^6}\,.$

7. $y = \dfrac{6}{7x^4} - \dfrac{7x^4}{6} + 11x - 4\,.$

8. $y = \dfrac{3x^6}{2b} + 4x^4 - \dfrac{8}{3x^2} + xb^3\,.$

9. $y = \dfrac{5x^3 + 2x^4 - 3x}{x^7}\,.$

Sugerencia: simplifica las potencias.

10. $y = \dfrac{-6b}{x^4} + \dfrac{3a}{x^5} - \dfrac{4}{5x^{-2}}\,.$

11. $y = \dfrac{\sqrt[3]{x} + 5\sqrt{x}}{4}\,.$

12. $y = (3x - 4)^2\,.$

Sugerencia: desarrolla el binomio.

13. $y = 9\sqrt{x}\left(\dfrac{2}{\sqrt{x^3}}\right)^2$

Sugerencia: simplifica las potencias.

3.4.2 Derivada del producto y el cociente de funciones

En los siguientes ejemplos usaremos las fórmulas del producto y del cociente de funciones aunque en éstas se usan también las fórmulas anteriores.

Ejemplos

Hallar la derivada de las siguientes funciones y simplificar los resultados reduciéndolos a la mínima expresión.

1. $y = \sqrt{x}\left(3x^2 + 1\right)$.

Solución:
Recordemos que en la derivada del producto,

si $y = uv$ entonces $y' = u'v + v'u$ donde u y v son funciones.

Entonces para calcular la derivada de este producto vamos a separar las funciones en u y v.

Sean $u = \sqrt{x} = x^{1/2}$ y $v = 3x^2 + 1$ entonces $y = uv$.

Calculamos las derivadas,

$$u' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$v' = 6x.$$

Sustituyendo en la fórmula del producto y simplificando los términos, tenemos que la derivada de la función es:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left(3x^2 + 1\right) + (6x)\left(\sqrt{x}\right) \\ &= \frac{\left(3x^2 + 1\right)}{2\sqrt{x}} + 6x\sqrt{x} \\ &= \frac{3x^2 + 1}{2\sqrt{x}} + 6\sqrt{x^3} \ . \end{aligned}$$

2. $y=\left(3t^3-\frac{5}{2}\right)\left(\sqrt[3]{t}+1\right).$

Solución:

Sean $u=3t^3-\frac{5}{2}$ y $v=\sqrt[3]{t}+1=t^{1/3}+1$ entonces $y=uv$.

Calculamos las derivadas,

$$u'=9t^2\ .$$

$$v'=\frac{1}{3}t^{-2/3}=\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}.$$

Sustituyendo en la fórmula del producto y simplificando los términos, tenemos que la derivada de la función es:

$$y'=\left(9t^2\right)\left(\sqrt[3]{t}+1\right)+\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}\right)\left(3t^3-\frac{5}{2}\right)=9t^2\left(\sqrt[3]{t}\right)+9t^2+\frac{3t^3}{3\sqrt[3]{t^2}}-\frac{5}{6\sqrt[3]{t^2}}$$

$$=9t^{7/3}+9t^2+t^{7/3}-\frac{5}{6\sqrt[3]{t^2}}=10t^{7/3}+9t^2-\frac{5}{6\sqrt[3]{t^2}}$$

$$=10\sqrt[3]{t^7}+9t^2-\frac{5}{6\sqrt[3]{t^2}}.$$

3. $y=\frac{3x+2}{x^2+5}.$

Solución:

En esta función, vamos a llamar u al numerador y v al denominador, de tal forma que si $y=\frac{u}{v}$ entonces $y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$.

Sean $u=3x+2$ y $v=x^2+5$ entonces $y=\frac{u}{v}$.

Ahora calculamos las derivadas,

$$u' = 3.$$

$$v' = 2x.$$

Sustituyendo en la fórmula del cociente y simplificando los términos, tenemos que la derivada de la función es:

$$y' = \frac{3(x^2+5) - 2x(3x+2)}{(x^2+5)^2} = \frac{3x^2+15-6x^2-4x}{(x^2+5)^2}$$

$$= \frac{-3x^2-4x+15}{(x^2+5)^2}\ .$$

4. $y = \dfrac{t^3-8}{t^3+8}$.

Solución:

Sean $u = t^3 - 8$ y $v = t^3 + 8$ entonces $y = \dfrac{u}{v}$.

Calculamos las derivadas,

$$u' = 3t^2.$$

$$v' = 3t^2.$$

Sustituyendo en la fórmula del cociente y simplificando, tenemos que la derivada de la función es:

$$y' = \frac{3t^2\left(t^3+8\right)-3t^2\left(t^3-8\right)}{\left(t^3+8\right)^2} = \frac{3t^5+24t^2-3t^5+24t^2}{\left(t^3+8\right)^2}$$

$$= \frac{48t^2}{\left(t^3+8\right)^2}\,.$$

5. $y = \dfrac{9+\sqrt{x}}{9-\sqrt{x}}\,.$

Solución:

Sean $\begin{aligned} u &= 9+\sqrt{x} \\ &= 9+x^{1/2} \end{aligned}$ y $\begin{aligned} v &= 9-\sqrt{x} \\ &= 9-x^{1/2} \end{aligned}$ entonces $y = \dfrac{u}{v}\,.$

Ahora calculamos las derivadas,

$$u' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,.$$

$$v' = -\frac{1}{2}x^{-1/2} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\,.$$

Sustituyendo en la fórmula del cociente y simplificando, tenemos que la derivada de la función es:

$$y' = \frac{\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left(9-\sqrt{x}\right)-\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left(9+\sqrt{x}\right)}{\left(9-\sqrt{x}\right)^2} = \frac{\dfrac{9-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}+\dfrac{9+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{\left(9-\sqrt{x}\right)^2}$$

$$= \frac{\dfrac{9-\sqrt{x}+9+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{\left(9-\sqrt{x}\right)^2} = \frac{\dfrac{18}{2\sqrt{x}}}{\left(9-\sqrt{x}\right)^2}$$

$$= \frac{9}{\sqrt{x}\left(9-\sqrt{x}\right)^2}\,.$$

Ejercicios

Hallar la derivada de las siguientes funciones. Simplifica los resultados reduciéndolos a la mínima expresión.

1. $y=\left(7\sqrt[4]{x}-x\right)\left(3x^4+8\right)$.

2. $y=\left(x^2+x\right)\left(6x^3-2\right)$.

3. $y=\left(\sqrt{x}+8x\right)\left(x^2+7\right)$.

4. $y=\left(6x-x^3\right)\left(2\sqrt{x^5}+5\right)$.

5. $y=\dfrac{5+t}{t+4}$.

6. $y=\dfrac{x^2+b^2}{x^2-b^2}\qquad b\in\Re$.

7. $y=\dfrac{2-3t^4}{4+5t}$.

8. $y=\dfrac{3x+2}{1-x^2}$.

9. $y=\dfrac{4t^3-3}{5t^2-3t}$.

10. $y=\dfrac{x^3-x}{4x^2-12}$.

11. $y=\dfrac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$.

12. $y=\dfrac{x^2-6x+9}{x-3}$.

13. $y=\dfrac{3t^2-2t+1}{2t^6+1}$.

14. $y=\dfrac{\sqrt[3]{t^5}}{2}\left(2t^3+3t^2\right)$.

15. $y=\dfrac{7}{x^7}\left(\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{x}+4\right)$.

16. $y=\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-3\right)$.

17. $y=\dfrac{t^2+3t}{t^3-9t}-\dfrac{t+2}{t^2}$.

18. $y=\dfrac{\sqrt{t^2+b^2}+\sqrt{t^2-b^2}}{\sqrt{t^2+b^2}-\sqrt{t^2-b^2}}$.

19. $y=\dfrac{\left(x^2-5\right)\left(x^2-3\right)}{x^2+8}$.

20. $y=\dfrac{x^2+10x}{4x^{-2}+3x^{-3}}$.

3.4.3 Derivada de la composición de funciones o regla de la cadena

Si $y = v^n$ donde v es función de x y $n \in \Re$, entonces $y' = nv^{n-1}v'$.

Ejemplos

Calcular la derivada de las siguientes funciones.

1. $y = \left(x^3 - 5\right)^7$.

Solución:

Sea $v = x^3 - 5$, entonces $y = v^7$.

Ahora calculamos la derivada de cada función, así:

$$v' = 3x^2.$$

$$y' = 7v^6 v'.$$

Sustituimos v y v' en y', entonces la derivada es:

$$\begin{aligned} y' &= 7\left(x^3 - 5\right)^6\left(3x^2\right) \\ &= 21x^2\left(x^3 - 5\right)^6 . \end{aligned}$$

2. $y = \sqrt{x^2 + 4x - 12}$.

Solución:

Sea $v = x^2 + 4x - 12$, entonces $y = \sqrt{v} = v^{1/2}$.

Ahora calculamos la derivada de cada función, así:

$$v' = 2x + 4.$$

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{1}{2}v^{-1/2}\right)v' \\ &= \frac{v'}{2\sqrt{v}}. \end{aligned}$$

Sustituimos v y v' en y', entonces la derivada es:

$$y' = \frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x-12}} = \frac{2(x+2)}{2\sqrt{x^2+4x-12}}$$

$$= \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x-12}}.$$

3. $y = \dfrac{-2}{(t^4-1)^5}$.

Solución:

Sea $v = t^4 - 1$, entonces $\begin{aligned} y &= \frac{-2}{v^5} \\ &= -2v^{-5}. \end{aligned}$

Ahora calculamos la derivada de cada función, así:

$$v' = 4t^3.$$

$$\begin{aligned} y' &= -2\left(-5v^{-6}\right)(v') \\ &= 10v^{-6}v' \\ &= \frac{10v'}{v^6}. \end{aligned}$$

Sustituimos v y v' en y', entonces la derivada es:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{10(4t^3)}{(t^4-1)^6} \\ &= \frac{40t^3}{(t^4-1)^6}. \end{aligned}$$

4. $y = \left(\dfrac{5 - t^3}{5 + t^3} \right)^2$.

Solución:

Sea $v = \dfrac{5 - t^3}{5 + t^3}$, entonces $y = v^2$.

Calculamos v' usando la fórmula del cociente, de tal modo que:

$$v' = \frac{-3t^2\left(5 + t^3\right) - 3t^2\left(5 - t^3\right)}{\left(5 + t^3\right)^2} = \frac{-15t^2 - 3t^5 - 15t^2 + 3t^5}{\left(5 + t^3\right)^2}$$

$$= \frac{-30t^2}{\left(5 + t^3\right)^2}.$$

Entonces si $y' = (2v)v'$ sustituimos v y v' en y'. Por lo tanto, la derivada de la función es:

$$y' = 2\left(\frac{5 - t^3}{5 + t^3}\right)\left(\frac{-30t^2}{\left(5 + t^3\right)^2}\right)$$

$$= \frac{-60t^2\left(5 - t^3\right)}{\left(5 + t^3\right)^3}.$$

Ejercicios

Calcular la derivada de las siguientes funciones, reduciendo el resultado a la mínima expresión.

1. $y = \sqrt[3]{x^2 + x}$.

2. $y = \left(2 + \sqrt{2x}\right)^4$.

3. $y = \left(5 + \dfrac{1}{x^3}\right)^3$.

4. $y = \sqrt{7x} - \dfrac{1}{\sqrt{3x^2}}$.

5. $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 9}}$.

6. $y = \left(\dfrac{3 + \sqrt[3]{t}}{t}\right)^2$.

7. $y = \dfrac{x^6}{\left(x^2 + 1\right)^4}$.

8. $y = \left(1 + \dfrac{1}{t}\right)\left(3 + \dfrac{3}{t}\right)^3\left(5 + \dfrac{5}{t}\right)^5$.

9. $y = \sqrt{3t^5}\left(\sqrt[4]{1 + t^4}\right)$.

10. $y = 6\sqrt{3x\sqrt{2x}}$.

11. $y = \dfrac{-x^3}{\left(4 + \dfrac{1}{4x^3}\right)^2}$.

12. $y = \left(\sqrt{x} - 3\right)^3 + \dfrac{1}{\left(2x + 9\right)^{3/2}} - \sqrt[3]{x^2 + 9x}$.

3.5 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las funciones trigonométricas son derivables para todo x en su dominio y las derivadas son:

Función	Derivada
$y = \operatorname{sen} x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\operatorname{sen} x$
$y = \tan x$	$y' = \sec^2 x$
$y = \cot x$	$y' = -\csc^2 x$
$y = \sec x$	$y' = \sec x \tan x$
$y = \csc x$	$y' = -\csc x \cot x$

En general, si v es una función de x y su derivada existe, entonces, aplicando la regla de la cadena, las derivadas de las funciones trigonométricas son:

Función	Derivada
$y = \operatorname{sen} v$	$y' = v' \cos v$
$y = \cos v$	$y' = -v' \operatorname{sen} v$
$y = \tan v$	$y' = v' \sec^2 v$
$y = \cot v$	$y' = -v' \csc^2 v$
$y = \sec v$	$y' = v' \sec v \tan v$
$y = \csc v$	$y' = -v' \csc v \cot v$

Ejemplos

Hallar la derivada de las siguientes funciones y simplificar el resultado reduciéndolo a la mínima expresión.

1. $y = \operatorname{sen} 3x$.

Solución:

Si $v = 3x$ entonces $y = \operatorname{sen} v$.

Ahora calculamos la derivada de cada función, así:

$$v' = 3.$$

$$y' = v' \cos v.$$

Sustituimos v y v' en y', entonces la derivada es:

$$y' = 3\cos\,3x.$$

2. $y = \operatorname{sen}\left(4x^2 - 1\right)^3$.

Solución:

Si $v = \left(4x^2 - 1\right)^3$ entonces $y = \operatorname{sen} v$.

Ahora calculamos la derivada de cada función, para obtener v' usamos la regla de la cadena. Así:

$$\begin{aligned} v' &= 3\left(4x^2 - 1\right)^2(8x) \\ &= 24x\left(4x^2 - 1\right)^2. \end{aligned}$$

$$y' = v'\cos v.$$

Sustituimos v y v' en y', entonces la derivada es:

$$y' = 24x\left(4x^2 - 1\right)^2\cos\,\left(4x^2 - 1\right)^3.$$

3. $y = \cos^4 7x$.

Solución:

Antes de derivar, vamos a escribir esta función como $y = (\cos 7x)^4$.

En este caso, hacemos

$$v = \cos 7x \qquad \text{y} \qquad y = v^4$$

Entonces

$$v' = -7\operatorname{sen} 7x \qquad \text{y} \qquad y' = 4v^3 v'$$

Por lo tanto, la derivada de la función es:

$$\begin{aligned} y' &= 4(\cos 7x)^3(-7\operatorname{sen} 7x) = -28\operatorname{sen} 7x(\cos 7x)^3 \\ &= -28\operatorname{sen} 7x\cos^3 7x. \end{aligned}$$

4. $y = 4\tan\left(\dfrac{3t-1}{7}\right)$.

Solución:

Sea $v = \dfrac{3t-1}{7}$ entonces $y = 4\tan v$**.**

Ahora calculamos la derivada de cada función, así:

$$v' = \frac{3}{7}.$$

$$y' = 4v'\sec^2 v.$$

Sustituimos v y v' en y', entonces la derivada es:

$$\begin{aligned} y' &= 4\left(\frac{3}{7}\right)\sec^2\left(\frac{3t-1}{7}\right) \\ &= \frac{12}{7}\sec^2\left(\frac{3t-1}{7}\right). \end{aligned}$$

5. $y = x^2\cot\left(x^2-1\right)$.

Solución:

En este ejemplo tenemos un producto, como vimos anteriormente, en la derivada del producto: si $y = uv$ entonces $y' = u'v + v'u$.

Por lo tanto,

$$u = x^2 \quad \text{y} \quad u' = 2x$$

$$v = \cot\left(x^2-1\right) \quad \text{y} \quad v' = -2x\csc^2\left(x^2-1\right)$$

Y la derivada de la función es:

$$y' = 2x\left(\cot\left(x^2-1\right)\right) + \left(-2x\csc^2\left(x^2-1\right)\right)x^2$$

$$= 2x\cot\left(x^2-1\right) - 2x^3\csc^2\left(x^2-1\right).$$

6. $y = \sec \dfrac{x}{2x+3}$.

Solución:

Sea $v = \dfrac{x}{2x+3}$ entonces $y = \sec v$.

Y las derivadas son:

$$v' = \frac{1(2x+3) - 2(x)}{(2x+3)^2} = \frac{2x+3-2x}{(2x+3)^2}$$
$$= \frac{3}{(2x+3)^2}.$$

$$y' = v' \sec v \tan v.$$

Por lo tanto, la derivada de la función es:

$$y' = \frac{3}{(2x+3)^2} \sec \frac{x}{2x+3} \tan \frac{x}{2x+3}.$$

7. $y = \dfrac{\cos 5x}{\sqrt{x}}$.

Solución:

En este ejemplo se trata de la derivada del cociente, en donde,

si $y = \dfrac{u}{v}$ entonces $y' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, por lo tanto hacemos:

$$u = \cos 5x \quad \text{y} \quad u' = -5\text{sen } 5x$$

$$v = \sqrt{x} = x^{1/2} \quad \text{y} \quad v' = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Y la derivada de la función es:

$$y' = \frac{(-5\text{sen } 5x)(\sqrt{x}) - \left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)(\cos 5x)}{(\sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{-5\sqrt{x}\ \text{sen } 5x - \dfrac{\cos 5x}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$= \frac{\dfrac{-10x\ \text{sen } 5x - \cos 5x}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$= \frac{-10x\ \text{sen } 5x - \cos 5x}{2x\sqrt{x}} .$$

Ejercicios

Para cada una de las siguientes funciones, hallar la derivada y simplificar.

1. $y = 2\operatorname{sen}^2 \dfrac{x}{2}$.

2. $y = \cos^3 \dfrac{x}{3} - 3\cos\dfrac{x}{3}$.

3. $y = \operatorname{sen} \dfrac{t-1}{\sqrt{t}-1}$.

4. $y = \cos\left(\dfrac{5}{t^3} - \sqrt{t^6} - \dfrac{3}{\sqrt{t}}\right)$.

5. $y = (2x+1)\tan(x^2+3x)$.

6. $y = \cos^3 (3x^2+5)^4$.

7. $y = \operatorname{sen} 5x - \dfrac{1}{3}\operatorname{sen}^4 5x$.

8. $y = \tan \sqrt[3]{\dfrac{x}{6}}$.

9. $y = \csc^4\left(\dfrac{2x-1}{7}\right)$.

10. $y = \dfrac{1}{3}\tan^3 x + \tan^2 x + \tan x$.

11. $y = \dfrac{\sec 4x + \tan 4x}{\sec 4x - \tan 4x}$.

12. $y = \cos\left(\dfrac{t^2-7t}{\sqrt{t}-\sqrt{7}}\right)$.

13. $y = \cot\left(\dfrac{9}{x^4}\right)\operatorname{sen} 2x$.

14. $y = \sec(2x+4)\operatorname{sen}(3x-5)$.

15. $y = \sec\left(\dfrac{6}{x^2}\right)\csc\left(\dfrac{6}{x^2}\right)$.

16. $y = \dfrac{8\sqrt[4]{t}}{\csc t^3}$.

17. $y = \dfrac{1}{5}\cot^5 x - \dfrac{1}{3}\cot^3 x + \cot x + x$.

18. $y = t\csc^3(9-4t^2)^6$.

19. $y = 4\operatorname{sen}\left(\cos^3 \dfrac{5x}{2}\right)$.

20. $y = \dfrac{1}{x}\sqrt{\cot\left(\dfrac{8x^2}{4-x}\right)}$.

3.6 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

En esta lección abordaremos el problema de calcular “la derivada de la derivada”. La derivada de una función, es una nueva función de la misma variable, a la derivada de esta derivada se le conoce como la segunda derivada, la cual es una nueva función y se puede derivar sucesivamente.

Notación

- $f'(x)$ es la derivada de primer orden.
- $f''(x)$ es la derivada de segundo orden.
- $f'''(x)$ es la derivada de tercer orden.
- $f^{(4)}(x)$ es la derivada de cuarto orden.

  $\vdots$
- $f^{(n)}(x)$ es la derivada de *n-ésimo* orden.

La notación que se usa para derivadas de orden superior a cuatro es $f^{(4)}(x), f^{(5)}(x)$, etcétera.

Debemos notar que $f^{(4)}(x)$ es diferente de $f^{4}(x)$, ya que $f^{(4)}(x)$ se refiere a la derivada de cuarto orden, mientras que $f^{4}(x)=\left(f(x)\right)^{4}$.

Si $n=2,3,4,...$ decimos que la función $f(x)$ es n veces derivable, si existe la derivada $\left(f^{(n-1)}(x)\right)'$, la cual se denota por $f^{(n)}(x)$ y se llama $n-ésima$ derivada, o derivada de $n-ésimo$ orden de $f(x)$.

Ejemplos

1. Calcular la derivada de tercer orden de la función $y=x^{4}+5x^{3}-2x-4$.

$$y'=4x^{3}+15x^{2}-2.$$

$$y''=12x^{2}+30x.$$

$$y'''=24x+30.$$

2. Calcular la segunda derivada de $y = \operatorname{sen}(6x+1)$.

$$y' = 6\cos(6x+1).$$

$$\begin{aligned} y'' &= 6(-6\operatorname{sen}(6x+1)) \\ &= -36\operatorname{sen}(6x+1). \end{aligned}$$

Ejercicios

Hallar la segunda derivada de cada función.

1. $y = 7x^3 - 6x^4 + \dfrac{3}{2}$.

2. $y = \dfrac{x^2-3}{x}$.

3. $y = \cos^3 \dfrac{t}{7}$.

4. $y = \sec(t^2 - 9)$.

5. $y = \dfrac{x}{2}\operatorname{sen} 2x$.

6. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{4x+1}$.

7. $y = (x^2+2)\left(\dfrac{1}{x^2} - 2\right)$.

.

Hallar la derivada de tercer orden para cada función.

1. $y = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + x - 1$.

2. $y = \dfrac{x^4+2x}{3x}$.

3. $y = 3\tan 6x$.

4. $y = \dfrac{t-9}{t+9}$.

5. $y = \operatorname{sen} 2x \cos 2x$.

6. $y = \left(\dfrac{t^2}{3} + 1\right)^3$.

7. $y = \sec\left(\dfrac{t^2}{4}\right)$.

3.7 DERIVADA DE FUNCIONES IMPLÍCITAS

Se dice que una función es implícita cuando el valor de la función no está dado explícitamente o cuando no está despejada la variable.

Ejemplos

- Función explícita.

  1. $y = 9 - x^2$.

  2. $y = \frac{1}{x}$ con $x \neq 0$.

  3. $y = \sqrt{16 - x^2}$.

  4. $y = -\sqrt{16 - x^2}$.

- Función implícita.

  1. $xy - 1 = 0$.

  2. $x^2 + y - 9 = 0$.

  3. $x^2 + y^2 - 16 = 0$.

En algunos casos no es posible despejar la variable y conviene utilizar la derivación implícita.

Este tipo de derivación consiste en derivar con respecto a x, recordando que y es una función de x.

Una vez que se haya derivado cada término, se agrupan aquellos términos que tengan y' para factorizar y despejar la derivada.

Ejemplos

1. Dada la función $3x^3y - 4y - 2x + 1 = 0$ hallar la derivada.

Solución:

Derivando con respecto a x, tenemos:

$$\underbrace{9x^2y + 3x^3y'}_{\text{Regla del producto}} - 4y' - 2 = 0$$

Agrupamos los términos con y':

$$3x^3y' - 4y' = 2 - 9x^2y\,.$$

Factorizamos y':

$$y'\left(3x^3 - 4\right) = 2 - 9x^2y\,.$$

Despejamos y' .Por lo tanto, la derivada de la función implícita es:

$$y' = \frac{2 - 9x^2y}{3x^3 - 4}\,.$$

2. Derivar implícitamente la función $3x^2 + 4xy - 5y^2 - 35 = 0$.

Solución:

Derivando con respecto a x, tenemos:

$$6x + \underbrace{4y + 4xy'}_{\text{Regla del producto}} - \underbrace{10yy'}_{\text{Regla de la cadena}} = 0$$

Agrupamos los términos con y':

$$4xy' - 10yy' = -6x - 4y\,.$$

Factorizamos y':

$$y'\left(4x - 10y\right) = -\left(6x + 4y\right).$$

Despejamos y' .Por lo tanto, la derivada de la función implícita es:

$$y' = \frac{-\left(6x + 4y\right)}{4x - 10y}\,.$$

3. Hallar la derivada de la función $\cos(x-y)=(2x+1)^3 y$.

Solución:

Derivando con respecto a x, tenemos:

$-(1-y')\operatorname{sen}(x-y)=3(2x+1)^2(2)(y)+(2x+1)^3 y'$

Desarrollando los productos,

$$-\operatorname{sen}(x-y)+y'\operatorname{sen}(x-y)=6y(2x+1)^2+(2x+1)^3 y'$$

Agrupamos los términos con y':

$$y'\operatorname{sen}(x-y)-y'(2x+1)^3=6y(2x+1)^2+\operatorname{sen}(x-y).$$

Factorizamos y':

$$y'\left(\operatorname{sen}(x-y)-(2x+1)^3\right)=6y(2x+1)^2+\operatorname{sen}(x-y).$$

Despejamos y'. Por lo tanto, la derivada de la función implícita es:

$$y'=\frac{6y(2x+1)^2+\operatorname{sen}(x-y)}{\operatorname{sen}(x-y)-(2x+1)^3} .$$

Ejercicios

Hallar la derivada de las siguientes funciones usando la derivación implícita.

1. $x^3+y^3=1+3xy^2$.

2. $y^3-4x^2\sqrt{y}+2=0$.

3. $4x^2+9y^2-36\frac{x}{y}=0$.

4. $7(2x-5y)^2-y=0$.

5. $sen\left(x^2+2y\right)=xy$.

6. $\sqrt{x}+\sqrt{y}-3\sqrt{xy}=4$.

7. $x^2-x^2y+xy^2+y^2=1$.

8. $\tan x^2y^5=\frac{7x}{6y}$.

9. $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 y=1$.

10. $x^2++9xy-13y^2-7y=0$.

11. $\frac{x^2-3y}{5xy-1}+7=0$.

12. $\sqrt{x^2y}-\frac{1}{\sqrt{x+5y}}-3=0$.

UNIDAD 4

4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

4.1 INTRODUCCIÓN Y CONTEXTO

Una vez que hemos desarrollado la habilidad de calcular la derivada de las funciones básicas, vamos ahora a trabajar en una de las aplicaciones más importantes que hay de las derivadas. Para contextualizar, veamos antes, en dónde se pueden aplicar las derivadas que hemos estudiado.

Las derivadas se aplican en:

- **La física, en problemas de:**
  - ❖ Velocidad y aceleración de un cuerpo en movimiento rectilíneo.
  - ❖ Razón de cambio.

- **La geometría, en problemas de:**
  - ❖ Rectas tangentes y normales a una curva.
  - ❖ Segmentos tangentes, normales, subtangentes y subnormales.
  - ❖ Análisis de funciones.
    - ✓ Funciones crecientes.
    - ✓ Funciones decrecientes.
    - ✓ Puntos de inflexión.
    - ✓ Concavidad.
    - ✓ Valores máximos y mínimos relativos.

- **Problemas prácticos de máximos y mínimos.**

En este trabajo sólo abordaremos la aplicación de las derivadas, en el planteamiento y solución de problemas de máximos y mínimos.

Como se describió antes, el cálculo de los máximos y mínimos en el contexto del análisis de funciones, nos da información sobre la función en cuestión. Dado que nosotros vamos a abordar los problemas, daremos solamente, una introducción a los criterios que se requieren para determinar si una función tiene valores máximos o mínimos.

4.2 VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Una función alcanza un *máximo relativo* en un punto c si:

$$f(c) > f(x) \text{ para todo } x \text{ cercano a } c.$$

Una función alcanza un *mínimo relativo* en un punto c si:

$$f(c) < f(x) \text{ para todo } x \text{ cercano a } c.$$

Valor crítico

Si f es una función definida en un intervalo (a,b), entonces $c \in (a,b)$ es un *valor crítico* de f si:

a) $f'(c) = 0$, o si

b) f' no está definida en c

Los máximos y mínimos de una función sólo pueden alcanzarse en los valores críticos.

4.2.1 Criterio de la primera derivada

Si f es una función derivable en un intervalo (a,b) , si $c \in (a,b)$ y c es un valor crítico de f , entonces:

1) Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,c)$ y $f'(x) < 0$ para todo $x \in (c,b)$, entonces f alcanza un *máximo* en c.

   Dicho de otro modo, si f' va de $+$ a $-$, para valores “cercanos” a c, entonces hay un máximo en c.

2) Si $f'(x)<0$ para todo $x\in(a,c)$ y $f'(x)>0$ para todo $x\in(c,b)$, entonces f alcanza un *mínimo* en c.

   En otras palabras, si f' va de $-$ a $+$, para valores "cercanos" a c, entonces hay un mínimo en c.

3) Si f' no cambia de signo, entonces f no alcanza máximo ni mínimo en c.

4.2.2 Primer método para calcular los máximos y mínimos

- Paso 1: Calcular la primera derivada de la función.

- Paso 2: Se iguala la derivada a cero y se encuentran las raíces reales de la ecuación resultante. Estas raíces son algunos de los valores críticos. Se analiza el dominio de la derivada. Los puntos donde la derivada no existe y que son puntos del dominio de la función, son los otros puntos críticos.

- Paso 3: Se consideran los valores críticos uno por uno, y se calculan los signos de la primera derivada. Primero para un valor "un poco menor" que el valor crítico, y después para un valor "un poco mayor" que él. En cada valor crítico si:

f' va de $+$ a $-$, hay un máximo.

f' va de $-$ a $+$, hay un mínimo.

f' no cambia de signo, no es máximo ni mínimo.

Ejemplos

Calcular los máximos y mínimos de las siguientes funciones.

1. $f(x)=x^3-6x^2+9x$.

Solución:

Paso 1: Calcular la derivada.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9.$$

Paso 2: Hallar los valores críticos.

$$\begin{aligned}&3x^2 - 12x + 9 = 0\\&x^2 - 4x + 3 = 0\\&(x-3)(x-1) = 0\\&x - 3 = 0 \quad x - 1 = 0.\end{aligned}$$

Entonces $x = 3$ y $x = 1$ son los valores críticos.

De acuerdo al criterio de la primera derivada, los intervalos determinados por los valores críticos son:

$$(-\infty,1) \cup (1,3) \cup (3,\infty).$$

Paso 3 : Entonces para cada valor crítico, tomaremos puntos que sean fáciles de evaluar en los intervalos.

- Para $x = 1$.

Si $x < 1$,

$$0 \in (-\infty,1):\ f'(0) = 3(0)^2 - 12(0) + 9 = 9 \ > 0.$$

Si $x > 1$,

$$2 \in (1,3):\ f'(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 9 = -3 \ < 0.$$

Entonces f' va de $+$ a $-$, así la función tiene un máximo cuando $x = 1$, y sustituyendo en la función inicial tenemos que:

$$f(1) = (1)^3 - 6(1)^2 + 9(1) = 4.$$

Por lo tanto, el *máximo* de la función es el punto $(1,4)$.

- Para $x = 3$.

Si $x < 3$,

$$2 \in (1,3):\ f'(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 9 = -3 \ < 0.$$

Si $x > 3$,

$$4 \in (3, \infty): \ f'(4) = 3(4)^2 - 12(4) + 9 = 9 \ \ > 0 .$$

Entonces f' va de $-$ a $+$, así la función tiene un mínimo cuando $x = 3$, y sustituyendo en la función inicial tenemos que:

$$f(3) = (3)^3 - 6(3)^2 + 9(3) = 0 .$$

Por lo tanto, el *mínimo* de la función es el punto $(3,0)$.

2. $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 + 9}$.

Solución:

Paso 1: Calcular la derivada.

$$f'(x) = \frac{3(x^2 + 9) - 2x(3x)}{(x^2 + 9)^2} = \frac{3x^2 + 27 - 6x^2}{(x^2 + 9)^2}$$
$$= \frac{-3x^2 + 27}{(x^2 + 9)^2} .$$

Paso 2: Hallar los valores críticos.

$$\frac{-3x^2 + 27}{(x^2 + 9)^2} = 0 .$$

Observemos que el denominador está definido par todo $x \in \Re$, entonces los valores críticos son cuando:

$$-3x^2 + 27 = 0$$
$$x^2 = \frac{-27}{-3} = 9$$
$$x = -\sqrt{9} \ \text{ y } \ x = \sqrt{9} .$$

Entonces $x = -3$ y $x = 3$ son los valores críticos.

De acuerdo al criterio de la primera derivada, los intervalos determinados por los valores críticos son:

$$(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,\infty).$$

Paso 3: Entonces para cada valor crítico, tomaremos puntos que sean fáciles de evaluar en los intervalos.

- Para $x=-3$.

Si $x<-3$,

$$-4\in(-\infty,-3):\ f'(-4)=\frac{(-3)(-4)^2+27}{\left((-4)^2+9\right)^2}=\frac{-21}{625}<0.$$

Si $x>-3$,

$$-2\in(-3,3):\ f'(-2)=\frac{(-3)(-2)^2+27}{\left((-2)^2+9\right)^2}=\frac{15}{169}>0.$$

Entonces f' va de $-$ a $+$, así la función tiene un mínimo cuando $x=-3$, y sustituyendo en la función inicial tenemos que:

$$f(-3)=\frac{3(-3)}{(-3)^2+9}=\frac{-9}{18}=-\frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, el *mínimo* de la función es el punto $\left(-3,-\frac{1}{2}\right)$.

- Para $x=3$.

Si $x<3$,

$$2\in(-3,3):\ f'(2)=\frac{(-3)(2)^2+27}{\left((2)^2+9\right)^2}=\frac{15}{169}>0.$$

Si $x>3$,

$$4\in(3,\infty):\ f'(4)=\frac{(-3)(4)^2+27}{\left((4)^2+9\right)^2}=\frac{-21}{625}<0.$$

Entonces f' va de $+$ a $-$, de donde la función tiene un máximo cuando $x=3$, y sustituyendo en la función inicial tenemos que:

$$f(3)=\frac{3(3)}{(3)^2+9}=\frac{9}{18}=\frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, el *máximo* de la función es el punto $\left(3,\frac{1}{2}\right)$.

Ejercicios

Hallar los valores máximos y mínimos de las siguientes funciones, usando el criterio de la primera derivada.

1. $f(x)=-2x^3-3x^2+12x+10$.
2. $f(x)=6x^2-3x^4$.
3. $f(x)=x^4-4x$.
4. $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2$.
5. $f(x)=x^2+\frac{54}{x}$.
6. $f(x)=\frac{16}{x^2}+x^2$.
7. $f(x)=5+2(x-1)^{2/3}$.
8. $f(x)=\frac{2x^2+2x+8}{2x^2+4x+8}$.
9. $f(x)=\frac{(x-7)(3-x)}{x^2}$.
10. $f(x)=\frac{25}{x}+\frac{9}{5-x}$

4.2.3 Criterio de la segunda derivada

Si f es una función que tiene segunda derivada en un intervalo (a,b) y $c \in (a,b)$ entonces:

1) Si $f'(c)=0$ y $f''(c)<0$ entonces f alcanza un máximo en c.

2) Si $f'(c)=0$ y $f''(c)>0$ entonces f alcanza un mínimo en c.

4.2.4 Segundo método para determinar los máximos y mínimos de una función.

- Paso 1: Calcular la primera derivada de la función.
- Paso 2: Igualar a cero la primera derivada para obtener los valores críticos. Determinar el dominio de la primera derivada. Si hay puntos donde la primera derivada no está definida y esos puntos pertenecen al dominio de la función, entonces son puntos críticos. En este caso debemos utilizar el criterio de la primera derivada.
- Paso 3: Hallar la segunda derivada.
- Paso 4: Sustituir cada valor crítico en la segunda derivada.

Si el resultado es negativo, la función tiene un máximo en el valor crítico evaluado, si el resultado es positivo, entonces tiene un mínimo.

Ejemplos

Hallar los máximos y los mínimos de las siguientes funciones.

1. $f(x)=x^3-3x+8$.

Solución:

Paso 1: Calcular la primera derivada.

$$f'(x)=3x^2-3.$$

Paso 2: Igualar a cero la derivada.

$$3x^2 - 3 = 0$$
$$x^2 - 1 = 0$$
$$(x-1)(x+1) = 0$$
$$x - 1 = 0 \text{ y } x + 1 = 0 .$$

Los valores críticos son: $x = 1$ y $x = -1$.

Paso 3: Calcular la segunda derivada.

$$f''(x) = 6x .$$

Paso 4: Evaluar los valores críticos en f''.

- Para $x = 1$.

$$f''(1) = 6(1) = 6 > 0 .$$

Entonces como $f''(1) > 0$, la función tiene un mínimo cuando $x = 1$, y sustituyendo en la función inicial tenemos que:

$$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 8 = 6 .$$

Por lo tanto, el *mínimo* de la función es el punto $(1,6)$.

- Para $x = -1$.

$$f''(-1) = 6(-1) = -6 < 0 .$$

Entonces como $f''(-1) < 0$, la función tiene un máximo cuando $x = -1$, y sustituyendo en la función inicial tenemos que:

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 8 = 10 .$$

Por lo tanto, el *máximo* de la función es el punto $(-1, 10)$.

2. $f(x)=\dfrac{6x}{x^2+3}$.

Solución:

Paso 1: Calcular la primera derivada.

$$f'(x)=\frac{6(x^2+3)-(2x)6x}{(x^2+3)^2}=\frac{6x^2+18-12x^2}{(x^2+3)^2}$$

$$=\frac{-6x^2+18}{(x^2+3)^2}.$$

Paso 2: Igualar a cero la derivada.

$$\frac{-6x^2+18}{(x^2+3)^2}=0, \quad \text{entonces}$$

$$-6x^2+18=0$$

$$-6x^2=-18$$

$$x^2=3.$$

Los valores críticos son: $x=\sqrt{3}$ y $x=-\sqrt{3}$.

Paso 3: Calcular la segunda derivada.

$$f''(x)=\frac{-12x\left(x^2+3\right)^2-\left(2\left(x^2+3\right)(2x)\left(-6x^2+18\right)\right)}{\left(x^2+3\right)^4}$$

$$=\frac{-12x\left(x^2+3\right)^2-4x\left(x^2+3\right)\left(-6x^2+18\right)}{\left(x^2+3\right)^4}$$

$$=\frac{-4x\left(x^2+3\right)\left[3\left(x^2+3\right)+\left(-6x^2+18\right)\right]}{\left(x^2+3\right)^4}$$

$$=\frac{-4x\left(3x^2+9-6x^2+18\right)}{\left(x^2+3\right)^3}$$

$$=\frac{-4x\left(-3x^2+27\right)}{\left(x^2+3\right)^3}$$

$$=\frac{12x\left(x^2-9\right)}{\left(x^2+3\right)^3}.$$

Paso 4: Evaluar los valores críticos en f''.

- Para $x=\sqrt{3}$.

$$f''\left(\sqrt{3}\right)=\frac{12\sqrt{3}\left(\left(\sqrt{3}\right)^2-9\right)}{\left(\left(\sqrt{3}\right)^2+3\right)^3}=\frac{12\sqrt{3}(3-9)}{(3+3)^3}$$

$$=\frac{12\sqrt{3}(-6)}{6^3}=\frac{-12\sqrt{3}}{36}$$

$$=\frac{-\sqrt{3}}{3}<0.$$

Entonces como $f''\left(\sqrt{3}\right)<0$, la función tiene un máximo cuando $x=\sqrt{3}$, y sustituyendo en la función inicial tenemos que:

$$f\left(\sqrt{3}\right)=\frac{6\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2+3}=\frac{6\sqrt{3}}{6}=\sqrt{3}.$$

Por lo tanto, el *máximo* de la función es el punto $\left(\sqrt{3},\ \sqrt{3}\right)$.

- Para $x = -\sqrt{3}$.

$$f''\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{12\left(-\sqrt{3}\right)\left(-\left(\sqrt{3}\right)^2 - 9\right)}{\left(\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 3\right)^3} = \frac{-12\sqrt{3}(3-9)}{(3+3)^3}$$

$$= \frac{-12\sqrt{3}(-6)}{6^3} = \frac{12\sqrt{3}}{36}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} > 0 \,.$$

Entonces como $f''\left(-\sqrt{3}\right) > 0$, la función tiene un mínimo cuando $x = -\sqrt{3}$, y sustituyendo en la función inicial tenemos que:

$$f\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{6\left(-\sqrt{3}\right)}{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 3} = \frac{-6\sqrt{3}}{6} = -\sqrt{3} \,.$$

Por lo tanto, el *mínimo* de la función es el punto $-\left(\sqrt{3}, -\sqrt{3}\right)$.

Ejercicios

Calcula los máximos y mínimos de las siguientes funciones usando el criterio de la segunda derivada.

1. $f(x) = x^4 - 8x^2$.

2. $f(x) = 2x^3 + 15x^2 + 24x - 12$.

3. $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 11$.

4. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 2}$.

5. $f(x) = \dfrac{5}{4}x^4 - \dfrac{5}{3}x^3 - 5x^2$.

6. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$.

7. $f(x) = 6x^4 - 8x^3 - 24x^2 + 4$.

8. $f(x) = \dfrac{7x}{x^2 + 49}$.

9. $f(x) = x^2(x-4)^2$.

10. $f(x) = x + \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$.

4.3 PROBLEMAS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

La principal dificultad que tiene este tema, es el planteamiento de los problemas, por ello debemos tener presente que lo primero que se debe encontrar, a partir de los datos del problema, es la expresión matemática de la función cuyos valores máximos o mínimos se desean.

Procedimiento

Antes de comenzar, conviene hacer un dibujo que ayude a ilustrar las condiciones del problema.

- *Paso 1*: Determinar la función cuyo máximo o mínimo se desea obtener. En caso de que la función contenga más de una variable, se debe expresar la función en términos de una sola variable, usando los datos que da el problema.
- *Paso 2*: Se calcula la primera derivada de la función obtenida y los valores críticos de ésta.
- *Paso 3*: Se aplica el criterio de la primera o de la segunda derivada, según convenga, para determinar los valores máximos o mínimos.

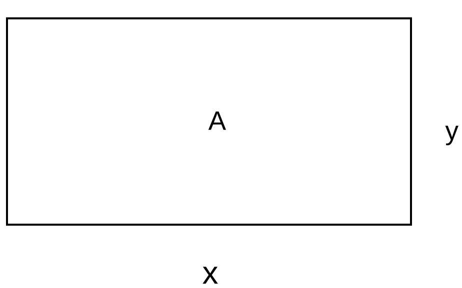
Muchas veces las condiciones físicas del problema permiten identificar con facilidad cual de los valores críticos considerados es un máximo o un mínimo, y si éste da la respuesta requerida en el problema.

Ejemplos

1. Se dispone de 100m. lineales de tela de alambre, para cercar un terreno de forma rectangular. Hallar las dimensiones del terreno que se puede delimitar de manera que su área sea máxima.

Solución:

Hagamos un dibujo que nos ayude a plantear el problema.



Paso 1: Determinar la función.

Sea A el área del terreno rectangular x el largo y y el ancho, en este caso:

$$A = xy$$

es el área que deseamos que sea máxima.

Como la longitud de la tela de alambre es de 100 m , el perímetro del terreno es:

$$2x + 2y = 100.$$

De donde,

$$\begin{aligned} x + y &= 50 \\ y &= 50 - x . \end{aligned}$$

Sustituimos el despeje de y en la función del área, así:

$$\begin{aligned} A &= x(50 - x) \\ &= 50x - x^2 . \end{aligned}$$

Esta es la función que vamos a analizar.

Paso 2: Calculamos la primera derivada y hallamos los valores críticos.

$$A' = 50 - 2x .$$

$$50 - 2x = 0$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-50}{-2} \\ &= 25 . \end{aligned}$$

$x = 25$ es el valor crítico.

Paso 3: Usaremos el criterio de la primera derivada, para determinar si el valor crítico es un máximo o un mínimo.

Si $x < 25$, entonces:

$$A'(24) = 50 - 2(24) = 50 - 48 = 2 > 0 .$$

Si $x > 25$, entonces:

$$A'(26) = 50 - 2(26) = 50 - 52 = -2 < 0\,.$$

Así, como A' va de $+$ a $-$, la función tiene un máximo cuando $x = 25$.

Sustituimos el valor de $x = 25$ en $y = 50 - x$, así:

$$y = 50 - 25 = 25$$

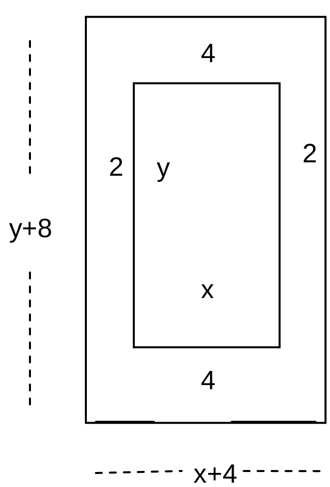
$$A = (25)(25)m^2 = 625m^2\,.$$

Conclusión

Entonces el rectángulo de área máxima con un perímetro de 100m, es un cuadrado de 25m, por lado y el área es de 625m^2.

2. Una hoja de papel debe tener 648 centímetros cuadrados de impresión con un margen de 4 centímetros arriba y abajo y 2 centímetros de margen a los lados. ¿Qué dimensiones debe tener la hoja para que el gasto de papel sea el menor posible?

Solución



Paso 1:

Sea x el ancho y y la altura del área impresa, entonces:

$$xy = 648\ cm^2 \text{ despejando } y,$$

$$y = \frac{648}{x}.$$

Considerando la información de los márgenes, el área de la hoja que se quiere minimizar es:

$$\begin{aligned} A &= (x+4)(y+8) \\ &= xy + 8x + 4y + 32. \end{aligned}$$

Sustituimos el valor de y, para tener la función en términos de x:

$$\begin{aligned} A &= x\left(\frac{648}{x}\right) + 8x + 4\left(\frac{648}{x}\right) + 32 \\ &= 648 + 8x + \frac{2592}{x} + 32 \\ &= \frac{2592}{x} + 8x + 680. \end{aligned}$$

Esta es la función que vamos a analizar.

Paso 2: Calculamos A' y los valores críticos.

$$A' = \frac{-2592}{x^2} + 8.$$

$$\frac{-2592}{x^2} + 8 = 0$$

$$\frac{-2592}{x^2} = -8$$

$$\frac{-2592}{-8} = x^2$$

$$x^2 = 324.$$

Los valores críticos son: $x = 18$ y $x = -18$.

Como x es una medida de longitud, el valor de $x=-18$ no es factible, por lo tanto, el único valor crítico es $x=18$.

Paso 3: Usaremos el criterio de la segunda derivada.

Calculamos A'':

$$A''=\frac{5184}{x^3},$$

ahora evaluamos $x=18$,

$$A''=\frac{5184}{(18)^3}=\frac{5184}{5832}=0.88>0\,.$$

De acuerdo al criterio de la segunda derivada, la función tiene un mínimo cuando $x=18$.

Si $x=18$ sustituimos en $y=\dfrac{648}{x}$, así:

$$y=\frac{648}{18}=36\,.$$

Por lo tanto las dimensiones de la hoja son de:

$$x+4=18+4=22\,.$$

$$y+8=36+8=44\,.$$

Conclusión

El área impresa es de 18 cm de ancho por 36 cm de alto.

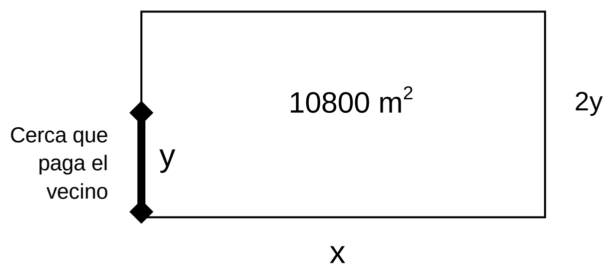
Las dimensiones de la hoja en la que se usará la menor cantidad de papel son:

22 cm de ancho y 44 cm de alto.

3. Una huerta rectangular de 10800 m^2 colinda con el terreno de un vecino. Si el vecino paga la mitad de la cerca que comparten, ¿cuáles deben ser las dimensiones de la huerta para que el dueño gaste lo menos posible en cercarla?

Si el metro lineal de cerca cuesta 55 pesos, ¿cuánto gasta el dueño de la huerta en cercarla?

Solución:



Sea x el ancho del terreno y y el largo.

El área del terreno es:

$$xy = 10800m^2$$

despejando y, tenemos,

$$y = \frac{10800}{x}.$$

Ahora, para cercar el terreno calcularemos el perímetro.

$$P = 2x + 4y.$$

Pero como el vecino pagará la mitad de la cerca que comparten, entonces, el dueño de la huerta debe cubrir:

$$F = 2x + \frac{3}{2}y.$$

Sustituyendo el valor de y, en ésta función:

$$\begin{aligned} F &= 2x + \frac{3}{2}\left(\frac{10800}{x}\right) \\ &= 2x + \frac{16200}{x}. \end{aligned}$$

Esta es la función que se debe analizar.

Ahora, calculamos la derivada .

$$F' = 2 - \frac{16200}{x^2}.$$

Para hallar los valores críticos:

$$2 - \frac{16200}{x^2} = 0$$

$$2 = \frac{16200}{x^2}$$

$$x^2 = \frac{16200}{2}$$

$$x^2 = 8100 .$$

Los valores críticos son: $x = 90$ y $x = -90$.

Dado que x es una medida de longitud, $x = -90$ no es un valor posible, y el único valor crítico es $x = 90$.

Usando el criterio de la segunda derivada, determinaremos si el valor crítico es un máximo o un mínimo.

$$F'' = \frac{32400}{x^3}.$$

$$F'' = \frac{32400}{(90)^3} = 0.044 > 0 .$$

Por lo que la función tiene un mínimo cuando $x = 90$.

Ahora, si $x = 90$, entonces:

$$y = \frac{10800}{x} = \frac{10800}{90} = 120 .$$

Sustituimos x y y en $F = 2x + \frac{3}{2}y$,

$$2(90) + \frac{3}{2}(120) = 180 + 180 = 360.$$

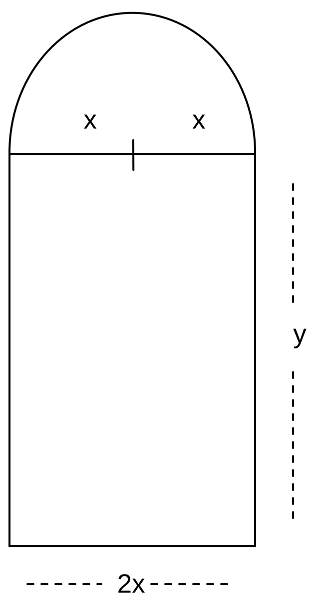
Conclusión

Las dimensiones de la huerta son 90 m. de ancho y 120 m. de largo.

El dueño de la huerta comprará 360 metros de cerca, y gastará $360(55) = 19800$ pesos en cercarla.

4. En una Iglesia, sea desea construir un vitral en forma de rectángulo coronado por un semicírculo. Si el perímetro del vitral está limitado a 24 metros. ¿Qué dimensiones deberá tener para que el vitral permita entrar la mayor cantidad de luz?

Solución:



Sean x el radio del semicírculo, y y la altura de la parte rectangular.

Recordemos que el perímetro del círculo de radio r es: $P = 2\pi r$,

y el área es: $A = \pi r^2$, sustituyendo el radio r por x, tendremos que:

El perímetro del semicírculo es $P = \pi x$.

El perímetro del lado rectangular es $P = 2x + 2y$.

Entonces, el perímetro del vitral es:

$$2y + 2x + \pi x = 24.$$

Despejando a y:

$$y = \frac{24 - 2x - \pi x}{2}.$$

El área del vitral se expresa como:

$$A = 2xy + \frac{\pi x^2}{2}.$$

Sustituyendo el valor de y:

$$A = 2x\left(\frac{24 - 2x - \pi x}{2}\right) + \frac{\pi x^2}{2} = 24x - 2x^2 - \pi x^2 + \frac{\pi x^2}{2}$$

$$= 24x - x^2\left(2 + \pi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 24x - x^2\left(2 + \frac{\pi}{2}\right).$$

Calculamos A' y los valores críticos.

$$A' = 24 - 2x\left(2 + \frac{\pi}{2}\right) = 24 - 4x - \pi x$$

$$= 24 - x(4 + \pi).$$

Para encontrar los valores críticos:

$$24 - x(4 + \pi) = 0$$

$$x = \frac{24}{4 + \pi}.$$

Usando el criterio de la segunda derivada:

$$A'' = -(4+\pi).$$

Como la segunda derivada es una constante con valor negativo, podemos concluir que la función tiene un máximo.

Por lo tanto, la función tiene un máximo en $x = \dfrac{24}{4+\pi}$.

Conclusión

Las dimensiones del vitral que admiten la mayor cantidad de luz son:

- Radio de la parte semicircular.

$$x = \frac{24}{4+\pi} \cong 3.36 \text{ metros.}$$

- Para calcular la altura de la parte rectangular, sustituimos x en y:

$$y = \frac{24 - 2\left(\dfrac{24}{4+\pi}\right) - \pi\left(\dfrac{24}{4+\pi}\right)}{2} = \frac{24(4+\pi) - 48 - 24\pi}{2(4+\pi)}$$

$$= \frac{96 + 24\pi - 48 - 24\pi}{2(4+\pi)}$$

$$= \frac{24}{4+\pi}.$$

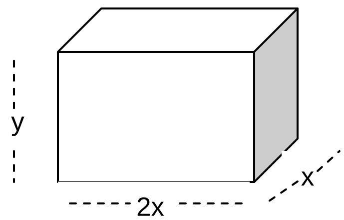
Por lo tanto, la altura es de

$$y = \frac{24}{4+\pi} \cong 3.36 \text{ metros.}$$

De donde se concluye que la altura del rectángulo es igual al radio del semicírculo.

5. Una caja cerrada de base rectangular cuyo largo es el doble del ancho tiene un área total de 432 cm^2. ¿cuáles serán sus dimensiones para lograr un volumen máximo?

Solución:



Sean x el ancho, $2x$ el largo y y la altura de la caja.

Ahora calculamos el área de cada cara de la caja.

$$A_{\text{base}} = (x)(2x) = 2x^2 .$$

$$A_{\text{tapa}} = (x)(2x) = 2x^2 .$$

$$A_{\text{lados frontales}} = 2(2x)(y) = 4xy .$$

$$A_{\text{lados laterales}} = 2(x)(y) = 2xy .$$

Área total:

$$\begin{aligned} A &= 2x^2 + 2x^2 + 4xy + 2xy \\ &= 4x^2 + 6xy . \end{aligned}$$

Entonces, según los datos del problema:

$$4x^2 + 6xy = 432$$

Despejando y:

$$\begin{aligned} y &= \frac{432 - 4x^2}{6x} \\ &= \frac{216 - 2x^2}{3x} . \end{aligned}$$

El volumen de la caja es $V = (\text{área de la base})(\text{altura})$

$$V = 2x^2 y$$

Sustituimos el valor de y, entonces

$$\begin{aligned} V &= 2x^2\left(\frac{216-2x^2}{3x}\right) \\ &= \frac{2x}{3}\left(216-2x^2\right) \\ &= 144x - \frac{4}{3}x^3 \ . \end{aligned}$$

Es la función que se va a analizar.

Ahora calculamos la primera derivada:

$$V' = 144 - 4x^2 \ .$$

Para obtener los valores críticos, igualamos a cero, entonces:

$$144 - 4x^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{-144}{-4} = 36.$$

Los valores críticos son: $x = 6$ y $x = -6$.

Por ser x una medida de longitud, descartamos el valor negativo, entonces el valor crítico factible es $x = 6$.

Usamos el criterio de la segunda derivada para determinar si el valor crítico es máximo o mínimo.

$$V'' = -8x.$$

Sustituyendo el valor crítico:

$$V''(6) = -8(6) = -48 < 0 \ .$$

Como el valor es negativo, entonces la función tiene un máximo cuando $x = 6$.

Conclusión

Las dimensiones de la caja con el máximo volumen son:

- Ancho $x = 6$.
- Largo $2x = 2(6) = 12$.
- Alto $y = \dfrac{216 - 2(6)^2}{3(6)} = \dfrac{216 - 72}{18} = 8$.
- Volumen $V = 2x^2 y = 2(6)^2(8) = 576 \text{ cm}^3$.

Ejercicios

Plantea y resuelve los siguientes problemas de máximos y mínimos.

1. Un lado de un campo rectangular está adyacente a un río. Para los otros tres lados se dispone de 240 m. de cerca. ¿Cuáles son las dimensiones para que el área sea máxima?

2. Una hojalata rectangular mide 8 dm. por 5 dm. Se va a fabricar una caja abierta cortando cuadrados iguales en cada esquina y doblando hacia arriba los lados. Calcula las dimensiones de la caja de mayor volumen que se puede fabricar.

3. La suma del área lateral y el área de la base de un bote cilíndrico es de 588 cm^2. Hallar el radio de la base y la altura, si el volumen es máximo.

4. Hallar dos números cuya suma es 12 y el producto de un número por el cuadrado del otro es máximo.

5. Hallar dos números cuya suma es 36, y el producto de un número por el cubo del otro es máximo.

6. Un terreno rectangular que tiene 25,000 m^2 se va a cerrar y dividir en 4 lotes por cercas paralelas a uno de los lados. ¿Qué dimensiones del campo permitirán utilizar un mínimo de cerca?

7. De una larga pieza de lámina galvanizada de 51.5 cm. de ancho, se va a hacer un canalón para que conduzca agua. Doblando hacia arriba las orillas del largo hasta formar ángulos rectos. Encuentra las medidas del ancho y la altura del canalón que permita que fluya el mayor volumen de agua.

8. Un arquitecto desea diseñar una ventana de tal manera que la parte inferior sea rectangular y la superior sea un triángulo equilátero. Si la ventana tiene un área de 3 m^2 .¿Cuáles deben ser las dimensiones para que el perímetro sea el menor posible?

9. Cada una de las páginas de un libro debe tener 600 cm^2 de área, con márgenes de 2 cm. a los lados y 3 cm. arriba y abajo. Encuentra las dimensiones de la página que permitan la mayor área impresa.

10. Una fábrica puede producir 25 artículos por semana. La experiencia muestra que se pueden vender x artículos por semana al precio de y dólares cada uno, donde $y = 110 - 2x$ y el costo de producir x artículos es de $600 + 10x + x^2$ dólares. ¿Cuántos artículos por semana debería producir la fábrica para obtener la mayor ganancia?

Sugerencia: usar la fórmula de: ganancia = ingreso - costo.

CONCLUSIONES

A pesar de las diferentes reformas curriculares y pedagógicas, el aprendizaje de las matemáticas sigue siendo problemático en los diferentes niveles educativos, específicamente en el nivel educativo que aborda este trabajo, el nivel medio superior. Uno de los aspectos problemáticos a los que nos referimos es, el alto índice de reprobación que hay en los distintos cursos de matemáticas, que se asocian con la experiencia generalizada de que “las matemáticas son difíciles”.

Generalmente la enseñanza de las matemáticas se aborda como una mera aplicación de conceptos, desarticulados e inconexos, sin retomar los fundamentos matemáticos, se impone un proceso mecánico y por tanto se fuerza al alumno a confiar en la memoria antes que en la comprensión. A pesar de que la estructura curricular va incorporando durante este proceso de enseñanza-aprendizaje las diferentes áreas de las matemáticas: álgebra, geometría, trigonometría y el desarrollo de las funciones, los alumnos no logran integrar en el proceso de qué manera se aplican o cómo se relacionan entre sí.

En este trabajo hemos presentado una propuesta de reestructuración para el curso de Cálculo Diferencial, en donde hemos planteado modificar la presentación de los temas del curso, esto es, damos una introducción a los contenidos básicos de álgebra y un repaso general de las funciones: su dominio y gráfica, así como sus operaciones elementales; posteriormente se abordan los límites: sus propiedades, los límites directos y los que presentan una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$; por último abordamos las derivadas: su definición, interpretación geométrica, las fórmulas de derivación y la aplicación de las derivadas en el cálculo de los máximos y mínimos. Con esta reestructuración los estudiantes puedan trabajar el cálculo teniendo presentes las herramientas elementales del álgebra y las funciones, que son los conocimientos previos en los que se apoya el Cálculo.

Esta propuesta que he presentado, ha surgido a partir de la experiencia de trabajo con los alumnos, y aún cuando no faltan alumnos reprobados en los cursos, también nos encontramos con diferencias cualitativas en la forma en que los alumnos entienden las matemáticas y se perciben frente a ellas. Ya que la forma en que se presenta el curso les da la oportunidad de trabajar con los conceptos matemáticos, no desde la mecanización de procedimientos sino desde la comprensión de los temas que se presentan.

Por otra parte, el profesor que imparte el curso también encuentra un beneficio al dar un tiempo para contextualizar a sus alumnos en los conocimientos previos. La forma en la que trabaja el profesor es diferente, ya que da a sus alumnos un ritmo y un estilo de trabajo en cuanto a la forma de desarrollar los temas; así como la oportunidad para desarrollar habilidades, por medio de la práctica que se da en cada tema con los ejercicios que se proponen, en donde el nivel de complejidad es acorde al que se presenta en los ejemplos, y los ejercicios tienen diferentes grados de dificultad.

En mi experiencia cuando se aborda el curso sin este contexto, el profesor se ve enfrentado a un grupo de estudiantes que desconocen o no recuerdan cómo simplificar, o graficar, o incluso interpretar la simbología (por ejemplo en el caso de los intervalos) que requieren los temas del Cálculo, teniendo como consecuencia grupos apáticos o indiferentes a la clase y por lo tanto un enorme índice de reprobación.

¿Cuáles son las dificultades a las que se enfrenta esta propuesta de reestructuración?

Me parece que principalmente son tres:

- ✓ En primer lugar, está el tiempo que se destina en cada escuela al curso de Cálculo, ya que el programa de la SEP está diseñado para 48 horas, y esta propuesta de reestructuración requiere de tiempo para que los alumnos trabajen y practiquen los temas que se abordan. Si se diera el curso en 5 horas a la semana, es decir 1 hora diaria, tendríamos un curso de 80 horas por lo menos, prácticamente el doble del tiempo propuesto.

- ✓ En segundo lugar, está la disposición de los profesores para dar el tiempo necesario en retomar los conocimientos previos, y ajustar el orden en el que se presentan los temas. Generalmente éstos tienen que dar el curso a partir de los programas de estudio, con una lista de contenidos a cubrir en un tiempo específico, donde los conocimientos previos entran en la categoría de lo que los estudiantes “deberían saber”.

- ✓ Finalmente, en el caso de las escuelas particulares, es muy importante la disposición que tenga o no la dirección académica de la escuela para dar más tiempo para el curso de cálculo, así como entender los beneficios del ajuste temático.

Por último hay que decir que dado que el curso de Cálculo esta dividido en dos semestres, esta propuesta para reestructurar el curso de Cálculo Diferencial, implica una reestructura para el siguiente curso que es el de Cálculo Integral. De hecho los temas que quedaron pendientes: el análisis de funciones y los límites infinitos, se abordan al inicio del curso de Cálculo Integral, porque es entonces que los alumnos han desarrollado ya una metodología y comprensión de los fundamentos del cálculo diferencial, posteriormente se trabaja con las diferenciales y los métodos de integración. De esta forma se completa el curso de cálculo en el bachillerato, donde se han dado las bases teóricas y metodológicas que se ampliarán, profundizarán y especializarán dependiendo de las distintas áreas de conocimiento que los alumnos elijan al entrar a la licenciatura.

BIBLIOGRAFÍA

Anfossi, Agustín, Flores Meyer, M.A., *Cálculo Diferencial e Integral. Para Preparatoria*, Editorial Progreso, 1954, 304 p.

Apostol, Tom M., *Calculus. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal*, Vol I, Barcelona, Editorial Reverté, 1982, 813 p.

Ayres, Frank Jr., Mendelso, Elliott, *Cálculo Diferencial e Integral*, México, McGraw-Hill, 1990, 571 p.

Bernal Argüello, Arnoldo, *Cálculo Diferencial*, México, Editorial Wiltees, 2007, 235 p.

Bosch G., Carlos, Guerra T., Manuel, Hernández G., Carlos, De Oteyza D., Elena, *Cálculo Diferencial e Integral*, México, Publicaciones Cultural, 2003, 328 p.

Carpinteyro V., Eduardo, Sánchez H., Rubén B., *Álgebra*, México, Publicaciones Cultural, 2003, 621 p.

Carreño C., Ximena, Cruz S., Ximena, *Álgebra*, México, Publicaciones Cultural, 2003, 586 p.

Cuéllar Carvajal, Juan Antonio, *Matemáticas IV. Relaciones y Funciones*, México, McGraw-Hill, 2006, 359 p.

--------- , *Matemáticas V. Cálculo Diferencial*, México, McGraw-Hill Interamericana, 2007, 267 p.

Cuevas V., Carlos, Mejía V., Hugo R., *Cálculo Visual*, México, Oxford University Press, 2003, 293 p.

De Oteyza De Oteyza, Elena, Lam O., Emma, Hernández G., Carlos, Carrillo H., Ángel M., *Álgebra*, México, Pearson Educación, 2003, 430 p.

--------- *Conocimientos Fundamentales de Matemáticas. Cálculo Diferencial e Integral*, México, Pearson Educación, 2006, 420 p.

Fuenlabrada de la Vega Trucíos, Samuel, *Cálculo Diferencial*, México, McGraw-Hill Interamericana, 2004, 238 p.

García L., Miguel A., Rodríguez L., Manuel, *Matemáticas 4. Funciones. Bachillerato*, México, ST Editorial, 2005, 247 p.

González Cabrera, Víctor M., *Cálculo 4000. Problemas con respuestas*, México, Editorial Progreso, 1997, 304 p.

Granville, William Anthony, *Cálculo Diferencial e Integral*, México, Editorial LIMUSA, 1996, 686 p.

Ibañez C., Patricia, García T., Gerardo, *Matemáticas IV. Precálculo*, México, Editorial Thomson, 2006, 270 p.

---------- , *Matemáticas V. Cálculo Diferencial*, México, Editorial Thomson, 2007, 238 p.

Krantz, Steven G., *Cálculo*, México, McGraw-Hill Interamericana, 2006, 261 p.

Leithold, Louis, *Álgebra y Trigonometría. Con Geometría Analítica*, México, Oxford University Press, 1994, 899 p.

----------- , *El Cálculo*, México, Oxford University Press, 1998, 1360 p.

----------- , *Matemáticas previas al Cálculo. Funciones, Gráficas y Geometría Analítica*, México, Oxford University Press, 1998, 907 p.

Méndez Hinojosa, Arturo, *Matemáticas 4*, México, Editorial Santillana, 2007, 231 p.

Mérida L., Adalberto, Ramírez V., Óscar S., *Matemáticas V y VI. Cálculo Diferencial e Integral*, México, Pearson Educación, 2004, 240 p.

Orduño Vega, Hipólito, *Cálculo Diferencial*, México, Fondo de Cultura Económica/DGETI/SEP, 2002, 168 p.

Ortiz Campos, Francisco J., *Cálculo Diferencial. Bachillerato general*, México, Publicaciones Cultural, 2006, 320 p.

---------- , *Matemáticas IV. Funciones*, México, Publicaciones Cultural, 2006, 250 p.

Pimienta P., Julio H., Iglesias M., Rigoberto, *Matemáticas IV. Un Enfoque Constructivista*, México, Pearson Educación, 2007, 248 p.

Pita Ruiz, Claudio, *Cálculo de una Variable*, México, Prentice Hall Americana, 1998, 891 p.

Ruiz Basto, Joaquín, Matemáticas IV. *Precálculo: Funciones y Aplicaciones. Bachillerato General*, México, Publicaciones Cultural, 2006, 141 p.

Salas, Hille, Etgen, *Calculus. Una y Varias Variables*, Volumen I, España, Editorial Reverté, 2005, 708 p.

Salazar Guerrero, Ludwing, *Álgebra*, México, Publicaciones Cultural, 2006, 342 p.

--------- , Bahena R., Hugo, Vega H., Francisco, *Cálculo Diferencial*, México, Grupo Editorial Patria, 2007, 292 p.

Smith, Robert T., Minton, Roland B., *Cálculo Diferencial e Integral*, México, McGraw-Hill Interamericana, 2000, 423 p.

Stewart, James, *Cálculo. Conceptos y Contextos*, México, International Thomson Editores, 1998, 991 p.

---------- , *Cálculo. Trascendentes Tempranas*, México, International Thomson Editores, 1998, 663 p.

---------- , *Cálculo Diferencial e Integral*, México, International Thomson Editores, 1998, 587 p.

---------- , Redlin, Lothar, Watson, Saleem, *Precálculo. Matemáticas para el cálculo*, México, International Thomson Editores, 2001, 777 p.

Sullivan, Michael, *Precálculo*, México, Prentice-Hall Hispanoamericana, México, 1997, 842 p.

Zamarrón de Campos, Lucía, *Matemáticas. Cuarto curso. Enfoque Constructivista*, México, Editorial Global Educational Solutions, 2006, 147 p.