DIGRESIONES EN TORNO A UN PROBLEMA DE DIOFANTO

J. BABINI

Buenos Aires, Argentina

El problema VI, 6 de la Aritmética de Diofanto exige determinar un triángulo rectángulo, de lados racionales, conociendo la suma del área y uno de sus catetos. Si *x*, *y*, *z* son los catetos e hipotenusa del triángulo desconocido y *a* la suma conocida del problema, con los símbolos actuales, consiste en resolver el sistema indeterminado $x (y+2) = 2a$; $x^2 + y^2 = z^2$; cuya indeterminación queda sin embargo muy limitada al exigir, como es el caso de la aritmética griega, que las soluciones sean exclusivamente números racionales positivos.

Por supuesto que, aun con esta limitación, el sistema puede admitir varias y hasta infinitas soluciones, pero entre los antiguos tal posibilidad no era encarada y, obtenida una solución, implícitamente la cuestión estaba terminada.

El sistema que resuelve el problema de Diofanto conduce a una ecuación de cuarto grado, lo que no deja de ser una dificultad aun hoy; que Diofanto obvia ingeniosamente al introducir implícitamente hipótesis simplificadoras que le permiten alcanzar una solución particular. Para ello toma como nueva incógnita la razón entre ambos catetos y, mediante transformaciones adecuadas entre ellas la descomposición de un producto en diferencia de cuadrados, da como solución, para el caso concreto de su problema en el cual $a = 7$; $x\ 7/4$; $y = 6$; $z = 25/4$. En forma semejante resuelve el problema en el cual, en lugar de la suma, se da la diferencia entre el área y un cateto.

La primera observación que despierta este problema es su carácter absurdo desde el punto de vista geométrico, ya que no tiene sentido sumar áreas con longitudes, circunstancia que demuestra que el interés del problema no es geométrico sino aritmético o, si se acepta el anacronismo, algebraico. En este sentido no deja de ser sintomático descubrir que igual de absurdo aparece en tablillas matemáticas de los babilonios, donde se resuelven problemas como el siguiente: calcular el largo, el ancho y el área de un rectángulo, conociendo la suma de los lados y la suma del área más el exceso del largo sobre el ancho. Claro que ahora se trata de un problema determinado de segundo grado, pero la semejanza del planteo es significativa, así como lo es el hecho de que el matemático babilonio, al transformar el problema en uno de los casos típicos: calcular dos números conociendo su suma (o su diferencia) y el producto, reduce el problema a la resolución de una ecuación cuadrática de acuerdo con la regla que un par de milenios más tarde utilizarán los árabes, y en la cual juega su papel la descomposición de un producto en diferencia de cuadrados.

La influencia que, en este tipo de problemas, los matemáticos babilonios ejercieron sobre Diofanto, éste la trasmitió a los matemáticos medievales, en especial a Fibonacci del siglo XIII, algunas de cuyas cuestiones se vinculan con el problema de marras.

En efecto, si para resolver el problema de Diofanto se acude a los "tripletes pitagóricos", es decir a la terna de números racionales que satisfacen a la ecuación pitagórica $x^2 + y^2 = z^2$; tripletes que los babilonios y por supuesto Diofanto conocían, y que pueden expresarse en la forma $x = 2mn$; $y = m^2 — n^2$; $z = m^2 + n^2$, el problema se reduce a encontrar los valores racionales de *m* y *n* que satisfacen a la ecuación de cuarto grado $mn (m^2 — n^2 + 2) = a$. Ahora bien, Fibonacci dedicó todo un escrito: el *Libro de los cuadrados*, a una expresión semejante, que utilizó para resolver, entre otras cuestiones, uno de los tres problemas que, a modo de desafío, le propuso el Maestro Teodoro, matemático de la corte de Federico II. Ese problema era: determinar un número cuyo cuadrado, al sumarle o restarle 5, el resultado sea siempre un cuadrado.

Para resolver la cuestión Fibonacci acude a la siguiente propiedad de los triángulos rectángulos, consecuencia del teorema de Pitágoras: si al cuadrado de la hipotenusa se le suma o se le resta el cuádruplo del área, el resultado es siempre un cuadrado; es decir, algebraicamente, $z^2 \pm 2xy = (x \pm y)^2$, de ahí que, utilizando los tripletes, se llega a esta identidad, que a veces toma el nombre de Fibonacci: $(m^2 + n^2)^2 \pm 4mn\ (m^2 — n^2) = (m^2 — n^2 \pm 2mn)^2$; y por tanto bastará encontrar los valores de *m* y *n* tales que el segundo término sea 5 para resolver la cuestión. Fibonacci demuestra que no existen valores enteros de *m* y *n* que cumplan con esa condición, de ahí que admita una solución fraccionaria, y da con ella; en efecto, si al cuadrado de 41/12 se le suma o se le resta 5, los resultados son los cuadrados de 49/12 y 31/12, respectivamente. Agreguemos que Bahá al-din, matemático árabe del siglo XVI, incluye en una serie de cuestiones que reputa insolubles, un problema semejante: buscar un número tal que si a su cuadrado se le suma o se le resta el mismo número aumentado de dos unidades, los resultados sean siempre cuadrados. Es posible que Fibonacci, con su identidad, lo hubiese resuelto, pues tiene solución; en efecto, si al cuadrado de 34/15 se le suma o se le resta 64/15 se obtienen, respectivamente, los cuadrados de 46/15 y 14/45.

Cabe agregar que la propiedad geométrica que utilizó Fibonacci pare resolver el problema propuesto por el Maestro Teodoro, figura también en Diofanto, quien la emplea en la solución del problema III, 10 de su colección: determinar cuatro números tales que el cuadrado de su suma siga siendo un cuadrado al sumarle cada uno de esos números. En virtud de la propiedad geométrica citada, es claro que si se tienen cuatro triángulos rectángulos de igual hipotenusa, los resultados de sumar cada uno de los números que miden el cuádruplo de su área con el cuadrado de la hipotenusa, serán números cuadrados; un factor de proporcionalidad permitirá luego lograr que en lugar del cuadrado de la hipotenusa se obtenga el cuadrado de la suma de los cuatro números. El problema consiste pues en obtener cuatro triángulos rectángulos de igual hipotenusa, cosa que Diofanto consigue utilizando la clásica identidad que permite descomponer, de dos maneras distintas, el producto de dos sumas de dos cuadrados en suma de dos cuadrados; y por tanto, partiendo de dos triángulos rectángulos cualesquiera x, y, z; x', y', z', los cuatro triángulos de catetos xz', yz'; x'z, y'z; xx' + yy', xy' — x'y; xx' — yy', xy' + x'y, tienen por hipotenusa zz'.

Es posible que, en este problema de Diofanto, se inspirara el hindú Brahmagupta del siglo VII para obtener un cuadrilátero inscriptible de lados, diagonales y área racionales, pues adosando los catetos comunes de los cuatro triángulos rectángulos de lados xx', yx', zx'; xx', xy', xz'; yy', xy', zy'; yy', yx', yz' obtiene un cuadrilátero de lados racionales: las cuatro hipotenusas, y de diagonales racionales: xy' + x'y; xx' + yy' que, por resultar perpendiculares entre sí, su semiproducto es el área del cuadrilátero.

Todas las cuestiones anteriores se refieren a expresiones algebraicas cuadráticas, cuya traducción geométrica compone esencialmente el Libro II de los *Elementos* de Euclides, que el historiador de la matemática Zeuthen calificó de "álgebra geométrica". Esta expresión de Zeuthen, al hacer referencia al álgebra en una obra griega, pudo parecer anacrónica, aunque más bien ha resultado profética, pues mucho antes de Euclides el álgebra había asomado en los problemas que figuran en las tablillas matemáticas de los babilonios descifradas este siglo. Actualmente no se desvinculan totalmente las especulaciones geométricas de los griegos de los problemas aritméticos de los antiguos babilonios, aunque es posible que en ambos casos el pensamiento matemático haya seguido direcciones opuestas.

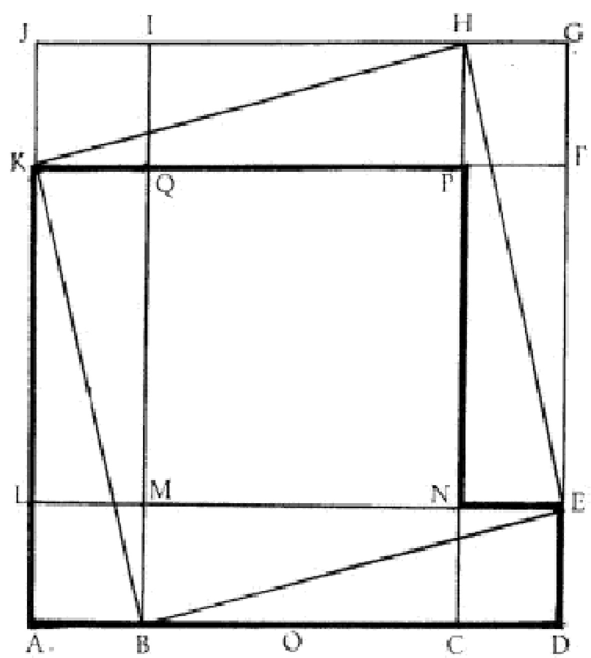

Fig. 1.

Mientras los griegos, ante el fracaso experimentado frente al "escándalo de los irracionales", abandonaron todo intento de continuar con las investigaciones de teoría de números, iniciadas por los pitagóricos, y se apoyaron exclusivamente en el terreno más seguro de la geometría; los babilonios, interesados en problemas aritméticos, tradujeron en números las propiedades empíricas que le ofrecían las figuras concretas.

Sin entrar en la discusión de aquella vinculación, veamos, a modo de ejemplo, el fundamento aritmético de la "álgebra geométrica".

Sean dos números representados por los segmentos AC y AB (ver figura 1). Si CD = AB, los segmentos AD y BC representan la suma y la diferencia, respectivamente, de esos números. Como la figura admite un centro de simetría en O, los segmentos AO = OD y BO = OC representarán, respectivamente, la semisuma y la semidiferencia de los números, y de ahí que el número mayor AC = AO + OC es la semisuma más la semidiferencia, mientras que el menor AB = AO — BO es la semisuma menos la semidiferencia, primeras y las más simples propiedades entre dos números, su suma y su diferencia.

Si de los segmentos se pasa a los cuadrados, o de los números a sus cuadrados, la simple inspección de la figura permite deducir los resultados escolares del cuadrado de la suma o diferencia de dos números, como suma de los cuadrados más o menos el doble producto; asimismo, que si al cuadrado ADGJ de la suma de dos números se le resta el cuadrado MNPQ de su diferencia, se obtienen cuatro rectángulos (los dibujados en la figura con una de sus diagonales), es decir el cuádruplo del producto de los números, lo que equivale, tomando la cuarta parte, a que el producto de dos números es la diferencia entre los cuadrados de la semisuma y de la semidiferencia de esos números, propiedad que utilizan los babilonios en su resolución de la ecuación cuadrática como búsqueda de dos números conociendo su producto y su suma o su diferencia, mientras que en los *Elementos* de Euclides aquella resolución aparece disfrazada y poco reconocible en los llamados problemas de aplicación de áreas. Agreguemos que también en la figura puede verse la justificación geométrica de la regla que expone Al-Khuwarismi, del siglo IX, en la más antigua álgebra árabe pare resolver la ecuación cuadrática; por ejemplo en el caso, con nuestros símbolos, $x^2 + px = q$. Si se supone que la incógnita es x = ME y a su cuadrado MEGI se le adosan los dos rectángulos iguales BDEM y LMIJ, de lados x y $1/2p$, la figura resultante tendrá por área $x^2 + px$, es decir el valor conocido q; por tanto, si a esa figura se le agrega el cuadrado ABML $=1/4\ p^2$ se obtiene el cuadrado ADGJ de valor conocido $1/4p^2 + q$, cuyo lado es $x + 1/2p$; de ahí la regla para obtener x, que no es sino la expresión de nuestra fórmula actual para la raíz positiva.

En la figura 1 las diagonales de los rectángulos son las hipotenusas de los triángulos rectángulos de catetos AC y AB; BEHK es por tanto su cuadrado; una simple observación comprueba la propiedad geométrica antes citada si al cuadrado de la hipotenusa se suman o se restan cuatro triángulos se obtienen cuadrados: en la figura los cuadrados de lados AD y MN, respectivamente.

También, siguiendo una demostración de Tabit ben Qurra, árabe del siglo IX, puede deducirse de la figura el teorema de Pitágoras, basta pare ello desplazar en el cuadrado BEHK los triángulos NEH y KPH, respectivamente, hasta ABK y BDE, y obtener así la figura equivalente, de contornos gruesos, que no es sino la suma de los cuadrados ACPK y CDEN de los catetos.

Por último si, con el objeto de que también el área de los rectángulos iguales al ACNL sea un número cuadrado, se expresan sus lados con números cuadrados AC = m^2; AL = n^2, la propiedad citada, según la cual la diferencia entre los cuadrados de lados AD y MN equivale a cuatro rectángulos de lados AC y AL, se expresaría $(m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2)^2 + 4\ m^2\ n^2$ que, al compararse con el teorema de Pitágoras, permite deducir los valores de los "tripletes pitagóricos".

Volvamos, para terminar, al problema de Diofanto del cual partimos. Si se estudia en general mediante adecuadas sustituciones, se llega a una ecuación de cuarto grado que para valores particulares de los parámetros, en cuatro casos se reduce a lineal; de ahí cuatro soluciones racionales del problema para cualquier valor de *a*; de las cuales dos dan valores positivos de las incógnitas para *a* > 1, mientras las otras dos nos dan para *a* < 1. Señalemos las dos soluciones para el caso de Diofanto (a = 7):

$x = \underline{2a}$, $y = a - 1$; $z = \underline{a^2 + 1}$ que, para a = 7, reproduce la solución de Diofanto; y a + 1 a + 1

$x = \frac{a^2 - 1}{2a}$; $y = 2\,\frac{a^2 + 1}{a^2 - 1}$; $z = \frac{a^4 + 6a^2 + 1}{2a\,(a^2 - 1)}$ que, para a = 7, ofrece una nueva solución:

$x = \frac{24}{7}$; $y = \frac{25}{12}$; $z = \frac{337}{84}$, solución que Diofanto probablemente ni imaginó.