

Geometría riemanniana

Héctor Sánchez Morgado
Oscar A. Palmas Velasco



Sin tratar de ser exhaustiva, esta obra presenta algunos de los conceptos y resultados básicos de la geometría riemanniana cubriendo los aspectos fundamentales de la teoría de las variedades y de haces, así como los tensores y las formas. Después de analizar el concepto de conexión y, en particular, el de conexión riemanniana, la obra concluye con un estudio de dos conceptos centrales en la geometría: la curvatura y las geodésicas de una variedad riemanniana.

La organización y distribución de los temas corresponde al programa oficial de la materia Geometría diferencial que se imparte en el posgrado en matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México; mucho material utilizado en esta obra fue probado y corregido gracias a la influencia y crítica que los propios alumnos de diversos cursos de topología y geometría generaron, convirtiéndola en un material que no sólo es útil a los alumnos de este posgrado, sino que lo será también en otros ámbitos universitarios.



HÉCTOR SÁNCHEZ MORGADO
ÓSCAR A. PALMAS VELASCO

GEOMETRÍA
RIEMANNIANA

FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM
2007



Geometría riemanniana

1ª edición, 2007

Diseño de portada: Laura Uribe

D.R.© Universidad Nacional Autónoma de México,
Facultad de Ciencias
Circuito exterior, Ciudad Universitaria
México 04510, D. F.
cse@ciencias.unam.mx

ISBN: 978-970-32-5228-2

Prohibida su reproducción total o parcial por cualquier medio sin la autorización escrita del titular de los derechos patrimoniales

Impreso y hecho en México

Al Dr. Guillermo Torres
In memoriam.

A Santiago López de Medrano
En su 65o. aniversario.

A nuestros maestros y alumnos, pasados y futuros,
Por su impulso e imaginación.

Prefacio

En esta obra reunimos algunos de los conceptos y resultados básicos de la geometría riemanniana. Sin tratar de ser exhaustivos, por el momento sólo señalaremos que cubrimos los aspectos fundamentales de la teoría de variedades y de haces, así como los tensores y las formas. Después de analizar el concepto de conexión y en particular el de conexión riemanniana, concluimos la obra con un estudio de dos conceptos centrales en la geometría, la curvatura y las geodésicas de una variedad riemanniana.

La organización y distribución de los temas obedeció, en un principio, al programa oficial de la materia Geometría Diferencial en el posgrado en matemáticas de nuestra Universidad. Es claro que escribimos este texto pensando en los alumnos de este posgrado, pero por supuesto deseamos fervientemente que nuestro trabajo trascienda a otros ámbitos.

Originalmente, el primero de los autores decidió reunir gran parte del material del programa citado y ponerlo a disposición de sus estudiantes. Los textos escritos por él forman la base de esta obra. Algunas de las secciones de los dos primeros capítulos se basan además en la tesis de licenciatura elaborada por el segundo autor con base en cursos impartidos por el Dr. Santiago López de Medrano.

A lo largo de los años, hemos utilizado gran parte del material en diversos cursos de geometría y topología, recibiendo una benéfica crítica e influencia por parte de nuestros alumnos, lo cual agradecemos profundamente.

Aprovechamos también para agradecer el apoyo de la Universidad por medio del proyecto PAPIME PE100405, del Comité Editorial de la Facultad de Ciencias, así como de la Coordinación de Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias a cargo de Mercedes Perelló para la conclusión de esta obra. Igualmente agradecemos la minuciosa revisión y atinados comentarios

del árbitro, al igual que el apoyo de Santiago Palmas para la elaboración de los dibujos presentes en este libro.

Finalmente y con el fin de mejorar las futuras versiones de esta obra, invitamos cordialmente a nuestros lectores a hacernos llegar sus críticas, comentarios y sugerencias, ya sea personalmente o por correo electrónico, lo cual agradecemos de antemano.

Héctor Sánchez Morgado
Instituto de Matemáticas, UNAM
hector@matem.unam.mx

Oscar A. Palmas Velasco
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
opv@hp.fciencias.unam.mx

Ciudad Universitaria, noviembre de 2007.

Índice general

Prefacio	v
Índice general	vii
1. Variedades diferenciables	1
1.1. Variedades diferenciables	1
1.2. El espacio tangente	5
1.3. El teorema del rango, inmersiones y encajes	15
1.4. Teorema de Whitney	22
1.5. Variedades con frontera	27
1.6. Campos vectoriales y flujos	30
1.7. La derivada de Lie, I	36
1.8. Ejercicios	39
2. Haces vectoriales	47
2.1. Haces de subespacios de \mathbb{R}^{n+k}	47
2.2. Haces vectoriales	51
2.3. Construcciones con haces. Cociclos	56
2.4. Orientabilidad	59
2.5. Transformaciones de haces	61
2.6. Haces de tipo finito	63
2.7. Ejercicios	65
3. Formas diferenciales e integración	69
3.1. Álgebra tensorial	69
3.2. La derivada de Lie, II	77

3.3. El álgebra exterior	79
3.4. Formas diferenciales	83
3.5. La derivada exterior	85
3.6. Cohomología de de Rham	90
3.7. Integración en cadenas	93
3.8. Integración en variedades	97
3.9. Ejercicios	104
4. Conexiones y curvatura	113
4.1. Conexiones en haces tangentes	113
4.2. Campos tangentes paralelos y geodésicas	119
4.3. Introducción al concepto de curvatura	126
4.4. Curvatura para haces vectoriales	130
4.5. Ejercicios	137
5. Geodésicas y campos de Jacobi	143
5.1. La transformación exponencial	143
5.2. Geodésicas y curvas minimizantes	149
5.3. Distancia y el teorema de Hopf-Rinow	151
5.4. Campos de Jacobi y puntos conjugados	156
5.5. La primera y segunda variaciones de la acción	160
5.6. Ejercicios	165
Bibliografía	169
Índice alfabético	171

CAPÍTULO 1

Variedades diferenciables

En este primer capítulo estudiaremos los objetos fundamentales con los que trabajaremos en el resto de la obra, las variedades y los conceptos básicos asociados a éstas, como los espacios tangentes y los campos vectoriales.

1.1. Variedades diferenciables

Primero impondremos la condición de que estos objetos sean parecidos a algún \mathbb{R}^n , por lo menos desde el punto de vista topológico.

Definición 1.1. Sea n un entero no negativo. Un *espacio localmente homeomorfo a \mathbb{R}^n* es un espacio topológico de Hausdorff M tal que cada punto tiene una vecindad homeomorfa a un abierto de \mathbb{R}^n . Si $U \subset M$ es abierto y $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo sobre un abierto de \mathbb{R}^n , la pareja (U, φ) se llama *carta de coordenadas*.

Observemos que el entero n de la definición está fijo. Si M es localmente homeomorfo a \mathbb{R}^n , diremos que n es la *dimensión* de la variedad M y escribiremos $n = \dim M$; también usaremos la notación M^n .

Puesto que cada una de las transformaciones $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo, podemos reformular la definición en términos de las transformaciones inversas $\varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow U$, por lo general llamadas *parametrizaciones*. Dejaremos que el lector proporcione los detalles de esta reformulación en los casos que considere necesarios.

Observemos también que un espacio localmente homeomorfo a \mathbb{R}^n hereda de manera automática las propiedades locales de la topología de \mathbb{R}^n ; por ejemplo, la compacidad local y la conexidad local, entre otras.

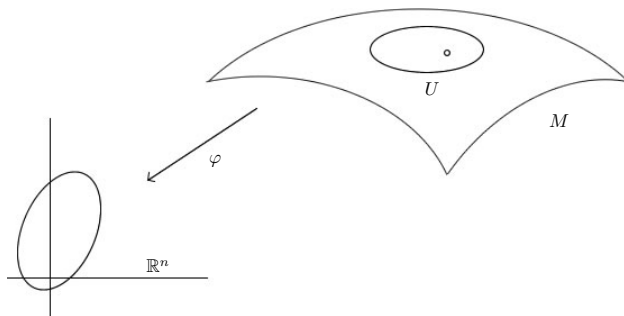


Figura 1.1: Una carta de coordenadas.

Consideremos una pareja de cartas (U, φ) , (V, ψ) cuyos dominios se traslapen; es decir, tales que $U \cap V \neq \emptyset$. En este caso podemos construir las transformaciones $\varphi \circ \psi^{-1}$ y $\psi \circ \varphi^{-1}$, cuyo dominio y codominio están dados por abiertos de \mathbb{R}^n . Llamaremos a éstas *transformaciones de cambio de coordenadas*. La idea general consiste en imponer una condición sobre estos cambios de coordenadas. En nuestro contexto, donde utilizaremos de manera fundamental el concepto de diferenciabilidad, es natural imponer una condición del tipo siguiente.

Definición 1.2. Se dice que dos cartas (U, φ) , (V, ψ) son C^k compatibles, $k = 0, 1, \dots, \infty$, si y sólo si las transformaciones de cambio de coordenadas $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \mathbb{R}^n$ son de clase C^k .

Coleccionaremos ahora una familia de cartas compatibles que cubran a nuestra variedad.

Definición 1.3. Sea M^n un espacio localmente homeomorfo a \mathbb{R}^n .

1. Un *atlas* \mathcal{A} de clase C^k en M^n es una colección de cartas cuyos dominios cubren a M^n y cualesquiera dos de ellas son C^k compatibles.
2. Una *estructura diferenciable* es un atlas maximal \mathcal{A} , en el sentido de que si la carta (U, φ) es C^k compatible con todas las cartas de \mathcal{A} , entonces $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$.

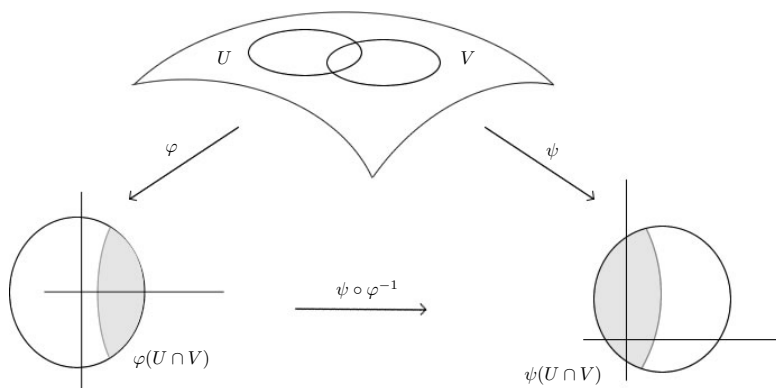


Figura 1.2: Dos cartas compatibles.

Observación. Si \mathcal{A} es un atlas, podemos agregar todas las cartas (U, φ) que son C^k compatibles con todas las cartas de \mathcal{A} para formar una estructura diferenciable \mathcal{A}_0 de clase C^k .

Definición 1.4. Sea n un entero no negativo. Una *variedad diferenciable* de dimensión n y clase C^k es una pareja (M^n, \mathcal{A}) , donde M^n es un espacio localmente homeomorfo a \mathbb{R}^n con base numerable y \mathcal{A} es una estructura diferenciable de clase C^k en M^n .

Cuando no sea necesario especificar la estructura diferenciable \mathcal{A} , escribiremos simplemente M^n . Además, dado que en esta obra sólo consideraremos variedades diferenciables, las llamaremos simplemente *variedades de clase C^k* .

Ejemplo 1.5. Los siguientes son ejemplos de variedades:

1. U abierto de \mathbb{R}^n con la estructura diferenciable determinada por la carta (U, I_U) , donde I_U es la transformación identidad en U .
2. Si (M^n, \mathcal{A}) es una variedad y W es un subconjunto abierto de M^n , entonces (W, \mathcal{A}_W) con $\mathcal{A}_W = \{(U, \varphi) \in \mathcal{A} : U \subset W\}$ es una variedad de la misma dimensión que M .

3. El conjunto $M(m, n)$ de matrices $m \times n$ con entradas reales se puede identificar con \mathbb{R}^{mn} . Esta identificación determina una estructura diferenciable en $M(m, n)$. Cuando $m = n$, escribiremos $M(n, n) = M(n)$.
4. Sean $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$ y $\pi_{\pm} : \mathbb{S}^n \setminus \{p_{\pm}\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ las proyecciones estereográficas desde los polos $p_{\pm} = (0, \dots, 0, \pm 1)$. Entonces el atlas

$$\{(\mathbb{S}^n \setminus \{p_+\}, \pi_+), (\mathbb{S}^n \setminus \{p_-\}, \pi_-)\}$$

determina una estructura diferenciable en \mathbb{S}^n .

5. Sean $(M^n, \mathcal{A}), (N^m, \mathcal{B})$ variedades. La colección de cartas coordenadas $(U \times V, \varphi \times \psi)$ con $(U, \varphi) \in \mathcal{A}, (V, \psi) \in \mathcal{B}$ determina una estructura diferenciable de dimensión $n + m$ en $M^n \times N^m$.

Como habíamos anticipado, el concepto de variedad está diseñado de modo que tenga sentido definir la diferenciableidad de una transformación, de la manera siguiente.

Definición 1.6. Sean (M^n, \mathcal{A}) y (N^m, \mathcal{B}) variedades de clase C^k .

- Una transformación continua $f : M \rightarrow N$ es *diferenciable de clase C^k* en un punto $p \in M$ si y sólo si existe una carta $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ de una vecindad de p en M y una carta $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ de una vecindad de $f(p)$ en N , con $\varphi(p) = 0$, tales que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es de clase C^k en 0 .
- Una transformación $f : M \rightarrow N$ es *diferenciable de clase C^k* , y escribimos $f \in C^k(M, N)$, si y sólo si f es *diferenciable de clase C^k* en p para todo $p \in M$. Cuando $N = \mathbb{R}$, denotaremos $C^k(M, \mathbb{R})$ como $C^k(M)$ solamente.

Ejemplo 1.7. Consideremos la función $\det : M(n) \rightarrow \mathbb{R}$, que asocia a cada matriz cuadrada A su determinante. Como el desarrollo del determinante de una matriz en $M(n)$ está dado por un polinomio de grado n , la función \det es diferenciable. Observe que el grupo lineal de matrices invertibles $GL(n)$ con entradas reales es la imagen inversa de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ bajo esta función y por tanto es un abierto en esta variedad.

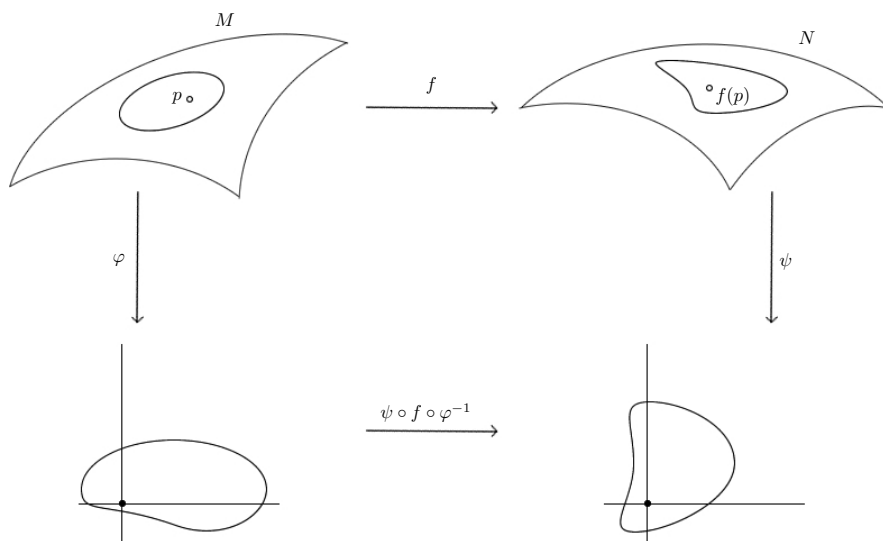


Figura 1.3: La transformación $f : M \rightarrow N$ es diferenciable en $p \in M$.

1.2. El espacio tangente

Sean M^n, N^m variedades de clase C^k . Aunque ya disponemos del concepto de diferenciable de una transformación entre estas variedades, aún nos falta un detalle para poder aplicar las técnicas del cálculo diferencial a estos objetos. Queremos definir la *diferencial* de una transformación entre variedades, lo cual haremos en esta sección.

Un primer problema que debemos enfrentar es que la diferencial, si existe, es una transformación *lineal*. En particular, debe ser una transformación entre espacios vectoriales. Puesto que usualmente, M^n y N^m no tendrán esta característica, tenemos que definir primero tales espacios. Como es de esperar, el concepto que queremos establecer formalmente es el del espacio *tangente* a una variedad.

Así, nuestro primer problema es: Dada una variedad M^n y un punto $p \in M$, ¿cómo definir el espacio tangente a M en el punto p , que denotaremos por $T_p M$?

En realidad, hay varias respuestas a esta cuestión. Una de ellas, tal vez

la más intuitiva, aprovecha el punto de vista geométrico.

En \mathbb{R}^n , un vector tangente se puede pensar como el vector “velocidad” de una curva. Por supuesto, varias curvas pueden tener el mismo vector velocidad. Podemos aprovechar esta idea para definir una relación entre dos curvas que pasan por un mismo punto: Diremos que tales curvas son equivalentes si y sólo si tienen el mismo vector velocidad. Es claro que esto define una relación de equivalencia, donde las clases de equivalencia pueden pensarse precisamente como los vectores velocidad.

En el espacio euclidiano, este procedimiento es ocioso. Sin embargo, la fuerza real de este punto de vista surge al trabajar con variedades abstractas.

Definición 1.8. Sea M una variedad y sean $\alpha, \beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ dos curvas (diferenciables) en M tales que $\alpha(0) = \beta(0) = p$. Diremos que α y β son *equivalentes* si y sólo si para alguna carta (U, φ) de una vecindad de p se tiene que $(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0)$.

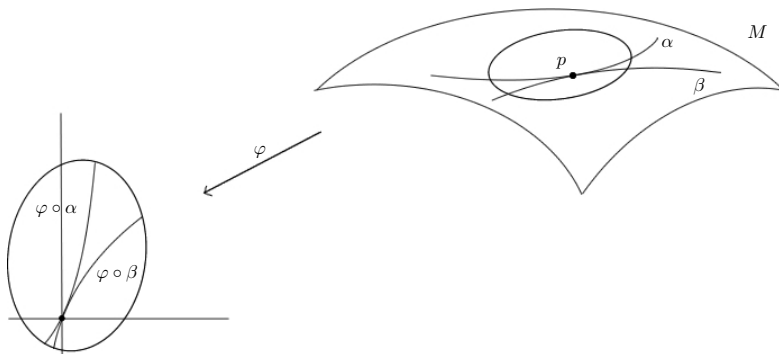


Figura 1.4: Curvas equivalentes.

Es fácil ver que este concepto no depende de la carta elegida y que define una relación de equivalencia entre curvas. Como es costumbre, denotamos por $[\alpha]$ la clase de equivalencia de una curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ y la llamaremos el *vector tangente a α en p* . Podemos dar ya nuestra primera definición del espacio tangente a una variedad M en un punto p :

Definición 1.9. El *espacio tangente* a una variedad M en el punto p es el conjunto de clases de equivalencia de curvas

$$T_p M = \{ [\alpha] \mid \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M, \alpha(0) = p \}.$$

bajo la relación de equivalencia establecida en la definición 1.8.

Una de las ventajas de esta definición es su evidente sabor geométrico: Mantiene a los vectores “en la tierra” (o más precisamente, ligados a curvas en M). Esto permite, por ejemplo, dar una sencilla definición de la diferencial de una transformación $f : M^n \rightarrow N^m$.

Dado un vector $[\alpha]$, podemos hallar su imagen bajo la diferencial de f de la manera siguiente: Puesto que este vector es tangente a la curva α , podemos componer f con α . Esto nos da una curva en N . El vector tangente a $f \circ \alpha$ en $f(p)$ será la imagen de $[\alpha]$ bajo la diferencial de f .

La mala noticia con esta definición de $T_p M$ es la dificultad para darle una estructura de espacio vectorial. Esto no es imposible, sino tortuoso: Por ejemplo, para definir la suma entre dos vectores $[\alpha]$ y $[\beta]$, consideramos las curvas correspondientes α y β , las “bajamos” a \mathbb{R}^n por medio de una carta (U, φ) . Para no complicarnos más la existencia, supongamos que $\varphi(p) = 0$, de modo que podamos sumar directamente $\varphi \circ \alpha + \varphi \circ \beta$. Esto nos da una curva en \mathbb{R}^n , que “subimos” a M por medio de la inversa de φ . Finalmente, decimos que la clase de equivalencia de esta última curva es la suma de $[\alpha]$ y $[\beta]$.

Como ya es usual, habría que mostrar que esta definición de la suma no depende de las curvas $[\alpha]$ y $[\beta]$ elegidas, así como de la carta φ . Sólo habrá que armarse de paciencia, pero realmente puede mostrarse este hecho.

De manera análoga, podemos definir la operación de producto por un escalar, para luego mostrar que estas dos operaciones hacen de $T_p M$ un espacio vectorial.

Un segundo enfoque para la definición del espacio tangente $T_p M$ utiliza otra importante propiedad de los vectores tangentes: Dado un vector v y una función f , podemos calcular la *derivada direccional* de f en la dirección de v .

Más precisamente, sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en un punto $p \in U$ y $v \in \mathbb{R}^n$. Definimos

$$v(f) := df_p(v) = \langle \text{grad } f(p), v \rangle = \sum_{i=1}^n D_i f(p) v_i.$$

Los resultados de la teoría del Cálculo establecen varias propiedades de esta derivada direccional. Como ejemplo tenemos:

1. Si 1 denota a la función constante igual a uno, entonces $v(1) = 0$.
2. Linealidad: Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $f, g \in C^1(U)$, entonces $v(af + bg) = av(f) + bv(g)$.
3. Regla del producto (o de Leibniz): $v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$.

Podemos entonces considerar a v como un operador en el conjunto de funciones definidas en una vecindad de p y diferenciables en dicho punto que satisface todas las propiedades anteriores. El espacio tangente será entonces el conjunto de todos estos operadores.

Aunque este punto de vista (ver los vectores como operadores de funciones) ya puede generalizarse rápidamente a las variedades, aprovecharemos para una última observación: En realidad, la derivada direccional de una función no depende del comportamiento *global* de ésta, sino sólo del comportamiento en una vecindad del punto donde queremos calcular tal derivada. Esto permite extender la definición de la derivada direccional (y con ello de los vectores tangentes) a un conjunto de clases de equivalencia de funciones, definido bajo la siguiente relación de equivalencia.

Definición 1.10. Sean M una variedad diferenciable y $p \in M$. Consideremos el conjunto de funciones diferenciables al menos en una vecindad de p . Definimos una relación en este conjunto: $f \sim_p g$ si y sólo si $f \equiv g$ en alguna vecindad de p . Es fácil ver que ésta es una relación de equivalencia. Una clase de equivalencia bajo esta relación se denota $[f]$ y se llama el *germen de la función* f en p . Sea $G_p M$ el conjunto de estos gérmenes.

Notemos que para cada germen podemos definir $[f](p) = f(p)$ sin ambigüedad. En $G_p M$ definimos las operaciones

- $[f] + [g] = [f + g]$,
- $a[f] = [af]$, $a \in \mathbb{R}$,
- $[f][g] = [fg]$.

Observación. El concepto de germen puede extenderse al caso de las funciones definidas en una vecindad de un punto p y que sólo sean diferenciables en el punto, aunque nosotros no adoptaremos este punto de vista.

Ahora establecemos la definición de los vectores tangentes usando este enfoque.

Definición 1.11. Sean M una variedad y $p \in M$. Un *vector tangente* a M en p es un operador lineal $v : G_p M \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface la regla de Leibniz

$$v([fg]) = f(p)v([g]) + g(p)v([f]).$$

El *espacio tangente* a M en p es el conjunto $T_p M$ de vectores tangentes a M en p .

Observe que no es necesario incluir en la definición el hecho de que la derivada de una función constante es igual a cero: Como $[1] = [1][1]$, para $v \in T_p M$ tenemos

$$v([1]) = 1 \cdot v([1]) + 1 \cdot v([1]) = 2 \cdot v([1])$$

y así, $v([1]) = 0$.

Una ventaja de esta definición es que $T_p M$ tiene una estructura natural de espacio vectorial: Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $v, w \in T_p M$, entonces

$$(av + bw)([f]) = av([f]) + bw([f]).$$

Utilizaremos esta definición del espacio tangente de manera regular, pero daremos la idea acerca de la relación existente entre esta definición y la relativa al conjunto de clases de equivalencia de curvas. Observemos que si α es una curva en M con $\alpha(0) = p$, entonces podemos definir un operador v_α como

$$v_\alpha([f]) = (f \circ \alpha)'(0).$$

Se puede ver que esta definición no depende de la función f elegida en el germen $[f]$ y que en efecto es un operador que satisface la definición 1.11. Además, puede mostrarse que si α y β son equivalentes (en el sentido de la definición 1.8), entonces $v_\alpha = v_\beta$. Esto establece una función entre el conjunto de clases de equivalencia de curvas (definición 1.9) y el espacio vectorial de “derivadas direccionales” (definición 1.11).

No continuaremos con los detalles de esta construcción, pero puede mostrarse que esta función es una biyección entre ambos conjuntos, de modo que podemos aprovecharla en dos sentidos: Uno, para darle estructura de espacio vectorial al conjunto de clases de equivalencia de curvas; el segundo, para darle una interpretación geométrica al espacio de derivadas direccionales.

Una vez que T_pM tiene estructura de espacio vectorial, tiene sentido preguntarse acerca de su dimensión. Consideremos una carta (U, φ) con $p \in U$ y sean u_i las funciones de coordenadas cartesianas en \mathbb{R}^n . Escribimos $x_i = u_i \circ \varphi$ y definimos

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p : T_pM \rightarrow \mathbb{R}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p([f]) = \frac{\partial}{\partial u_i}(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)),$$

donde $\partial/\partial u_i$ denota la derivada parcial de una función con respecto de la i -ésima variable en \mathbb{R}^n . Probaremos que

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p$$

es una base de T_pM . Para ello, necesitamos un resultado auxiliar.

Lema 1.12. *Sean $V \subset \mathbb{R}^n$ un abierto convexo, con $0 \in V$ y $f \in C^\infty(V)$. Entonces existen $g_1, \dots, g_n \in C^\infty(V)$ tales que*

$$f(u) = f(0) + \sum_{i=1}^n u_i g_i(u), \quad \text{con } u = (u_1, \dots, u_n) \text{ y } g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial u_i}(0).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $u \in V$ y definamos $h(t) = f(tu)$; entonces

$$f(u) - f(0) = h(1) - h(0) = \int_0^1 h'(t) dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial f}{\partial u_i}(tu) dt.$$

Definiendo

$$g_i(u) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial u_i}(tu) dt$$

obtenemos el lema. □

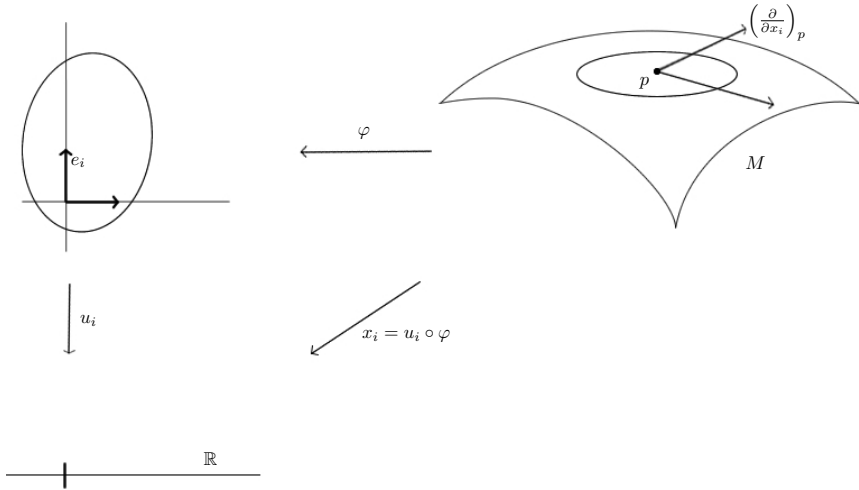


Figura 1.5: Una base para T_pM .

Proposición 1.13. Sean M^n una variedad diferenciable, $p \in M$. Sea (U, φ) una carta con $p \in U$ y $x_i = u_i \circ \varphi$ como antes. Entonces

$$v = \sum_{i=1}^n v([x_i]) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$$

para todo $v \in T_pM$.

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\varphi(p) = 0$. Sea $f \in C^\infty(\varphi^{-1}(B_r(0)))$. Por el lema 1.12 tenemos que

$$f \circ \varphi^{-1}(u) = f \circ \varphi^{-1}(0) + \sum_{i=1}^n u_i g_i(u), \quad g_i(0) = \frac{\partial}{\partial u_i} (f \circ \varphi^{-1})(0),$$

de modo que

$$f = f(p) + \sum_{i=1}^n x_i (g_i \circ \varphi).$$

Así,

$$\begin{aligned}
 v([f]) &= \sum_{i=1}^n v([x_i])(g_i \circ \varphi)(p) + \sum_{i=1}^n x_i(p)v([g_i \circ \varphi]) \\
 &= \sum_{i=1}^n v([x_i]) \frac{\partial}{\partial u_i} (f \circ \varphi^{-1})(0) \\
 &= \sum_{i=1}^n v([x_i]) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p ([f]).
 \end{aligned}$$

□

Corolario 1.14. Sean M una variedad diferenciable y $p \in M$. Entonces $T_p M$ es un espacio vectorial de la misma dimensión que M .

Aprovecharemos la proposición 1.13 y su Corolario para presentar un ejemplo importante de variedad diferenciable.

Definición 1.15. Dada una variedad M^n , el *haz tangente* a M es la unión de los espacios tangentes a M en cada punto de M :

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M.$$

Proposición 1.16. El haz tangente TM es una variedad y $\dim TM = 2n$.

Demostración. Denotemos por \mathcal{A} el atlas que define la estructura diferenciable de la variedad M . Si $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ es una carta, denotamos

$$TU = \bigcup_{p \in U} T_p M,$$

Si u_i son las funciones coordenadas en \mathbb{R}^n y $x_i = u_i \circ \varphi$ como en la proposición 1.13, para cada $w \in TU$ se cumple la ecuación

$$w = \sum_{i=1}^n w([x_i])(q) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_q.$$

De este modo, podemos definir la transformación $\bar{\varphi} : TU \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ como

$$\bar{\varphi}(w) = \left(\varphi(q), \sum_{i=1}^n w([x_i])(q) e_i \right),$$

donde $\{e_i\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^n . Dejamos como ejercicio para el lector mostrar que la familia $\{(TU, \bar{\varphi}) \mid (U, \varphi) \in \mathcal{A}\}$ define una estructura diferenciable de dimensión $2n$ para TM . \square

Utilizaremos ahora nuestra caracterización del espacio tangente para definir la diferencial de una transformación entre variedades.

Definición 1.17. Sean M, N variedades y $f \in C^\infty(M, N)$. Definimos la *diferencial* $f_{*p} : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ de f en un punto $p \in M$ como

$$f_{*p}(v)([g]) = v([g \circ f])$$

donde $v \in T_pM$, $[g] \in G_{f(p)}N$.

Ejemplo 1.18. Sea $S(n)$ el subespacio vectorial de $M(n)$ formado por las matrices simétricas, es decir,

$$S(n) = \{C \in M(n) : C^t = C\}.$$

Como vimos en el ejemplo 1.5, la estructura de espacio vectorial induce una estructura diferenciable en $M(n)$. De manera similar, $S(n) \cong \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ tiene una estructura diferenciable. Es fácil ver que la transformación $f : M(n) \rightarrow S(n)$ dada como $f(A) = AA^t$ es diferenciable, de modo que procederemos a calcular su diferencial f_{*A} .

En este caso, la estructura de espacio vectorial nos permite calcular la diferencial de la manera “usual”; es decir, si $B \in M(n)$, entonces

$$f_{*A}(B) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} ((A + sB)(A + sB)^t - AA^t) = AB^t + BA^t.$$

En particular, observemos que $f_{*I}(B) = B^t + B$.

Proposición 1.19. Sean $f \in C^\infty(M, N)$, $h \in C^\infty(N, P)$, con M, N, P variedades diferenciables. Además, sean $p \in M$ y $q = f(p)$.

1. Para cada $p \in M$, f_{*p} es una transformación lineal.
2. Si f es constante, entonces $f_{*p} = 0$ para cada $p \in M$.
3. Regla de la cadena: $(h \circ f)_{*p} = h_{*q} \circ f_{*p}$.

4. Sean (U, φ) carta con $p \in U$, $x_i = u_i \circ \varphi$ y e_1, \dots, e_n la base canónica de \mathbb{R}^n . Entonces

$$\varphi_{*\varphi(p)}^{-1}(e_i) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$$

de donde $T_p M = \varphi_{*\varphi(p)}^{-1}(\mathbb{R}^n)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $v \in T_p M$.

1. Dejaremos este punto como ejercicio para el lector.
2. Sea $[g] \in G_q N$. Si f es constante, $[g \circ f]$ es el germen de una transformación constante. Así,

$$f_{*p}(v)([g]) = v([g \circ f]) = 0.$$

3. Sea $[g] \in G_{h(q)} P$. Tenemos que

$$\begin{aligned} (h \circ f)_{*p}(v)([g]) &= v([g \circ h \circ f]) \\ &= f_{*p}(v)([g \circ h]) = (h_{*q} \circ f_{*p})(v)([g]) \end{aligned}$$

4. Sea $[g] \in G_p M$. Basta observar que

$$\varphi_{*\varphi(p)}^{-1}(e_i)([g]) = e_i([g \circ \varphi^{-1}]) = \frac{\partial}{\partial u_i}(g \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)).$$

□

Observación. Sean M^n, N^m variedades diferenciables, $f \in C^\infty(M, N)$, $p \in M$ y $(U, \varphi), (V, \psi)$ cartas con $p \in U, f(p) \in V$. Si u_1, \dots, u_n son las funciones coordenadas en \mathbb{R}^n , con $x_i = u_i \circ \varphi$ y, por otro lado, v_1, \dots, v_m son las funciones coordenadas en \mathbb{R}^m y $y_j = v_j \circ \psi$, entonces

$$f_{*p} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p ([y_j]) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p ([y_j \circ f]) = \frac{\partial}{\partial u_i}(y_j \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)).$$

Por la proposición 1.13,

$$f_{*p} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p = \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial u_i}(y_j \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_{f(p)}.$$

Es decir, la matriz de f_{*p} con respecto de las bases

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \right\}_{i=1}^n, \quad \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_{f(p)} \right\}_{j=1}^m$$

es precisamente la matriz derivada $D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$.

Observación. El concepto de haz tangente nos permite coleccionar en un todo el conjunto de diferenciales f_{*p} de una transformación diferenciable $f \in C^\infty(M, N)$. En efecto, dada f de este tipo definimos $f_* : TM \rightarrow TN$ como

$$f_*(v) := f_{*p}(v), \text{ si } v \in T_pM.$$

1.3. El teorema del rango, inmersiones y encajes

Ahora disponemos de más herramientas para trabajar con las variedades y podemos extender con facilidad algunos resultados clásicos del Cálculo.

El primer resultado que extenderemos a las variedades es el siguiente.

Teorema 1.20 (De la función inversa). *Sea $f \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$, tal que $f(0) = 0$ y la diferencial de f en 0 es invertible. Entonces existe una vecindad V de 0 en \mathbb{R}^n tal que $f(V)$ es abierto en \mathbb{R}^n , $f|_V : V \rightarrow f(V)$ es invertible y la función inversa $f^{-1} \in C^k(f(V), V)$.*

Las transformaciones que satisfacen la conclusión del teorema reciben un nombre especial.

Definición 1.21. Una transformación $f : M^n \rightarrow N^m$ entre variedades es un *difeomorfismo de clase C^k* si y sólo si f es biyectiva y tanto f como su inversa f^{-1} son de clase C^k .

Por otro lado, una transformación $f : M^n \rightarrow N^m$ es un *difeomorfismo local de clase C^k en p* si y sólo si existe una vecindad U de p en M tal que $f|_U : U \rightarrow f(U)$ es un difeomorfismo de clase C^k .

Observe que en este caso, necesariamente las variedades deben tener la misma dimensión. Enunciemos ahora la nueva versión del teorema anterior.

Teorema 1.22 (De la función inversa para variedades). *Sean M^n, N^n variedades de la misma dimensión, $f \in C^k(M, N)$, $k \geq 1$ y $p \in M$, tal que la diferencial de f en p es invertible. Entonces f es un difeomorfismo local de clase C^k en p .*

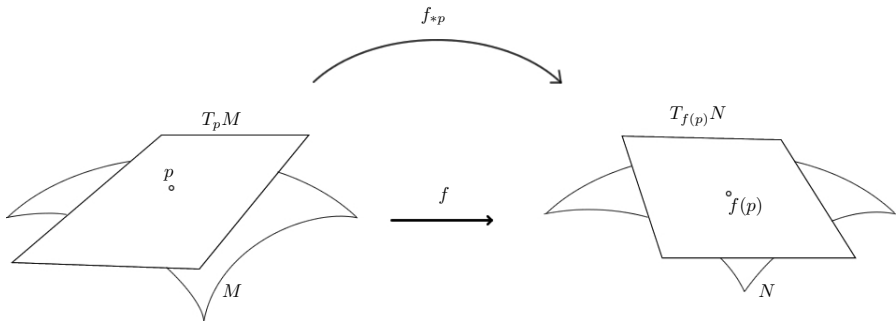


Figura 1.6: Teorema de la función inversa para variedades.

DEMOSTRACIÓN. Sea (U, φ) una carta de M , donde U es una vecindad de p y $\varphi(p) = 0$. En forma análoga, sea (V, ψ) una carta de N , donde V es una vecindad de $f(p)$. Entonces la transformación $g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ satisface las hipótesis del teorema de la función inversa en \mathbb{R}^n , por lo que resulta ser un difeomorfismo local en 0 . De aquí es fácil ver que $f = \psi^{-1} \circ g \circ \varphi$ es un difeomorfismo local en p . \square

Si $f : M^n \rightarrow N^n$ satisface las hipótesis del teorema de la función inversa para variedades y (U, φ) y (V, ψ) son cartas de M y N como en la demostración, ya sabemos que $g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es un difeomorfismo local en \mathbb{R}^n . Si pensamos a g como un “cambio de coordenadas”, entonces podemos parametrizar las vecindades de p y de $f(p)$ mediante una misma vecindad con cartas (U, φ) y $(U, \bar{\psi})$, donde $\bar{\psi} = \psi \circ g^{-1}$. Observemos que $\bar{g} = \bar{\psi} \circ f \circ \varphi^{-1}$ es la identidad en U , de modo que podemos parafrasear de nuevo el teorema como sigue.

Teorema 1.23. *Sean $f \in C^k(M^n, N^n)$, $k \geq 1$ y $p \in M$, tal que la diferencial de f en p es invertible. Entonces existen cartas φ de una vecindad de p en M y ψ de una vecindad de $f(p)$ en N tales que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es la identidad.*

Extenderemos esta versión del teorema de la función inversa en varios sentidos: Consideraremos una transformación entre variedades de dimensiones arbitrarias M^n y N^m , así como transformaciones no necesariamente invertibles. Más adelante destacaremos las particularidades de los casos $k = n \leq m$ y $n \geq m = k$.

Definición 1.24. Sean M, N variedades, $f \in C^\infty(M, N)$ y $p \in M$. El rango de f en p es el rango de la derivada de f en p ; es decir, es igual a $\dim f_{*p}(T_p M)$.

Teorema 1.25 (del rango). Sean M^n, N^m variedades y $f \in C^\infty(M, N)$.

1. Supongamos que el rango de f en p es k . Entonces existen cartas $(U, \varphi), (V, \psi)$ con $\varphi(p) = 0, \psi(f(p)) = 0$ tales que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(t_1, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_k, g_{k+1}(t), \dots, g_m(t)).$$

2. Si el rango de f es constante e igual a k en todos los puntos de una vecindad de p , entonces existen cartas $(U, \varphi), (V, \psi)$ con $\varphi(p) = 0, \psi(h(p)) = 0$ tales que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(t_1, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_k, 0, \dots, 0).$$

DEMOSTRACIÓN. Como el resultado es local podemos suponer que M es una vecindad del origen en \mathbb{R}^n , $N = \mathbb{R}^m$ y $f(0) = 0$. La hipótesis es que la matriz $Df(0)$ tiene rango k . Permutando las coordenadas podemos suponer que

$$Df(x) = \begin{bmatrix} A(x) & * \\ * & * \end{bmatrix}, \quad \text{con } \det A(0) \neq 0,$$

donde $A(x)$ es una matriz $k \times k$. Por continuidad, en una vecindad del origen tenemos $\det A(x) \neq 0$. Ahora definimos $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$\varphi(s_1, \dots, s_n) = (f_1(s), \dots, f_k(s), s_{k+1}, \dots, s_n).$$

Observemos que

$$D\varphi(0) = \begin{bmatrix} A(0) & * \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

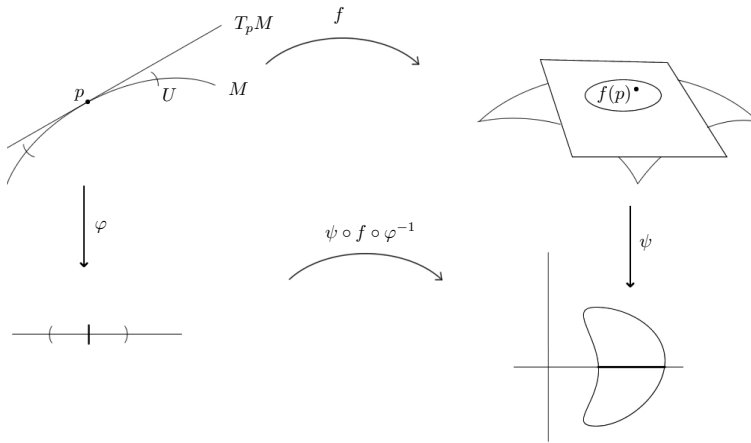


Figura 1.7: Segunda parte del teorema del rango.

Así, $\det D\varphi(0) \neq 0$ y por el teorema de la función inversa existe una vecindad U del origen tal que $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ es un difeomorfismo. Como $f_i \circ \varphi^{-1}(t_1, \dots, t_n) = t_i$ para $i = 1, \dots, k$, tenemos que

$$f \circ \varphi^{-1}(t_1, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_k, g_{k+1}(t), \dots, g_m(t)),$$

lo cual muestra la primera parte del teorema.

Para demostrar la segunda parte del teorema usaremos la última expresión obtenida. Si $g = f \circ \varphi^{-1}$, entonces

$$Dg(t) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ * & \left[\frac{\partial g_i}{\partial t_j} \right]_{i,j \geq k} \end{bmatrix}.$$

Supongamos que $\text{rango } Df(x) = k$ para todo x en una vecindad del origen. Entonces $\text{rango } Dg(t)$ es igual a k en una vecindad del origen y

$$\frac{\partial g_i}{\partial t_j} = 0 \text{ para } i, j \geq k.$$

Así, $g_i(t) = g_i(t_1, \dots, t_k)$ para $i \geq k$. Sea

$$\psi(y_1, \dots, y_m) = (y_1, \dots, y_k, y_{k+1} - f_{k+1}(y_1, \dots, y_k), \dots, y_m - f_m(y_1, \dots, y_k));$$

entonces

$$D\psi(y) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ * & I \end{bmatrix},$$

lo que implica que ψ es un difeomorfismo local. Finalmente,

$$\psi \circ g(t_1, \dots, t_n) = \psi(t_1, \dots, t_k, g_{k+1}(t) \dots, g_m(t)) = (t_1, \dots, t_k, 0, \dots, 0).$$

□

En el resto de la sección veremos varias aplicaciones del teorema 1.25. En particular, este teorema se puede utilizar para establecer condiciones suficientes bajo las cuales la imagen inversa de un conjunto cumple la definición de variedad. Reservaremos un nombre especial para este caso.

Definición 1.26. Sea M una variedad diferenciable. Una *subvariedad* de M es un subconjunto de M tal que es una variedad, con la topología inducida por la topología de M .

Corolario 1.27. Sean M^n, N^m variedades y $f \in C^\infty(M, N)$. Sea $q \in N$ tal que el rango de f es constante e igual a k en una vecindad de $f^{-1}(q) \neq \emptyset$. Entonces $f^{-1}(q)$ es una subvariedad de M , de dimensión $n - k$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $p \in f^{-1}(q)$. El teorema 1.25 implica que existen cartas (U, φ) , (V, ψ) tales que $\varphi(p) = 0, \psi(q) = 0$ y

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(t_1, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_k, 0, \dots, 0).$$

Sea $z \in U$; entonces $f(z) = q$ si y sólo si

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(\varphi(z)) = 0 \quad \text{o bien} \quad \varphi(z) = (0, \dots, 0, z_{k+1}, \dots, z_n).$$

Así, $f^{-1}(q) \cap U = \varphi^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^{n-k})$, y podemos definir la carta $\phi = \Pi \circ \varphi|_{f^{-1}(q) \cap U}$, donde $\Pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ es la proyección sobre las últimas $n - k$ coordenadas. Si $j : \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \{0\} \times \mathbb{R}^{n-k} \subset \mathbb{R}^n$ es la inyección natural, entonces tenemos que $\phi^{-1} = \varphi^{-1} \circ j$. □

Es conveniente destacar un caso particular del teorema anterior. Cuando $k = m$, diremos que q es un *valor regular* de f . El resultado anterior se suele enunciar diciendo que *la imagen inversa de un valor regular es una subvariedad*. En este caso, tenemos el siguiente hecho adicional.

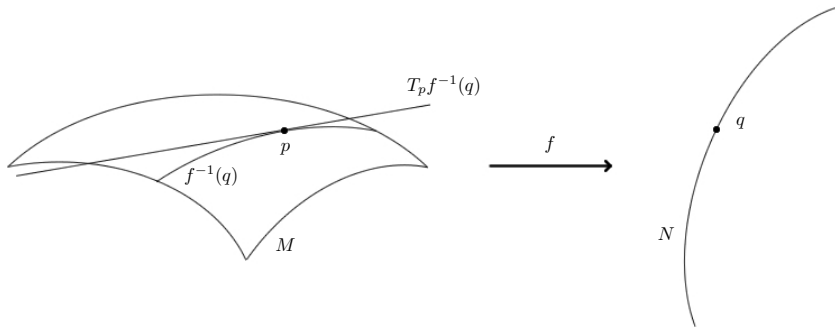


Figura 1.8: Si q es un valor regular de f y $f(p) = q$, entonces $T_p f^{-1}(q) = \ker f_{*p}$.

Proposición 1.28. *Sea $q \in N$ un valor regular de $f \in C^\infty(M^n, N^m)$. Para cada $p \in f^{-1}(q)$ se tiene que $T_p f^{-1}(q) = \ker f_{*p}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea (U, φ) carta de $f^{-1}(q)$ con $p \in U$. Entonces $f \circ \varphi^{-1}$ es constante. Así,

$$f_{*p}(T_p f^{-1}(q)) = (f \circ \varphi^{-1})_{*x}(\mathbb{R}^{n-m}) = \{0\},$$

donde $x = \varphi(p)$. Es decir, $T_p f^{-1}(q) \subset \ker f_{*p}$. Para mostrar la otra contención, usaremos un argumento dimensional. Como f_{*p} es suprayectiva, tenemos que

$$\dim T_p f^{-1}(q) = n - m = \dim \ker f_{*p},$$

y obtenemos la contención en el otro sentido. □

Ejemplo 1.29. Sean $M(n)$ y $S(n)$ los espacios de matrices y $f : M(n) \rightarrow S(n)$ la transformación $f(A) = AA^t$ analizados anteriormente en los ejemplos 1.5 y 1.18. Mostraremos que el grupo ortogonal $O(n) = f^{-1}(I)$ es una variedad de dimensión $n(n-1)/2$, viendo que I es un valor regular de f ; es decir, que f_{*A} es suprayectiva para cada $A \in O(n)$, o bien que para cada $C \in S(n)$ existe B tal que $f_{*A}(B) = C$. Como vimos en el ejemplo 1.18,

$$f_{*A}(B) = AB^t + BA^t,$$

de modo que tomando $B = \frac{1}{2}CA$ tenemos que

$$f_{*A}(B) = \frac{1}{2}(AA^tC^t + CAA^t) = \frac{1}{2}(C^t + C) = C.$$

Así, f_{*A} es suprayectiva e I es un valor regular de f . Adicionalmente, podemos aplicar el corolario 1.27, de modo que el espacio tangente a $O(n)$ en la identidad es

$$T_I O(n) = \ker f_{*I} = \{B \in M(n) : B^t + B = 0\};$$

es decir, el conjunto de matrices antisimétricas.

Ahora veremos bajo qué condiciones podemos garantizar que la imagen *directa* de una transformación $f : M^n \rightarrow N^m$ es una subvariedad de N .

Definición 1.30. Sean M, N variedades y $f \in C^\infty(M^n, N^m)$ diferenciable.

- Decimos que f es una *inmersión* en $p \in M$ si y sólo si f_{*p} es inyectiva.
- La transformación f es una *inmersión* si y sólo si f es una *inmersión* en p para todo $p \in M$.
- Una *inmersión* p es un *encaje* si y sólo si es un homeomorfismo sobre su imagen $f(M)$.

Conviene destacar un aspecto de la definición de un encaje. Al establecer la condición de que una transformación sea un homeomorfismo sobre su imagen, siempre supondremos que la imagen $f(M) \subset N$ tiene la topología inducida por la topología de N . Para aclarar este punto, pensemos en una transformación inyectiva $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuya imagen sea una figura “8”. Si consideramos esta figura con la topología inducida por \mathbb{R}^2 , ésta no es una subvariedad de \mathbb{R}^2 , pues tiene un punto problemático. (¿Qué ocurre en este caso?) El lector podrá convencerse que esta topología es diferente de aquella que hace de f un homeomorfismo.

Observación. Si $f : M \rightarrow N$ es un encaje, entonces $f(M)$ es una subvariedad de N , de la misma dimensión que M . En efecto, es fácil ver que si $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ es un atlas para M , entonces $\mathcal{B} = \{(f^{-1}U_\alpha, \varphi_\alpha \circ h)\}$ es un atlas para $f(M)$.

El siguiente resultado establece condiciones para que una *inmersión* sea un *encaje*.

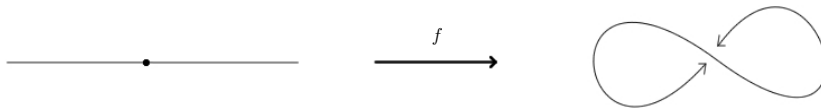


Figura 1.9: ¿Es el “ocho” una variedad?

Proposición 1.31. *Si $f : M \rightarrow N$ es una inmersión inyectiva y M es compacta, entonces f es un encaje.*

DEMOSTRACIÓN. Sólo tenemos que probar que $f^{-1} : h(M) \rightarrow M$ es continua. Si $U \subset M$ es abierto, entonces $M \setminus U$ es cerrado. Como la variedad M es compacta, $M \setminus U$ es compacto. Así, $f(M \setminus U)$ es compacto y por consiguiente cerrado. Como f es inyectiva, $f(M \setminus U) = f(M) \setminus f(U)$, de donde $f(U)$ es abierto en $f(M)$. \square

1.4. Teorema de Whitney

Dedicaremos esta sección a la demostración de que cualquier variedad diferenciable compacta puede encajarse en algún espacio euclidiano. Para esto, mostraremos primero la existencia de una familia de funciones definidas en una variedad, llamada *partición de la unidad*. A grandes rasgos, esta familia permitirá convertir objetos definidos “localmente” en objetos globales.

Definición 1.32. Sea M una variedad diferenciable.

- Una colección $\{U_\alpha\}$ de subconjuntos (abiertos) de M es una *cubierta (abierta)* de $W \subset M$ si $W \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$.
- Un *refinamiento* (abierto) de la cubierta $\{U_\alpha\}$ es una cubierta (abierta) $\{V_\beta\}$ tal que para toda β existe α tal que $V_\beta \subset U_\alpha$.
- Una colección $\{A_\alpha\}$ de subconjuntos de M es *localmente finita* si para todo $p \in M$ existe W_p vecindad de p en M tal que $\{\alpha : W_p \cap A_\alpha \neq \emptyset\}$ es finito.

- M es *paracompacto* si toda cubierta abierta de M tiene un refinamiento localmente finito.
- Para una función $f \in C^k(M)$ definimos el *soporte* de f como el conjunto

$$\text{soporte } f = \overline{\{x \in M : f(x) \neq 0\}}.$$

- Una *partición de la unidad* en M es una colección $\{\varphi_\alpha\} \subset C^\infty(M)$ tal que (i) $\{\text{soporte } \varphi_\alpha\}$ es localmente finita; (ii) $\varphi_\alpha \geq 0$; y (iii) $\sum_\alpha \varphi_\alpha \equiv 1$.
- La partición $\{\varphi_\alpha\}$ *está subordinada* a $\{U_\beta\}$ si para toda α existe β tal que

$$\text{soporte } \varphi_\alpha \subset U_\beta.$$

Lema 1.33. *Sea M un espacio de Hausdorff, localmente compacto y con base numerable. Entonces toda cubierta abierta tiene un refinamiento numerable localmente finito consistente de abiertos con cerradura compacta.*

DEMOSTRACIÓN. Existe una cubierta numerable $\{G_k\}$ de abiertos con $\overline{G_k}$ compacto tal que $\overline{G_k} \subset G_{k+1}$. En efecto, sea \mathcal{A} una base numerable y sea $\{U_k\}$ la subcolección que consiste de los elementos con cerradura compacta. Como M es Hausdorff y localmente compacto, $\{U_k\}$ es una base. Sea $G_1 = U_1$ y supongamos que $G_k = U_1 \cup \dots \cup U_{j_k}$. Sea

$$j_{k+1} = \text{mín}\{j > j_k : \overline{G_k} \subset U_1 \cup \dots \cup U_j\}$$

y definamos

$$G_{k+1} = U_1 \cup \dots \cup U_{j_{k+1}}.$$

Sea $\{V_\alpha\}$ una cubierta abierta arbitraria. Para $k \geq 3$, $\overline{G_k} \setminus G_{k-1}$ es compacto y está contenido en $G_{k+1} \setminus \overline{G_{k-2}}$. Tomemos una subcubierta finita de la cubierta $\{V_\alpha \cap (G_{k+1} \setminus \overline{G_{k-2}})\}$ de $\overline{G_k} \setminus G_{k-1}$. Escojamos también una subcubierta finita de la cubierta $\{V_\alpha \cap G_3\}$ de $\overline{G_2}$. La unión de estas subcubiertas finitas es la subcubierta deseada. \square

Lema 1.34. *Existe $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi = 1$ en $\overline{C(1)}$, $\varphi = 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus C(2)$, donde $C(r) = (-r, r)^n$.*

Dejaremos la demostración de este lema como ejercicio. El lector puede consultar [5], página 10.

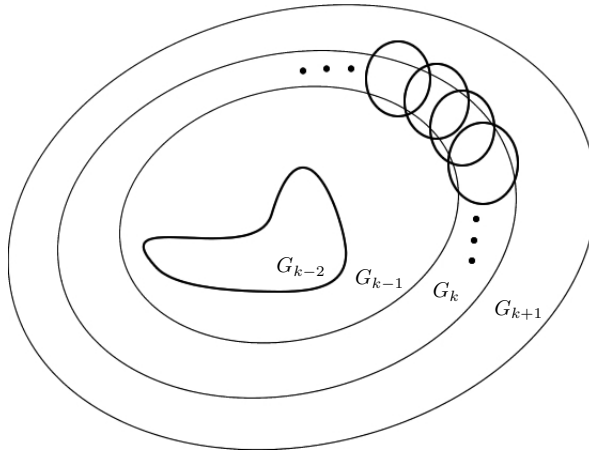


Figura 1.10: Construcción de una subcubierta abierta de $\overline{G}_k \setminus G_{k-1}$.

Teorema 1.35 (Particiones de la Unidad). *Sean M una variedad diferenciable y $\{U_\alpha\}$ una cubierta abierta de M . Entonces existe una partición numerable de la unidad $\{\varphi_k\}$ subordinada a $\{U_\alpha\}$, con soporte φ_k compacto. Adicionalmente, existe una partición de la unidad $\{\varphi_\alpha\}$ con una cantidad a lo más numerable de elementos no nulos y soporte $\varphi_\alpha \subset U_\alpha$ para toda α .*

DEMOSTRACIÓN. Sea φ como en el lema 1.34. Sea $\{G_k\}$ como en el lema 1.33 y $G_0 = \emptyset$. Para cada $p \in M$, sea $k_p = \max\{k : p \notin \overline{G}_k\}$. Escojamos $\alpha(p)$ tal que $p \in U_{\alpha(p)}$ y una carta (V, τ) tal que

$$\tau(p) = 0, \overline{C(2)} \subset \tau(V), V \subset U_{\alpha(p)} \cap (G_{k_p+2} \setminus \overline{G}_{k_p}).$$

Definamos ψ_p como $\varphi \circ \tau$ en V e igual a cero afuera de V . Así, $\psi_p = 1$ en un abierto W_p y soporte $\psi_p \subset V$. Para cada k , sea F_k un subconjunto finito de $\overline{G}_k \setminus G_{k-1}$ tal que $\{W_p : p \in F_k\}$ es una cubierta de $\overline{G}_k \setminus G_{k-1}$. Así, $\{W_p : p \in F_k, k \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta numerable de M .

Ordenemos $\{\psi_p : p \in F_k, k \in \mathbb{N}\}$ en una sucesión $\{\psi_i\}$. Observemos que la colección $\{\text{soporte } \psi_i\}$ es localmente finita. Así, si $\psi = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i$, entonces $\psi(p) > 0$ para todo $p \in M$. Definimos $\varphi_i = \psi_i/\psi$.

Para cada i escogemos $\alpha(i)$ tal que soporte $\varphi_i \subset U_{\alpha(i)}$. Sea

$$\phi_\alpha = \sum_{\alpha(i)=\alpha} \varphi_i;$$

entonces soporte $\phi_\alpha \subset \bigcup_{\alpha(i)=\alpha} \text{soporte } \varphi_i$.

Para cada $p \in M$ existe una vecindad W_p de p tal que

$$\{i : \text{soporte } \varphi_i \cap W_p \neq \emptyset\} = \{i_1, \dots, i_r\}.$$

Si soporte $\phi_\alpha \cap W_p \neq \emptyset$, entonces $\alpha = \alpha(i_j)$ para algún $j = 1, \dots, r$ y así

$$\{\alpha : \text{soporte } \phi_\alpha \cap W_p \neq \emptyset\} = \{\alpha(i_1), \dots, \alpha(i_r)\}.$$

Por lo tanto, la familia $\{\text{soporte } \phi_\alpha\}$ es localmente finita. \square

Corolario 1.36. Sean M una variedad, $V \subset M$ abierto y $A \subset V$ cerrado. Entonces existe $\varphi \in C^\infty(M)$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi = 1$ en A y $\varphi = 0$ en $M \setminus V$.

DEMOSTRACIÓN. $\{V, M \setminus A\}$ es una cubierta abierta de M . Sea $\{\varphi, \psi\}$ una partición de la unidad con soporte $\varphi \subset V$, soporte $\psi \subset M \setminus A$. Si $p \in A$, $\psi(p) = 0$ y entonces $\varphi(p) = 1$. \square

Necesitaremos dos resultados auxiliares más.

Lema 1.37. Sean M una variedad diferenciable y $\{V_\alpha : \alpha \in A\}$ una cubierta localmente finita.

1. Si $K \subset M$ es compacto, entonces $\{\alpha \in A : V_\alpha \cap K \neq \emptyset\}$ es finito.
2. Si $V_\alpha \neq \emptyset$ para toda $\alpha \in A$, entonces A es a lo más numerable.

DEMOSTRACIÓN.

1. Para cada $p \in M$, sea W_p una vecindad de p tal que

$$A_p = \{\alpha \in A : V_\alpha \cap W_p \neq \emptyset\}$$

es finito. Como K es compacto, existe una subcubierta finita de K , de la forma $\{W_{p_1}, \dots, W_{p_r}\}$. Si $V_\alpha \cap K \neq \emptyset$, entonces $V_\alpha \cap W_{p_i} \neq \emptyset$ para algún $i = 1, \dots, r$ y así $\alpha \in A_{p_i}$. Luego,

$$\{\alpha \in A : V_\alpha \cap K \neq \emptyset\} \subset \bigcup_{i=1}^r A_{p_i}$$

2. Existe una sucesión creciente de compactos K_i tales que $M = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i$. Por el inciso anterior, $B_i = \{\alpha \in A : V_\alpha \cap K_i \neq \emptyset\}$ es finito. Como todo V_α debe intersecar algún K_i , $A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$. \square

Lema 1.38. *Sea M una variedad diferenciable.*

1. *Si $V \subset M$ es abierto y $A \subset V$ es cerrado, entonces existe U abierto tal que $A \subset U \subset \bar{U} \subset V$.*
2. *Si $\{V_i\}$ es una cubierta abierta localmente finita, entonces existe una cubierta abierta $\{U_i\}$ tal que $\bar{U}_i \subset V_i$ para toda i .*

DEMOSTRACIÓN.

1. Sea $\varphi : M \rightarrow [0, 1]$ diferenciable tal que $\varphi = 0$ en A y $\varphi = 1$ en $M \setminus V$. Sea $U = \varphi^{-1}[0, 1/2)$.
2. Por la proposición 1.37, la cubierta $\{V_i\}$ es a lo más numerable. El conjunto $A_1 = M \setminus \bigcup_{i>1} V_i$ es cerrado y $A_1 \subset V_1$. Por (1) existe U_1 abierto tal que

$$A_1 \subset U_1 \subset \bar{U}_1 \subset V_1, \text{ y así } M = U_1 \cup \bigcup_{i>1} V_i.$$

$A_2 = M \setminus (U_1 \cup \bigcup_{i>2} V_i)$ es cerrado y $A_2 \subset V_2$. Por (1) existe U_2 abierto tal que

$$A_2 \subset U_2 \subset \bar{U}_2 \subset V_2, \text{ y así } M = U_1 \cup U_2 \cup \bigcup_{i>2} V_i.$$

Continuamos el proceso inductivamente. Sea $p \in M$. Como $\{V_i\}$ es localmente finita existe N tal que $p \notin V_i$ si $i > N$. Como

$$M = \bigcup_{i \leq N} U_i \cup \bigcup_{i > N} V_i,$$

tenemos que $p \in \bigcup_{i \leq N} U_i$. \square

Ahora podemos demostrar que cualquier variedad compacta admite un encaje en un espacio euclidiano.

Teorema 1.39. *Si M es una variedad diferenciable compacta, entonces hay un encaje $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ para algún m .*

DEMOSTRACIÓN. Como M es compacta, podemos encontrar una colección finita de cartas $(V_1, \psi_1), \dots, (V_k, \psi_k)$ tal que $M = \bigcup_{i=1}^k V_i$. Por la proposición 1.38, existe una cubierta $\{U_1, \dots, U_k\}$ tal que $\overline{U_i} \subset V_i$. Por el corolario 1.36 existe $\varphi_i : M \rightarrow [0, 1]$ diferenciable tal que $\varphi_i(U_i) = 1$ y soporte $\varphi_i \subset V_i$. Sea $n = \dim M$ y definamos

$$f = (\varphi_1\psi_1, \dots, \varphi_k\psi_k, \varphi_1, \dots, \varphi_k) : M \rightarrow \mathbb{R}^{k(n+1)}.$$

Mostraremos que f es el encaje buscado.

Veamos primero que f es inyectiva. Supongamos que $f(p) = f(q)$, $p, q \in M$. Si $p \in U_i$, $\varphi_i(p) = 1$, entonces $\varphi_i(q) = 1$ y así $q \in V_i$. Luego

$$\psi_i(p) = \varphi_i(p)\psi_i(p) = \varphi_i(q)\psi_i(q) = \psi_i(q)$$

y entonces $p = q$.

Ahora veamos que f es una inmersión. Observemos que

$$f_* = [(\varphi_1\psi_1)_*, \dots, (\varphi_k\psi_k)_*, \varphi_{1*}, \dots, \varphi_{k*}]$$

Sea $p \in U_i$. Como $\varphi_i\psi_i = \psi_i$ en U_i , $(\varphi_i\psi_i)_{*p} = \psi_{i*p}$ es un isomorfismo. \square

El resultado anterior dice que podemos hallar un encaje de una variedad compacta en algún espacio euclidiano, tal vez de dimensión alta. Una cuestión adicional interesante consiste en hallar la *mínima* dimensión en la que podemos estar seguros que tal encaje existe. Una discusión completa de este punto aparece en [5].

1.5. Variedades con frontera

Aquí presentamos una generalización del concepto de variedad. Con este fin necesitamos introducir el concepto de transformación diferenciable en un subconjunto arbitrario de \mathbb{R}^n .

Definición 1.40. Sean $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto arbitrario y $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$. Decimos que f es de clase C^k en X y escribimos $f \in C^k(X, \mathbb{R}^n)$ si y sólo si para cada $p \in X$, existe $F \in C^k(V, \mathbb{R}^n)$ tal que V es una vecindad de p y $f|X \cap V = F|X \cap V$. Si $n = 1$, escribiremos $C^k(X, \mathbb{R}) = C^k(X)$.

Hasta ahora hemos modelado las variedades mediante conjuntos abiertos en \mathbb{R}^n . En el caso de las variedades con frontera, utilizaremos como modelo el semiespacio superior de \mathbb{R}^n , dado por

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\},$$

dotado de la topología inducida por \mathbb{R}^n . Definimos la *frontera de \mathbb{H}^n* como

$$\partial\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_n = 0\}.$$

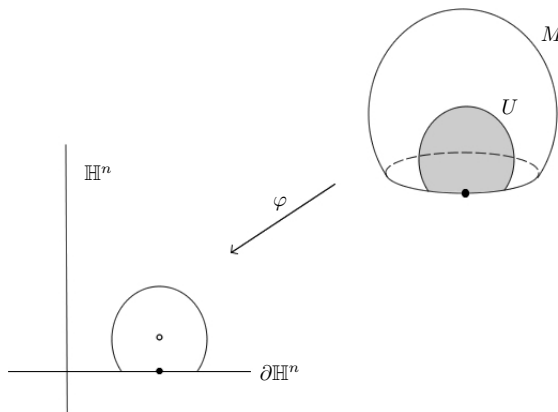


Figura 1.11: Una carta de variedad con frontera.

Definición 1.41. Sea M un espacio de Hausdorff y $n \in \mathbb{N}$.

- La pareja (U, φ) es una *carta de variedad con frontera* en M si φ es un homeomorfismo de un conjunto abierto $U \subset M$ en un abierto de \mathbb{H}^n .
- Dos cartas de variedad con frontera (U, φ) , (V, ψ) son C^k *compatibles* si $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \mathbb{H}^n$, $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \mathbb{H}^n$ son de clase C^k (en el sentido de la definición 1.40).
- Un *atlas* \mathcal{A} de variedad C^k con frontera es una colección de cartas cuyos dominios cubren M y cualesquiera dos de ellas son C^k compatibles.

- Una *variedad* C^k con frontera es un espacio de Hausdorff M con base numerable junto con un atlas maximal \mathcal{A} de variedad C^k con frontera. En este caso, decimos que la *dimensión* de M es m .
- Sean (M, \mathcal{A}) una variedad C^k con frontera y $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$. Si $x \in U$ satisface que $\varphi(x) \in \partial\mathbb{H}^n$, decimos que x es un *punto frontera* para la carta (U, φ) .

Observación. En realidad, la condición de ser un punto frontera no depende de la carta. En efecto, sean $(U, \varphi), (V, \psi)$ cartas tales que $y = \varphi(x) \in \partial\mathbb{H}^n$ y supongamos que $z = \psi(x) \notin \partial\mathbb{H}^n$. Entonces existe $r > 0$ tal que $B_r(z) \subset \psi(U \cap V) \setminus \partial\mathbb{H}^n$. Sea $F : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que W es vecindad de y y $F|_W \cap \mathbb{H}^n = \psi \circ \varphi^{-1}|_W \cap \mathbb{H}^n$. Así, $F \circ \varphi \circ \psi^{-1}$ es la identidad, de modo que $D(\varphi \circ \psi^{-1})(z)$ es invertible. Por el teorema de la función inversa, existe $0 < \varepsilon < r$ tal que el conjunto $\varphi \circ \psi^{-1}(B_r(z)) \subset \varphi(U \cap V) \subset \mathbb{H}^n$ es un abierto de \mathbb{R}^n . Esto contradice el hecho de que $y \in \partial\mathbb{H}^n$.

Definición 1.42. Sea M una variedad C^k con frontera. La *frontera* de M es el conjunto ∂M de puntos en M que son punto frontera para alguna carta. El *interior* de M es el conjunto $M \setminus \partial M$.

Por la observación anterior a esta definición, el interior de M es el conjunto de puntos para los cuales existe una carta (U, φ) con $\varphi(U)$ abierto de \mathbb{R}^n . Por lo tanto, el interior de M es una variedad C^k (sin frontera). La siguiente proposición dice que también la frontera de M es una variedad.

Proposición 1.43. Sea M^n una variedad diferenciable con frontera. Entonces ∂M es una variedad diferenciable (sin frontera) de dimensión $n - 1$.

DEMOSTRACIÓN. Sea \mathcal{B} el conjunto de cartas (U, φ) de M tales que $U \cap \partial M \neq \emptyset$. Sea $\Pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ la proyección sobre las primeras $n - 1$ coordenadas. Entonces $\{(U \cap \partial M, \Pi \circ \varphi|_{U \cap \partial M}) : (U, \varphi) \in \mathcal{B}\}$ es un atlas para ∂M . \square

Para concluir, veremos un resultado relativo a la imagen inversa de un valor regular, en el contexto de las variedades con frontera.

Proposición 1.44. Sea M una variedad diferenciable (sin frontera) de dimensión n . Sea $f \in C^\infty(M)$ y supongamos que 0 es un valor regular. Entonces $f^{-1}([0, \infty))$ es una variedad con frontera y $\partial M = f^{-1}(0)$.

DEMOSTRACIÓN. El conjunto $f^{-1}((0, \infty))$ es abierto en M . Si $p \in f^{-1}(0)$, por (1) del teorema 1.25, existe (U, φ) carta tal que $\varphi(p) = 0$ y

$$f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = x_n.$$

Así, $f^{-1}([0, \infty)) \cap U = \varphi^{-1}(\mathbb{H}^n)$, y entonces $(\varphi^{-1}(\mathbb{H}^n), \varphi|_{\varphi^{-1}(\mathbb{H}^n)})$ es una carta de variedad con frontera. \square

1.6. Campos vectoriales y flujos

Para finalizar este capítulo presentamos los conceptos básicos de la teoría de campos vectoriales definidos en una variedad. Desde un punto de vista intuitivo, un campo vectorial X en una variedad M es una transformación que asocia a cada punto p de M un vector tangente $X(p) \in T_pM$. Utilizaremos el concepto de haz tangente definido en 1.15 para formalizar esta idea.

Definición 1.45. Sea M una variedad diferenciable, TM su haz tangente y $\pi : TM \rightarrow M$ la transformación de proyección $\pi(v) = p$, si $v \in T_pM$. Un *campo vectorial* en M es una transformación $X : M \rightarrow TM$ tal que $\pi \circ X$ es la identidad en M ; en otras palabras, $X(p) \in T_pM$ para todo $p \in M$.

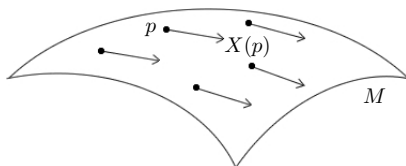


Figura 1.12: Un campo vectorial en M .

Dada una carta (U, φ) de una vecindad $U \subset M$, si u_i son las funciones coordenadas en \mathbb{R}^n y $x_i = u_i \circ \varphi$, la proposición 1.13 implica que X tiene la expresión

$$X(p) = \sum_{i=1}^n X([x_i])(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p, \quad p \in U. \quad (1.1)$$

Queremos definir el concepto de un campo vectorial diferenciable. Como en otros casos, es posible establecer este concepto mediante algunos criterios alternativos, como se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 1.46. *Sea $X : M \rightarrow TM$ una transformación tal que $\pi \circ X$ es la identidad en M . Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. X es diferenciable.
2. En la expresión (1.1) se tiene que las funciones $X([x_i])$ son diferenciables.
3. Para cada función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, la función $X(f)$ dada por $X(f)(p) = X(p)(f)$ es diferenciable.

Demostración. (1) \Leftrightarrow (2). Supongamos primero que $X : M \rightarrow TM$ es diferenciable. Esto quiere decir que si $p \in M$, (U, φ) es una carta de una vecindad de p en M y $(TU, \bar{\varphi})$ es la carta de TM asociada a (U, φ) , como en la demostración de la proposición 1.16, entonces la transformación $\bar{\varphi} \circ X \circ \varphi^{-1}$ es diferenciable en $\varphi(p)$. Puesto que X tiene la expresión dada por (1.1), es fácil ver que

$$\bar{\varphi} \circ X \circ \varphi^{-1}(q) = \sum_{i=1}^n X([x_i]) \circ \varphi^{-1}(q) e_i,$$

de modo que las funciones $X([x_i]) \circ \varphi^{-1}$ son diferenciables en $\varphi(U)$ y por tanto las funciones $X([x_i])$ son diferenciables en U . La afirmación recíproca (2) \Rightarrow (1) es clara.

(2) \Leftrightarrow (3). Sean f una función diferenciable, $p \in M$ y (U, φ) una carta de una vecindad de p en M . Entonces

$$X(f)(p) = \sum_{i=1}^n X([x_i])(p) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_p.$$

Por hipótesis, las funciones $X([x_i])$ son diferenciables. Además, como f es diferenciable, $\partial f / \partial x_i$ también lo es, de modo que la expresión anterior es diferenciable. Recíprocamente, si esta expresión es diferenciable para toda función f diferenciable, podemos evaluar la expresión anterior para $f = x_j$, $j = 1, \dots, m$ y concluir la diferenciable de las funciones $X([x_i])$. \square

Definición 1.47. Un campo vectorial $X : M \rightarrow TM$ es *diferenciable* si y sólo si satisface cualquiera de las condiciones de la proposición anterior. Denotaremos al conjunto de campos vectoriales diferenciables en M mediante $\mathfrak{X}(M)$.

Ahora procederemos a estudiar las trayectorias definidas por un campo vectorial. Primero enunciaremos un resultado para campos definidos en conjuntos abiertos de \mathbb{R}^n . Omitiremos la demostración, que puede consultarse en [6].

Teorema 1.48 (Existencia y unicidad). *Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $X \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$.*

1. *Dados $x_0 \in U$, $t_0 \in \mathbb{R}$, existen $\varepsilon > 0$ y $\alpha : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \rightarrow U$ una única solución a la ecuación diferencial*

$$x' = X(x) \tag{1.2}$$

que satisface $\alpha(t_0) = x_0$.

2. *Para cada $x \in U$, sea $J(x)$ el intervalo maximal donde está definida una solución a (1.2), que escribiremos como $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$, con $\varphi(0, x) = x$. Entonces el conjunto $\Omega = \{(t, x) : x \in U, t \in J(x)\}$ es abierto y la función $\varphi : \Omega \rightarrow U$ es de clase C^1 .*
3. *Si se satisfacen dos de las condiciones $t \in J(x)$, $t + s \in J(x)$, $s \in J(\varphi_t(x))$, entonces se satisface la tercera y en tal caso*

$$\varphi_{t+s}(x) = \varphi_s(\varphi_t(x)).$$

La función $\varphi : \Omega \rightarrow U$ dada por el teorema 1.48 se llama el *flujo local* definido por el campo vectorial $X \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Para cada $x \in U$, la derivada $A(t) = D\varphi_t(x)$ satisface la ecuación diferencial

$$A'(t) = DX(\varphi_t(x))A(t) \tag{1.3}$$

conocida como la primera variación de (1.2).

Proposición 1.49. *Si $X \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$, entonces $\varphi \in C^k(\Omega, U)$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que el resultado es válido para cualquier campo vectorial de clase C^k y que $X \in C^{k+1}(U, \mathbb{R}^n)$. Consideremos el campo vectorial $Y(x, u) = (X(x), DX(x)u)$ cuyo flujo local está dado por

$$\Phi_t(x, u) = (\varphi_t(x), D\varphi_t(x)u).$$

Como $Y \in C^k(U \times \mathbb{R}^n)$, $\Phi \in C^k(\Omega \times \mathbb{R}^n, U \times \mathbb{R}^n)$. □

Definición 1.50. Sean M una variedad diferenciable y $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ una curva diferenciable. Definimos el *vector tangente* a la curva en $\alpha(t)$ por $\alpha'(t) = \alpha_*(d/dt)_t$.

Observación. Si $h : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo y $X \in \mathfrak{X}(M)$, definimos un campo vectorial $h_*X \in \mathfrak{X}(N)$ por $h_*X(y) = h_*(X(h^{-1}(y)))$. Sean $\alpha : I \rightarrow M$ una curva diferenciable y $\beta = h \circ \alpha$. Entonces $\beta'(t) = h_* \circ \alpha_*(d/dt)_t = h_*(\alpha'(t))$. Así,

$$\alpha'(t) = X(\alpha(t)) \text{ si y sólo si } \beta'(t) = h_*(X(\alpha(t))) = h_*X(\beta(t)).$$

Es decir, α es una solución de la ecuación diferencial $x' = X(x)$ si y sólo si $\beta = h \circ \alpha$ es una solución de la ecuación diferencial $y' = h_*(X)(y)$.

Si $F : N \rightarrow L$ es otro difeomorfismo, entonces $(F \circ h)_*X = F_*(h_*X)$. En efecto,

$$\begin{aligned} (F \circ h)_*X(F(h(x))) &= (F \circ h)_{*x}(X(x)) = F_{*h(x)}(h_{*x}(X(x))) \\ &= F_{*h(x)}(h_*X(h(x))) = F_*(h_*X)(F(h(x))). \end{aligned}$$

Tenemos ahora la versión para variedades del teorema 1.48:

Teorema 1.51. *Sea M^n una variedad diferenciable y sea $X \in \mathfrak{X}(M)$.*

1. *Dados $p \in M$, $t_0 \in \mathbb{R}$, existen $\varepsilon > 0$ y $\alpha : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \rightarrow M$ una única solución a la ecuación diferencial*

$$x' = X(x) \tag{1.4}$$

que satisface $\alpha(t_0) = p$.

2. Definimos $J(x)$ y $\varphi(t, x)$ de manera similar a lo realizado en el teorema 1.48. Entonces el conjunto $\Omega = \{(t, x) : x \in M, t \in J(x)\}$ es abierto y la función $\varphi : \Omega \rightarrow M$ es diferenciable.
3. Si se satisfacen dos de las condiciones $t \in J(x)$, $t + s \in J(x)$, $s \in J(\varphi_t(x))$, entonces se satisface la tercera y en tal caso

$$\varphi_{t+s}(x) = \varphi_s(\varphi_t(x)).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea (U, ψ) carta con $p \in U$. Consideremos el campo vectorial diferenciable $Y = \psi_*X : \psi(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$. Por el teorema 1.48 existen $\varepsilon > 0$ y una única solución $\beta : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \rightarrow M$ a la ecuación diferencial $y' = Y(y)$ que satisface $\beta(t_0) = \psi(p)$. Por la observación anterior al teorema, $\alpha = \psi^{-1} \circ \beta$ es la única solución a (1.4) definida en $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ que satisface $\alpha(t_0) = p$. Las demás afirmaciones también son consecuencia del teorema 1.48. \square

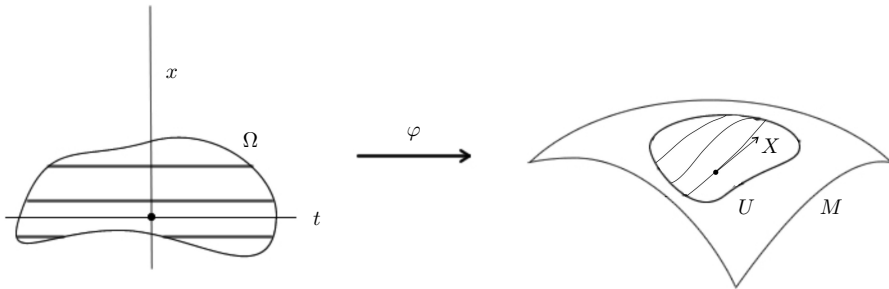


Figura 1.13: Flujo local del campo X .

Observación. La función $\varphi : \Omega \rightarrow M$ es el flujo local definido por $X \in \mathfrak{X}(M)$. Es fácil ver que si $h : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo y $X \in \mathfrak{X}(M)$, entonces el flujo local de h_*X es $(t, y) \mapsto h \circ \varphi_t \circ h^{-1}$.

El lector podría preguntarse en qué casos las trayectorias asociadas a un campo X están definidas para todo valor del parámetro. Un ejemplo importante es el siguiente.

Teorema 1.52. *Si M es una variedad compacta y $X \in \mathfrak{X}(M)$, entonces el conjunto Ω dado por el teorema 1.51 es $\mathbb{R} \times M$.*

DEMOSTRACIÓN. Para cada $x \in M$, sean $\varepsilon(x) > 0$ y U_x vecindad de x tales que $(-\varepsilon(x), \varepsilon(x)) \times U_x \subset \Omega$. Sea $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_k}\}$ una cubierta finita de M y hagamos $\varepsilon = \min\{\varepsilon(x_1), \dots, \varepsilon(x_k)\}$. Para $t \in \mathbb{R}$, sean $k(t) = \lfloor 2t/\varepsilon \rfloor$ y $s(t) = t - k(t)\varepsilon/2$. Definimos

$$\varphi_t = \begin{cases} \varphi_{s(t)} \circ \underbrace{\varphi_{\varepsilon/2} \circ \dots \circ \varphi_{\varepsilon/2}}_{k(t) \text{ factores}}, & t \geq 0 \\ \varphi_{s(t)} \circ \underbrace{\varphi_{-\varepsilon/2} \circ \dots \circ \varphi_{-\varepsilon/2}}_{-k(t) \text{ factores}}, & t < 0. \end{cases}$$

□

Para concluir esta sección incluimos un resultado acerca de la posibilidad de usar un campo vectorial $X \neq 0$ como un campo asociado a una carta.

Teorema 1.53 (Caja de flujo). *Sean M^n una variedad y $X \in \mathfrak{X}(M)$. Si $X(p) \neq 0$, existe una carta (U, ψ) , $\psi = (x_1, \dots, x_n)$ de una vecindad U de p tal que $X|_U = \partial/\partial x_1$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea (V, ϕ) una carta con $p \in V$, $\phi(p) = 0$ y tal que

$$\phi_*(X(p)) = e_1 = (1, 0, \dots, 0).$$

Sea φ_t el flujo local de ϕ_*X . Definimos

$$h : (-\varepsilon, \varepsilon)^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad h(y_1, \dots, y_n) = \varphi_{y_1}(0, y_2, \dots, y_n)$$

y observamos que

$$h(y_1 + t, \dots, y_n) = \varphi_{y_1+t}(0, y_2, \dots, y_n) = \varphi_t(h(y_1, \dots, y_n)),$$

Así $D_1h(y) = \phi_*X(h(y))$ y $D_ih(0) = e_i$ para $i > 1$. Entonces $Dh(0) = I$ y por el teorema de la función inversa, h es un difeomorfismo de una vecindad del origen en otra. Si $\psi = h^{-1} \circ \phi$, entonces

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_{\psi^{-1}(y)} = \psi_{*y}^{-1}(e_1) = \phi_{*h(y)}^{-1}(D_1h(y)) = X(\psi^{-1}(y)). \quad \square$$

1.7. La derivada de Lie, I

En esta sección presentamos una operación llamada derivada de Lie, que por el momento definiremos sólo para funciones y para campos vectoriales, y que posteriormente extenderemos a otras transformaciones.

Definición 1.54. Sean M variedad diferenciable, $X \in \mathfrak{X}(M)$ y φ_t el flujo local de X . Para $f \in C^\infty(M)$ y $Y \in \mathfrak{X}(M)$ definimos la *derivada de Lie* L_X por

$$\begin{aligned} L_X f(p) &= X(p)(f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \varphi_t)(p), \\ L_X Y(p) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi_{-t*} Y)(p). \end{aligned}$$

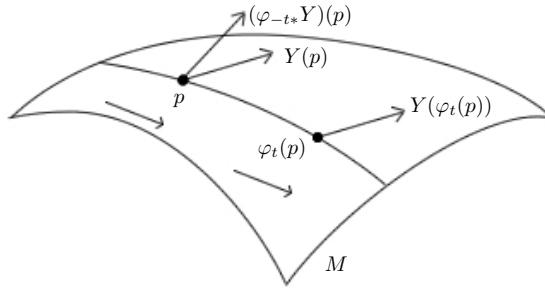


Figura 1.14: Construcción de la derivada de Lie $L_X Y$. La curva es una trayectoria de X .

Proposición 1.55. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$. Entonces

1. $L_X(fY) = fL_X(Y) + L_X(f)Y$.
2. $(L_X Y)(f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$.

DEMOSTRACIÓN. La demostración de la primera afirmación es directa y se deja como ejercicio para el lector. Para la segunda, usamos el lema 1.12 y escribimos $(f \circ \varphi)(t, p)$ como $f(p) + tg(t, p)$, donde

$$g(t, p) = \int_0^1 D_1(f \circ \varphi)(ts, p) ds, \quad g(0, p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ \varphi(t, p) = X(f)(p).$$

Queremos calcular

$$(L_X Y)(f)(p) = (L_X Y)(p)(f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_{-t*} Y(p)(f).$$

Observemos que

$$\begin{aligned} (\varphi_{-t*} Y)(p)(f) &= Y(\varphi_t(p))(f \circ \varphi_{-t}) = Y(\varphi_t(p))(f - tg(-t, \cdot)) \\ &= (Y(f))(\varphi_t(p)) - tY(g(-t, \cdot))(\varphi_t(p)); \end{aligned}$$

de este modo,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi_{-t*} Y)(p)(f) &= X(Y(f))(p) - Y(g(0, \cdot))(p) \\ &= (X(Y(f)) - Y(X(f)))(p). \quad \square \end{aligned}$$

La expresión obtenida en el segundo inciso de la proposición anterior recibe un nombre especial.

Definición 1.56. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ dos campos vectoriales. El *corchete de Lie* de X y Y es el campo vectorial $[X, Y]$ dado por

$$[X, Y](f) = L_X Y(f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

Corolario 1.57 (Identidad de Jacobi). Si $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, se cumple que

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$$

Esta igualdad se puede escribir $L_{[X, Y]} = L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X$.

Para finalizar esta sección veremos dos propiedades importantes del corchete de Lie. La primera dice que el corchete de dos campos se anula precisamente cuando los flujos asociados a dichos campos conmutan.

Proposición 1.58. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ con flujos locales φ_t, ψ_s . Entonces

$$[X, Y] = 0 \text{ si y sólo si } \varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t.$$

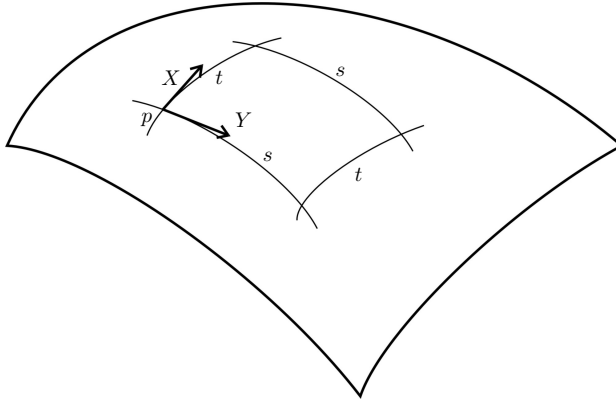


Figura 1.15: Interpretación geométrica de $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$.

DEMOSTRACIÓN. La idea de la demostración consiste en mostrar que el flujo φ_t de X es igual al flujo $\psi_{-s} \circ \varphi_t \circ \psi_s$ de $(\psi_{-s})_* X$. Para esto basta mostrar que $(\psi_{-s})_* X = X$ para toda s . Tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \Big|_{s=u} (\psi_{-s})_* X &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (\psi_{-(u+s)})_* X \\ &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (\psi_{-u})_* (\psi_{-s})_* X = (\psi_{-u})_* (L_Y X). \end{aligned}$$

Si $L_Y X = 0$, $(\psi_{-s})_* X$ no depende de s , de modo que $(\psi_{-s})_* X = \psi_{0*} X = X$ y así $\psi_{-s} \circ \varphi_t \circ \psi_s = \varphi_t$.

Recíprocamente, si $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$ tenemos que el flujo local de $(\psi_{-s})_* X$ es φ_t ; es decir, $(\psi_{-s})_* X = X$. De la expresión de arriba tenemos que $(\psi_{-u})_* (L_Y X) = 0$ y por tanto $L_Y X = 0$. \square

La siguiente proposición dice que la anulación del corchete es una condición necesaria y suficiente para que una familia de campos linealmente independientes se puedan interpretar como los campos asociados a una carta.

Proposición 1.59. Sean $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ campos linealmente independientes en $p \in M$ y tales que para toda $i, j = 1, \dots, k$ cumplen que

$[X_i, X_j] = 0$. Entonces hay una carta (U, ψ) de una vecindad de p , con $\psi = (x_1, \dots, x_n)$ tal que

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, X_k = \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sean (V, ϕ) una carta con $\phi(p) = 0$ y $Y_i = \phi_* X_i$. Entonces $Y_1(0), \dots, Y_k(0)$ son linealmente independientes y podemos completar una base de \mathbb{R}^n con vectores Y_{k+1}, \dots, Y_n . Sea $A \in GL(n)$ tal que $AY_i(0) = e_i, i = 1, \dots, k$, $AY_{k+j} = e_{k+j}$. Sea φ_t^i el flujo local de $Z_i = AY_i, i = 1, \dots, k$ y definamos

$$h(x_1, \dots, x_n) = \varphi_{x_1}^1 \circ \dots \circ \varphi_{x_k}^k(0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Como $[Z_i, Z_j] = A\phi_*[X_i, X_j] = 0$ para $i = 1, \dots, k$, tenemos

$$h(x_1, \dots, x_i + t, \dots, x_n) = \varphi_t^i \circ h(x_1, \dots, x_n),$$

de modo que

$$Dh(x)e_i = D_i h(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^i \circ h(x) = Z_i(h(x)).$$

Así, $D_i h(0) = Z_i(0) = e_i, i = 1, \dots, k$ y $D_{k+j} h(0) = e_{k+j}$, por lo que h resulta ser un difeomorfismo de una vecindad del origen en otra. Si $\psi = h^{-1} \circ A \circ \phi$, entonces

$$\psi_* X_i = h_*^{-1} A \phi_* X_i = h_*^{-1} Z_i = e_i.$$

lo cual concluye la demostración. □

1.8. Ejercicios

1. Sea L el espacio cociente obtenido de $(\mathbb{R} \times \{1\}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$ identificando $(x, 1)$ con $(x, 0)$ si $x \neq 0$. Muestre que L es un espacio topológico localmente homeomorfo a \mathbb{R} , pero que no es Hausdorff.
2. Demuestre cada uno de los siguientes incisos.
 - a) Toda variedad diferenciable es localmente compacta.

- b) Toda variedad es localmente conexa por trayectorias.
- c) Una variedad conexa es conexa por trayectorias.
3. Muestre que un subconjunto U de una variedad diferenciable M^n es a su vez una variedad de dimensión n si y sólo si U es un subconjunto abierto de M .
4. Sea M una variedad diferenciable y $f : M \rightarrow N$ un homeomorfismo. Demuestre que N tiene una única estructura diferenciable tal que f es un difeomorfismo.
5. Considere al toro $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ como un subconjunto de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Sea T/\sim el cociente obtenido al identificar (z, w) con $(-z, \bar{w})$. ¿Es este cociente una variedad diferenciable?
6. Sea M^n una variedad y $U \subset M$ un subconjunto abierto. Demuestre que si $p \in U$, entonces $T_p U = T_p M$.
7. Sean $(M^n, \mathcal{A}), (N^m, \mathcal{B})$ variedades diferenciables. Demuestre que
- La colección de cartas $(U \times V, \varphi \times \psi)$, con $(U, \varphi) \in \mathcal{A}, (V, \psi) \in \mathcal{B}$ determina una estructura diferenciable de dimensión $n + m$ en $M \times N$.
 - Las proyecciones $\pi_1 : M \times N \rightarrow M, \pi_2 : M \times N \rightarrow N$ son diferenciables.
 - Una transformación $F : P \rightarrow M \times N$ es diferenciable si y sólo si $\pi_1 \circ F, \pi_2 \circ F$ son diferenciables.
 - Si $f : P \rightarrow M$ y $g : Q \rightarrow N$ son diferenciables, entonces $f \times g$ lo es. Determine el rango de $f \times g$ en términos de los rangos de f y g .
8. Sean $\pi_{\pm} : \mathbb{S}^n \setminus \{p_{\pm}\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ las proyecciones estereográficas desde los polos $p_{\pm} = (0, \dots, 0, \pm 1)$ de la esfera \mathbb{S}^n . Demuestre que las cartas $(\mathbb{S}^n \setminus \{p_+\}, \pi_+)$ y $(\mathbb{S}^n \setminus \{p_-\}, \pi_-)$ determinan una estructura diferenciable en esta variedad.
9. Sean C_0, C_1 cerrados ajenos en una variedad diferenciable M . Demuestre que existe una función diferenciable $f : M \rightarrow [0, 1]$ tal que $C_i = f^{-1}(i)$ para $i = 0, 1$.

10. Muestre que

- a) El conjunto $N \subset M$ tiene una estructura de subvariedad diferenciable de dimensión k de M si y sólo si para todo punto $p \in N$ hay una carta (U, φ) de una vecindad de p en M tal que $N \cap U = U \cap \varphi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\})$.
- b) El conjunto $N \subset M$ es una subvariedad cerrada de M si y sólo si para cada punto de N existe una carta como la del primer inciso.

11. Muestre que el conjunto $\{(x, |x|) : x \in \mathbb{R}\}$ no es la imagen de una inmersión $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$.

12. Demuestre las siguientes afirmaciones.

- a) Si $U \subset \mathbb{R}^k$ es un conjunto abierto y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ es diferenciable, entonces la gráfica de f dada como $\{(p, f(p)) : p \in U\}$ es una subvariedad de \mathbb{R}^n .
- b) Toda subvariedad de \mathbb{R}^n es localmente la gráfica de una función diferenciable.

13. Sean M, N variedades de dimensión n y $f : M \rightarrow N$ una inmersión. Demuestre que

- a) f es una transformación abierta; es decir, manda abiertos en abiertos.
- b) Si M es compacta y N es conexa entonces f es sobre.

14. Sea \mathbb{S}^1 el conjunto de complejos unitarios. Defina $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ por $f(t) = (\exp(it), \exp(i\alpha t))$ donde α es un número irracional. Muestre que f es una inmersión inyectiva y que $f(\mathbb{R})$ es densa en $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

15. Defina \mathbb{P}^n , el *espacio proyectivo (real)* de dimensión n , como el cociente de \mathbb{S}^n identificando un punto p con su antípoda. Si $\pi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ es la proyección canónica, muestre que $f : \mathbb{P}^n \rightarrow M$ es diferenciable si y sólo si $f \circ \pi : \mathbb{S}^n \rightarrow M$ lo es y el rango de f es igual al rango de $f \circ \pi$.

16. Puesto que podemos considerar $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$, también $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$. Muestre que $\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{P}^{n-1}$ es homeomorfo al disco unitario $\mathbb{D}^n \subset \mathbb{R}^n$.

17. Demuestre las siguientes afirmaciones.

- a) Defina $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ por $f([x, y, z]) = (yz, xz, xy)$. Muestre que f no es una inmersión en precisamente seis puntos.
- b) Defina $g : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ por $g([x, y, z]) = (x^2 - y^2, yz, xz, xy)$. Muestre que g es un encaje.

18. Una función continua $f : X \rightarrow Y$ entre espacios topológicos es *propia* si para cualquier compacto $C \subset Y$ se tiene que $f^{-1}(C)$ es compacto. El conjunto límite $L(f)$ de f es el conjunto de puntos $y \in Y$ para los cuales existe una sucesión (x_n) en X sin subsucesiones convergentes tal que $y = \lim f(x_n)$.

- a) f es propia si y sólo si $L(f) = \emptyset$.
- b) $f(X)$ es cerrado en Y si y sólo si $L(f) \subset f(X)$.
- c) Encuentre $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $f(\mathbb{R})$ cerrada pero $L(f) \neq \emptyset$.
- d) $f : X \rightarrow Y$ continua e inyectiva es un homeomorfismo sobre su imagen si y sólo si $L(f) \cap f(X) = \emptyset$.
- e) Una subvariedad $N \subset M$ es cerrada si y sólo si la inclusión $i : N \rightarrow M$ es propia.
- f) Si M es una variedad diferenciable, entonces existe una función diferenciable $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ propia.

19. Sea $M(m, n; k)$ el conjunto de matrices en $M(m, n)$ con rango k .

- a) Demuestre que $M(m, n; k)$ es una subvariedad de $M(m, n)$ de dimensión $k(n + m - k)$. *Sugerencia:* Dado $X_0 \in M(m, n; k)$, existen matrices $P \in M(m)$, $Q \in M(n)$ tales que

$$PX_0Q = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix}$$

con $A_0 \in M(k, k)$ no singular. Si X es cercana a X_0 , entonces

$$PXQ = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

con $A \in M(k)$ no singular y $X \in M(m, n; k)$ si y sólo si $D = CA^{-1}B$.

b) Demuestre que $M(2, 2; 1)$ es un *cono* en \mathbb{R}^4 ; es decir, si $A \in M(2, 2; 1)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, entonces $\lambda A \in M(2, 2; 1)$. Al intersecar este conjunto con \mathbb{S}^3 , se obtiene una variedad compacta de dimensión 2. ¿Cuál?

20. Sean (U, φ) , $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ y (U, ψ) , $\psi = (y_1, \dots, y_n)$ dos cartas definidas en un mismo conjunto abierto $U \subset M$. Si $X \in \mathfrak{X}(M)$, sabemos que

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{y} \quad X = \sum_{j=1}^n \bar{X}_j \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

Obtenga los coeficientes \bar{X}_j en términos de los coeficientes X_i .

21. Construya un campo vectorial (a) en un intervalo (b) en un disco de dimensión 2 cuyas trayectorias no puedan extenderse a todo \mathbb{R} .

22. Sean M, N variedades y $f \in C^\infty(M, N)$. Dos campos $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $Y \in \mathfrak{X}(N)$ están *f-relacionados* si y sólo si $f_{*p}(X(p)) = Y_{f(p)}$ para todo $p \in M$. Demuestre que

a) X y Y están *f-relacionados* si y sólo si $X(g \circ f) = Y(g) \circ f$ para toda $g \in C^\infty(N)$.

b) Si X_i está *f-relacionado* con Y_i , $i = 1, 2$, entonces $[X_1, X_2]$ está *f-relacionado* con $[Y_1, Y_2]$.

23. Sea (U, φ) , $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$, una carta de $U \subset M$ y sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ dos campos vectoriales con expresiones locales

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{y} \quad Y = \sum_{i=1}^n Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Demuestre que

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^n \left(X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

24. Un *punto crítico* de una función $f \in C^\infty(M)$ es un punto $p \in M$ tal que $f_{*p} = 0$. Demuestre las siguientes afirmaciones:

- a) Si p es un punto crítico de f , entonces existe una función bien definida $H_f : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$H_f(X(p), Y(p)) = X(p)(Y(f)) = Y(p)(X(f)).$$

- b) Con la misma hipótesis sobre p , entonces H es bilineal y simétrica.
 c) Si (U, φ) es una carta con $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$, entonces

$$H_f \left(\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p, \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_p \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p).$$

- d) Si $\alpha = \alpha(s)$ es una curva en M tal que $\alpha'(0) = v$, entonces

$$H(v, v) = \frac{d^2(f \circ \alpha)}{ds^2}(0).$$

25. Un grupo (G, \cdot) es un *grupo de Lie* si y sólo si G es una variedad diferenciable y la transformación $\mu : G \times G \rightarrow G$ dada por $\mu(g, h) = g \cdot h^{-1}$ es diferenciable.

- a) En el ejemplo 1.29 se mostró que el grupo ortogonal $O(n)$ es una variedad. Muestre que la operación μ en $O(n)$ es diferenciable y por tanto, que el grupo ortogonal es un grupo de Lie.
 b) Muestre que los siguientes grupos de matrices son grupos de Lie:
- $SO(n) = \{A \in O(n) : \det A = 1\}$.
 - $U(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : A\bar{A}^t = I\}$.
 - $SU(n) = \{A \in U(n) : \det A = 1\}$.
 - $SL(2, \mathbb{R}) = \{A : \det A = 1\}$.
 - $SU(1, 1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}$.

26. Una *acción* de un grupo de Lie G sobre una variedad M es una transformación diferenciable $G \times M \rightarrow M$, $(g, p) \mapsto g \cdot p$ tal que $gh \cdot p = g \cdot (h \cdot p)$ y $e \cdot p = p$ para todo $p \in M$. La *órbita* de un punto p bajo la acción es el conjunto $G \cdot p = \{g \cdot p : g \in G\}$. El *grupo de isotropía* de p es el conjunto $G_p = \{g \in G : g \cdot p = p\}$. La acción es *transitiva* si y sólo si M es la órbita de un punto.

- a) Muestre que la acción natural de $O(n)$ en \mathbb{R}^n induce una acción transitiva en \mathbb{S}^{n-1} y que el grupo de isotropía de $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \middle| B \in O(n-1) \right\} \cong O(n-1).$$

De hecho, la acción de $SO(n)$ en \mathbb{S}^{n-1} también es transitiva y el grupo de isotropía de e_1 es isomorfo a $SO(n-1)$.

- b) Muestre que la acción de $SO(n)$ en \mathbb{R}^n induce una acción transitiva en el espacio proyectivo \mathbb{P}^{n-1} y que el grupo de isotropía de $\mathbb{R}e_1$ es el conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} \det B^{-1} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} : B \in O(n-1) \right\} \cong O(n-1).$$

- c) Enuncie y demuestre resultados similares a los obtenidos en los incisos anteriores, para los grupos $U(n)$ y $SU(n)$, la esfera $\mathbb{S}^{2n-1} = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = 1\}$ y el espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$, definido como el conjunto de rectas complejas que pasan por el origen de \mathbb{C}^n .
- d) El grupo $SL(2, \mathbb{R})$ actúa en el semiplano superior $\mathbb{H}_+^2 = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z > 0\}$ como un grupo de transformaciones de Möbius:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Muestre que esta acción es transitiva y que $SL(2, \mathbb{R})_i \cong O(2)$.

- e) Análogamente, el grupo $SU(1, 1)$ actúa en el disco unitario $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ como un grupo de transformaciones de Möbius. Muestre que esta acción es transitiva y que $SU(1, 1)_0 \cong U(1)$.

CAPÍTULO 2

Haces vectoriales

Ahora estudiaremos otros objetos geométricos de similar importancia, los haces vectoriales. Recomendamos al lector que en este capítulo tenga en mente un ejemplo central, a saber, el haz tangente TM a una variedad M^n . Primero daremos una introducción intuitiva con subespacios de un espacio euclidiano, para luego pasar a haces vectoriales abstractos.

2.1. Haces de subespacios de \mathbb{R}^{n+k}

Si la variedad M^n está contenida en algún espacio euclidiano \mathbb{R}^{n+k} , entonces podemos pensar al haz tangente como una familia de subespacios vectoriales de \mathbb{R}^{n+k} que varía en forma continua, o incluso diferenciable. Esta variación continua (diferenciable) se puede formalizar usando una carta: Si (U, φ) es una carta de un conjunto $U \subset M$, de modo que $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$, sabemos que para cada $p \in M$ los vectores $\partial/\partial x_i(p)$, $i = 1, \dots, n$ forman una base para T_pM y que los campos $\partial/\partial x_i$ varían en forma continua (diferenciable).

Ejemplo 2.1 (Haz normal). Dada una variedad $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$, a cada punto $p \in M$ le asociamos su *espacio normal* $N_pM = (T_pM)^\perp$. Esta familia de subespacios también varía en forma continua (diferenciable), lo que podemos comprobar como sigue: Si (U, φ) es una carta de M como en el párrafo anterior y $p \in U$, sabemos que el conjunto de vectores $\partial/\partial x_i(p)$, $i = 1, \dots, n$ se puede completar con vectores v_{n+1}, \dots, v_{n+k} a una base de \mathbb{R}^{n+k} . La

matriz formada por las coordenadas de los vectores

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p), v_{n+1}, \dots, v_{n+k}$$

con respecto de una base es una matriz invertible, de modo que su determinante es diferente de cero. Por continuidad de la función determinante, la matriz asociada a los vectores

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(q), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(q), v_{n+1}, \dots, v_{n+k}$$

sigue siendo invertible en una vecindad de p . Al aplicar el proceso de ortogonalización usual, obtenemos una base de \mathbb{R}^{n+k} de la forma

$$w_1(q), \dots, w_n(q), w_{n+1}(q), \dots, w^{n+k}(q)$$

donde los primeros n vectores generan a T_pM y los k últimos generan a N_pM . El lector podrá verificar fácilmente que este procedimiento implica la variación continua (diferenciable) de N_pM . La figura 2.1 muestra el caso de una curva en \mathbb{R}^2 .

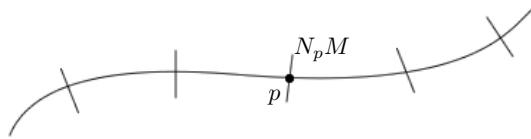


Figura 2.1: Haz normal de una curva en \mathbb{R}^2 .

Ahora daremos una primera definición de un haz.

Definición 2.2. Sea B un espacio topológico. Un *haz de subespacios* de \mathbb{R}^{n+k} de rango n sobre B es una familia de subespacios vectoriales $\{L_p, p \in B\}$ de dimensión n en \mathbb{R}^{n+k} , que varía continuamente, en el sentido siguiente: Para cada $p \in B$ existe una vecindad U de p en B y funciones continuas $v_i : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$, $i = 1, \dots, n$, tales que el conjunto $\{v_i(q)\}$ es una base de L_q .

Si $B = M$ es una variedad diferenciable y las funciones $v_i : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ son diferenciables, decimos que el haz de subespacios es *diferenciable*.

Ejemplo 2.3 (Haz trivial). Sea B un espacio topológico. Para cada $p \in B$ hacemos $L_p = \mathbb{R}^n$. En este caso, $v_i(p) = e_i$, donde e_i pertenece a la base canónica de \mathbb{R}^n . Este haz sobre B es llamado el *haz trivial*.

Ejemplo 2.4. Consideremos el haz tangente $T\mathbb{S}^1$ sobre la circunferencia \mathbb{S}^1 ; es decir, para cada $p \in \mathbb{S}^1$ se tiene $L_p = T_p\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$. Podemos representar este haz en $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$, o bien en $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$, donde \mathbb{D}^2 es el disco unitario en \mathbb{R}^2 .

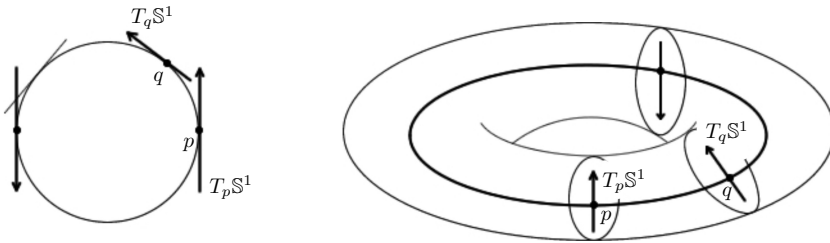


Figura 2.2: El haz tangente $T\mathbb{S}^1$ y su representación en $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$.

Ejemplo 2.5. Consideremos de nuevo $B = \mathbb{S}^1$. Cada $p \in \mathbb{S}^1$ se puede escribir como $p = (\cos \theta, \sin \theta)$. Definimos L_p como el subespacio de \mathbb{R}^2 generado por $v(\theta) = (\cos(\theta/2), \sin(\theta/2))$. Es claro que la base $v(\theta)$ no se puede extender continuamente a todo \mathbb{S}^1 .

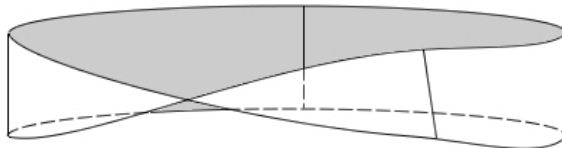


Figura 2.3: Representación del haz del ejemplo 2.5 en $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$.

Ahora queremos establecer un concepto de *isomorfismo* de haces. Supongamos que $\{L_p, p \in B\}$ es un haz de subespacios de rango n sobre un espacio topológico B y que $\{H_p, p \in B\}$ es un haz de subespacios de rango m sobre el mismo espacio B . Podemos considerar una familia de transformaciones lineales $\{T_p : L_p \rightarrow H_p, p \in B\}$, que varíe continuamente en el siguiente sentido: Sabemos que para cada $p \in B$ existen una vecindad U de p , así como bases de L_q y de H_q , $q \in U$, que varían continuamente. Al calcular la matriz de cada T_p con respecto de estas bases se obtiene una transformación A de U en el conjunto de las matrices $m \times n$. Pedimos entonces que esta transformación sea continua.

Definición 2.6. Sean $\{L_p, p \in B\}$ y $\{H_p, p \in B\}$ dos haces de subespacios de rango n sobre el mismo espacio B . Los haces son *isomorfos* si y sólo si existe una familia de isomorfismos $\{T_p : L_p \rightarrow H_p, p \in B\}$ que varía continuamente en el sentido del párrafo anterior.

Observación. Si $\{T_p : L_p \rightarrow H_p, p \in B\}$ es una familia de isomorfismos que varía continuamente, entonces la transformación $A : U \rightarrow M(m \times n)$ definida arriba es continua. Puesto que la transformación que a cada matriz invertible A le asocia su inversa A^{-1} también es continua, tenemos que la familia de isomorfismos $\{T_p^{-1} : H_p \rightarrow L_p, p \in B\}$ también varía continuamente.

Ejemplo 2.7. Consideremos de nuevo el haz tangente $T\mathbb{S}^1$. Para mostrar que este haz es isomorfo al haz constante $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, parametrizamos la circunferencia por medio de un ángulo θ , de modo que si $p = (\cos \theta, \sin \theta)$, entonces $T_p\mathbb{S}^1$ es generado por $(-\sin \theta, \cos \theta)$. Definimos un isomorfismo de $T_p\mathbb{S}^1$ en \mathbb{R} por $\lambda(-\sin \theta, \cos \theta) \mapsto \lambda$. La expresión matricial de esta transformación, con respecto de las bases $\{(-\sin \theta, \cos \theta)\}$ de $T_p\mathbb{S}^1$ y $\{1\}$ de \mathbb{R} es la matriz constante 1.

En la siguiente sección daremos una definición general de los haces vectoriales, que ilustraremos con los haces de subespacios que hemos introducido. Digamos que $\{L_p, p \in B\}$ es un haz de subespacios de \mathbb{R}^{n+k} de rango n sobre B . Podemos coleccionar a los espacios L_p en un solo objeto E , llamado el *espacio total* del haz:

$$E = \{(p, u) \in B \times \mathbb{R}^{n+k} \mid u \in L_p\}.$$

Si $\pi : E \rightarrow B$ denota la transformación $\pi(p, u) = p$, entonces es claro que $\pi^{-1}(p) = \{p\} \times L_p$, que puede identificarse de manera obvia con L_p . Cada uno de los espacios $\{p\} \times L_p$ es isomorfo a \mathbb{R}^n , de modo que para cada p existe una transformación

$$\varphi_p : \{p\} \times L_p \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^n.$$

Para coleccionar estos isomorfismos en una sola transformación continua en una vecindad U de un punto, construimos

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n, \quad \varphi(p, u) = (p, \varphi_p(p, u)).$$

con $\varphi_p(p, z_1 u_1(p) + \dots + z_n u_n(p)) = (z_1, \dots, z_n)$ y tenemos que φ es continua.

El lector podrá observar que si π_1 denota la proyección de $U \times \mathbb{R}^n$ sobre el primer factor, $\pi_1(p, u) = p$, se tiene que $\pi_1 \circ \varphi = \pi$.

Podemos entonces reformular esta discusión sobre la “variación continua” de los subespacios L_p pidiendo que exista una transformación continua $\varphi : \pi^{-1}(U) \subset E \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ tal que $\pi_1 \circ \varphi = \pi$ y que

$$\varphi_p = \varphi|_{\pi^{-1}(p)} : \pi^{-1}(p) \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^n$$

sea un isomorfismo lineal para cada $p \in U$. Adoptaremos este punto de vista en la siguiente sección.

2.2. Haces vectoriales

Ahora podemos dar la definición formal de un haz vectorial.

Definición 2.8. Sean B y E espacios topológicos y $\pi : E \rightarrow B$ una transformación continua y suprayectiva sobre B . Denotamos por ξ a la pareja (E, π) .

1. Una *carta de haz vectorial (real)* de rango n para ξ es una pareja (U, φ) , donde U es un subconjunto abierto de B y $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo, de modo que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times \mathbb{R}^n \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi_1 \\ & U & \end{array}$$

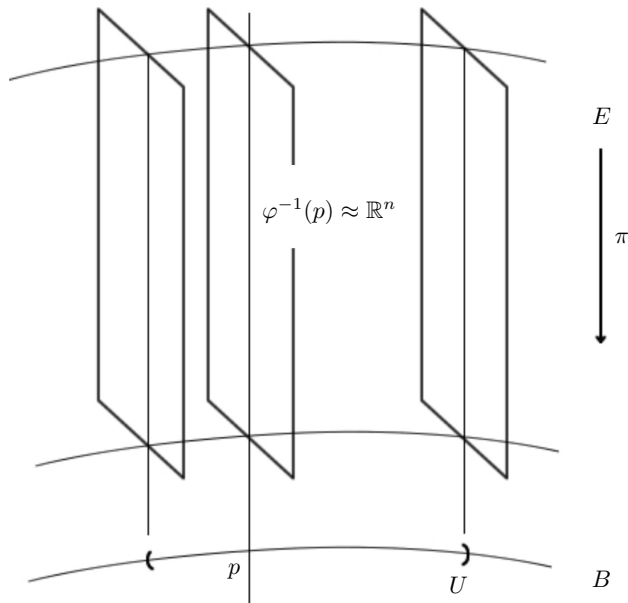


Figura 2.4: Una carta de haz vectorial (U, φ) .

2. Dos cartas de haz vectorial (U, φ) y (V, ψ) para ξ son *compatibles* si y sólo si $\psi_p \circ \varphi_p^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo lineal para cada $p \in U \cap V$.
3. Un *atlas de haz vectorial* \mathcal{A} para ξ es una colección de cartas de haz vectorial cuyos dominios cubren a B , tales que cualesquiera dos de ellas son compatibles.
4. Una *estructura de haz vectorial* para ξ es un atlas de haz vectorial maximal. Cuando ξ tenga una estructura de haz vectorial, abreviaremos diciendo que ξ es un *haz vectorial*.
5. Un haz vectorial ξ es *diferenciable* si y sólo si E y B son variedades diferenciables, $\pi : E \rightarrow B$ es diferenciable y las cartas de haz vectorial son difeomorfismos.

6. En este contexto, B , E y π son la *base*, E el *espacio total* y $\pi : E \rightarrow B$ la *proyección* del haz, respectivamente. Además, si $p \in B$, el conjunto $E_p = \pi^{-1}(p)$ es la *fibra* del haz en p .

Observación. Si \mathcal{A} es un atlas de haz vectorial para $\pi : E \rightarrow B$, podemos dotar de una estructura de espacio vectorial a cada fibra E_p pidiendo que φ_p sea un isomorfismo para alguna carta de haz vectorial $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ con $p \in U$.

El ejemplo más simple de haz vectorial sobre B es $\pi_1 : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow B$, conocido como *haz trivial*. Por tal razón una carta de haz vectorial se llama también una *trivialización local*.

Ejemplo 2.9 (Haz lineal canónico). Definimos una relación en $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ como sigue: $p \sim q$ si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $p = \lambda q$. Es fácil ver que \sim es una relación de equivalencia, de modo que para cada $p \in \mathbb{R}^{n+1}$, podemos denotar por $[p]$ a la clase de equivalencia de $p \in \mathbb{R}^{n+1}$ bajo esta relación. De hecho, $[p]$ es la recta en \mathbb{R}^{n+1} generada por p . El conjunto de clases de equivalencia bajo esta relación, o bien, el conjunto de rectas en \mathbb{R}^{n+1} que pasan por el origen, es el *espacio proyectivo (real) de dimensión n* , denotado por \mathbb{P}^n . Definiremos un haz sobre \mathbb{P}^n como sigue. Sea

$$E = \{([p], u) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid u = \lambda p \text{ para alguna } \lambda \in \mathbb{R}\}$$

y $\pi : E \rightarrow \mathbb{P}^n$ como $\pi([p], u) = [p]$. El haz $\gamma_n^1 = (E, \pi)$ es el *haz lineal canónico* sobre \mathbb{P}^n .

Sean $U \subset \mathbb{S}^n$ un conjunto abierto que no contiene puntos antípodas y $[U] = \{[p], p \in U\}$. Observemos que $\pi^{-1}[U] = \{([p], u) \mid u = \lambda p\}$, de modo que podemos definir $\varphi : \pi^{-1}[U] \rightarrow [U] \times \mathbb{R}$ como $\varphi([p], \lambda p) = ([p], \lambda)$. Es fácil ver que $([U], \varphi)$ es una carta de haz vectorial de rango 1 y que la colección de estas cartas da una estructura de haz vectorial para γ_n^1 .

Antes de considerar el siguiente ejemplo, definiremos un tipo de variedad que generaliza a los espacios proyectivos.

Definición 2.10 (Variedad grassmanniana). Sean $n, k \in \mathbb{N}$. Definimos la *variedad grassmanniana*, o simplemente la *grassmanniana* $G(n, k)$ como el conjunto de subespacios de dimensión n en \mathbb{R}^{n+k} :

$$G(n, k) = \{ p \mid p \text{ es un subespacio de dimensión } n \text{ en } \mathbb{R}^{n+k} \}.$$

Podemos dotar a $G(n, k)$ de una topología de la manera siguiente. Diremos que un conjunto de n vectores en \mathbb{R}^{n+k} es un n -marco si y sólo si los vectores son linealmente independientes. Si elegimos una base de \mathbb{R}^{n+k} , para cada conjunto de n vectores podemos formar una matriz A de $n \times (n+k)$ con las coordenadas de los vectores con respecto de la base dada. El hecho de que n vectores formen un n -marco se traduce en que la matriz A correspondiente tiene rango n , lo que a su vez implica que A tiene un menor $n \times n$ diferente de cero. Puesto que la función determinante es continua, existe una vecindad de A tal que las matrices en esa vecindad siguen teniendo un menor $n \times n$ distinto de cero, lo que implica que los n vectores correspondientes forman un n -marco. En síntesis, el conjunto de n -marcos en \mathbb{R}^{n+k} se puede ver como un conjunto abierto en el producto $\mathbb{R}^{n+k} \times \dots \times \mathbb{R}^{n+k}$ (n factores) y por tanto es una variedad, llamada *variedad de Stiefel*, que denotaremos $V(n, k)$.

Podemos definir una transformación $q : V(n, k) \rightarrow G(n, k)$ asociando a cada n -marco el espacio generado por éste. Damos a $G(n, k)$ la topología que hace continua a esta transformación.

De hecho, se puede obtener la misma topología para $G(n, k)$ fijándose solamente en el conjunto de n -marcos ortonormales:

$$V_0(n, k) = \{(v_1, \dots, v_n) \mid \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}, i, j = 1, \dots, n\};$$

es decir, damos a $G(n, k)$ la topología que hace continua a la restricción de q a este conjunto, $q_0 : V_0(n, k) \rightarrow G(n, k)$. Observemos que si definimos las funciones $f_{ij} : V(n, k) \rightarrow \mathbb{R}$ por $f_{ij}(v_1, \dots, v_n) = \langle v_i, v_j \rangle$, entonces cada f_{ij} es continua y $V_0(n, k)$ se puede expresar como la intersección de las imágenes inversas $f_{ij}^{-1}(\delta_{ij})$. Por tanto, $V_0(n, k)$ es un subconjunto cerrado del producto $\mathbb{S}^{n+k-1} \times \dots \times \mathbb{S}^{n+k-1}$ (n factores), y por tanto es un conjunto compacto. Dejaremos al lector los detalles de la demostración de que ambas topologías para $G(n, k)$ coinciden, hecho que usaremos en la demostración de la siguiente afirmación.

Proposición 2.11. *$G(n, k)$ es una variedad diferenciable compacta de dimensión nk . Además, la transformación que manda cada elemento $p \in G(n, k)$ en su complemento ortogonal $p^\perp \in G(k, n)$ es un difeomorfismo entre $G(n, k)$ y $G(k, n)$.*

DEMOSTRACIÓN. Primero mostraremos que $G(n, k)$ es Hausdorff. Si $p, q \in G(n, k)$ son distintos, consideremos un punto $x \in p \setminus q$ y la fun-

ción cuadrado de la distancia $d_x^2 : G(n, k) \rightarrow \mathbb{R}$. Si $\{v_1, \dots, v_n\} \in V_0(n, k)$ es una base ortonormal de p , entonces sabemos que

$$d_x^2(p) = \langle x, x \rangle - \sum_{i=1}^n \langle x, v_i \rangle^2,$$

de modo que la transformación $d_x^2 \circ q_0 : V_0(n, k) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua. Como señalamos antes de esta proposición, la topología de $G(n, k)$ hace de q_0 una transformación continua, por lo que d_x^2 también lo es. Es claro que esta función continua separa a p y q , pues $d_x^2(p) = 0 < d_x^2(q)$.

Por otro lado, $G(n, k)$ es un espacio compacto, pues es la imagen de $V_0(n, k)$ bajo la transformación continua q_0 .

Para demostrar que $G(n, k)$ es una variedad de dimensión nk , sea $p \in G(n, k)$ y escribamos $\mathbb{R}^{n+k} = p \oplus p^\perp$. Sea U la vecindad de p formada por todos los puntos $q \in G(n, k)$ tales que la proyección ortogonal $p \oplus p^\perp \rightarrow p$ manda q sobre p ; es decir, tales que $q \cap p^\perp = \{0\}$. Cada $q \in U$ se puede ver entonces como la gráfica de una transformación lineal $L_q : p \rightarrow p^\perp$. La transformación $L : U \rightarrow \text{hom}(p, p^\perp) \approx \mathbb{R}^{nk}$ así definida es biyectiva y se puede usar para definir la estructura diferenciable en $G(n, k)$. Esta última afirmación y el hecho de que la transformación $p \mapsto p^\perp$ es un difeomorfismo se dejan como ejercicio. \square

Ejemplo 2.12 (Haz universal). Este ejemplo es una generalización del haz lineal canónico γ_n^1 . Definiremos un haz γ_n^k sobre $G(n, k)$ de manera natural. Sea

$$E(\gamma_n^k) = \{ (p, u) \in G(n, k) \times \mathbb{R}^{n+k} \mid u \in p \}.$$

Damos a $E(\gamma_n^k)$ la topología inducida por $G(n, k) \times \mathbb{R}^{n+k}$ y definimos la proyección $\pi : E(\gamma_n^k) \rightarrow G(n, k)$ como $\pi(p, u) = p$. Es claro que $\pi^{-1}(p)$ es isomorfo a p . El haz $\gamma_n^k = (E(\gamma_n^k), \pi)$ es el *haz universal* de rango n sobre $G(n, k)$.

Finalmente, dado $p \in G(n, k)$, sea U la vecindad de p formada por todos los puntos $q \in G(n, k)$ tales que la proyección ortogonal $\pi^\perp : p \oplus p^\perp \rightarrow p$ manda q sobre p . La carta de haz vectorial $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times p$ es $\varphi(q, v) = (q, \pi^\perp(v))$.

Posteriormente justificaremos el nombre de haz universal para γ_n^k .

2.3. Construcciones con haces. Cociclos

En esta sección veremos varias formas de construir nuevos haces a partir de otros. Por el momento, sólo veremos las definiciones de estas construcciones y más adelante presentaremos algunos ejemplos.

Tal vez la manera más sencilla de construir haces a partir de otros sea por restricción: Si $\xi = (E, \pi)$ es un haz sobre B y $B' \subset B$, podemos considerar la *restricción* de ξ a B' , que denotaremos por $\xi|_{B'}$, como el haz con espacio total $\pi^{-1}(B')$.

También podemos definir una “restricción” de un haz considerando, para cada punto de la base, subespacios vectoriales de cada fibra, como sigue.

Definición 2.13. Sean $\xi = (E, \pi)$ y $\xi' = (E', \pi')$ haces sobre B . ξ' es un *subhaz* de ξ si y sólo si $E' \subset E$, $\pi' = \pi|_{E'}$ y para cada $p \in B$, $(\pi')^{-1}(p)$ es un subespacio vectorial de $\pi^{-1}(p)$.

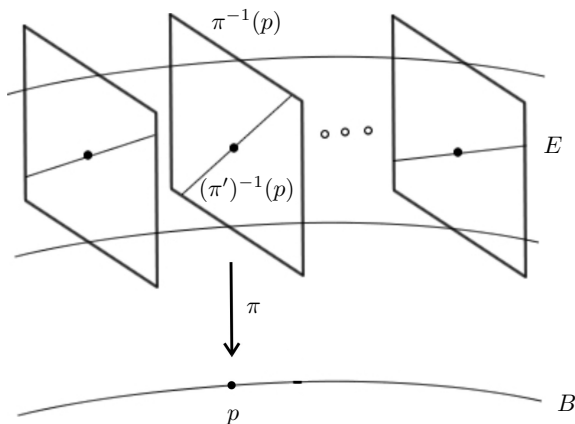


Figura 2.5: Un subhaz.

Otra construcción usual es la del producto. Si $\xi = (E, \pi)$ es un haz sobre B y $\xi' = (E', \pi')$ es un haz sobre B' , definimos el *haz producto* $\xi \times \xi'$ sobre

$B \times B'$ como el haz con espacio total $E \times E'$ y proyección $\pi \times \pi' : E \times E' \rightarrow B \times B'$ dada por $\pi \times \pi'(u, u') = (\pi(u), \pi'(u'))$.

Una construcción más interesante es la del haz inducido por una transformación continua $f : B' \rightarrow B$ de un espacio B' en un espacio B sobre el cual está definido un haz ξ . Definimos el espacio total del *haz inducido* $f^*(\xi)$ por f sobre B' como

$$\{ (p', u) \in B' \times E \mid f(p') = \pi(u) \}$$

y utilizamos la proyección natural sobre B' . Observemos que la fibra de $f^*(\xi)$ sobre p' es igual a la fibra de ξ sobre el punto $f(p')$.

Ahora construiremos un haz cuyas fibras sean la suma directa de las fibras de dos haces definidos sobre una misma base. La definición formal es la siguiente.

Definición 2.14 (Suma de Whitney). Sean $\xi = (E, \pi)$ y $\xi' = (E', \pi')$ haces sobre un mismo espacio B y sea $d : B \rightarrow B \times B$ la transformación diagonal $d(p) = (p, p)$. El haz $d^*(\xi \times \xi')$ recibe el nombre de *suma de Whitney* de ξ y ξ' y se denota por $\xi \oplus \xi'$.

Observemos que la fibra de $\xi \oplus \xi'$ sobre p tiene la forma

$$\{ (p, u, u') \in B \times E \times E' \mid \pi(u) = \pi'(u') = p \}$$

que claramente es isomorfa a la suma $E_p \oplus E'_p$.

Para concluir esta sección, daremos una manera alternativa de definir la estructura de haz vectorial, mediante las “transformaciones de transición”.

Definición 2.15. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una cubierta abierta de un espacio topológico B . Una colección de transformaciones continuas $\{g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(n)\}_{\alpha, \beta \in A}$ se llama *cociclo* para la cubierta $\{U_\alpha\}$ si y sólo si para cada $p \in B$ y $\alpha, \beta, \gamma \in A$ se cumple que

$$g_{\alpha\alpha}(p) = I, g_{\alpha\beta}(p)g_{\beta\gamma}(p) = g_{\alpha\gamma}(p).$$

Como $g_{\alpha\beta}(p)g_{\beta\alpha}(p) = g_{\alpha\alpha}(p) = I$, tenemos que $g_{\alpha\beta}(p) = g_{\beta\alpha}(p)^{-1}$.

En la siguiente proposición establecemos la relación del concepto de cociclo con la manera de dar estructura de haz vectorial a un conjunto.

Proposición 2.16. *Sea B un espacio topológico.*

1. Si $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ es un atlas de haz vectorial entonces $g_{\alpha\beta}(p) = (\varphi_\alpha)_p \circ (\varphi_\beta)_p^{-1}$ define un cociclo.
2. Todo cociclo $\{g_{\alpha\beta}\}$ para una cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de B define un atlas de haz vectorial $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$.

DEMOSTRACIÓN. (1) es claro. Para (2) definimos la relación de equivalencia \sim en $X = A \times \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ mediante

$$(\alpha, p, v) \sim (\beta, q, w) \text{ si y sólo si } p = q \in U_\alpha \cap U_\beta, v = g_{\alpha\beta}(p)w.$$

La reflexividad se sigue de $g_{\alpha\alpha}(p) = I$, la transitividad de $g_{\alpha\beta}(p)g_{\beta\gamma}(p) = g_{\alpha\gamma}(p)$ y la simetría de $g_{\alpha\beta}(p) = g_{\beta\alpha}(p)^{-1}$.

Sean $E = X / \sim$ y $\pi : E \rightarrow B$ dada por $\pi([\alpha, p, v]) = p$. Entonces es claro que

$$\pi^{-1}(U_\alpha) = \{[\alpha, p, v] : p \in U_\alpha, v \in \mathbb{R}^n\} \cong^{\varphi_\alpha} U_\alpha \times \mathbb{R}^n. \quad \square$$

Observación. Si el haz vectorial ξ es diferenciable, el cociclo definido en (1) de la proposición 2.16 consiste de transformaciones diferenciables.

Observación. Si M^m es una variedad diferenciable con atlas $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ y $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ es un atlas de haz vectorial de rango n para (E, π) , entonces E es una variedad diferenciable de dimensión $n+m$, con el atlas $\{(\pi^{-1}(U_\alpha), (\psi_\alpha \times \text{id}) \circ \varphi_\alpha)\}$.

Ejemplo 2.17 (El haz tangente y los cociclos). Consideremos una variedad diferenciable $(M, \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\})$ de dimensión m . Recordemos de la definición 1.15 que el haz tangente a M es $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$, con proyección $\pi : TM \rightarrow M$ y fibra $T_p M$.

Aunque en el capítulo 1 definimos una topología en TM , a manera de ejemplo podemos utilizar la proposición 2.16. Para $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ sea

$$g_{\alpha\beta}(p) = (\varphi_\alpha)_{*p} \circ (\varphi_\beta)_{*p}^{-1} = D(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(\varphi_\beta(p)),$$

entonces $\{g_{\alpha\beta}\}$ es un cociclo para la cubierta $\{U_\alpha\}$. Sean $\bar{\pi} : \overline{TM} \rightarrow M$ el haz definido por la proposición 2.16 y $f : \overline{TM} \rightarrow TM$ dada por $f([\alpha, p, v]) = (\varphi_\alpha)_{*p}^{-1}(v)$. Observemos que

$$p \in U_\alpha \cap U_\beta \text{ y } v = g_{\alpha\beta}(p)w \quad \text{si y sólo si} \quad (\varphi_\alpha)_{*p}^{-1}(v) = (\varphi_\beta)_{*p}^{-1}(w).$$

Por lo tanto, f está bien definida y $f|_{\bar{\pi}^{-1}(p)} : \bar{\pi}^{-1}(p) \rightarrow T_p M$ es un isomorfismo para todo $p \in M$, de modo que podemos identificar \overline{TM} y TM .

Ejemplo 2.18 (El haz dual). Sea $\xi = (E, \pi)$ un haz vectorial de rango n sobre B . El *haz dual* de E es $\xi^* = (\cup_{p \in B} E_p^*, \pi^*)$. Sea $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlas de haz vectorial para ξ . Si $p \in U_\alpha$, $(\varphi_\alpha)_p : E_p \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo con transpuesta $(\varphi_\alpha)_p^t : \mathbb{R}^{n*} \cong \mathbb{R}^n \rightarrow E_p^*$. Definimos $(\varphi_\alpha)_p^* = [(\varphi_\alpha)_p^t]^{-1}$ y

$$g_{\alpha\beta}^* = (\varphi_\alpha)_p^* [(\varphi_\beta)_p^*]^{-1} = (g_{\beta\alpha}^t).$$

Entonces $\{g_{\alpha\beta}^*\}$ es un cociclo que define un haz vectorial. Como hicimos en el caso del haz tangente, podemos identificar este haz con E^* .

En particular, si M es una variedad diferenciable de dimensión m y $\xi = TM$, el haz $\xi^* = T^*M$ se llama *haz cotangente* de M . Si $[f]$ es un germen en p , definimos $df_p \in T_p^*M$ mediante $df_p(v) = v([f])$. En particular, si (U, φ) es una carta con $p \in U$ y $\varphi = (x_1, \dots, x_m)$,

$$dx_p^i \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p \right) = D_j(x_i \circ \varphi^{-1}) = \delta_{ij}$$

y así dx_p^1, \dots, dx_p^m es la base de T_p^*M dual a $\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m} \right)_p$.

2.4. Orientabilidad

Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{R} de dimensión n . Definimos una relación \sim en el conjunto de bases ordenadas de V diciendo que

$$(v_1, \dots, v_n) \sim (w_1, \dots, w_n)$$

si y sólo si la matriz de cambio de base $[A_{ij}]$ dada por $w_j = \sum_i A_{ij} v_i$, tiene determinante positivo. Como de costumbre, denotamos por $[v_1, \dots, v_n]$ a una clase de equivalencia. De hecho, hay dos clases de equivalencia y a cualquiera de ellas se le llama *orientación* de V . Si $f : V \rightarrow V'$ es un isomorfismo de espacios vectoriales podemos definir una función entre las orientaciones de V y V' por $\bar{f}([v_1, \dots, v_n]) = [f(v_1), \dots, f(v_n)]$. Si $V = \mathbb{R}^n$, diremos que la *orientación natural* ω de \mathbb{R}^n es la clase de equivalencia de la base canónica.

Definición 2.19. Sea $\xi = (E, \pi)$ un haz vectorial de rango n sobre un espacio topológico B .

1. Decimos que la elección de una orientación \mathcal{O}_b de la fibra E_p para cada $p \in B$ es *continua* si y sólo si para cada carta de haz vectorial (U, φ) con U conexa, los isomorfismos $\varphi_p : E_p \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfacen que para cada $p \in U$, $\overline{\varphi}_p(\mathcal{O}_p) = \omega$, o bien para cada $p \in U$, $\overline{\varphi}_p(\mathcal{O}_p) \neq \omega$.
2. El haz ξ es *orientable* si y sólo si existe una elección continua de una orientación para cada fibra.

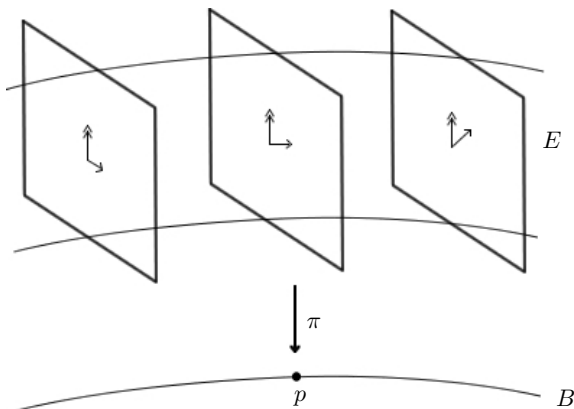


Figura 2.6: Orientabilidad local de un haz.

3. Decimos que una variedad diferenciable M es *orientable* si y sólo si TM es orientable.

Observación. Si el haz vectorial ξ es orientable y $(U, \varphi), (V, \psi)$ son trivializaciones locales con U, V conexos, entonces $\det(\varphi_p \circ \psi_p^{-1})$ tiene el mismo signo para todo $p \in U \cap V$.

Proposición 2.20. Si existe un atlas $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ del haz vectorial ξ tal que para el cociclo correspondiente satisface $\det g_{\alpha\beta} > 0$ para toda α, β , entonces el haz es orientable.

DEMOSTRACIÓN. Para cada $p \in U_\alpha$ escogemos $\mathcal{O}_p = \overline{(\psi_\alpha)_p^{-1}}(\omega)$. La elección no depende de α ya que $\det g_{\alpha\beta} > 0$ implica que $\overline{g_{\alpha\beta}(p)}(\omega) = \omega$. Sea (V, φ) una trivialización local con V conexo, entonces $\{p \in V : \overline{\varphi}_p(\mathcal{O}_b) = \omega\}$ y $\{p \in V : \overline{\varphi}_p(\mathcal{O}_b) \neq \omega\}$ son ambos abiertos ya que si $p \in V \cap U_\alpha$ entonces hay una vecindad W de p donde $\det((\psi_\alpha)_p \circ \varphi_p^{-1})$ no cambia de signo. \square

Recordemos que si $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ es un atlas de la variedad diferenciable M , el cociclo correspondiente de TM es $g_{\alpha\beta} = D(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) \circ \varphi_\beta$.

Corolario 2.21. La variedad diferenciable M es orientable si y sólo existe un atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ tal que $\det D(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) > 0$.

Ejemplo 2.22. Consideremos la circunferencia $S^1 = \{e^{ix} : x \in \mathbb{R}\}$ con la cubierta $U_0 = \{e^{ix} : |x| < \pi\}$, $U_1 = \{e^{ix} : x \in (0, 2\pi)\}$.

Para $A \in GL(n)$ consideremos el haz definido por el cociclo $g : U_0 \cap U_1 \rightarrow GL(n)$ dado por

$$g(e^{ix}) = \begin{cases} I & x \in (0, \pi), \\ A & x \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

El haz es orientable si y sólo si $\det A > 0$. Cuando $n = 1$ y $A = -1$, obtenemos el haz dado por la banda de Möbius.

2.5. Transformaciones de haces

Definición 2.23. Sean $\xi = (E, \pi)$, $\xi' = (E', \pi')$ haces vectoriales sobre los espacios topológicos B y B' , respectivamente.

1. Una transformación $F : E' \rightarrow E$ es *fibrada* si y sólo si existe $f : B' \rightarrow B$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{F} & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

conmuta; es decir, para cada $p \in B'$ se tiene que $F(E'_p) \subset E_{f(p)}$. En tal caso (F, f) se llama *par fibrado*.

2. El par fibrado (F, f) de transformaciones continuas es un *homomorfismo* de haces si y sólo si para cada $p \in B'$, $F : E'_p \rightarrow E_{f(p)}$ es lineal.
3. El par fibrado (F, f) se llama *equivalencia* de haces si y sólo si f es un homeomorfismo y para cada $p \in B'$, $F : E'_p \rightarrow E_{f(p)}$ es un isomorfismo.
4. Si $B = B'$, una equivalencia (F, id) se llama *isomorfismo*.
5. Un haz ξ es *trivial* si y sólo si es isomorfo al haz trivial $\pi_1 : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.
6. Una variedad diferenciable M es *paralelizable* si y sólo si TM es trivial.

Ejemplo 2.24. Sean M, N variedades, $f : M \rightarrow N$ diferenciable y definamos $f_* : TM \rightarrow TN$ por $f_*|_{T_p M} = f_{*p}$. Entonces f_* es diferenciable y (f_*, f) es un homomorfismo de haces. Si f es un difeomorfismo, entonces (f_*, f) es una equivalencia de haces.

Definición 2.25. Sea $\xi = (E, \pi)$ un haz vectorial sobre B .

1. Una *sección* de ξ es una transformación continua $s : B \rightarrow E$ tal que $\pi \circ s = \text{id}$.
2. Si $B = M$ es una variedad diferenciable y el haz ξ es diferenciable, $\Gamma(\xi)$ denotará al conjunto de secciones diferenciables del haz.
3. Un *campo vectorial* en M es un elemento de $\mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM)$ y una *1-forma* en M es un elemento de $\Omega^1(M) = \Gamma(T^*M)$.

Proposición 2.26. Un haz vectorial $\xi = (E, \pi)$ de rango n sobre B es trivial si y sólo si existen secciones s_1, \dots, s_n tales que $(s_1(p), \dots, s_n(p))$ es una base de E_p para todo $p \in B$.

DEMOSTRACIÓN. Si $F : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow E$ define un isomorfismo de haces, definamos secciones $s_i, i = 1, \dots, n$ por $s_i(p) = F(p, e_i)$ donde (e_1, \dots, e_n) es la base canónica de \mathbb{R}^n .

Recíprocamente, si s_1, \dots, s_n son secciones tales que para cada $p \in B$ se tiene que $(s_1(p), \dots, s_n(p))$ es una base de E_p , definamos $F : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow E$ por $F(p, t_1, \dots, t_n) = t_1 s_1(p) + \dots + t_n s_n(p)$. \square

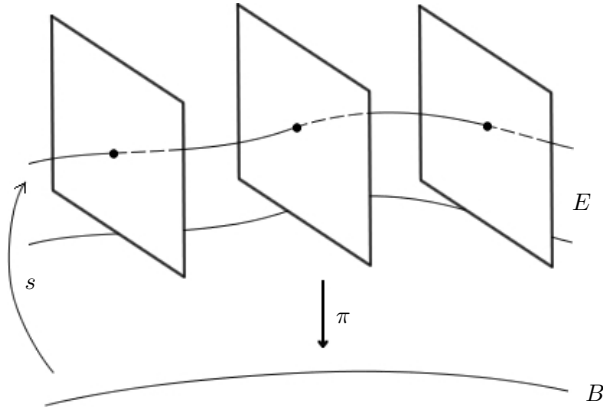


Figura 2.7: Sección de un haz.

Ejemplo 2.27. Consideremos la inmersión $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ dada por

$$f(x_1, \dots, x_n) = (\exp(ix_1), \dots, \exp(ix_n)).$$

Veremos que el n -toro $\mathbb{T}^n = f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$ es paralelizable.

En efecto, $f(x + m) = f(x)$ si y sólo si $m \in (2\pi\mathbb{Z})^n$. Sea $t_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ la traslación $x \mapsto x + m$. Para $m \in (2\pi\mathbb{Z})^n$, $f = f \circ t_m$ y así $f_* = (f \circ t_m)_* = f_* \circ (t_m)_*$. Si $(x, v) \in T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $(t_m)_*(x, v) = (x + m, v)$ y luego $f_*(x, v) = f_*(x + m, v)$. Entonces podemos definir sin ambigüedad campos vectoriales s_i en \mathbb{T}^n mediante $s_i(f(x)) = f_*(x, e_i)$.

2.6. Haces de tipo finito

Para finalizar este capítulo, estudiaremos los haces de tipo finito y justificaremos el nombre de haz universal para los haces sobre las grassmannianas.

Definición 2.28. Sea $\xi = (E, \pi)$ un haz vectorial sobre un espacio normal B . ξ es de *tipo finito* si y sólo si existe una cubierta abierta finita U_1, \dots, U_k de B tales que $\xi|_{U_i}$ es trivial para cada $i = 1, \dots, k$.

Es posible imponer condiciones a un espacio B para que todo haz sobre B sea de tipo finito. Por ejemplo, es claro que esto se cumple si B es compacto. Enunciaremos otro tipo de condición sobre B , sin dar las demostraciones. El lector interesado en este tipo de condiciones puede consultar [1].

Decimos que un espacio topológico B tiene *dimensión finita* menor o igual a n si cada cubierta abierta tiene un refinamiento abierto tal que ningún punto de B está contenido en más de $n + 1$ elementos del refinamiento. En particular, es posible mostrar que una variedad topológica de dimensión n tiene dimensión finita menor o igual que n .

Proposición 2.29. *Si B es un espacio paracompacto de dimensión finita, entonces todo haz sobre B es de tipo finito.*

Ahora veremos el resultado principal de esta sección.

Teorema 2.30. *Sea $\xi = (E, \pi)$ un haz vectorial de rango n sobre un espacio normal B . Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. ξ es de tipo finito.
2. Existe $m \in \mathbb{N}$ y una transformación continua (llamada transformación de Gauss) $g : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $g|_{\pi^{-1}(p)}$ es lineal e inyectiva para todo $p \in B$.
3. Existe $m \in \mathbb{N}$ y una transformación continua $f : B \rightarrow G(n, m)$ tal que el haz $f^*(\gamma_n^m)$ es isomorfo a ξ . (De aquí el término de haz universal.)
4. Existe un haz η tal que $\xi \oplus \eta$ es trivial.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que ξ es de tipo finito. Sea $\{U_i\}$, $i = 1, \dots, k$, una cubierta abierta de B , de modo que existan trivializaciones locales $\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^n$. Sea $\{f_i : B \rightarrow \mathbb{R}\}$ una partición de la unidad subordinada a la cubierta $\{U_i\}$. Para cada $i = 1, \dots, k$, Definimos $g_i : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ como

$$g_i(e) = \begin{cases} f_i(\pi(e)) \cdot \pi_2 \circ \varphi_i(e), & e \in \pi^{-1}(U_i); \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Aquí, π_2 representa la proyección natural de $U_i \times \mathbb{R}^n$ en \mathbb{R}^n . Observemos que cada g_i es continua. Ahora definimos $g : E \rightarrow \mathbb{R}^{nk}$ como $g = (g_1, \dots, g_k)$.

Es claro que para cada $p \in B$, $g|_{\pi^{-1}(p)}$ es lineal, pues cada φ_i lo es. La transformación $g|_{\pi^{-1}(p)}$ también es inyectiva, pues para cada p existe i tal que $f_i(p) \neq 0$ y la correspondiente transformación $\pi_2 \circ \varphi_i$ es inyectiva.

Supongamos ahora que existe $g : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ con las hipótesis del inciso 2. Definimos $f : B \rightarrow G(n, m)$ como $f(p) = g(\pi^{-1}(p))$. Observemos que $f(p)$ realmente está en $G(n, m)$, pues $g|_{\pi^{-1}(p)}$ es lineal e inyectiva. El lector podrá convencerse que f es continua. Por otro lado, definimos $F : E \rightarrow E(\gamma_n^m)$ como $F(e) = (f \circ \pi(e), g(e))$; F es continua y hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{F} & E(\gamma_n^m) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{f} & G(n, m) \end{array}$$

Dejamos al lector como ejercicio verificar que $f^*(\gamma_n^m)$ es isomorfo a ξ .

Sea $f : B \rightarrow G(n, m)$ con $f^*(\gamma_n^m)$ isomorfo a ξ . Consideremos el haz de “complementos ortogonales” de γ_n^m sobre $G(n, m)$; es decir, asociemos a cada elemento de $G(n, m)$ su complemento ortogonal en \mathbb{R}^{n+m} . Al llevar este haz sobre B mediante f , obtenemos un haz η tal que $\xi \oplus \eta$ es trivial.

Por otro lado, si un haz $\eta = (\bar{E}, \bar{\pi})$ satisface que $\xi \oplus \eta$ es trivial, entonces podemos definir una transformación de Gauss como sigue:

$$E \longrightarrow E \oplus \bar{E} \cong B \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

donde la primera transformación es una inclusión y la última es una proyección. Esto muestra que las tres últimas afirmaciones del teorema son equivalentes.

Finalmente, para mostrar que cualquiera de estas tres condiciones implica que el haz ξ es de tipo finito, supongamos que existe una transformación continua $f : B \rightarrow G(n, m)$ tal que el haz $f^*(\gamma_n^m)$ es isomorfo a ξ . Puesto que $G(n, m)$ es compacto, γ_n^m es de tipo finito. El lector podrá verificar fácilmente que esto implica que ξ es de tipo finito. \square

2.7. Ejercicios

1. Sea $\odot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación bilineal tal que

- Si $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, entonces $a \odot e_1 = a$ para cada $a \in \mathbb{R}^n$.

- Para cada $a \neq 0$ existe b tal que $a \odot b = b \odot a = e_1$.
- $(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$ para cada $a, b, c \in \mathbb{R}^n$.

Demuestre que en ese caso,

- a) Si e_1, \dots, e_n la base canónica de \mathbb{R}^n y $a \neq 0$, entonces los vectores $a \odot e_1, \dots, a \odot e_n$ son linealmente independientes.
 - b) Si $a \in \mathbb{S}^{n-1}$, las proyecciones de $a \odot e_2, \dots, a \odot e_n$ en $T_a\mathbb{S}^{n-1}$ son linealmente independientes.
 - c) La multiplicación por a es una función continua.
 - d) $T\mathbb{S}^{n-1}$ es trivial.
 - e) $T\mathbb{P}^{n-1}$ es trivial.
2. Sean $\xi = (E, \pi)$ un haz vectorial sobre B y $f : B' \rightarrow B$ continua. Denotemos por $f^*(\xi)$ el haz inducido por f en B' .
- a) Suponga que tenemos otro haz vectorial $\xi' = (E', \pi')$ sobre B' y una equivalencia de haces $F : E' \rightarrow E$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{F} & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

conmuta. Demuestre que ξ' y $f^*(\xi)$ son isomorfos.

- b) Si $g : B'' \rightarrow B'$ es continua, muestre que $(f \circ g)^*(\xi) \cong g^*(f^*(\xi))$.
 - c) Si ξ es orientable, pruebe que $f^*(\xi)$ es orientable.
 - d) Dé un ejemplo en el que $f^*(\xi)$ sea orientable pero ξ no.
 - e) Considere la transformación $\pi : E \rightarrow B$ y el haz $\pi^*(\xi)$ sobre B . Muestre que $\pi^*(\xi)$ es isomorfo a $E \oplus E$. Muestre además que si ξ no es orientable, entonces $\pi^*(\xi)$ no es orientable.
3. Sean $\xi = (E, \pi)$ y $\xi' = (E', \pi')$ haces sobre B .
- a) Muestre que si $f : B' \rightarrow B$ es continua, entonces $f^*(\xi \oplus \xi')$ es isomorfo a $f^*(\xi) \oplus f^*(\xi')$.

- b) Si ξ es orientable, muestre que ξ' es orientable si y sólo si $\xi \oplus \xi'$ es orientable.
- c) Para cada espacio vectorial V , defina una orientación natural de $V \oplus V$ y pruebe que $\xi \oplus \xi$ siempre es orientable.
4. Sea X una “figura 8”. Determine dos haces de rectas ξ y η sobre X , no orientables, de modo que $\xi \oplus \eta$ sea orientable.
5. Sean M_1, M_2 variedades diferenciables.
- a) Si $\pi_i : M_1 \times M_2 \rightarrow M_i$ son las proyecciones naturales, muestre que
- $$T(M_1 \times M_2) \cong \pi_1^*(TM_1) \oplus \pi_2^*(TM_2).$$
- b) Si M_1, M_2 son orientables, entonces también $M_1 \times M_2$ lo es.
6. Muestre que el haz tangente de una variedad diferenciable siempre es una variedad orientable.
7. Muestre que el haz normal es trivial para cada esfera $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.
8. Muestre que un haz de rango 1 sobre \mathbb{S}^1 es equivalente al haz trivial o a la banda de Möbius.
9. Considere el grupo G de difeomorfismos $\{T^n, n \in \mathbb{Z}\}$ de \mathbb{R}^2 generado por la transformación $T(x, y) = (x + 1, y)$. Defina el espacio cociente $E = \mathbb{R}^2/G$ y muestre que éste tiene la estructura de un haz vectorial no trivial sobre \mathbb{S}^1 .
10. Sea $\xi = (E, \pi)$ el haz sobre \mathbb{S}^1 dado por la banda de Möbius. Considere \mathbb{S}^1 como el conjunto de complejos de norma uno y sea $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por $f(z) = z^2$. Describa $f^*(\xi)$. Si $f_n(z) = z^n$, describa $f_n^*(\xi)$. (La respuesta depende de n .)
11. Dé los detalles necesarios para definir los siguientes haces:
- a) El haz de homomorfismos $\text{hom}(E, F)$, de modo que la fibra sean los homomorfismos entre las fibras correspondientes.
- b) El haz producto tensorial $E \otimes F$, de modo que la fibra del sobre cada punto sea el producto tensorial de las fibras correspondientes. Véase la sección 3.1.

12. Sean $\xi = (E, \pi)$, $\xi' = (E', \pi')$ haces vectoriales sobre un mismo espacio B y $F : E' \rightarrow E$ una transformación fibrada.
- Defina de manera natural los “haces” núcleo $N(F)$ e imagen $\text{Im}(F)$, pero muestre que en general estos objetos *no* son haces. *Sugerencia:* Considere un haz trivial $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \pi)$ sobre \mathbb{R}^n y analice la transformación $F(x, y) = (x, 0)$.
 - Demuestre, sin embargo, que si el rango de la restricción de F a cada fibra es constante, entonces $N(F)$ e $\text{Im}(F)$ son haces.
13. Sean $\xi = (E, \pi)$ y $\xi' = (E', \pi')$ haces sobre B y $f : B' \rightarrow B$, $g : B'' \rightarrow B'$ transformaciones continuas. Demuestre las siguientes propiedades:
- Si $\text{Id} : B \rightarrow B$ es la transformación identidad, entonces $(\text{Id})^*(\xi) \cong \xi$.
 - $f^*(\xi \oplus \xi') \cong f^*(\xi) \oplus f^*(\xi')$.
 - $f^*(\xi \otimes \xi') \cong f^*(\xi) \otimes f^*(\xi')$.
14. Muestre que si M es una variedad contraíble, entonces cualquier haz sobre M es equivalente al haz trivial.

CAPÍTULO 3

Formas diferenciales e integración

En este capítulo presentamos los fundamentos de la teoría de integración sobre variedades. Primero asociaremos ciertos objetos algebraicos, los tensores, a un espacio vectorial arbitrario. Posteriormente, impondremos las condiciones de que el espacio vectorial sea el espacio tangente a una variedad y que estos objetos geométricos varíen de manera continua (o incluso diferenciable) en la variedad, lo que dará como resultado las formas diferenciales, a las que podremos derivar e integrar de un modo natural.

3.1. Álgebra tensorial

Definición 3.1. Sean V_1, \dots, V_k espacios vectoriales sobre \mathbb{R} . Un *tensor* de orden k en $V_1 \times \dots \times V_k$ es una transformación $T : V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow \mathbb{R}$ *multilineal*, o más precisamente, *k-lineal*; es decir, para cada $i = 1, \dots, k$, $v_i, w_i \in V_i$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene

$$T(v_1, \dots, \lambda v_i + w_i, \dots, v_k) = \lambda T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) + T(v_1, \dots, w_i, \dots, v_k)$$

Por supuesto, el conjunto de tensores de orden 1 en $V_1 = V$ no es más que el conocido espacio dual V^* . En analogía con este caso, denotamos por $V_1^* \otimes \dots \otimes V_k^*$ al espacio vectorial de los tensores de orden k en $V_1 \times \dots \times V_k$. Llamamos a este espacio el *producto tensorial* de V_1^*, \dots, V_k^* .

Definición 3.2. Si $T \in V_1^* \otimes \dots \otimes V_k^*$ y $S \in V_{k+1}^* \otimes \dots \otimes V_{k+l}^*$, definimos el *producto tensorial* de T y S como la transformación $T \otimes S \in V_1^* \otimes \dots \otimes V_{k+l}^*$ dada por

$$T \otimes S(v_1, \dots, v_{k+l}) = T(v_1, \dots, v_k)S(v_{k+1}, \dots, v_{k+l}).$$

Sean V, W espacios vectoriales de dimensión finita y $\{\phi_i\}, \{\psi_j\}$ bases de V^* y W^* , respectivamente. Entonces los productos $\{\phi_i \otimes \psi_j\}$ forman una base de $V^* \otimes W^*$. La siguiente proposición considera un caso particular importante de esta situación.

Proposición 3.3. *Sean V, W espacios vectoriales de dimensión finita, con bases $\{v_1, \dots, v_n\}, \{w_1, \dots, w_m\}$, respectivamente, y sean $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ y $\{w_1^*, \dots, w_m^*\}$ las bases duales de V^*, W^* . Entonces*

$$\{v_i^* \otimes w_j^* : i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}$$

es una base de $V^* \otimes W^*$ y para cualquier $T \in V^* \otimes W^*$ tenemos

$$T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m T(v_i, w_j) v_i^* \otimes w_j^*. \quad (3.1)$$

Similarmente para $V_1^* \otimes \dots \otimes V_k^*$.

DEMOSTRACIÓN. Primero mostraremos que el conjunto $\{v_i^* \otimes w_j^*\}$ genera a $V^* \otimes W^*$, viendo que cada $T \in V^* \otimes W^*$ admite la expresión (3.1). Para verificar la igualdad basta, por bilinealidad, ver qué ocurre en el caso de las parejas de la forma (v_r, w_s) . Al evaluar el lado derecho de (3.1), tenemos

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m T(v_i, w_j) v_i^* \otimes w_j^*(v_r, w_s) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m T(v_i, w_j) \delta_{ir} \delta_{js} = T(v_r, w_s).$$

La demostración de que los vectores $v_i^* \otimes w_j^*$ son linealmente independientes utiliza un cálculo similar y se deja como ejercicio al lector. \square

Recordemos que dado un espacio vectorial V existe un isomorfismo canónico $i_V : V \rightarrow (V^*)^*$, dado por $i_V(v)(T) = T(v)$, para $v \in V, T \in V^*$. Por lo tanto, denotaremos al conjunto de funciones multilineales de $V_1^* \times \dots \times V_k^*$ en \mathbb{R} como el producto tensorial $V_1 \otimes \dots \otimes V_k$.

Por lo general, consideraremos principalmente el caso del producto tensorial sobre un solo espacio vectorial V , o sobre su espacio dual V^* , o sobre productos cartesianos de ambos. Usaremos la siguiente terminología.

Definición 3.4. Un *tensor de tipo (k, l)* en un espacio vectorial V es una transformación multilineal $T : V^k \times V^{*l} \rightarrow \mathbb{R}$. Denotamos al conjunto de tensores de tipo (k, l) por $T_l^k(V^*)$.

En analogía con la proposición 3.3, si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V , los productos

$$v_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes v_{i_k}^* \otimes v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_l}$$

forman una base para $T_l^k(V^*)$. Aquí hemos utilizado un abuso de notación escribiendo $v_i = i_V(v_i)$, con $i_V : V \rightarrow V^{**}$. De hecho, podemos escribir cada $T \in T_l^k(V^*)$ como

$$T = \sum_{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l}^n T_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_l} v_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes v_{i_k}^* \otimes v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_l},$$

donde los *coeficientes del tensor* están dados por

$$T_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_l} = T(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}, v_{j_1}^*, \dots, v_{j_l}^*).$$

Ahora extenderemos nuestras construcciones al contexto de los haces.

Definición 3.5. Si para cada $i = 1, \dots, m$ se tiene que $\xi_i = (E_i, \pi_i)$ es un haz vectorial sobre B , entonces el *producto tensorial* $\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_m$ es el haz vectorial con espacio total

$$E_1 \otimes \cdots \otimes E_m = \bigcup_{p \in B} (E_1)_p \otimes \cdots \otimes (E_m)_p$$

y proyección natural π .

Si el haz ξ_i tiene rango n_i , es fácil ver que el haz $\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_m$ tiene rango $n_1 + \cdots + n_m$. Si $\{U_\alpha\}$ es una cubierta de B y $(g_i)_{\alpha\beta}$ es el cociclo correspondiente para el haz E_i , entonces la familia de transformaciones

$$(g_1)_{\alpha\beta} \otimes \cdots \otimes (g_m)_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Gl}(n_1 + \cdots + n_m)$$

dada por

$$(g_1)_{\alpha\beta} \otimes \cdots \otimes (g_m)_{\alpha\beta}(p) = \text{Diag}((g_1)_{\alpha\beta}(p), \dots, (g_m)_{\alpha\beta}(p))$$

es el cociclo correspondiente para el haz $E_1 \otimes \cdots \otimes E_m$. Una sección de este haz asocia a cada $p \in B$ un tensor definido en $(E_1)_p \otimes \cdots \otimes (E_m)_p$.

Ejemplo 3.6. Una *métrica* en un haz diferenciable $\xi = (E, \pi)$ sobre M es una sección $g \in \Gamma(E^* \otimes E^*)$ tal que para cada $p \in M$, $g(p)$ es una forma bilineal simétrica y positivo definida. En particular, una *métrica riemanniana* en M es una métrica en TM . Observemos que un haz ξ arbitrario de rango n siempre admite una métrica. En efecto, sea $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ un atlas de haz vectorial. Para $p \in U_\alpha$ definamos

$$g_\alpha(p) = \sum_{i,j=1}^m \delta_{ij} ((\psi_\alpha)_p^t \otimes (\psi_\alpha)_p^t) (e_i^* \otimes e_j^*)$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker y $\{e_i\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^n . Sea $\{h_\alpha\}$ una partición de la unidad subordinada a $\{U_\alpha\}$. Definimos $g = \sum_\alpha h_\alpha g_\alpha$.

Aprovechamos el ejemplo anterior para definir el tipo de variedades y transformaciones con las que se trabaja usualmente, así como para introducir otra notación usual para las métricas, $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definición 3.7. Una *variedad riemanniana* (M, g) es una pareja donde M es una variedad diferenciable y g es una métrica riemanniana. Dada una carta (U, φ) de modo que $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$, los *coeficientes de la métrica* g_{ij} en cada $p \in M$ están dados por

$$g_{ij}(p) = g(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle_p.$$

Una *isometría* entre dos variedades riemannianas (M, g) y (N, h) es un difeomorfismo $f : M \rightarrow N$ que preserva la métrica riemanniana; es decir, para cada $p \in M$ y $v, w \in T_p M$ se tiene

$$g(p)(v, w) = h(f(p))(f_{*p}(v), f_{*p}(w)).$$

Dos variedades riemannianas son *isométricas* si y sólo si existe una isometría entre ellas.

Continuemos nuestro desarrollo del álgebra tensorial.

Definición 3.8. Sea M una variedad diferenciable. Denotamos por $T_l^k(M)$ al haz

$$\underbrace{T^*M \otimes \dots \otimes T^*M}_k \otimes \underbrace{TM \otimes \dots \otimes TM}_l.$$

Un elemento de $\Gamma(T_l^k(M))$ es un *tensor de tipo k, l* . Si $k = l = 0$, entonces $T_0^0(M) = C^\infty(M)$. Finalmente, denotaremos

$$T_0^k(M) = T^k(M) \quad \text{y} \quad T_l^0(M) = T_l(M).$$

Observación. Usamos de nuevo la proposición 3.3 para obtener una expresión local para un tensor. Si $T \in \Gamma(T_l^k(M))$ y (U, φ) es una carta de una vecindad U en M , con $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$, tenemos

$$T|_U = \sum_{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l=1}^n T_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_l} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k} \otimes \frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{j_l}}$$

donde

$$T_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_l} = T|_U \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}, dx^{j_1}, \dots, dx^{j_l} \right).$$

Por definición, un elemento $T \in \Gamma(T_l^k(M))$ asocia, a cada $p \in M$, una transformación multilinear $T_p : (T_p M)^k \times (T_p^* M)^l \rightarrow \mathbb{R}$. El tensor tiene asociada una transformación $\bar{T} : \mathfrak{X}(M)^k \times \Omega^1(M)^l \rightarrow C^\infty(M)$ dada por

$$\bar{T}(X_1, \dots, X_k, \omega_1, \dots, \omega_l)(p) = T_p(X_1(p), \dots, X_k(p), \omega_1(p), \dots, \omega_l(p)). \tag{3.2}$$

Debido a la multilinealidad de cada T_p , es claro que \bar{T} es $C^\infty(M)$ -multilinear, en el sentido de que

$$\begin{aligned} \bar{T}(X_1, \dots, fX_i, \dots, X_k, \omega_1, \dots, \omega_l) &= \bar{T}(X_1, \dots, X_k, \omega_1, \dots, f\omega_j, \dots, \omega_l) \\ &= f\bar{T}(X_1, \dots, X_k, \omega_1, \dots, \omega_l), \end{aligned}$$

para cada $i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, l$. Recíprocamente, veremos que una transformación $\bar{T} : \mathfrak{X}(M)^k \times \Omega^1(M)^l \rightarrow C^\infty(M)$ que sea $C^\infty(M)$ -multilinear en el sentido anterior es en realidad un tensor. El punto clave de esta afirmación no está en mostrar la multilinealidad, sino en ver que la expresión $\bar{T}(X_1, \dots, X_k, \omega_1, \dots, \omega_l)(p)$ sólo depende en realidad de los valores de los campos X_i y las formas ω_j en el punto p , de modo que tenga sentido definir cada T_p mediante la ecuación (3.2).

Proposición 3.9. Sea $\bar{T} : \mathfrak{X}(M)^k \times \Omega^1(M)^l \rightarrow C^\infty(M)$ una transformación $C^\infty(M)$ -multilineal. Si los campos vectoriales $X_1, \dots, X_k, X'_1, \dots, X'_k \in \mathfrak{X}(M)$ y las formas $\omega_1, \dots, \omega_l, \omega'_1, \dots, \omega'_l \in \Omega^1(M)$ satisfacen

$$X_i(p) = X'_i(p), i = 1, \dots, r, \quad \omega_j(p) = \omega'_j(p), j = 1, \dots, s,$$

entonces

$$\bar{T}(X_1, \dots, X_k, \omega_1, \dots, \omega_l)(p) = \bar{T}(X'_1, \dots, X'_k, \omega'_1, \dots, \omega'_l)(p).$$

DEMOSTRACIÓN. Por la multilinealidad, basta ver qué ocurre si $X_i(p) = X'_i(p)$ para alguna $i = 1, \dots, r$ o bien si $\omega_j(p) = \omega'_j(p)$ para alguna $j = 1, \dots, s$. Sin pérdida de generalidad, supondremos que $X_1(p) = X'_1(p)$. Por otro lado y también por la multilinealidad, basta ver que si $X_1(p) = 0$, entonces

$$\bar{T}(X_1, \dots, X_k, \omega_1, \dots, \omega_l)(p) = 0.$$

Sea (U, φ) una carta de una vecindad de p en M , con $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$. Entonces

$$X_1|_U = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad a_i \in C^\infty(U).$$

Sea $f \in C^\infty(M)$ una función con soporte contenido en U y tal que $f(p) = 1$. Entonces

$$\begin{aligned} f^2 \bar{T}(X_1, \dots, X_k, \omega_1, \dots, \omega_l) &= \bar{T}(f^2 X_1, \dots, X_k, \omega_1, \dots, \omega_l) \\ &= \bar{T}\left(f^2 \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \dots, X_k, \omega_1, \dots, \omega_l\right) \\ &= \sum_{i=1}^n f a_i \bar{T}\left(f \frac{\partial}{\partial x_i}, \dots, X_k, \omega_1, \dots, \omega_l\right). \end{aligned}$$

Observemos que la última expresión tiene sentido, pues $f a_i$ y $f(\partial/\partial x_i)$ están definidos globalmente. Al evaluar en p , $a_i(p) = 0$ y obtenemos lo que se afirmaba. \square

Ejemplo 3.10. Sean V, W espacios vectoriales. Es fácil ver que el producto tensorial $V^* \otimes W$ es isomorfo a $\text{hom}(V, W) = \{A : V \rightarrow W :$

g es lineal}. En efecto, la transformación $h : \text{hom}(V, W) \rightarrow V^* \otimes W$ dada por $h(A)(v, w^*) = w^*(A(v))$ es un isomorfismo, cuya inversa está dada por $h^{-1}(T)(v) = i_W^{-1}(T(v, \cdot))$. Podemos utilizar este isomorfismo en cada $p \in M$ para ver que

$$T_1^1(M) = \bigcup_p T_p^* M \otimes T_p M = \bigcup_p \text{hom}(T_p M, T_p M) = \text{hom}(TM, TM). \quad (3.3)$$

Si $T \in \Gamma(T_1^1(M))$ y (U, φ) es una carta de M con $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$, entonces

$$T|_U = \sum_{i,j=1}^n T_{ij} dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x_j},$$

donde

$$T_{ij}(p) = T_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p, dx^j \Big|_p \right). \quad (3.4)$$

De hecho, el homomorfismo en $T_p M$ correspondiente al tensor bajo el isomorfismo (3.3) tiene la representación matricial (T_{ij}) con respecto de la base $\{\partial/\partial x_i|_p\}$.

En particular, supongamos que el homomorfismo en $T_p M$ es la transformación identidad para todo $p \in M$. La sección correspondiente $\delta \in \Gamma(T_1^1(M))$ es llamada el *tensor de Kronecker*, que en una carta (U, φ) , $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ tiene la expresión

$$\delta|_U = \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij} dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

También podemos aprovechar el isomorfismo (3.3) para definir una operación en los tensores. Dado un tensor $T \in \Gamma(T_1^1(M))$ al cual le corresponde el homomorfismo $T_p : T_p M \rightarrow T_p M$, definimos su *contracción* por $c(T)(p) = \text{Tr } T_p$. En una carta (U, φ) con $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$, si T tiene la expresión (3.4), entonces

$$c(T)|_U = \sum_{i=1}^n T_{ii}.$$

Para finalizar esta sección, mostraremos una forma de construir nuevos tensores a partir de otros. Dada una transformación lineal $A : V \rightarrow W$, del álgebra lineal sabemos que existe su transformación transpuesta $A^* : W^* \rightarrow V^*$. La siguiente construcción generaliza esta idea.

Definición 3.11. Dadas las transformaciones lineales $A_i : V_i \rightarrow W_i$, $i = 1, \dots, k$, definimos $A_1^* \otimes \dots \otimes A_k^* : W_1^* \otimes \dots \otimes W_k^* \rightarrow V_1^* \otimes \dots \otimes V_k^*$ como

$$A_1^* \otimes \dots \otimes A_k^*(T)(v_1, \dots, v_k) = T(A_1(v_1), \dots, A_k(v_k)).$$

En el caso en que para toda i ocurra que $V_i = V$, $W_i = W$ y $A_i = A$, denotaremos simplemente por A^* a la transformación $A^* \otimes \dots \otimes A^*$.

La demostración de las propiedades básicas de A^* enunciadas en la siguiente proposición se dejan como ejercicio al lector.

Proposición 3.12. *Sea $A : V \rightarrow W$ una transformación lineal.*

1. Si $S, T \in W^*$, entonces $A^*(S \otimes T) = (A^*S) \otimes (A^*T)$.
2. Si $B : W \rightarrow U$ es una transformación lineal, entonces $(BA)^* = A^*B^*$ (observe que esto es válido en $\otimes^k U^*$ para cada k).

Las definiciones anteriores consideran sólo un espacio vectorial. Podemos extenderlas al contexto de los haces sobre variedades diferenciables considerando una transformación diferenciable y su diferencial en cada punto, como sigue.

Definición 3.13. Sean M, N variedades y $f : M \rightarrow N$ diferenciable. Definimos la transformación $f^* : \bigcup_k \Gamma(T^k(N)) \rightarrow \bigcup_k \Gamma(T^k(M))$ de la manera siguiente:

- Si $k = 0$, entonces $f^* : C^\infty(N) \rightarrow C^\infty(M)$ está dada por $f^*g = g \circ f$.
- Si $k > 0$, entonces $f^* : \Gamma(T^k(N)) \rightarrow \Gamma(T^k(M))$ está dada por

$$(f^*T)_p = (f_{*p})^*(T_{f(p)}).$$

En forma explícita, f^*T tiene la siguiente expresión:

$$(f^*T)_p(v_1, \dots, v_k) = T_{f(p)}(f_{*p}(v_1), \dots, f_{*p}(v_k))$$

De nuevo, f^* cumple ciertas propiedades sencillas que establecemos en la siguiente proposición.

Proposición 3.14. *Si $f : M \rightarrow N$ y $h : N \rightarrow P$ son diferenciables.*

- $(h \circ f)^* = f^* \circ h^*$
- Si $g \in C^\infty(N)$, $d(f^*g) = f^*dg$.

DEMOSTRACIÓN. Sólo demostraremos el segundo inciso, dejando el primero como ejercicio para el lector:

$$d(f^*g)_p = dg_{f(p)} \circ f_{*p} = (f_{*p})^*(dg_{f(p)}) = (f^*dg)(p).$$

3.2. La derivada de Lie, II

En la definición 1.54 presentamos la derivada de Lie L_X de una función y de un campo vectorial, con respecto de un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Ahora extenderemos esta definición a algunos tensores.

Definición 3.15. Sea M variedad diferenciable, $X \in \mathfrak{X}(M)$ y φ_t el flujo local de X . Para $T \in \Gamma(T^k(M))$ definimos la *derivada de Lie* L_X por

$$L_X T_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^* T_p.$$

Proposición 3.16. Sean M, N variedades y $f : M \rightarrow N$ un difeomorfismo. Entonces, con las notaciones y definición anteriores,

1. $L_X \circ f^* = f^* \circ L_{f_*X}$, $f_*(L_X Y) = L_{f_*X} f_* Y$.
2. $L_X(fT) = fL_X(T) + L_X(f)T$.
3. $d(L_X f) = L_X(df)$.
4. Si $Y_1, \dots, Y_k \in \mathfrak{X}(M)$, entonces

$$L_X(T(Y_1, \dots, Y_k)) = L_X(T)(Y_1, \dots, Y_k) + \sum_{i=1}^k T(Y_1, \dots, L_X(Y_i), \dots, Y_k).$$

DEMOSTRACIÓN. (1) El flujo local de f_*X es $f \circ \varphi_t \circ f^{-1}$. Así

$$\begin{aligned}
 L_X(f^*T)(p) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^* f^* T(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f^*(f^{-1})^* \varphi_t^* f^* T)(p) \\
 &= (f_*p)^* \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \varphi_t \circ f^{-1})^* T(f(p)) \\
 &= (f_*p)^* L_{f_*X} T(f(p)) = (f^* \circ L_{f_*X})(p). \\
 L_{f_*X} f_* Y(f(p)) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} ((f \circ \varphi_{-t} \circ f^{-1})_* f_* Y) f(p) \\
 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f_*(\varphi_{-t})_* Y) f(p) = f_* p \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi_{-t})_* Y(p) \right) \\
 &= f_* p (L_X Y(p)) = f_*(L_X Y)(f(p)).
 \end{aligned}$$

Para demostrar (3), primero supongamos que M es un abierto de \mathbb{R}^n . Entonces,

$$\begin{aligned}
 (L_X df)(p) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi_t^* df)(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (d\varphi_t^* f)(p) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial p} (f \circ \varphi)(0, p) \\
 &= \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial t} (f \circ \varphi)(0, p) = d(L_X f)(p).
 \end{aligned}$$

En el caso general, sea $p \in M$ y sea (U, ψ) una carta alrededor de p . Por el inciso (1), en la vecindad U tenemos

$$\begin{aligned}
 L_X(df) &= \psi^*(L_{\psi_*X}(\psi^{-1*}df)) = \psi^*(L_{\psi_*X}d(\psi^{-1*}f)) \\
 &= \psi^*d(L_{\psi_*X}(\psi^{-1*}f)) = d\psi^*(L_{\psi_*X}(\psi^{-1*}f)) = d(L_X f).
 \end{aligned}$$

Para (4), observemos que

$$\begin{aligned}
 \varphi_t^*(T(Y_1, \dots, Y_k))(p) &= T(Y_1, \dots, Y_k)(\varphi_t(p)) \\
 &= T(\varphi_t(p))(Y_1(\varphi_t(p)), \dots, Y_k(\varphi_t(p))) \\
 &= (\varphi_t^*T)(p)((\varphi_{-t*}Y_1)(p), \dots, (\varphi_{-t*}Y_k)(p)).
 \end{aligned}$$

De este modo,

$$\begin{aligned}
 L_X(T(Y_1, \dots, Y_k))(p) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi_t^*T)(p)((\varphi_{-t*}Y_1)(p), \dots, (\varphi_{-t*}Y_k)(p)) \\
 &= L_X T(p)(Y_1(p), \dots, Y_k(p)) + \sum_{i=1}^k T(p)(Y_1(p), \dots, L_X Y_i(p), \dots, Y_k(p)).
 \end{aligned}$$

La demostración de (2) es similar y más sencilla. □

3.3. El álgebra exterior

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $T : V^k \rightarrow \mathbb{R}$ un tensor. Diremos que T es *alternante* si y sólo si

$$T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -T(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$$

para cualesquiera i, j , $i < j$, y $v_i, v_j \in V$. El lector puede verificar que esto es equivalente a pedir que $T(v_1, \dots, v_k) = 0$ si existe $i < j$ tal que $v_i = v_j$.

El conjunto de tensores alternantes de orden k es un subespacio vectorial de $\otimes^k V^*$, que denotaremos por $\wedge^k V^*$. Además, conviene definir $\wedge^0 V^* = \mathbb{R}$.

Veremos más adelante que los tensores alternantes satisfacen varias propiedades que los hacen adecuados para la teoría de integración. Por el momento, mostraremos una manera de obtener tensores alternantes a partir de tensores arbitrarios.

Definición 3.17. Sea S_k el grupo de permutaciones de un conjunto de k elementos. Para $\sigma \in S_k$, denotamos por $\widehat{\sigma}$ a $\widehat{\sigma}(v_1, \dots, v_k) = (v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$. Dado un tensor $T \in \otimes^k V^*$, definimos el *alternante* de T como

$$\text{Alt}(T) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sgn } \sigma) T \circ \widehat{\sigma}$$

Nótese que

$$\widehat{\tau \widehat{\sigma}}(v_1, \dots, v_k) = \widehat{\tau}(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = (v_{\sigma\tau(1)}, \dots, v_{\sigma\tau(k)}) = (\sigma\tau)\widehat{\sigma}(v_1, \dots, v_k),$$

de modo que $\widehat{\tau \widehat{\sigma}} = (\sigma\tau)\widehat{\sigma}$.

Proposición 3.18. *Alt es una proyección de $\otimes^k V^*$ sobre $\wedge^k V^*$:*

1. $\text{Alt}(\otimes^k V^*) \subset \wedge^k V^*$; en otras palabras, $\text{Alt}(T)$ es alternante para toda T .
2. $\text{Alt} | \wedge^k V^* = \text{Id} | \wedge^k V^*$; en otras palabras, $\text{Alt}(\text{Alt}(T)) = \text{Alt}(T)$.

DEMOSTRACIÓN. En la demostración usaremos la notación A_k para el subgrupo de S_k formado por las permutaciones pares.

(1) Si $v_i = v_j$ para alguna pareja $i < j$, sea τ la permutación (ij) . Entonces

$$(\tau\sigma)\widehat{\tau}(v_1, \dots, v_k) = \widehat{\sigma\tau}(v_1, \dots, v_k) = \widehat{\sigma}(v_1, \dots, v_k)$$

para todo $\sigma \in S_k$.

$$\begin{aligned} k! \text{Alt}(T)(v_1, \dots, v_k) &= \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sgn } \sigma) T \circ \widehat{\sigma}(v_1, \dots, v_k) \\ &= \sum_{\sigma \in A_k} T \circ \widehat{\sigma}(v_1, \dots, v_k) - \sum_{\sigma \in A_k} T \circ (\tau\sigma)\widehat{\tau}(v_1, \dots, v_k) = 0 \end{aligned}$$

(2) Sean $\omega \in \wedge^k V^*$ y τ la permutación (12); entonces

$$\omega \circ \widehat{\tau} = -\omega \quad \text{y} \quad \omega \circ \widehat{\sigma} = \omega \quad \text{para todo } \sigma \in A_k.$$

Así,

$$\text{Alt}(\omega) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in A_k} (\omega \circ \widehat{\sigma} - \omega \circ (\sigma\tau)) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in A_k} (\omega \circ \widehat{\sigma} - \omega \circ \widehat{\tau} \circ \widehat{\sigma}) = \frac{2}{k!} \sum_{\sigma \in A_k} \omega = \omega.$$

La operación Alt nos permite obtener un producto adecuado para los tensores alternantes.

Definición 3.19. Sea V un espacio vectorial de dimensión n . Para $T \in \wedge^k V^*$ y $S \in \wedge^l V^*$ definimos su *producto cuña* $T \wedge S \in \wedge^{k+l} V^*$ como

$$T \wedge S = \frac{(k+l)!}{k! l!} \text{Alt}(T \otimes S).$$

Con este producto, la suma directa

$$\wedge V^* = \bigoplus_{k=0}^n \wedge^k V^*$$

es un álgebra no conmutativa con 1, llamada el *álgebra exterior* de V .

Proposición 3.20. *El producto cuña \wedge es bilineal; además, satisface que*

1. Si $A : W \rightarrow V$ es lineal, entonces $A^*(\wedge^k V^*) \subset \wedge^k W^*$ y

$$A^*(T \wedge S) = (A^*T) \wedge (A^*S).$$

2. Si $T \in \wedge^k V^*$ y $S \in \wedge^l V^*$, $T \wedge S = (-1)^{kl} S \wedge T$.
3. Si $V = W$ es un espacio vectorial de dimensión n y $A : V \rightarrow V$ es una transformación lineal, A^* es la versión libre de bases del determinante, en el sentido de que $A^*T = (\det A)T$ para todo $T \in \wedge^n V^*$.

Dejaremos la demostración de la proposición anterior al lector. A continuación analizaremos la asociatividad del producto cuña.

Proposición 3.21. Sean $S \in \otimes^k V^*$, $T \in \otimes^l V^*$, $\omega \in \wedge^k V^*$, $\eta \in \wedge^l V^*$ y $\theta \in \wedge^m V^*$.

1. Si $\text{Alt}(S) = 0$, entonces $\text{Alt}(S \otimes T) = \text{Alt}(T \otimes S) = 0$.
2. El producto cuña es asociativo; es decir, $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$.

DEMOSTRACIÓN. 1. Consideremos el subgrupo \widehat{S}_k de S_{k+l} formado por las transformaciones σ que dejan fijos a $k+1, \dots, k+l$ y las clases laterales

$$\{\sigma \circ \widehat{S}_k : \sigma \in S_{k+l}\} = \{\sigma_1 \circ \widehat{S}_k, \dots, \sigma_m \circ \widehat{S}_k\}, m = (k+l)!/k!$$

Entonces,

$$\begin{aligned} (k+l)! \text{Alt}(S \otimes T) &= \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\text{sgn } \sigma) S \otimes T \circ \widehat{\sigma} \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{\sigma \in \widehat{S}_k} \text{sgn}(\sigma_i \sigma) (S \otimes T) \circ (\sigma_i \sigma) \widehat{} \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{\sigma \in \widehat{S}_k} (\text{sgn } \sigma) S \circ \widehat{\sigma} \circ (\sigma_i|_{\{1, \dots, k\}}) \widehat{} \otimes \text{sgn}(\sigma_i) T \circ (\sigma_i|_{\{k+1, \dots, k+l\}}) \widehat{} \\ &= \sum_{i=1}^m k! \text{Alt}(S) \circ (\sigma_i|_{\{1, \dots, k\}}) \widehat{} \otimes \text{sgn}(\sigma_i) T \circ (\sigma_i|_{\{k+1, \dots, k+l\}}) \widehat{} = 0. \end{aligned}$$

2. Por el segundo inciso de la proposición 3.18, tenemos que

$$\text{Alt}(\text{Alt}(\omega \otimes \eta) - \omega \otimes \eta) = 0.$$

Por el primer inciso de esta proposición,

$$\text{Alt}(\text{Alt}(\omega \otimes \eta) \otimes \theta) = \text{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta).$$

De manera similar,

$$\text{Alt}(\omega \otimes \text{Alt}(\eta \otimes \theta)) = \text{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta).$$

Así,

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta) = \omega \wedge (\eta \wedge \theta). \quad \square$$

Corolario 3.22. Sean $\phi_1, \dots, \phi_k \in V^*$, $v_1, \dots, v_k \in V$; entonces,

$$\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_k = k! \text{Alt}(\phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_k) = \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn } \sigma (\phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_k) \circ \sigma,$$

de modo que

$$\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_k(v_1, \dots, v_k) = \det(\phi_i(v_j)).$$

Ahora obtendremos una base de $\wedge^k V^*$.

Proposición 3.23. Sea $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ una base de V^* , entonces

$$\{\phi_{i_1} \wedge \dots \wedge \phi_{i_k} : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$$

es una base de $\wedge^k V^*$. Así,

$$\dim \wedge^k V^* = \binom{n}{k}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ la base de V dual a $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$. Sabemos que $\{\phi_{i_1} \otimes \dots \otimes \phi_{i_k} : 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n\}$ es una base de $\otimes^k V^*$ y que para cualquier $T \in \otimes^k V^*$ se tiene que

$$T = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n T(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) \phi_{i_1} \otimes \dots \otimes \phi_{i_k}.$$

Si $T \in \wedge^k V^*$, entonces

$$T = \text{Alt}(T) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n T(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) \text{Alt}(\phi_{i_1} \otimes \dots \otimes \phi_{i_k}).$$

Observemos que cada término $\text{Alt}(\phi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{i_k})$ se anula, o bien es un múltiplo de $\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k}$; esto muestra que los vectores $\{\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k}\}$ generan $\wedge^k V^*$. Para mostrar que los vectores son linealmente independientes, supongamos que

$$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_k} \phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k} = 0,$$

Evaluando en $(v_{j_1}, \dots, v_{j_k})$, tenemos

$$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_k} \det(\phi_{i_r}(v_{j_s})) = 0,$$

lo que implica que $\alpha_{j_1, \dots, j_k} = 0$ para todo j_1, \dots, j_k . □

El producto cuña provee de un criterio para verificar la independencia lineal de elementos de V^* .

Proposición 3.24. $\phi_1, \dots, \phi_k \in V^*$ son linealmente independientes si y sólo si $\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_k \neq 0$.

DEMOSTRACIÓN. Si $\phi_1, \dots, \phi_k \in V^*$ son linealmente independientes, completamos a una base ϕ_1, \dots, ϕ_n de V^* . Entonces, $\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_k$ forma parte de una base de $\wedge^k V^*$ y así, no es cero.

Recíprocamente, supongamos que $\phi_1, \dots, \phi_k \in V^*$ son linealmente dependientes y digamos que $\phi_k = \sum_{i < k} a_i \phi_i$. Entonces

$$\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_k = \sum_{i < k} a_i (\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_{k-1} \wedge \phi_i) = 0. \quad \square$$

3.4. Formas diferenciales

Ahora definiremos las formas diferenciales, los objetos que integraremos más adelante.

Definición 3.25. Sean M una variedad diferenciable y $\xi = (E, \pi)$ un haz vectorial diferenciable sobre M . Definimos

$$\wedge^k E = \bigcup_{p \in M} \wedge^k E_p, \quad \Omega^k(E) = \Gamma(\wedge^k E).$$

Un elemento de $\Omega^k(M) = \Omega^k(T^*M)$ es una k -forma diferencial en M .

Podemos extender la definición del producto cuña, operando punto a punto; es decir, si $\omega \in \Omega^k(M)$ y $\eta \in \Omega^l(M)$, definimos $(\omega \wedge \eta)(p) = \omega(p) \wedge \eta(p)$.

Observación. Si $F : N \rightarrow M$ es diferenciable y $\omega \in \Omega^k(M)$, $\eta \in \Omega^l(M)$ entonces $F^*(\omega \wedge \eta) = F^*(\omega) \wedge F^*(\eta)$.

En cada punto $p \in \mathbb{R}^n$, $\{dx_p^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_p^{i_k} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$ es base de $\wedge^k T_p^* \mathbb{R}^n$. Así, cualquier $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ se escribe

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}, \quad \alpha_{i_1 \dots i_k} \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Por brevedad, para $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ utilizaremos la notación $I = (i_1, \dots, i_k)$ y escribiremos lo anterior como $\omega = \sum_I \alpha_I dx^I$.

Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, $F = (F^1, \dots, F^m)$, $F^i \in C^\infty(U)$ y $g \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, tenemos

$$\begin{aligned} F^*(g dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_k}) &= (F^*g) F^* dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge F^* dy^{j_k} \\ &= (g \circ F) dF^{j_1} \wedge \cdots \wedge dF^{j_k} \\ &= (g \circ F) \sum_I \det \left(\frac{\partial F^{j_k}}{\partial x^{i_l}} \right) dx^I. \end{aligned}$$

Los conceptos de producto cuña y de orientación de un espacio vectorial tienen una relación estrecha. Si $\dim V = n$, cualquier $T \in \wedge^n V^* \setminus \{0\}$ define una orientación \mathcal{O} en V : decimos que $(v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{O}$ si y sólo si $T(v_1, \dots, v_n) > 0$. La extensión de este hecho al caso de las variedades es como sigue.

Proposición 3.26. *Una variedad de dimensión n es orientable si y sólo si posee una n -forma que nunca se anula.*

DEMOSTRACIÓN. Si M es orientable, entonces hay un atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ tal que $\det D(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) > 0$. Escribiendo $\varphi_\alpha = (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$, definimos

$$\omega_\alpha = dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n,$$

Sean $\{h_\alpha\}$ una partición de la unidad subordinada a $\{U_\alpha\}$, entonces $\omega = \sum_\alpha h_\alpha \omega_\alpha$ nunca se anula. En efecto, sea $p \in M$ y sea β tal que $h_\beta(p) > 0$.

Para cualquier α , $\omega_\alpha = \det D(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) \circ \varphi_\beta \omega_\beta$. Así

$$\omega(p) = \left(\sum_\alpha h_\alpha(p) \det D(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(\varphi_\beta(p)) \right) \omega_\beta(p).$$

Para el recíproco, sean ω una n -forma en M que nunca se anula y $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlas tal que cada U_α es conexo; entonces

$$\omega|_{U_\alpha} = f_\alpha dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n, \quad \text{con } f_\alpha \in C^\infty(U_\alpha).$$

Como f_α no se anula y U_α es conexa, el signo de f_α es constante y podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $f_\alpha > 0$. En $U_\alpha \cap U_\beta$ tenemos

$$f_\alpha \det D(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) \circ \varphi_\beta dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n = f_\beta dx_\beta^1 \wedge \cdots \wedge dx_\beta^n,$$

y así $\det D(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) > 0$. □

3.5. La derivada exterior

Ahora definiremos el operador de derivada exterior para formas. Primero lo definiremos para formas en \mathbb{R}^n y luego extenderemos esta definición al caso de las variedades.

Definición 3.27. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto. La *derivada exterior* $d : \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U)$ se define para cada $k \geq 0$ por

$$d \left(\sum_I f_I dx^I \right) = \sum_I df_I \wedge dx^I.$$

Proposición 3.28. *La derivada exterior tiene las siguientes propiedades:*

1. d es lineal.
2. Si $\omega \in \Omega^k(U)$ y $\eta \in \Omega^l(U)$, entonces $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$.
3. Si $f \in C^\infty(U)$, entonces $d(df) = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Es claro que d es lineal. Para el segundo punto, si $\omega = f dx^I$ y $\eta = g dx^J$, tenemos que $\omega \wedge \eta = fg dx^I \wedge dx^J$ y así

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= (gdf + fdg) \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= df \wedge dx^I \wedge (g dx^J) + fdg \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta. \end{aligned}$$

Finalmente, si $f \in C^\infty(U)$, entonces

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i\right) = \sum_{i=1}^n d\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) \wedge dx^i = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i \\ &= \sum_{j < i} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i - \sum_{j < i} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Corolario 3.29. Si $\omega \in \Omega^k(U)$, entonces $d(d\omega) = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Por inducción. El caso $k = 0$ se demostró en la proposición 3.28. Suponiendo que el resultado vale para $k - 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} d(d(f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k})) &= d(df \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) \\ &= d(df) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} - df \wedge d(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) \\ &= -df \wedge d(dx^{i_1} dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Las propiedades de d establecidas en la proposición 3.28 y el corolario 3.29 caracterizan a este operador completamente, como muestra el siguiente resultado.

Proposición 3.30. Sea $d' : \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U)$ un operador lineal definido para cada $k \geq 0$. Si d' satisface las propiedades de la proposición 3.28 y $d'f = df$ para $f \in C^\infty(U)$, entonces $d' = d$.

DEMOSTRACIÓN. Observemos que

$$d'(f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) = d'f \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} + f \wedge d'(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}). \quad (3.5)$$

Demostraremos que $d'(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) = 0$ por inducción sobre k . Para $k = 1$, $d'dx^i = d'dx^i = 0$. Suponiendo que el resultado es válido para $k - 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} d'(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) &= d'dx^{i_1} \wedge (dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) \\ &\quad - dx^{i_1} \wedge d'(dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) = 0. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (3.5) tenemos que $d = d'$. □

Proposición 3.31. *Sea $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo. Entonces*

$$h^* \circ d = d \circ h^*.$$

DEMOSTRACIÓN. Basta observar que $d' = (h^{-1})^* \circ d = d \circ h^*$ satisface las condiciones de la proposición 3.30. □

En realidad, es posible demostrar que $h^* \circ d = d \circ h^*$ para toda transformación $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, no sólo para difeomorfismos. Dejaremos este caso al lector.

Utilizamos las cartas para extender la definición de la derivada exterior a las variedades. Intuitivamente, dada una k -forma en M , “bajamos” ésta a \mathbb{R}^n por medio de una carta, derivamos y volvemos a “subirla”. Formalmente, si $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ es una carta, definimos

$$d\omega = \varphi_\alpha^* (d(\varphi_\alpha^{-1})^* \omega).$$

Si (U_β, φ_β) es otra carta con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, entonces $h = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ es un difeomorfismo. Por la proposición anterior,

$$(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^* \circ d(\varphi_\beta)^* \omega = d \circ (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^* (\varphi_\beta)^* \omega,$$

lo que es equivalente a

$$\varphi_\beta^* (d(\varphi_\beta^{-1})^* \omega) = \varphi_\alpha^* (d(\varphi_\alpha^{-1})^* \omega).$$

de modo que la definición no depende de la carta elegida. Es fácil mostrar que esta definición es equivalente a la siguiente.

Definición 3.32. Sea M una variedad diferenciable y $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ carta de un abierto en M . Sea ω una forma con la expresión

$$\omega|_{U_\alpha} = \sum_I f_{\alpha,I} dx_\alpha^I;$$

Para cada $k \geq 0$, definimos la *derivada exterior* $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ como

$$d\omega|_{U_\alpha} = \sum_I df_{\alpha,I} \wedge dx_\alpha^I.$$

El siguiente resultado da una expresión para $d\omega$ en términos intrínsecos, sin utilizar las cartas.

Teorema 3.33. Sean $\omega \in \Omega^k(M)$, $X_1, \dots, X_{k+1} \in \mathfrak{X}(M)$; entonces

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i(\omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{k+1})) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{k+1}), \end{aligned}$$

donde \widehat{X}_i indica que el término se ha omitido.

DEMOSTRACIÓN. Sean $\Sigma_1, \Sigma_2 : \mathfrak{X}(M)^{k+1} \rightarrow C^\infty(M)$ las sumas en el lado derecho de la expresión anterior y sea $d'\omega = \Sigma_1 + \Sigma_2$. Probaremos que $d'\omega$ es $C^\infty(M)$ -multilineal. Observemos primero que

$$\begin{aligned} \Sigma_1(X_1, \dots, fX_l, \dots, X_{k+1}) &= (-1)^{l+1} fX_l(\omega(X_1, \dots, \widehat{X}_l, \dots, X_{k+1})) \\ &\quad + \sum_{l < i} (-1)^{i+1} X_i(f\omega(X_1, \dots, X_l, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{k+1})) \\ &\quad + \sum_{i < l} (-1)^{i+1} X_i(f\omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_l, \dots, X_{k+1})) \\ &= f\Sigma_1(X_1, \dots, X_{k+1}) + \sum_{i \neq l} (-1)^{i+1} (X_i f)(\omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{k+1})). \end{aligned}$$

Puesto que

$$[X_i, fX_l] = f[X_i, X_l] + (X_i f)X_l \quad \text{y} \quad [fX_l, X_j] = f[X_l, X_j] - (X_j f)X_l,$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
 \Sigma_2(X_1, \dots, fX_l, \dots, X_{k+1}) &= f\Sigma_2(X_1, \dots, \dots, X_{k+1}) \\
 &\quad - \sum_{l < j} (-1)^{l+j} (X_j f) \omega(X_l, \dots, \widehat{X}_l, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{k+1}) \\
 &\quad + \sum_{i < l} (-1)^{i+l} (X_i f) \omega(X_l, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_l, \dots, X_{k+1}) \\
 &= f\Sigma_2(X_1, \dots, \dots, X_{k+1}) + \sum_{l < j} (-1)^j (X_j f) \omega(X_1, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{k+1}) \\
 &\quad + \sum_{i < l} (-1)^i (X_i f) \omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{k+1})
 \end{aligned}$$

Así, $d'\omega(X_1, \dots, fX_l, \dots, X_{k+1}) = fd'\omega(X_1, \dots, X_{k+1})$. Recordemos que si (U, φ) es una carta con $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$, entonces

$$d'\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_{k+1}} d'\omega \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_{k+1}}} \right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k+1}},$$

donde

$$d'\omega \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_{k+1}}} \right) = \sum_{s=1}^{k+1} (-1)^{s+1} \frac{\partial}{\partial x^{i_s}} \omega \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \widehat{\frac{\partial}{\partial x^{i_s}}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_{k+1}}} \right)$$

Para $\omega = gdx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}$, $j_1 < \dots < j_k$, tenemos que

$$\omega \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \widehat{\frac{\partial}{\partial x^{i_s}}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_{k+1}}} \right)$$

es igual a g o a 0 según si $(i_1, \dots, i_{k+1}) = (j_1, \dots, i_l, \dots, j_k)$ o bien si $\{j_1, \dots, j_k\} \not\subset \{i_1, \dots, i_{k+1}\}$, respectivamente. Así,

$$d'\omega = \sum_{s \notin \{j_1, \dots, j_k\}} (-1)^{s+1} \frac{\partial g}{\partial x^l} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^l \wedge \dots \wedge dx^{j_k} = d\omega. \quad \square$$

3.6. Cohomología de de Rham

Aprovecharemos el operador de derivada exterior para estudiar unas nuevas estructuras algebraicas asociadas a una variedad, los grupos de cohomología (de “de Rham”).

Definición 3.34. Sea M una variedad diferenciable.

- Una k -forma en M es *cerrada* si y sólo si $d\omega = 0$. Denotamos por $Z^k(M)$ el espacio de k -formas cerradas en M .
- Una k -forma en M es *exacta* si y sólo si existe una $(k-1)$ -forma η tal que $\omega = d\eta$. Denotamos por $B^k(M)$ el espacio de k -formas exactas en M .
- Puesto que $d \circ d = 0$, $B^k(M) \subset Z^k(M)$ y podemos definir el k -ésimo grupo de cohomología de de Rham de M como

$$H^k(M) = Z^k(M)/B^k(M).$$

- Sean $\Omega_c^k(M) = \{\omega \in \Omega^k(M) : \text{soporte } \omega \text{ es compacto}\}$ y

$$B_c^k(M) = B^k(M) \cap \Omega_c^k(M), \quad Z_c^k(M) = Z^k(M) \cap \Omega_c^k(M).$$

El k -ésimo grupo de cohomología con soporte compacto de M es

$$H_c^k(M) = Z_c^k(M)/B_c^k(M).$$

Ejemplo 3.35. Sean A y B el conjunto de componentes conexas y el conjunto de componentes conexas compactas de M respectivamente.

$$H^0(M) = Z^0(M) = \{g \in C^\infty(M) : dg = 0\} = \bigoplus_{a \in A} \mathbb{R}$$

$$H_c^0(M) = Z_c^0(M) = \{g \in C_c^\infty(M) : dg = 0\} = \bigoplus_{a \in B} \mathbb{R}$$

Observación. Sea $f \in C^\infty(M, N)$.

- Como $f^*d = df^*$, tenemos que

$$f^*(Z^k(N)) \subset Z^k(M) \quad \text{y} \quad f^*(B^k(N)) \subset B^k(M)$$

y podemos definir un homomorfismo $f^* : H^k(N) \rightarrow H^k(M)$. Además, si $g \in C^\infty(N, P)$, es fácil ver que estos homomorfismos satisfacen $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

- Si f es *propia* (la imagen inversa de cada compacto es compacta), entonces $f^*(\Omega_c^k(N)) \subset \Omega_c^k(M)$ y se define un homomorfismo $f^* : H_c^k(N) \rightarrow H_c^k(M)$.

Ejemplo 3.36. Ya hemos señalado que toda forma exacta es cerrada. La afirmación recíproca no es válida en general; por ejemplo, es fácil ver que la forma

$$\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

definida en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ es cerrada. Sin embargo, de existir una 0-forma f tal que $\omega = df$, tal función debería coincidir (salvo una constante) con la función $g(x, y) = \arctan(y/x)$, pero esta función no es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Este ejemplo muestra que tiene sentido buscar condiciones bajo las cuales se satisface que toda forma cerrada sea exacta. Veremos que si una variedad M es contraíble, entonces se cumple esta afirmación; pero para esto, debemos ver cómo se comportan los grupos de cohomología bajo transformaciones homotópicas.

Definición 3.37. Dos transformaciones diferenciables $f, g : M \rightarrow N$ son *homotópicas* si y sólo si existe $F : M \times [0, 1] \rightarrow N$ diferenciable tal que para cada $p \in M$ se cumple $F(p, 0) = f(p)$, $F(p, 1) = g(p)$.

Sean $\pi_M : M \times [0, 1] \rightarrow M$ y $t : M \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ las proyecciones naturales. Cualquier $\omega \in \Omega^k(M \times [0, 1])$ puede escribirse en la forma

$$\omega = \pi_M^* \omega_t + dt \wedge \pi_M^* \eta_t, \quad \omega_t \in \Omega^k(M), \eta_t \in \Omega^{k-1}(M), t \in [0, 1].$$

Lema 3.38. Sean $i_t : M \rightarrow M \times [0, 1]$, $x \mapsto (x, t)$ las inclusiones canónicas y sea $I : \Omega^k(M \times [0, 1]) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$ el operador definido mediante

$$I(\pi_M^* \omega_t + dt \wedge \pi_M^* \eta_t) = \int_0^1 \eta_t dt.$$

Entonces $i_1^* \omega - i_0^* \omega = I(d\omega) + dI(\omega)$.

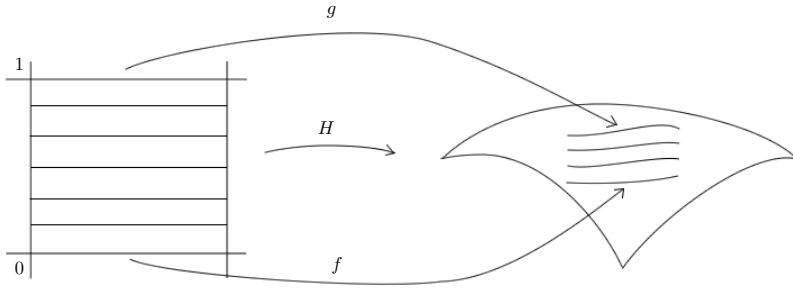


Figura 3.1: Las transformaciones f y g son homotópicas.

DEMOSTRACIÓN. Caso 1. Si $\omega = gdx^I$, entonces $I(\omega) = 0$,

$$\begin{aligned} d\omega &= dg \wedge dx^I = \sum_i \frac{\partial g}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^I + \frac{\partial g}{\partial t} dt \wedge dx^I, \\ I(d\omega) &= \left(\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial t} dt \right) dx^I = (g(x, 1) - g(x, 0)) dx^I, \\ i_1^* \omega &= g(x, 1) dx^I, \quad i_0^* \omega = g(x, 0) dx^I. \end{aligned}$$

Caso 2. Si $\omega = gdt \wedge dx^I$, entonces

$$\begin{aligned} I(\omega) &= \left(\int_0^1 g(x, t) dt \right) dx^I, \\ dI(\omega) &= \sum_i \left(\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x^i} dt \right) dx^i \wedge dx^I \\ d\omega &= \sum_i \frac{\partial g}{\partial x^i} dx^i \wedge dt \wedge dx^I, \\ I(d\omega) &= - \sum_i \left(\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x^i} dt \right) dx^i \wedge dx^I. \end{aligned}$$

Como para toda $x \in M$ se tiene que $t \circ i_l(x) = s$ se tiene que $i_l^* dt = di_l^* t = d(t \circ i_l) = 0$. Entonces $is^* \omega = i_l^*(dt) \wedge i_l^*(gdx^I) = 0$. \square

Proposición 3.39. Sean $f, g : M \rightarrow N$ transformaciones homotópicas, entonces $f^* = g^* : H^k(N) \rightarrow H^k(M)$ para todo k .

DEMOSTRACIÓN. Si F es la homotopía entre f y g , se tiene que $F \circ i_0 = f$, $F \circ i_1 = g$. Entonces $i_0^* \circ F^* = f^*$, $i_1^* \circ F^* = g^*$. Por el lema 3.38,

$$g^*(\omega) - f^*(\omega) = I(d(F^*\omega)) + dI(F^*\omega) = I(F^*d\omega) + dI(F^*\omega).$$

Si $d\omega = 0$, $g^*(\omega) - f^*(\omega) = dI(F^*\omega)$ y así $[g^*(\omega)] = [f^*(\omega)] \in H^k(M)$.

Lema 3.40 (Poincaré). Supongamos que M es contraíble, es decir, que la transformación identidad es homotópica a una transformación constante. Entonces $H^k(M) = 0$ para $k > 0$.

DEMOSTRACIÓN. Si g es una transformación constante y $k > 0$, se tiene que $g^*|_{H^k(M)} = 0$. □

3.7. Integración en cadenas

Definición 3.41. Un k -cubo singular en M es una función diferenciable $c : [0, 1]^k \rightarrow M$. Si ω es una k -forma en M , $c^*\omega = gdx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k$ y definimos

$$\int_c \omega = \int_{[0,1]^k} c^*\omega = \int_{[0,1]^k} g.$$

Proposición 3.42. Sean ω una k -forma en \mathbb{R}^k y c un k -cubo singular con $\det c \geq 0$. Entonces

$$\int_{[0,1]^k} c^*\omega = \int_{c([0,1]^k)} \omega.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k$, de modo que

$$c^*\omega = (c \circ f) \det Dc dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k;$$

entonces

$$\int_{[0,1]^k} c^*\omega = \int_{[0,1]^k} (c \circ f) \det Dc = \int_{c([0,1]^k)} f = \int_{c([0,1]^k)} \omega.$$

Proposición 3.43. *Sean c un k -cubo singular en M y $p : [0, 1]^k \rightarrow [0, 1]^k$ suprayectiva con $\det Dp \geq 0$. Entonces*

$$\int_{c \circ p} \omega = \int_c \omega.$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\int_{c \circ p} \omega = \int_{[0,1]^k} (c \circ p)^* \omega = \int_{[0,1]^k} p^*(c^* \omega) = \int_{p([0,1]^k)} c^* \omega = \int_c \omega. \quad \square$$

Definición 3.44. Una k -cadena en M es una combinación formal entera de k -cubos singulares $c = \sum_{i=1}^k a_i c_i$, $a_i \in \mathbb{Z}$.

Sea $I^n : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ la inclusión. Para $\alpha = 0, 1$ definimos $I_{i,\alpha}^n : [0, 1]^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $I_{i,\alpha}^n(x^1, \dots, x^{n-1}) = (x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^i, \dots, x^{n-1})$. Entonces,

$$\partial I^n = \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha=0,1}}^n (-1)^{i+\alpha} I_{i,\alpha}^n$$

En el caso general, si c es un n -cubo singular en M , definimos $c_{i,\alpha} = c \circ I_{i,\alpha}^n$ y

$$\partial c = \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha=0,1}}^n (-1)^{i+\alpha} c_{i,\alpha}$$

Proposición 3.45. *Si c es un cubo singular en M , entonces $\partial(\partial c) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Observemos que

$$\partial(\partial c) = \sum_{i,\alpha} (-1)^{i+\alpha} \partial c_{i,\alpha}.$$

Entonces,

$$\partial c_{i,\alpha} = \sum_{\substack{j=1 \\ \beta=0,1}}^{n-1} (-1)^{j+\beta} c_{i,\alpha} \circ I_{j,\beta}^{n-1} = \sum_{\substack{j=1 \\ \beta=0,1}}^{n-1} (-1)^{j+\beta} c \circ I_{i,\alpha}^n \circ I_{j,\beta}^{n-1}.$$

Si $i \leq j \leq n - 1$, se tiene que

$$\begin{aligned} I_{i,\alpha}^n \circ I_{j,\beta}^{n-1}(x^1, \dots, x^{n-2}) &= I_{i,\alpha}^n(x^1, \dots, x^{j-1}, \beta, x^j, \dots, x^{n-2}) \\ &= (x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^i, \dots, x^{j-1}, \beta, x^j, \dots, x^{n-2}). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} I_{j+1,\beta}^n \circ I_{i,\alpha}^{n-1}(x^1, \dots, x^{n-2}) &= I_{j+1,\beta}^n(x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^i, \dots, x^{n-2}) \\ &= (x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^i, \dots, x^{j-1}, \beta, x^j, \dots, x^{n-2}). \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \partial(\partial c) &= \sum_{\substack{i \leq j \leq n-1 \\ \alpha, \beta=0,1}} (-1)^{i+j+\alpha+\beta} c \circ I_{i,\alpha}^n \circ I_{j,\beta}^{n-1} \\ &+ \sum_{\substack{i \leq j \leq n-1 \\ \alpha, \beta=0,1}} (-1)^{i+j+1+\alpha+\beta} c \circ I_{j+1,\beta}^n \circ I_{i,\alpha}^{n-1} = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Teorema 3.46 (Stokes). *Sean M una variedad diferenciable, c una k -cadena en M y ω una $(k - 1)$ -forma en M . Entonces*

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos primero el caso en que $c = I^k$ y ω es una $(k - 1)$ -forma en \mathbb{R}^k expresada por

$$\omega = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^k.$$

Entonces

$$\partial I^k = \sum_{\substack{j=1 \\ \alpha=0,1}}^k (-1)^{j+\alpha} I_{j,\alpha}^k \quad \text{y} \quad \int_{\partial I^k} \omega = \sum_{\substack{j=1 \\ \alpha=0,1}}^k (-1)^{j+\alpha} \int_{[0,1]^{k-1}} I_{j,\alpha}^{k*} \omega.$$

Observemos que

$$I_{j,\alpha}^{k*} \omega = f \circ I_{j,\alpha}^k d(x^1 \circ I_{j,\alpha}^k) \wedge \dots \wedge d(x^{i-1} \circ I_{j,\alpha}^k) \wedge d(x^{i+1} \circ I_{j,\alpha}^k) \wedge \dots \wedge d(x^k \circ I_{j,\alpha}^k),$$

de modo que

$$x^l \circ I_{j,\alpha}^k(t^1, \dots, t^{k-1}) = x^l(t^1, \dots, \alpha, t^j, \dots, t^{k-1}) = \begin{cases} t^l, & l < j, \\ \alpha, & l = j, \\ t^{l-1}, & l > j. \end{cases}$$

De aquí tenemos

$$d(x^l \circ I_{j,\alpha}^k) = \begin{cases} dt^l, & l < j, \\ 0, & l = j, \\ dt^{l-1}, & l > j. \end{cases}$$

Y así

$$I_{j,\alpha}^{k*} \omega = \begin{cases} 0, & j \neq i, \\ f \circ I_{j,\alpha}^k dt^1 \wedge \dots \wedge dt^{k-1}, & j = i. \end{cases}$$

de donde

$$\int_{\partial I^k} \omega = \int_{[0,1]^{k-1}} (-1)^i f(t^1, \dots, t, t^j, \dots, t^{k-1}) \Big|_1^0 dt^1 \dots dt^{k-1}.$$

Por otro lado, dado que

$$d\omega = (-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k,$$

tenemos

$$\begin{aligned} \int_{I^k} d\omega &= \int_{[0,1]^k} (-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^1 \dots dx^k \\ &= \int_{[0,1]^{k-1}} (-1)^i f(x^1, \dots, t, x^j, \dots, x^{k-1}) \Big|_0^1 dx^1 \dots dx^{k-1}. \end{aligned}$$

Ahora consideremos el caso en que ω sea una $(k-1)$ -forma en M y c

un k -cubo singular.

$$\begin{aligned}
 \int_{[0,1]^k} c^*(d\omega) &= \int_{[0,1]^k} d(c^*\omega) \\
 &= \int_{\partial[0,1]^k} c^*\omega = \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha=0,1}}^n (-1)^{i+\alpha} \int_{[0,1]^{k-1}} I_{j,\alpha}^{k*} c^*\omega \\
 &= \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha=0,1}}^n (-1)^{i+\alpha} \int_{[0,1]^{k-1}} c_{j,\alpha}^* \omega = \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha=0,1}}^n (-1)^{i+\alpha} \int_{c_{j,\alpha}} \omega = \int_{\partial c} \omega. \quad \square
 \end{aligned}$$

3.8. Integración en variedades

Proposición 3.47. Sean $c_1, c_2 : [0, 1]^n \rightarrow M$ dos n -cubos singulares y $\omega \in \Omega_c^n(M)$ con soporte contenido en $c_1([0, 1]^n) \cap c_2([0, 1]^n)$. Supongamos además que $\det D(c_1^{-1} \circ c_2) \geq 0$. Entonces

$$\int_{c_1} \omega = \int_{c_2} \omega.$$

Por tanto, tiene sentido definir

$$\int_M \omega = \int_{c_1} \omega = \int_{c_2} \omega.$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\int_{c_2} \omega = \int_{[0,1]^n} c_2^* \omega = \int_{c_2^{-1}(\text{soporte } \omega)} c_2^* \omega = \int_{c_2^{-1}(\text{soporte } \omega)} (c_1^{-1} \circ c_2)^* c_1^* \omega = \int_{c_1^{-1}(\text{soporte } \omega)} c_1^* \omega = \int_{c_1} \omega.$$

Definición 3.48. Sean M^n una variedad orientada, $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlas tal que $[0, 1]^n \subset \varphi_\alpha(U_\alpha)$, de modo que φ_α preserve la orientación y Φ una partición de la unidad subordinada a $\{U_\alpha\}$. Si $\omega \in \Omega_c^n(M)$, entonces

$$\{\varphi \in \Phi : \text{soporte } \varphi \cap \text{soporte } \omega \neq \emptyset\}$$

es finito. Definimos la *integral de ω en M* como

$$\int_M \omega = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_M \varphi \omega.$$

Si Ψ es otra partición de la unidad subordinada a $\{U_\alpha\}$, entonces

$$\sum_{\psi \in \Psi} \int_M \psi \omega = \sum_{\psi \in \Psi} \int_M \sum_{\varphi \in \Phi} \varphi \psi \omega = \sum_{\psi \in \Psi} \sum_{\varphi \in \Phi} \int_M \varphi \psi \omega = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_M \varphi \omega,$$

lo cual muestra que la definición de $\int_M \omega$ no depende de la partición elegida.

Definición 3.49. Sean M^n una variedad con frontera, $p \in \partial M$ y (U, φ) una carta con $\varphi(p) = 0$. Decimos que un vector $v \in T_p M$ apunta hacia afuera si $\varphi_{*p}(v) = (w_1, \dots, w_n)$ con $w_n < 0$.

El concepto no depende de la carta, ya que si (V, ψ) es otra carta con $\psi(p) = 0$, $\alpha(t) = t(w_1, \dots, w_n)$ y $\beta(t) = \psi \circ \varphi^{-1} \circ \alpha(t)$, entonces

$$\psi_{*p}(v) = (\psi \circ \varphi^{-1})_{*p}(\varphi_{*p}(v)) = \beta'(0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\beta(t)}{t}.$$

Como $\beta(t) \in \mathbb{H}^n$, $\beta'_n(0) \leq 0$, y ya que $\varphi_{*p}(v) \notin \mathbb{R}^{n-1}$ y $(\psi \circ \varphi^{-1})_{*p}$ es un isomorfismo, $\psi_{*p}(v) \notin \mathbb{R}^{n-1}$. Así, $\beta'_n(0) < 0$. \square

Si M tiene una orientación μ , definimos la orientación $\partial\mu$ en ∂M :

$$(v_2, \dots, v_n) \in \partial\mu_p \text{ si y sólo si } (v, v_2, \dots, v_n) \in \mu_p$$

para $v \in T_p M$ apuntando hacia afuera.

Supongamos que el cubo $c : [0, 1]^n \rightarrow M$ preserva la orientación y que el conjunto $c_{n,0}([0, 1]^{n-1})$ está contenido en ∂M . Sea ω una $(n-1)$ -forma en M con soporte contenido en $c([0, 1]^n)$, entonces $\omega = 0$ en $c_{k,\alpha}([0, 1]^{n-1})$ para $(k, \alpha) \neq (n, 0)$. Así

$$\int_{\partial M} \omega = (-1)^n \int_{[0,1]^{n-1}} c_{n,0}^* \omega = (-1)^n \int_{c_{n,0}} \omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Teorema 3.50 (Stokes). *Sea M^n una variedad con frontera y sea $\omega \in \Omega_c^{n-1}(M)$. Entonces*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea Φ una partición de la unidad tal que para toda $\varphi \in \Phi$ hay una carta (U, ψ) que preserva orientación con $[0, 1]^n \subset \psi(U)$ y tal que el soporte de φ está contenido en $\psi^{-1}([0, 1]^n)$. Denotaremos $c_\psi = \psi^{-1}|_{[0,1]^n}$.

- Si $\psi^{-1}([0, 1]^n) \subset \text{int}(M) \neq \emptyset$, entonces

$$\int_M d(\varphi\omega) = \int_{c_\psi} d(\varphi\omega) = \int_{\partial c_\psi} \varphi\omega = 0 = \int_{\partial M} \varphi\omega.$$

- Si $\psi^{-1}([0, 1]^n) \cap \partial M \neq \emptyset$,

$$\int_M d(\varphi\omega) = \int_{c_\psi} d(\varphi\omega) = \int_{\partial c_\psi} \varphi\omega = \int_{\partial M} \varphi\omega.$$

Como Φ es una partición de la unidad,

$$\sum_{\varphi \in \Phi} d\varphi = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{\varphi \in \Phi} d(\varphi\omega) = \sum_{\varphi \in \Phi} \varphi d\omega,$$

de modo que

$$\int_M d\omega = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_M \varphi d\omega = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_M d(\varphi\omega) = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_{\partial M} \varphi\omega = \int_{\partial M} \omega. \quad \square$$

Sea M^n una variedad orientable conexa y sin frontera. Sabemos que

$$H^k(M) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0, \\ 0, & k > 0, M \text{ contraíble.} \end{cases}$$

$$H_c^0(M) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & M \text{ compacta,} \\ 0, & M \text{ no compacta.} \end{cases}$$

Queremos calcular $H^n(M)$ y $H_c^n(M)$. Observemos que si $\eta \in \Omega_c^{n-1}(M)$, entonces

$$\int_M d\eta = \int_{\partial M} \eta = 0.$$

Así, si $\omega \in \Omega_c^n(M)$ y $\int_M \omega \neq 0$, se tiene $\omega \neq d\eta$ y entonces $H_c^n(M) \neq 0$.

Consideremos la esfera $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Definamos $\sigma' \in \Omega^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ por

$$\sigma'_p(v_1, \dots, v_{n-1}) = \det(p, v_1, \dots, v_{n-1}).$$

Es claro que si definimos

$$\sigma = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} z_i dz^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dz^i} \wedge \cdots \wedge dz^n$$

e $i : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es la inclusión, entonces $\sigma' = i^*(\sigma)$. Sea $r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ dada por $r(z) = z/|z|$. Entonces $(r^*\sigma')_z = \sigma_z |z|^{-n}$. Consideremos el cambio de variable $\phi : B \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \times (0, 1]$, $\phi(z) = (r(z), |z|)$. Sean π, t las proyecciones de $\mathbb{S}^{n-1} \times (0, 1]$ sobre sus factores. Cualquier $\omega \in \Omega^n(\mathbb{S}^{n-1} \times (0, 1])$ se escribe $\omega = h\pi^*\sigma' \wedge dt$ con $h \in C^\infty(\mathbb{S}^{n-1} \times (0, 1])$. Entonces

$$\begin{aligned} \phi^*\omega &= (h \circ \phi)\phi^*\pi^*(\sigma') \wedge d(t \circ \phi) = (h \circ \phi)r^*(\sigma') \wedge d|z| \\ &= (h \circ \phi) \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{z_i}{|z|^n} dz^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dz^i} \wedge \cdots \wedge dz^n \sum_{i=1}^n z_i dz^i \\ &= (h \circ \phi) \sum_{i=1}^n (-1)^{n-1} \frac{(z_i)^2}{|z|^n} dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n \\ &= (h \circ \phi) \left(\frac{-1}{|z|} \right)^{n-1} dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n \end{aligned}$$

Dada $f : B \rightarrow \mathbb{R}$, queremos determinar h tal que $h(\phi(z)) = (-|z|)^{n-1} f(z)$. Si $h(p, t) = (-t)^{n-1} f(tp)$, entonces

$$\int_B f = \int_B \phi^*(h\pi^*\sigma' \wedge dt) = \int_{\mathbb{S}^{n-1} \times (0, 1]} h \pi^*\sigma' \wedge dt = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\int_0^1 t^{n-1} f(tp) dt \right) \sigma'. \quad (3.6)$$

Teorema 3.51. *Sea M^n una variedad orientable conexa y sin frontera. Entonces la funcional lineal $\int : H_c^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$, $[\omega] \mapsto \int_M \omega$ es un isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN. Sólo hace falta ver que $\int : H_c^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$ es inyectiva; es decir, que si $\int_M \omega = 0$, entonces existe $\eta \in \Omega_c^{n-1}(M)$ tal que $\omega = d\eta$. Haremos la demostración por inducción, mostrando que:

1. La afirmación es cierta para $M = \mathbb{R}$.
2. Si la afirmación es cierta para toda variedad de dimensión $(n - 1)$, entonces es cierta para \mathbb{R}^n .

3. Si la afirmación es cierta para \mathbb{R}^n , entonces es cierta para toda variedad de dimensión n .

Paso 1. Si $\omega \in \Omega_c^1(\mathbb{R})$, entonces $\omega = df$ con

$$f(x) = \begin{cases} c_-, & x \leq -N, \\ c_+, & x \geq N. \end{cases}$$

Si $\int_{\mathbb{R}} \omega = 0$, entonces

$$0 = \int_{-N}^N df = c_+ - c_-,$$

de modo que $f - c_+ \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ y $\omega = d(f - c_+)$.

Paso 2. Sea $\omega \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ con soporte en la bola unitaria B y $\int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0$. Sea $F : \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, dada por $F(z, t) = tz$. En el lema de Poincaré definimos $I : \Omega^n(\mathbb{R}^n \times [0, 1]) \rightarrow \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\omega = -d(I(F^*\omega))$. Si $\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$, entonces

$$\begin{aligned} F^*\omega &= (f \circ F)d(tz_1) \wedge \cdots \wedge d(tz_n) \\ &= (f \circ F)(z_1 dt + t dz^1) \wedge \cdots \wedge (z_n dt + t dz^n) \\ &= (f \circ F)(t^n dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n + t^{n-1} dt \wedge \sigma), \end{aligned}$$

de modo que

$$I(F^*\omega) = \int_0^1 t^{n-1} f(tz) dt \sigma.$$

Para $z \neq 0$ fija hagamos el cambio de variable $u = |z|dt$; entonces

$$\eta := I(F^*\omega) = \int_0^{|z|} \frac{u^{n-1}}{|z|^n} f(ur(z)) du \sigma = \int_0^1 u^{n-1} f(ur(z)) du \frac{\sigma}{|z|^n}$$

ya que $f(z) = 0$ si $|z| > 1$.

Sea $g : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(p) = \int_0^1 t^{n-1} f(tp) dt$; entonces $\eta = (g \circ r)r^*\sigma' = r^*(g\sigma')$. Por (3.6),

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} g\sigma' = \int_B f = \int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0.$$

Por la hipótesis de inducción, $\int : H_c^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow \mathbb{R}$ es inyectiva y así $g\sigma' = d\lambda$. Luego $\eta = r^*(g\sigma') = d(r^*\lambda)$. Sea $h : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ suave con $h = 0$ en

una vecindad del origen $h = 1$ fuera de B . Entonces $\xi = \eta - d(hr^*\lambda)$ tiene soporte en B y $d\xi = d\eta = \omega$.

Paso 3. Sea M^n una variedad orientable conexa y sin frontera. Sea U vecindad difeomorfa a \mathbb{R}^n . Sea $\eta \in \Omega_c^n(M)$ con soporte en U tal que $\int_M \eta > 0$. Queremos mostrar que para toda $\omega \in \Omega_c^n(M)$ existen $c \in \mathbb{R}, \beta \in \Omega_c^{n-1}(M)$ tal que $\omega = c\eta + d\beta$. Sea Φ una partición de la unidad subordinada a un atlas. Como $\{\phi \in \Phi : \text{soporte } \phi \cap \text{soporte } \omega \neq \emptyset\}$ es finito,

$$\omega = \phi_1\omega + \cdots + \phi_k\omega, \quad \phi_i \in \Phi.$$

Si mostramos que $\phi_i\omega = c_i\eta + d\beta_i$, habremos concluido la demostración. Así, debemos mostrar que si ω tiene soporte en una vecindad V difeomorfa a \mathbb{R}^n , entonces $\omega = c\eta + d\alpha$, $\alpha \in \Omega_c^{n-1}(M)$.

Sean $U_1 = U, U_2, \dots, U_l = V$ vecindades difeomorfas a \mathbb{R}^n con $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$. Escojamos $\omega_i \in \Omega_c(M)$ con soporte en $U_i \cap U_{i+1}$ e $\int_M \omega_i \neq 0$. Entonces

$$\omega_1 = c_1\eta + d\alpha_1, \quad \text{con soporte } \alpha_1 \subset U;$$

en general $\omega_i = c_i\omega_{i-1} + d\alpha_i$, con $\alpha_i \subset U_i$, de modo que

$$\omega = c_l\omega_{l-1} + d\alpha_l = \cdots = c_l \cdots c_1\eta + d\alpha_l + \cdots + c_l \cdots c_{l-2}d\alpha_{l-1}. \quad \square$$

Teorema 3.52. *Sea M^n una variedad conexa, no orientable y sin frontera. Entonces $H_c^n(M) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Escojamos ω una n -forma con soporte compacto contenido en una vecindad coordenada U difeomorfa a \mathbb{R}^n tal que con la orientación inducida $\int_U \omega > 0$. Es suficiente demostrar que $\omega = d\eta$ para alguna $\eta \in \Omega_c^{n-1}(M)$. Sea $(V_1, \varphi_1), \dots, (V_r, \varphi_r)$ una sucesión de cartas tales que $U = V_1$, cada V_i es difeomorfa a \mathbb{R}^n y $\varphi_{i+1} \circ \varphi_i^{-1}$ preserva la orientación. Para cada $1 \leq i < r$ elijamos $\omega_i \in \Omega_c^n(M)$ con soporte en $V_i \cap V_{i+1}$ de modo que con la orientación inducida por φ_i o por φ_{i+1} se tenga que $\int_{V_i} \omega_i = \int_{V_{i+1}} \omega_i > 0$. Por lo tanto,

$$c_1 := \frac{\int_{V_1} \omega}{\int_{V_1} \omega_1} > 0, \quad \text{y} \quad c_i := \frac{\int_{V_i} \omega_i}{\int_{V_{i-1}} \omega_{i-1}} > 0, \quad 1 < i < r.$$

Como $H_c^n(U_1) = \mathbb{R}$, existe $c_1 \in \mathbb{R}$ y $\zeta_1 \in \Omega_c^{n-1}(M)$ con soporte en U_1 tales que $\omega_1 = c_1\omega + d\zeta_1$. Análogamente, como $H_c^n(U_i) = \mathbb{R}$ para cada $1 < i < r$,

existen $c_i \in \mathbb{R}$ y $\zeta_i \in \Omega_c^{n-1}(M)$ con soporte en U_i tales que $\omega_i = c_i \omega_{i-1} + d\zeta_i$, de modo que

$$\begin{aligned} \omega_2 &= c_2 c_1 \omega + c_2 d\zeta_1 + d\zeta_2 := k_2 \omega + d\eta_2, & k_2 > 0, \\ &\vdots \\ \omega_{r-1} &= c_{r-1} k_{r-2} \omega + c_{r-1} d\eta_{r-2} + d\zeta_{r-1} := k_{r-1} \omega + d\eta_{r-1}, & k_{r-1} > 0. \end{aligned}$$

Como M no es orientable, podemos encontrar una sucesión de cartas tales que $V_r = V_1$ y que $\varphi_r \circ \varphi_1^{-1}$ revierta orientación. Considerando $\omega_r = -\omega$ tenemos

$$-\omega = c\omega + d\eta, \quad c > 0$$

y así $(c+1)\omega = -d\eta$. □

Teorema 3.53. *Si M^n es conexa y no compacta, entonces $H^n(M) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Escojamos una cubierta numerable $\{U_i\}$ de M formada por vecindades coordenadas difeomorfas a \mathbb{R}^n con cerradura compacta tales que $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$, de modo que para cualquier compacto K exista $n(K)$ tal que $U_i \cap K = \emptyset$ si $i > n(K)$. Así, la cubierta es localmente finita. Sea $\{\phi_i\}$ una partición de la unidad subordinada a la cubierta $\{U_i\}$.

Escojamos $\omega_i \in \Omega_c^n(M)$ con soporte en $U_i \cap U_{i+1}$ y tal que $\int_M \omega_i \neq 0$. Entonces existen $c_i \in \mathbb{R}$ y $\eta_i \in \Omega_c^{n-1}(M)$ con soporte en U_i tales que

$$\omega_i = d\eta_i + c_{i+1} \omega_{i+1}$$

de modo que para cada $l > i$ tenemos

$$\omega_i = d\eta_i + c_{i+1} d\eta_{i+1} + \cdots + c_{i+1} \cdots c_l d\eta_l + c_1 \cdots c_{l+1} \omega_{l+1}.$$

Si fijamos $p \in M$ y consideramos K como una vecindad compacta de p , sabemos que existe $N(K)$ tal que $U_j \cap K = \emptyset$ para $j > N(K)$, de modo que las correspondientes ω_j y η_j se anulan en K . Así, si hacemos $l = N(K)$ en la ecuación anterior, obtenemos que el último término se anula en K . Por lo tanto, la expresión

$$\zeta_i := \eta_i + \sum_{l=i+1}^{\infty} c_{i+1} \cdots c_l \eta_l$$

es una suma finita para cada p y además

$$\omega_i = d\zeta_i.$$

Si $\omega \in \Omega_c^n(M)$, entonces $\phi_i\omega$ tiene soporte en U_i y existen $k_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \in \Omega_c^{n-1}(M)$ con soporte en U_i tales que

$$\phi_i\omega = k_i\omega_i + d\alpha_i = k_id\zeta_i + d\alpha_i;$$

así,

$$\omega = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i\omega = \sum_{i=1}^{\infty} (k_id\zeta_i + d\alpha_i) = d \left(\sum_{i=1}^{\infty} k_i\zeta_i + \alpha_i \right),$$

lo que concluye la demostración. \square

3.9. Ejercicios

1. Si $v, w \in V$ son linealmente independientes, muestre que $v \otimes w \neq w \otimes v$.
2. Si A es un tensor de tipo $(1, 1)$ que tiene las mismas componentes con respecto de cualquier base, muestre que $A_j^i = \lambda \delta_j^i$ para alguna $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. Si $T \in V^*$, $S \in \wedge^2 V^*$ y $v, w, u \in V$, muestre que

$$3T \wedge S(v, w, u) = T(v)S(w, u) + T(w)S(u, v) + T(u)S(v, w).$$

4. Demuestre que $v_1, \dots, v_m \in V$ son linealmente independientes si y sólo si $v_1 \wedge \dots \wedge v_m \neq 0$.
5. Si $v \in V$, $v \neq 0$ y $T \in \wedge^k V$, entonces $v \wedge T = 0$ si y sólo si existe $S \in \wedge^{k-1} V$ tal que $T = v \wedge S$. *Sugerencia:* Use una base tal que $v = e_1$.
6. Sea V un espacio vectorial. Para $v \in V$, $T \in \wedge^k V^*$, definimos la *contracción* $i(v)T \in \wedge^{k-1} V^*$ mediante

$$i(v)T(v_1, \dots, v_{k-1}) = T(v, v_1, \dots, v_{k-1}).$$

- a) Muestre que $i(v)(i(w)T) = -i(w)(i(v)T)$.

b) Muestre que si $T \in \wedge^k V^*$ y $S \in \wedge^l V^*$, entonces

$$i(v)(T \wedge S) = (i(v)T) \wedge S + (-1)^k T \wedge (i(v)S)$$

7. Sea V un espacio vectorial. Un elemento $T \in \wedge^k V^*$ se puede descomponer si existen $\phi_1, \dots, \phi_k \in V^*$ tales que

$$T = \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_k.$$

a) Demuestre que si $\dim V \leq 3$, todo elemento de $\wedge^2 V^*$ se puede descomponer.

b) Si $\dim V > 3$, dé un ejemplo de un elemento que no se pueda descomponer.

8. El *anulador* de $T \in \wedge^k V^*$ es el conjunto

$$\text{an}(T) = \{\phi \in V^* : \phi \wedge T = 0\}.$$

a) Muestre que $\dim \text{an}(T) \leq k$ y que la igualdad se da si y sólo si T se puede descomponer.

b) Si $\dim V = n$, muestre que todo elemento de $\wedge^{n-1} V^*$ se puede descomponer.

9. Sean V un espacio vectorial real de dimensión n , $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V y $\{w_1, \dots, w_n\}$ un conjunto de vectores, con $w_i = \sum a_{ij} v_j$. Muestre que

$$\det(a_{ij}) w_1^* \wedge \dots \wedge w_n^* = v_1^* \wedge \dots \wedge v_n^*.$$

10. Sea V un espacio vectorial real de dimensión n con producto escalar. Extendemos el producto escalar a $\wedge^k V^*$ definiendo

$$\langle v_1 \wedge \dots \wedge v_k, w_1 \wedge \dots \wedge w_k \rangle = \det(\langle v_i, w_j \rangle).$$

a) Pruebe que si e_1, \dots, e_n es una base ortonormal de V , entonces la base $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$ de $\wedge^k V^*$ es ortonormal.

- b) Sea \mathcal{O} una orientación en V y definamos $*$: $\wedge V^* \rightarrow \wedge V^*$, de modo tal que si (e_1, \dots, e_n) es una base ortonormal, entonces

$$\begin{aligned} *(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) &= \pm 1, \\ *(1) &= \pm e_1 \wedge \dots \wedge e_n, \\ *(e_1 \wedge \dots \wedge e_k) &= \pm e_{k+1} \wedge \dots \wedge e_n, \end{aligned}$$

donde se elige el signo $+$ si $(e_1, \dots, e_n) \in \mathcal{O}$ y el signo $-$ en caso contrario.

Pruebe que $**|\wedge^k V = (-1)^{k(n-k)}$ y que si $T, S \in \wedge^k V^*$, entonces

$$\langle T, S \rangle = *(T \wedge *S) = *(S \wedge *T).$$

- c) Dado $v \in V$, defina $\gamma : \wedge^{k+1} V \rightarrow \wedge^k V$ por

$$\langle \gamma(T), S \rangle = \langle T, v \wedge S \rangle$$

para $T \in \wedge^{k+1} V$ y $S \in \wedge^k V$. Pruebe que

$$\gamma(T) = (-1)^{nk} * (v \wedge *T).$$

11. Sean (E, π) y (E', π') haces sobre B , tales que $E \subset E'$.

- a) Defina el haz cociente E'/E . Muestre, en particular, que su definición satisface la condición de trivialidad local.
 b) Si E' tiene una métrica, muestre que $E'/E \cong E^\perp$.

12. Muestre que

$$d \left(\sum_{i < j} a_{ij} dx^i \wedge dx^j \right) = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} = 0$$

para todo i, j, k .

13. (Lema de Cartan.) Sean M una variedad y $\omega_1, \dots, \omega_r$ 1-formas linealmente independientes en cada punto de M . Sean $\theta_1, \dots, \theta_r$ 1-formas tales que

$$\sum_{i=1}^r \theta_i \wedge \omega_i = 0.$$

Pruebe que existen $a_{ij} \in C^\infty(M)$ con $a_{ij} = a_{ji}$ tales que

$$\theta_i = \sum_{j=1}^r a_{ij} \omega_j, \quad i = 1, \dots, r$$

14. Muestre que si ω es una k -forma, también lo es $L_X \omega$. Pruebe además las siguientes igualdades:

a) $L_X(\omega_1 \wedge \omega_2) = (L_X \omega_1) \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge (L_X \omega_2)$.

b) $X(\omega(X_1, \dots, X_r))$ es igual a

$$L_X \omega(X_1, \dots, X_r) + \sum_{j=1}^r (-1)^{j+1} \omega([X, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_r).$$

c) $d\omega(X_1, \dots, X_{r+1})$ es igual a

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} L_{X_i} \omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{r+1}) \\ & + \sum_{i < j} (-1)^{i+j+1} \omega([X_i, X_j], \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{r+1}). \end{aligned}$$

d) $L_X \omega = i(X)d\omega + d(i(X)\omega)$.

e) $2d\omega(X_1, \dots, X_{r+1})$ es igual a

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} (X_i(\omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{r+1}))) \\ & + L_{X_i} \omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{r+1}). \end{aligned}$$

f) Por último, muestre que $d(L_X \omega) = L_X(d\omega)$.

15. Sea ν la n -forma en \mathbb{R}^n definida por

$$\nu(e_1, \dots, e_n) = 1,$$

donde $\{e_1, \dots, e_n\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^n . Muestre que si $v_i = \sum a_{ij} e_j$, entonces

$$\nu(v_1, \dots, v_n) = \det(a_{ij}) = \text{vol}(v_1, \dots, v_n).$$

La forma ν es la *forma de volumen* de \mathbb{R}^n . Muestre además que si x_1, \dots, x_n son las coordenadas cartesianas de \mathbb{R}^n ,

$$\nu = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

16. Sea M^n una variedad riemanniana con orientación \mathcal{O} , $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una carta de M y (g_{ij}) la matriz que representa la métrica riemanniana en esa carta.

a) Muestre que la forma

$$\nu = \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

no depende de la carta elegida. Ésta es la *forma de volumen* de M , que también denotaremos por dV .

- b) Sea X_1, \dots, X_n un marco ortonormal en U y $\omega_1, \dots, \omega_n$ sus correspondientes 1-formas duales. Muestre que

$$\nu = \pm \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n,$$

donde se elige el signo positivo si $(X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{O}$ y el negativo en caso contrario.

- c) Muestre que para cada marco X_1, \dots, X_n (no necesariamente ortonormal) se tiene

$$\nu(X_1, \dots, X_n) = \pm \sqrt{\det(\langle X_i, X_j \rangle)}.$$

17. Sea M^n una variedad riemanniana con orientación \mathcal{O} y ν su forma de volumen (véase el ejercicio anterior). Pruebe que

$$L_X \nu = d(i(X)\nu) = \operatorname{div} X \nu.$$

Sugerencia: Sean $p \in M$, $\{E_i\}$ un marco geodésico con orientación \mathcal{O} en p y $\{\omega_i\}$ las correspondientes 1-formas duales. Muestre que si $\theta_i = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\omega}_i \wedge \cdots \wedge \omega_n$, entonces $i(X)\nu = \sum \omega_i(X)\theta_i$, $d\omega_i(p) = 0$ y $d\theta_i(p) = 0$. Muestre finalmente que

$$d(i(X)\nu)(p) = \sum_{i=1}^n E_i(\omega_i(X))(p)\nu(p) = \operatorname{div} X(p)\nu(p).$$

18. Sea ω la $(n-1)$ -forma en \mathbb{R}^n dada por

$$\omega = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} x_j dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

- a) Muestre que ω es invariante bajo el grupo ortogonal $O(n)$.
- b) Muestre que la restricción de ω a la esfera $\mathbb{S}^{n-1}(r)$ es precisamente la forma de volumen de dicha esfera.
19. Sean ω_1, ω_2 formas diferenciales en una variedad M . Suponga que ambas son cerradas y que ω_2 es exacta. Muestre que $\omega_1 \wedge \omega_2$ es cerrada y exacta.
20. a) Sea M^n una variedad compacta orientable sin frontera y ω una $(n-1)$ -forma en M . Muestre que existe $p \in M$ tal que $d\omega(p) = 0$.
- b) Muestre que no existe una inmersión de \mathbb{S}^1 en \mathbb{R} .
21. a) Sea M^n una variedad compacta orientable con frontera $\partial M \neq \emptyset$. Muestre que no existe una transformación diferenciable $f: M \rightarrow \partial M$ tal que $f|_{\partial M}$ sea la identidad. *Sugerencia:* Suponga que tal f existe; sea ω la $(n-1)$ -forma en ∂M dada en la proposición 3.26. Use el teorema de Stokes y el hecho de que $d(f^*\omega) = f^*(d\omega) = 0$ para llegar a una contradicción.
- b) Investigue qué dice el teorema de punto fijo de Brouwer y use el inciso anterior para demostrarlo.
22. a) Suponga que ω es una k -forma en M tal que para cada k -cubo C en M , $\int_C \omega = 0$. Muestre que ω es idénticamente nula. *Sugerencia:* Use coordenadas y k -cubos suficientemente pequeños.
- b) Suponga que ω, ω' son k -formas en M tales que para cada k -cubo C en M , $\int_C \omega = \int_C \omega' = 0$. Muestre que $\omega = \omega'$.
- c) Sea ω una k -forma en M tal que para todo $(k+1)$ -cubo C en M , $\int_{\partial C} \omega = 0$. Muestre que ω es cerrada.
23. Sea M la unión del disco unitario (abierto) en \mathbb{R}^2 y de un subconjunto propio de la frontera de este disco. Muestre que

$$\int_M d\omega \neq \int_{\partial M} \omega,$$

aunque ambas expresiones tengan sentido. De manera análoga, encuentre un contraejemplo al teorema de Stokes para $M = (0, 1)$ y ω una 0-forma con soporte no compacto.

24. Sea ω una 1-forma en \mathbb{S}^2 invariante bajo todas las transformaciones ortogonales de \mathbb{R}^3 . Muestre que $\omega \equiv 0$.
25. Considere el *semiplano superior*

$$\mathbb{H}_+^2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \}$$

dotado de la métrica

$$g(x, y) = \frac{1}{y^2} \langle \cdot, \cdot \rangle,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota la métrica euclidiana usual. Considere además la identificación usual $z = x + iy$ y muestre que una transformación de Möbius de la forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

es una isometría de esta variedad.

26. Demuestre que el conjunto de isometrías de una variedad M en sí misma es un grupo con la operación de composición.
27. Un grupo Γ de difeomorfismos de una variedad M es *propriadamente discontinuo* si y sólo si satisface las siguientes propiedades:
- Para cada punto $p \in M$ existe una vecindad U de p tal que si $\varphi(U) \cap U \neq \emptyset$ con $\varphi \in \Gamma$, entonces $\varphi = e$.
 - Si $\varphi(p) \neq q$ para todo $\varphi \in \Gamma$, entonces existen vecindades U, V de p y q respectivamente, tales que $\varphi(U) \cap V = \emptyset$ para todo $\varphi \in \Gamma$.
- a) Muestre que si M es una variedad diferenciable y Γ es propriadamente discontinuo, entonces M/Γ tiene una estructura de variedad diferenciable.
- b) Muestre que si M es una variedad riemanniana y Γ es un grupo propriadamente discontinuo de isometrías de M , entonces el cociente M/Γ posee una métrica de modo que la proyección $\pi : M \rightarrow M/\Gamma$ es localmente una isometría.

c) Sea $\{v, w\}$ una base de \mathbb{R}^2 . Considere el grupo de traslaciones

$$\Gamma_{v,w} = \{ T_{n,m} \mid T_{n,m}(u) = u + nv + mw, n, m \in \mathbb{Z} \}.$$

Muestre que no todos los toros $\mathbb{R}^2/\Gamma_{v,w}$ son isométricos.

CAPÍTULO 4

Conexiones y curvatura

En este capítulo presentamos una introducción a algunos de los conceptos distintivos de la geometría diferencial: conexiones, campos paralelos, geodésicas y curvatura. Destacamos en especial el concepto de curvatura que usualmente aparece en muchos textos de geometría diferencial en una forma tan abstracta como la siguiente:

$$R_{XY}(Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z. \quad (4.1)$$

¿Qué tiene que ver esta expresión con algo tan intuitivo? En realidad, esta expresión es como el final de una película; o más precisamente, la conclusión de una etapa en un proceso de abstracción. Sin duda, sería interesante estudiar y describir este proceso en forma detallada.

Para decepción de algunos lectores, no contaremos aquí toda esta historia. Optimizaremos nuestro trabajo, trabajando con cierta velocidad para pasar de los conceptos intuitivos hasta expresiones como (4.1); o incluso más abstractas aún. Para acelerar el paso, pediremos a nuestros lectores que proporcionen la demostración de algunas afirmaciones, invitándolos a compartir un poco del sabor de esta historia.

4.1. Conexiones en haces tangentes

Iniciamos nuestra historia con la idea de curvatura para curvas. Desde un punto de vista intuitivo, la curvatura mide qué tanto deja una curva de ser una recta. Podemos medir de varias formas, pero un punto importante es que esta medida debe ser local; es decir, la curvatura en un punto no debe

depender del comportamiento de la curva lejos de tal punto. Aprovechemos entonces uno de los conceptos locales por excelencia, la derivada: Si C es una curva en \mathbb{R}^n parametrizada por $\alpha(t)$, donde t es el parámetro de longitud de arco, entonces $\alpha''(t_0)$ mide la variación del vector tangente en el punto $\alpha(t_0)$. Si tal variación es diferente de cero, decimos que la curvatura de α en t_0 es diferente de cero.

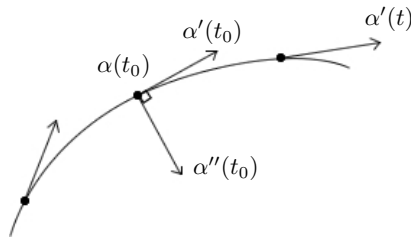


Figura 4.1: El vector α'' mide la variación del vector tangente.

¿Qué ocurre si queremos generalizar este procedimiento al caso de una variedad cualquiera M ? Es claro que si M es diferenciable, tiene sentido hablar de $\alpha'(t_0)$. Sin embargo, para obtener la “segunda derivada” necesitamos algo más.

Si M es un subconjunto de \mathbb{R}^n , tiene sentido calcular $\alpha''(t_0)$, aunque este vector se “salga” de nuestro espacio tangente $T_{\alpha(t_0)}M$. Si pensamos que nuestra segunda derivada debe ser un vector tangente a M , podemos proyectar el vector $\alpha''(t_0)$ sobre $T_{\alpha(t_0)}M$. A este vector le llamamos la *derivada covariante* de $\alpha'(t)$ en t_0 y le reservamos la notación especial

$$\frac{D\alpha'}{dt}(t_0) = \text{Proy} \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\alpha'(t) - \alpha'(t_0)}{t - t_0}.$$

Echemos a volar nuestra imaginación. Estamos derivando el campo $\alpha'(t)$ “en la dirección” de $\alpha'(t_0)$. Nada nos impide derivar un campo $v(t)$ (definido en los puntos de la curva C) en la dirección de $\alpha'(t_0)$ y proyectar de nuevo; en símbolos, la derivada covariante de v está dada por

$$\frac{Dv}{dt}(t_0) = \text{Proy} \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(\alpha(t)) - v(\alpha(t_0))}{t - t_0}.$$

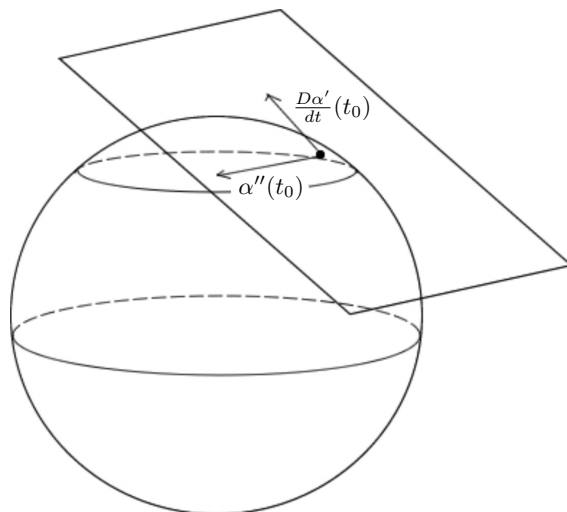


Figura 4.2: La derivada covariante.

Dejamos algunos pendientes en este camino. El lector podrá observar que la frase “derivar en la dirección de $\alpha'(t_0)$ ” sugiere que la expresión anterior no depende de la curva C en sí, sino solamente del vector $\alpha'(t_0)$. Esto es cierto y es uno de los primeros pendientes que dejamos al lector.

En realidad, no sólo podremos derivar en la dirección de $\alpha'(t_0)$, sino que podemos derivar un campo cualquiera (definido en una vecindad de un punto en cuestión) ¡en la dirección de otro campo cualquiera! Denotaremos este exceso de imaginación por $\nabla_X Y$, donde X y Y son dos campos definidos en M , o al menos en una vecindad del punto de nuestro interés. En símbolos:

$$\nabla_X Y(p) = \text{Proy} \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{Y(\alpha(t)) - Y(\alpha(t_0))}{t - t_0},$$

donde α es cualquier curva tal que $\alpha(t_0) = p$ y $\alpha'(t_0) = X(p)$. Así, $\nabla_X Y$ es la derivada de Y en la dirección de X , “vista” desde M (por aquello de la proyección). Observe que $\nabla_X Y(p)$ es un vector tangente a M en el punto p .

Hemos dicho que $\nabla_X Y$ es una manera de derivar. Como tal, debe cumplir ciertas condiciones mínimas, que coleccionaremos a continuación. Lo intere-

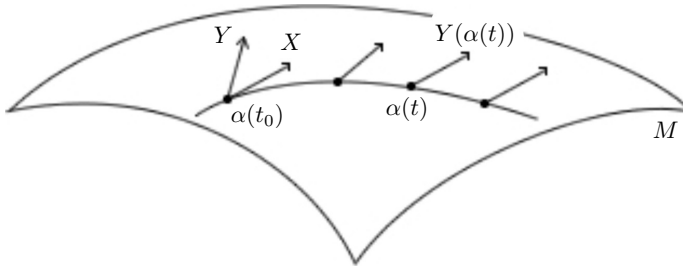


Figura 4.3: Interpretación de $\nabla_X Y$.

sante es que existe una infinidad de maneras de derivar, todas ellas caracterizadas en la siguiente definición general.

Definición 4.1. Sea M una variedad diferenciable. Una *conexión en M* es una transformación $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ tal que asocia a cada pareja $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ otro campo $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$, con las siguientes propiedades:

1. $\nabla_{fX_1 + X_2} Y = f\nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y$, donde $f \in C^\infty(M)$ y $X_1, X_2, Y \in \mathfrak{X}(M)$.
2. $\nabla_X (\lambda Y_1 + Y_2) = \lambda \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y $X, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$.
3. $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$, donde $f \in C^\infty(M)$ y $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Antes de regresar por el camino que recorrimos en esta sección, hasta llegar al concepto de “segunda derivada”, veamos cuántas conexiones existen, al menos localmente. Recordemos que el haz tangente cumple la propiedad de trivialidad local, de modo que para cada $p \in M$ existe una vecindad U de p y una familia de campos vectoriales $\{E_1, \dots, E_n\} \subset \mathfrak{X}(U)$ tal que en cada punto $q \in U$ se tiene que $\{E_1(q), \dots, E_n(q)\}$ es una base de $T_q M$. Así, si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, podemos escribir

$$X = \sum_{i=1}^n a_i E_i \quad \text{y} \quad Y = \sum_{j=1}^n b_j E_j,$$

donde a_i, b_j son funciones diferenciables definidas en U . Las propiedades de una conexión ∇ implican que

$$\nabla_X Y = \sum_{i=1}^n a_i \nabla_{E_i} Y$$

y además

$$\nabla_{E_i} Y = \nabla_{E_i} \left(\sum_{j=1}^n b_j E_j \right) = \sum_{j=1}^n (b_j \nabla_{E_i} E_j + E_i(b_j) E_j).$$

Puesto que en cada punto q los vectores $E_1(q), \dots, E_n(q)$ forman una base de $T_q M$, existen coeficientes Γ_{ij}^k , llamados *símbolos de Christoffel*, tales que

$$\nabla_{E_i} E_j(q) = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k(q) E_k(q). \quad (4.2)$$

Analizando la expresión para $\nabla_X Y$, vemos que la conexión queda determinada de manera única para cada $q \in U$ si fijamos n^3 números $\Gamma_{ij}^k(q)$. Dicho de otra forma, la conexión queda determinada por n^3 funciones $\{\Gamma_{ij}^k\}$ definidas en U . Más adelante impondremos restricciones a la conexión con el fin de reducir el universo de posibilidades para los símbolos de Christoffel.

Para cerrar esta sección veremos que es posible definir un concepto de “derivada a lo largo de una curva” usando una conexión ∇ . Primero precisemos qué entendemos por tales derivadas.

Definición 4.2. Sea $\alpha : I \rightarrow M$ una curva diferenciable en una variedad M . Denotemos por $\mathfrak{X}(\alpha)$ al conjunto de campos diferenciables definidos en la imagen de α . Una *derivada covariante* a lo largo de α es una transformación de $\mathfrak{X}(\alpha)$ en $\mathfrak{X}(\alpha)$ denotada D/dt que satisface las siguientes propiedades:

1. $\frac{D}{dt}(\lambda v_1 + v_2) = \lambda \frac{Dv_1}{dt} + \frac{Dv_2}{dt}$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y $v_1, v_2 \in \mathfrak{X}(\alpha)$.
2. $\frac{D}{dt}(fv) = f \frac{Dv}{dt} + \frac{df}{dt} v$, donde f es una función diferenciable definida en la imagen de α y $v \in \mathfrak{X}(\alpha)$.

De nuevo, es posible demostrar que hay una infinidad de derivadas covariantes en una variedad. Sin embargo, dada una conexión ∇ , ésta determina de manera única a una derivada covariante, como veremos a continuación.

Definición 4.3. Decimos que una derivada covariante D/dt es *compatible* con una conexión ∇ si y sólo si dado un campo $v \in \mathfrak{X}(\alpha)$ que puede extenderse a un campo $Y \in \mathfrak{X}(M)$, se tiene que

$$\frac{Dv}{dt} = \nabla_{\alpha'(t)} Y. \quad (4.3)$$

Proposición 4.4. *Dada una conexión ∇ , existe una única derivada covariante D/dt compatible con ∇ .*

Observación. Puesto que en varias ocasiones deberemos mostrar la existencia y unicidad de un objeto (en este caso, la derivada covariante), destacamos el siguiente esquema de demostración, que usaremos repetidamente. Supondremos primero que tal objeto existe y obtendremos una única expresión para éste. Para mostrar la existencia, bastará definir el objeto mediante la expresión obtenida.

Demostración. Sean $\alpha : I \rightarrow M$ una curva en M , con $0 \in I$ y U una vecindad de $\alpha(0) = p$ donde estén definidos n campos $E_1, \dots, E_n \in \mathfrak{X}(U)$ tales que en cada $q \in U$, los vectores $E_1(q), \dots, E_n(q)$ formen una base de $T_q M$. Así, podemos expresar $\alpha'(t)$ como $\sum a_i(t) E_i$ para ciertas funciones $a_i : I \rightarrow \mathbb{R}$. Además, si $Y \in \mathfrak{X}(\alpha)$, existen funciones $b_j : I \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $Y = \sum b_j e_j$, donde $e_j = E_j(\alpha(t))$. Si D/dt es una derivada covariante, entonces

$$\frac{DY}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{D}{dt} (b_j e_j) = \sum_{j=1}^n \left(b_j \frac{De_j}{dt} + \frac{db_j}{dt} e_j \right).$$

Supongamos que D/dt es compatible con una conexión ∇ . Como los campos $E_j \in \mathfrak{X}(U)$ extienden a los vectores $e_j \in \mathfrak{X}(\alpha)$, la compatibilidad implica que

$$\frac{De_j}{dt} = \nabla_{\alpha'(t)} E_j.$$

Usamos los símbolos de Christoffel para escribir

$$\frac{De_j}{dt} = \sum_{i=1}^n a_i \nabla_{E_i} E_j = \sum_{i,k=1}^n a_i \Gamma_{ij}^k E_k.$$

Sustituimos lo anterior en la expresión de DY/dt y hacemos un cambio de índices para obtener

$$\frac{DY}{dt} = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i,j=1}^n a_i b_j \Gamma_{ij}^k + \frac{db_k}{dt} \right) E_k.$$

Dado que esta expresión sólo depende de a_i , b_j y sus derivadas, así como de los símbolos de Christoffel, podemos concluir la unicidad de la derivada covariante compatible con la conexión. De acuerdo con la observación anterior a esta demostración, esta expresión nos permite definir la derivada covariante en la vecindad U . \square

En esta demostración hemos utilizado la propiedad general de trivialidad local del haz tangente. Esto sugerirá al lector que los conceptos de conexión y derivada covariante serán susceptibles de definirse en otros haces, lo cual haremos posteriormente.

Veamos una manera conveniente de escoger los campos E_1, \dots, E_n . Si (U, φ) es una carta, u_i son las funciones coordenadas usuales en \mathbb{R}^n y $x_i = u_i \circ \varphi$, podemos elegir $E_i = \partial/\partial x_i$. En este caso, escribimos la curva $\alpha(t)$ como $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ y su derivada como

$$\alpha'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{dx_i}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

y la expresión para la derivada covariante de un campo Y está dada por

$$\frac{DY}{dt} = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i,j=1}^n \frac{dx_i}{dt} b_j \Gamma_{ij}^k + \frac{db_k}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (4.4)$$

4.2. Campos tangentes paralelos y geodésicas

En esta sección regresaremos por el camino que nos llevó al concepto de conexión. Recordemos que el concepto de conexión se introdujo para generalizar el concepto de derivación de un campo $v(t)$ definido a lo largo de una curva $\alpha(t)$. Ahora formalizamos estas ideas.

Dada una conexión ∇ , si una derivada covariante D/dt es compatible con ella, la condición (4.3) dice que

$$\left. \frac{Dv}{dt} \right|_{t=t_0} = \nabla_{\alpha'(t_0)} Y,$$

donde Y es *cualquier* extensión de $v(t)$ a una vecindad de $\alpha(t_0)$.

En particular, si v es el propio campo de vectores α' tangentes a la curva α , la derivada covariante $D\alpha'/dt$ nos da una “segunda derivada” o “aceleración” de una curva, vista desde la variedad M .

Si utilizamos la notación del final de la sección anterior y sustituimos $v = \alpha'$ en la ecuación (4.4), obtenemos la siguiente expresión para $D\alpha'/dt$ con respecto de una carta (U, φ) :

$$\frac{D\alpha'}{dt} = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i,j=1}^n \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} \Gamma_{ij}^k + \frac{d^2 x_k}{dt^2} \right) \frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (4.5)$$

Utilizaremos esta expresión para destacar una clase de curvas en una variedad.

Definición 4.5. Una curva $\alpha : I \rightarrow M$ es una *geodésica* en $t_0 \in I$ si y sólo si $D\alpha'/dt$ se anula en t_0 . La curva α es una *geodésica* si y sólo si α es una geodésica en t para todo $t \in I$.

Intuitivamente, una geodésica en una variedad M juega un papel análogo al de una línea recta en \mathbb{R}^n , pues una recta (con una parametrización adecuada) es una curva con aceleración nula. Más adelante veremos otras analogías entre las geodésicas de una variedad arbitraria y las rectas en \mathbb{R}^n .

A continuación veremos que el hecho de que una curva sea geodésica se traduce en un sistema de ecuaciones diferenciales.

Proposición 4.6. Sea $\alpha : I \rightarrow M$ una curva cuya imagen está contenida en el dominio de una carta (U, φ) , con coordenadas x_i . Entonces α es una geodésica si y sólo si

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} \Gamma_{ij}^k + \frac{d^2 x_k}{dt^2} = 0 \quad (4.6)$$

para cada $k = 1, \dots, n$.

La demostración es obvia al analizar la ecuación (4.5) y usar el hecho de que para cada q , los vectores $E_1(q), \dots, E_n(q)$ forman una base de T_qM .

Arriba derivamos el campo de vectores tangentes a una curva. El concepto similar al de geodésica, correspondiente a un campo definido a lo largo de una curva, es el siguiente.

Definición 4.7. Un campo $v \in \mathfrak{X}(\alpha)$ definido a lo largo de una curva α es *paralelo* si y sólo si su derivada covariante se anula; es decir, si y sólo si $Dv/dt \equiv 0$.

Antes de analizar con detalle a los campos paralelos y a las geodésicas, extenderemos el concepto de conexión a otros haces vectoriales. Para esto, observemos que una conexión $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ se puede ver como una transformación

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M),$$

donde $\mathfrak{X}^*(M) = \Gamma(T^*M)$; es decir, como una transformación

$$\nabla : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes TM).$$

Este punto de vista permite definir la extensión prometida.

Definición 4.8. Sea $\xi = (E, \pi)$ un haz vectorial diferenciable sobre una variedad M . Una *conexión* en ξ es una transformación

$$\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes E)$$

tal que para cada $f \in C^\infty(M)$ y $s \in \Gamma(E)$ se tiene que

$$\nabla(fs) = f\nabla s + df \otimes s.$$

Observación. Sea $\{s_1, \dots, s_n\}$ un conjunto de secciones de E definidas en un abierto $U \subset M$ de modo que para cada punto $p \in U$, $\{s_1(p), \dots, s_n(p)\}$ es una base de E_p . Abreviaremos esto diciendo que $\{s_1, \dots, s_n\}$ es un *marco móvil*. Definimos la matriz $\omega = \{\omega_{ij}\}$ de la conexión con respecto de este marco como

$$\nabla s_i = \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \otimes s_j, \quad \omega_{ij} \in \Gamma(T^*M).$$

Si $\{s'_1, \dots, s'_n\} \subset \Gamma(E)$ es otro marco móvil en U , tenemos

$$s'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} s_j, \quad s_k = \sum_{l=1}^n a_{kl}^{-1} s'_l.$$

Por las propiedades de la conexión,

$$\begin{aligned} \nabla s'_i &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \nabla s_j + da_{ij} \otimes s_j = \sum_{j=1}^n a_{ij} \sum_{k=1}^n \omega_{jk} \otimes s_k + \sum_{k=1}^n da_{ik} \otimes s_k \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \omega_{jk} + da_{ik} \right) \otimes s_k = \sum_{k,l=1}^n \left(da_{ik} a_{kl}^{-1} + \sum_{j=1}^n a_{ij} \omega_{jk} a_{kl}^{-1} \right) \otimes s'_l, \end{aligned}$$

de modo que si ω' es la matriz de la conexión con respecto del marco $\{s'_i\}$, entonces

$$\omega' = da \cdot a^{-1} + a \cdot \omega \cdot a^{-1}.$$

Definición 4.9. Sea ∇ una conexión en el haz $\xi = (E, \pi)$ sobre M . Para $X \in \mathfrak{X}(M)$ definimos la *derivada covariante* de la sección s en la dirección de X como $\nabla_X s = \nabla s(X)$. Si $\omega = \{\omega_{ij}\}$ es la matriz de la conexión con respecto de un marco $\{s_i\}$, se definen los *símbolos de Christoffel de la conexión* como

$$\Gamma_{ij}^k = \omega_{jk} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right), \quad \text{de modo que} \quad \nabla s_j \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \sum_k \Gamma_{ij}^k s_k.$$

Observación. Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\{s_1, \dots, s_n\} \subset \Gamma(E)$ es un marco móvil, para cualquier $s \in \Gamma(E)$ se tiene que $s = \sum_i f_i s_i$ y así

$$\nabla s(X) = \sum_{i=1}^n \left(X(f_i) s_i + f_i \sum_{j=1}^n \omega_{ij}(X) s_j \right) = \sum_{j=1}^n \left(X(f_j) + \sum_{i=1}^n f_i \omega_{ij}(X) \right) s_j.$$

Por lo tanto, para calcular $\nabla s(X)$ en q sólo hay que conocer $X(q)$, las componentes de s en q y sus derivadas en la dirección de $X(q)$. Sea $\alpha : I \rightarrow M$ una curva diferenciable y sea $s : I \rightarrow E$ una función diferenciable tal que

$s(t) \in E_{\alpha(t)}$ para todo $t \in I$. Decimos que s es una sección a lo largo de α . Si $s(t) = \sum_i f_i(t)s_i(\alpha(t))$, definimos la *derivada covariante* de s a lo largo de la curva mediante

$$\frac{Ds}{dt}(t) = \sum_{j=1}^n \left(f'_j(t) + \sum_{i=1}^n f_i(t)\omega_{ij}(\alpha'(t)) \right) s_j(\alpha(t)). \quad (4.7)$$

Decimos que la sección s es *paralela* a lo largo de α si y sólo si $Ds/dt \equiv 0$.

Teorema 4.10. *Sean $\xi = (E, \pi)$ un haz vectorial diferenciable sobre una variedad M , ∇ una conexión en ξ y $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ una curva diferenciable. Para todo $v \in E_{\alpha(a)}$ hay una única sección s paralela a lo largo de α tal que $s(a) = v$. Si denotamos $s(b)$ por $P_\alpha(v)$, tenemos que la transformación $P_\alpha : E_{\alpha(a)} \rightarrow E_{\alpha(b)}$ es un isomorfismo lineal.*

DEMOSTRACIÓN. Sea (U_k, ψ_k) , $k = 0, \dots, l-1$, una familia finita de cartas que cubre a la imagen de α , con la propiedad adicional de que existe un marco móvil $\{s_i^k\}$ en U_k . Dividimos el intervalo $[a, b]$ en subintervalos $[t_k, t_{k+1}]$ tales que $\alpha([t_k, t_{k+1}]) \subset U_k$. Sea ω^k la matriz de la conexión con respecto del marco $\{s_i^k\}$. Para todo $u \in \mathbb{R}^n$, el sistema lineal en $[t_k, t_{k+1}] \times \mathbb{R}^n$

$$f' = -f \omega_{\alpha(t)}^k(\alpha'(t)) \quad (4.8)$$

tiene una única solución $f : [t_k, t_{k+1}] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f(t_k) = u$. Sea $f^0 : [a, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ la solución del sistema (4.8) con $k = 0$ y $(\alpha(a), f^0(a)) = \psi_0(v)$. Definimos

$$s(t) = \sum_i f_i^0(t)s_i^0(\alpha(t)), t \in [a, t_1].$$

Inductivamente, sea $f^k : [t_k, t_{k+1}] \rightarrow \mathbb{R}^n$ la solución del sistema (4.8) que satisface $(\alpha(t_k), f^k(t_k)) = \psi_k(s(t_k))$ y definamos

$$s(t) = \sum_i f_i^k(t)s_i^k(\alpha(t)), t \in [t_k, t_{k+1}].$$

La transformación P_α es inyectiva debido a la unicidad de las soluciones de (4.8). Que la transformación P_α es lineal se sigue del hecho de que el conjunto de soluciones de un sistema lineal es un espacio vectorial. \square

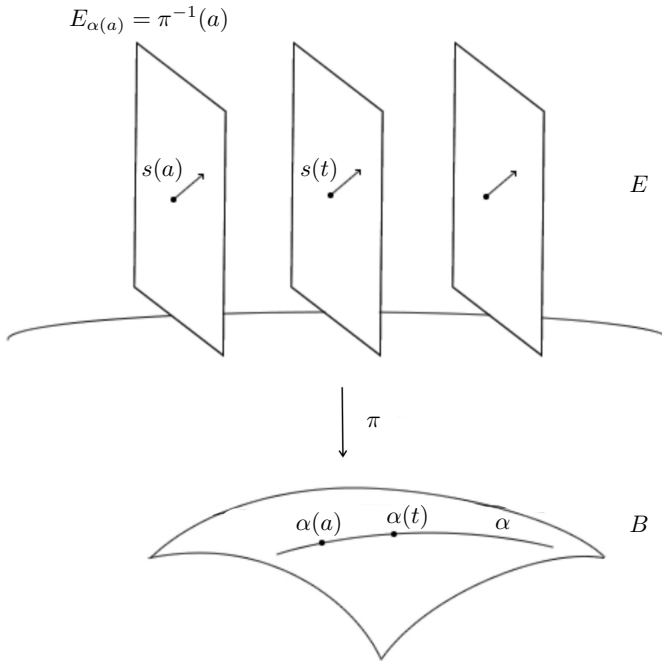


Figura 4.4: El transporte paralelo.

Definición 4.11. La transformación lineal $P_\alpha : E_{\alpha(a)} \rightarrow E_{\alpha(b)}$ dada por el teorema anterior se llama el *transporte paralelo*. Más formalmente, si $v \in E_{\alpha(a)}$, entonces $P_\alpha(v)$ es el *transporte paralelo de v desde $\alpha(a)$ hasta $\alpha(b)$ a lo largo de α* .

Más adelante utilizaremos el transporte paralelo para motivar el concepto de curvatura. Por ahora, analizaremos la relación de los conceptos de conexión y paralelismo con una métrica dada.

Definición 4.12. Sea ∇ una conexión definida en un haz vectorial diferenciable $\xi = (E, \pi)$ sobre una variedad M . Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es una métrica en E , la conexión ∇ es *compatible* con la métrica si y sólo si para todo $s, r \in \Gamma(E)$ y

$X \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene que

$$X \langle s, r \rangle = \langle s, \nabla_X r \rangle + \langle \nabla_X s, r \rangle.$$

Observación. Supongamos que la conexión ∇ es compatible con una métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si s, r son secciones paralelas a lo largo de α , entonces

$$\frac{d}{dt} \langle s(t), r(t) \rangle = \left\langle \frac{Ds}{dt}(t), r(t) \right\rangle + \left\langle s(t), \frac{Dr}{dt}(t) \right\rangle = 0.$$

Así $\langle s(t), r(t) \rangle$ es constante y el transporte paralelo P_α preserva la métrica.

Observación. Supongamos que ∇ es compatible con $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si $\{s_1, \dots, s_n\} \subset \Gamma(E)$ es un marco móvil ortonormal (con respecto de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, por supuesto), entonces

$$0 = X \langle s_i, s_j \rangle = \langle s_i, \nabla_X s_j \rangle + \langle \nabla_X s_i, s_j \rangle = \omega_{ji}(X) + \omega_{ij}(X)$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, de modo que la matriz ω con respecto de este marco es antisimétrica.

Teorema 4.13 (Levi-Civita). *Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ una métrica riemanniana en la variedad diferenciable M . Entonces existe una única conexión en TM , simétrica y compatible con la métrica. Dicha conexión es llamada conexión de Levi-Civita.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que ∇ es simétrica y compatible con la métrica, de modo que para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned} X \langle Y, Z \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \\ Y \langle Z, X \rangle &= \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle, \\ Z \langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle = \\ \langle [X, Z], Y \rangle + \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle + 2 \langle \nabla_Y X, Z \rangle \end{aligned}$$

de modo que

$$2 \langle \nabla_Y X, Z \rangle = X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle. \quad (4.9)$$

Esto demuestra la unicidad. Por otra parte, la ecuación (4.9) define una conexión y se comprueba fácilmente que ésta es simétrica y compatible con la métrica. \square

De aquí en adelante, siempre que esté dada una métrica y se utilice una conexión, supondremos que ésta es compatible con la métrica.

4.3. Introducción al concepto de curvatura

En esta sección motivaremos el concepto de curvatura, que desarrollaremos formalmente en la sección 4.4. Al estilo del clásico [5], no haremos demostración alguna, sino que dejaremos la demostración de todas las afirmaciones de esta sección al cuidado del lector.

Como indicamos al definir el transporte paralelo, esta transformación nos da la clave para el concepto de curvatura. Sea M una variedad, $p \in M$ y $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ una curva en M . Ya vimos en el teorema 4.10 que el transporte paralelo desde $\alpha(a)$ hasta $\alpha(b)$ es una transformación lineal. Si ahora suponemos que la curva α es cerrada basada en p , de modo que $\alpha(a) = \alpha(b) = p$, entonces P_α es una transformación lineal de $T_p M$ en sí mismo.

Veamos un ejemplo. Si $M = \mathbb{R}^n$, entonces para cualquier $p \in \mathbb{R}^n$ y toda curva cerrada basada en p se tiene que P_α es la transformación identidad. Este comportamiento se cumple para toda curva α y todo punto p . Veamos qué ocurre con otras variedades.

1. Sea $M = \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, p el polo norte de la esfera y $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^2$ un triángulo formado por un arco del ecuador y dos arcos de paralelos, que se cortan en p con un ángulo θ . Describa el transporte paralelo P_α en términos del ángulo θ .

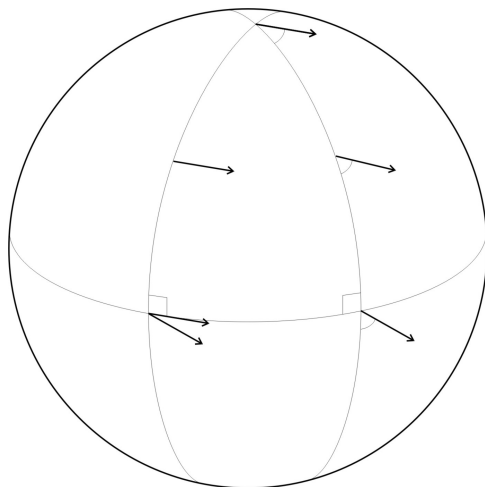


Figura 4.5: Transporte paralelo en la esfera.

Este ejercicio muestra que el transporte paralelo a lo largo de una curva cerrada basada en un punto p puede depender de la curva elegida y del punto p en cuestión.

El lector meticulouso observará que en este ejercicio utilizamos una extensión del concepto de transporte paralelo, ahora a lo largo de curvas diferenciables por partes. Sin duda, el lector podrá formalizar esta extensión sin mayor problema.

2. Analice si el transporte paralelo depende de la curva elegida o del punto p , cuando M es el cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$.

Presentamos el cilindro debido a que parecería que éste y el plano tienen curvaturas diferentes. Sin embargo, ambas superficies son localmente isométricas; es decir, hay una transformación que “enrolla” el cilindro en el plano y que preserva la distancia, al menos localmente. Dos superficies isométricas tendrán la misma curvatura en puntos correspondientes.

Podemos postular ya nuestra primera idea de la curvatura: Una variedad M tiene curvatura cero en un punto $p \in M$ si y sólo si el transporte paralelo a lo largo de curvas cerradas basadas en p no depende de la curva elegida.

Usaremos esta idea para encontrar una expresión formal para la curvatura. (¡En realidad, escribimos tal expresión al principio del capítulo!) Dado un punto $p \in M$, consideraremos una sucesión de curvas α_n cerradas y basadas en p , con lo que obtendremos una familia de transportes paralelos $P_n : T_p M \rightarrow T_p M$. Si hacemos “tender” las curvas α_n a p y las transformaciones P_n “convergen” a una transformación P , entonces este límite contendrá la información sobre la curvatura de M .

Pasemos a la construcción formal. Lo primero que haremos es interpretar a una conexión en términos del transporte paralelo.

3. Sean M una variedad, $p \in M$, $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ y $\beta : [s_0, s_0 + \epsilon] \rightarrow M$ una curva tal que $\beta(s_0) = p$ y

$$\beta'(s) = Y(\beta(s)) \text{ para toda } s \in [s_0, s_0 + \epsilon];$$

es decir, β es una trayectoria del campo Y que pasa por p cuando $s = s_0$. Sea P_s el transporte paralelo desde p hasta $\beta(s)$. Muestre que

$$\nabla_Y Z(p) = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{P_s^{-1}(Z(\beta(s)) - Z(p))}{s - s_0}. \quad (4.10)$$

e interprete geoméricamente.

Observe que la expresión (4.10) es prácticamente igual a la definición usual de derivada, salvo por la aparición del transporte paralelo. Es claro que una expresión del tipo $Z(\beta(s)) - Z(p)$ no tiene sentido si $\beta(s) \neq p$, pues los vectores $Z(\beta(s))$ y $Z(p)$ pertenecen a espacios distintos.

Hemos dicho que para definir la curvatura en p nos fijaremos en el transporte paralelo a lo largo de curvas cerradas basadas en p . Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, consideraremos una curva α (un “cuadrilátero”) construida partiendo de p en la dirección de X (es decir, siguiendo una trayectoria de X que pase por p), para luego seguir en la dirección de Y , regresar por una trayectoria de X y finalmente regresar por una trayectoria de Y .

El problema de esta construcción radica en que nada garantiza que este cuadrilátero se “cierre” en forma adecuada: No es seguro que regresemos a p . A continuación daremos una condición para esto.

4. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y φ_t, ψ_s sus correspondientes flujos locales. Demuestre que $[X, Y] = 0$ si y sólo si los flujos conmutan; es decir, si y

sólo si $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$ para todo s, t donde las composiciones tengan sentido.

Supongamos entonces que $[X, Y] = 0$, de modo que la trayectoria α definida líneas arriba cierra en forma adecuada. Más precisamente, sea α la trayectoria formada al partir de p mediante una trayectoria de X y recorrer ésta durante un tiempo t . A continuación, se parte de $\varphi_t(p)$ y se recorre una trayectoria de Y durante un tiempo s . En el tercer pedazo, se parte de $\psi_s \circ \varphi_t(p)$ y se recorre (en sentido inverso) una trayectoria de X , para finalmente regresar a p recorriendo en sentido inverso una trayectoria de Y .

Si $Z \in \mathfrak{X}(M)$, transportamos el vector $Z(p)$ paralelamente a lo largo de esta trayectoria y comparamos el vector obtenido al final del proceso con $Z(p)$, tomando su diferencia. El lector deberá convencerse que este proceso es completamente análogo al siguiente: Si consideramos el valor de Z en el punto $\psi_s \circ \varphi_t(p)$, podemos “regresar” este vector por dos caminos, siguiendo primero una trayectoria de Y y luego una trayectoria de X o bien al contrario.

5. Con base en el proceso descrito, interprete geoméricamente la siguiente fórmula:

$$P_t^{-1} \circ P_s^{-1}(Z(\psi_s \circ \varphi_t(p))) - P_s^{-1} \circ P_t^{-1}(Z(\varphi_t \circ \psi_s(p))).$$

Esta expresión nos acerca a un paso de la definición de curvatura. Al considerar el límite de la expresión cuando $s \rightarrow s_0$ y $t \rightarrow t_0$, obtendremos una sucesión de curvas que “tienden” a p .

5. Suponga que $[X, Y] = 0$ y utilice la ecuación (4.10) para mostrar que

$$\lim_{s, t \rightarrow s_0, t_0} \frac{P_t^{-1} \circ P_s^{-1}(Z(\psi_s \circ \varphi_t(p))) - P_s^{-1} \circ P_t^{-1}(Z(\varphi_t \circ \psi_s(p)))}{(t - t_0)(s - s_0)}$$

es igual a $\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z$.

Observe que la expresión $\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z$ ya se parece bastante a la expresión (4.1). En el caso en que $[X, Y] \neq 0$, tendremos que corregir esta expresión $\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z$. El siguiente ejercicio da una justificación algebraica para agregarle un término.

6. Muestre que la expresión $\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z$ no es C^∞ -lineal en X, Y, Z , pero que la expresión del lado izquierdo de (4.1) sí lo es.

4.4. Curvatura para haces vectoriales

Como en el caso de las conexiones, el concepto de curvatura se puede extender a haces vectoriales, como sigue.

Definición 4.14. Sea ∇ una conexión en un haz vectorial $\xi = (E, \pi)$ sobre M . Extendemos la definición de la conexión $\nabla^r : \Omega^r(M) \otimes \Gamma(E) \rightarrow \Omega^{r+1}(M) \otimes \Gamma(E)$ mediante

$$\nabla^r(\omega \otimes s) = d\omega \otimes s + (-1)^r \omega \wedge \nabla s.$$

Definimos la *curvatura* de la conexión como $\Omega = \nabla^1 \circ \nabla$.

Observación. Sean $\omega \in \Omega^1(M)$ y $s \in \Gamma(E)$; entonces

$$\begin{aligned} \nabla^1(\omega \otimes s)(X, Y) &= d\omega(X, Y)s - \omega \wedge \nabla s(X, Y) \\ &= (X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]))s - \omega(X)\nabla_Y s + \omega(Y)\nabla_X s \\ &= \nabla_X(\omega(Y)s) - \nabla_Y(\omega(X)s) - \omega([X, Y])s. \end{aligned}$$

Así,

$$(\Omega s)(X, Y) = \nabla^1(\nabla s)(X, Y) = \nabla_X(\nabla_Y s) - \nabla_Y(\nabla_X s) - \nabla_{[X, Y]}s. \quad (4.11)$$

Si $f \in C^\infty(M)$, entonces

$$\Omega(fs) = \nabla^1(f\nabla s + df \otimes s) = df \wedge \nabla s + f\Omega s + ddf \otimes s - df \wedge \nabla s = f\Omega s.$$

Sea ω la matriz de la conexión con respecto de un marco $\{s_1, \dots, s_n\} \subset \Gamma(E)$ y observemos que

$$\begin{aligned} \Omega s_i &= \sum_{j=1}^n \nabla^1(\omega_{ij} \otimes s_j) = \sum_{j=1}^n d\omega_{ij} \otimes s_j - \omega_{ij} \wedge \nabla s_j \\ &= \sum_{k=1}^n \left(d\omega_{ik} - \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \wedge \omega_{jk} \right) \otimes s_k. \end{aligned}$$

Así, la matriz de Ω con respecto del marco local es $\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega$.

Si la conexión es compatible con una métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en E y $\{s_1, \dots, s_n\}$ es un marco local ortonormal, ya sabemos que la matriz de ω es antisimétrica; por consiguiente, Ω también lo es. Luego

$$\langle (\Omega s_i)(X, Y), s_k \rangle = \Omega_{ik}(X, Y) = -\langle s_i, (\Omega s_k)(X, Y) \rangle.$$

Como Ω es $C^\infty(M)$ -lineal, se tiene que para todo $r, s \in \Gamma(E)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\langle (\Omega r)(X, Y), s \rangle + \langle r, (\Omega s)(X, Y) \rangle = 0. \quad (4.12)$$

Teorema 4.15. *Sea ∇ la conexión de Levi-Civita correspondiente a una métrica riemanniana en M . Sean $\{E_1, \dots, E_n\}$ un marco móvil ortonormal local de TM y $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ el marco dual. Entonces se cumplen las siguientes condiciones:*

- Ecuaciones de estructura: $d\theta = \omega \wedge \theta$, $d\omega = \Omega + \omega \wedge \omega$.
- Primera identidad de Bianchi: $\Omega \wedge \theta = 0$.
- Segunda identidad de Bianchi: $d\Omega + \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega = 0$.

DEMOSTRACIÓN. El marco dual satisface $\theta_i(Y) = \langle E_i, Y \rangle$. Así,

$$\begin{aligned} d\theta_i(X, Y) &= X(\theta_i(Y)) - Y(\theta_i(X)) - \theta_i([X, Y]) \\ &= X \langle E_i, Y \rangle - Y \langle E_i, X \rangle - \langle E_i, [X, Y] \rangle \\ &= \langle \nabla_X E_i, Y \rangle - \langle \nabla_Y E_i, X \rangle + \langle E_i, \nabla_X Y - \nabla_Y X \rangle - \langle E_i, [X, Y] \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \omega_{ij}(X) \langle E_j, Y \rangle - \sum_{j=1}^n \omega_{ij}(Y) \langle E_j, X \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n (\omega_{ij} \wedge \theta_j)(X, Y). \end{aligned}$$

De este modo,

$$d\theta_i = \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \wedge \theta_j.$$

De aquí obtenemos

$$0 = d(d\theta) = (d\omega) \wedge \theta - \omega \wedge d\theta = (d\omega - \omega \wedge \omega) \wedge \theta = \Omega \wedge \theta.$$

De manera análoga,

$$\begin{aligned} 0 = d(d\omega) &= d(\Omega + \omega \wedge \omega) = d\Omega + (d\omega) \wedge \omega - \omega \wedge d\omega \\ &= d\Omega + (\Omega + \omega \wedge \omega) \wedge \omega - \omega \wedge (\Omega + \omega \wedge \omega) \\ &= d\Omega + \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega. \end{aligned}$$

Regresemos al tensor de curvatura que motivamos en la sección anterior.

Definición 4.16. Si \langle , \rangle es una métrica riemanniana en M y ∇ es la conexión de Levi-Civita, se acostumbra denotar $(\Omega Z)(X, Y) = R_{XY}Z$ y se define el *tensor de curvatura* $R \in \Gamma(T^4(M))$ por

$$R(X, Y, Z, W) = \langle R_{XY}Z, W \rangle.$$

La conexión de Levi-Civita se extiende a $\nabla : \Gamma(T^r(M)) \rightarrow \Gamma(T^{r+1}(M))$,

$$\nabla S(Z, X_1, \dots, X_r) = Z(S(X_1, \dots, X_r)) - \sum_{i=1}^r S(X_1, \dots, \nabla_Z X_i, \dots, X_r)$$

Proposición 4.17. *El tensor de curvatura tiene las siguientes propiedades:*

1. $R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W)$
2. $R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z)$
3. $R_{XY}Z + R_{YZ}X + R_{ZX}Y = 0$
4. $R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y)$
5. $\nabla R(X, Y, Z, \cdot, \cdot) + \nabla R(Y, Z, X, \cdot, \cdot) + \nabla R(Z, X, Y, \cdot, \cdot) = 0$

DEMOSTRACIÓN. El inciso (1) se sigue de la definición, mientras que (2) se sigue de (4.12).

(3) Sean $\{E_1, \dots, E_n\}$ un marco local ortonormal de TM y $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ el marco dual de T^*M . Por la primera identidad de Bianchi, para $k = 1, \dots, n$ se tiene

$$\begin{aligned} & \langle (\Omega Z)(X, Y) + (\Omega X)(Y, Z) + (\Omega Y)(Z, X), E_k \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \Omega_{ik}(X, Y)\theta_i(Z) + \sum_{i=1}^n \Omega_{ik}(Y, Z)\theta_i(X) + \sum_{i=1}^n \Omega_{ik}(Z, X)\theta_i(X) \\ &= \sum_{i=1}^n (\Omega_{ik} \wedge \theta_i)(X, Y, Z) = 0 \end{aligned}$$

(4) Se sigue de (1), (2) y (3) que

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) &= 0, \\ R(X, Y, Z, W) + R(Y, W, Z, X) + R(X, W, Y, Z) &= 0, \\ R(Y, Z, X, W) + R(Y, W, Z, X) + R(Z, W, X, Y) &= 0, \\ R(Z, W, X, Y) + R(Z, X, Y, W) + R(X, W, Y, Z) &= 0. \end{aligned}$$

Sumamos las dos primeras ecuaciones y restamos las dos últimas para obtener (4).

(5) De la segunda identidad de Bianchi,

$$d\Omega_{ij}(X, Y, Z) + \sum_k (\Omega_{ik} \wedge \omega_{kj} - \omega_{ik} \wedge \Omega_{kj})(X, Y, Z) = 0 \quad (4.13)$$

Por el teorema 3.33, tenemos que

$$\begin{aligned} d\Omega_{ij}(X, Y, Z) &= X(\Omega_{ij}(Y, Z)) + Y(\Omega_{ij}(Z, X)) + Z(\Omega_{ij}(X, Y)) \\ &\quad - \Omega_{ij}([X, Y], Z) - \Omega_{ij}([Y, Z], X) - \Omega_{ij}([Z, X], Y) \end{aligned}$$

Como $\Omega_{ij}(\cdot, \cdot) = R(\cdot, \cdot, E_i, E_j)$,

$$\begin{aligned} X(\Omega_{ij}(Y, Z)) &= \nabla R(X, Y, Z, E_i, E_j) + \Omega_{ij}(\nabla_X Y, Z) + \Omega_{ij}(Y, \nabla_X Z) \\ &\quad + \sum_k \omega_{ik}(X)\Omega_{kj}(Y, Z) + \sum_k \omega_{jk}(X)\Omega_{ik}(Y, Z) \end{aligned}$$

Puesto que $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$, tenemos

$$d\Omega_{ij}(X, Y, Z) = \sum_k (\omega_{ik} \wedge \Omega_{kj} + \omega_{jk} \wedge \Omega_{ik})(X, Y, Z) \\ + \nabla R(X, Y, Z, E_i, E_j) + \nabla R(Y, Z, X, E_i, E_j) + \nabla R(Z, X, Y, E_i, E_j).$$

Comparando con (4.13) obtenemos (5). \square

A continuación definimos en el contexto de las variedades algunos operadores diferenciales que el lector recordará de sus cursos de cálculo.

Definición 4.18. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ una métrica riemanniana en M y sea ∇ la conexión de Levi-Civita.

- Para $f \in C^\infty(M)$ definimos el campo *gradiente* de f por

$$\langle \text{grad } f, X \rangle = df(X) = X(f).$$

- Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces $\nabla X \in \Gamma(T_1^1(M)) = \Gamma(\text{hom}(TM, TM))$. Definimos la *divergencia* de X por

$$\text{div } X = c(\nabla X) = \text{Tr } \nabla X,$$

donde c denota la operación de contracción; véase el ejemplo 3.1.

- El *hessiano* de f es

$$H^f = \nabla(df).$$

- El *laplaciano* de f es

$$\Delta f = \text{div}(\text{grad } f) = \text{Tr } \nabla(\text{grad } f)$$

Observación. Sea E_1, \dots, E_n un marco local ortonormal de TM , entonces

$$\text{div } X = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle.$$

Por otro lado, el hessiano satisface

$$H^f(X, Y) = X(df(Y)) - df(\nabla_X Y) = X(Y(f)) - \nabla_X Y(f) \\ = Y(X(f)) - \nabla_Y X(f) = H^f(Y, X)$$

Por lo tanto, H^f es simétrico; además,

$$H^f(X, Y) = X \langle \text{grad } f, Y \rangle - \langle \text{grad } f, \nabla_X Y \rangle = \langle \nabla_X (\text{grad } f), Y \rangle.$$

Finalmente, el laplaciano se expresa como

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} \text{grad } f, E_i \rangle = \sum_{i=1}^n H^f(E_i, E_i).$$

Definición 4.19. Para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, sea $Q \in \Gamma(\text{hom}(TM, TM))$ dada por $Q(X, Y)(Z) = R_{XZ}Y$. Definimos la *curvatura de Ricci* $\text{Ric} \in \Gamma(T^2(M))$ como $\text{Ric}(X, Y) = \text{Tr } Q(X, Y)$.

$$\text{Ric}(X, Y) = \sum_{j=1}^n \langle R_{XX_j}Y, X_j \rangle = \sum_{j=1}^n R(X, X_j, Y, X_j).$$

Hay un isomorfismo entre $\Gamma(T^2(M))$ y $\Gamma(\text{hom}(TM, TM))$ dado por

$$T(X, Y) = \langle \mathbf{T}(X), Y \rangle.$$

A la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le corresponde la identidad I . A Ric le corresponde un **Ric** simétrico.

Definición 4.20. Definimos la *curvatura escalar* S y el *tensor de Einstein* G por

$$S = \text{Tr } \mathbf{Ric}, \quad \text{y} \quad G = \text{Ric} - \frac{1}{2}S \langle \cdot, \cdot \rangle.$$

En otras palabras,

$$S = \sum_{i=1}^n \text{Ric}(X_i, X_i) = \sum_{i,j=1}^n R(X_i, X_j, X_i, X_j).$$

Dados $\mathbf{T} \in \Gamma(\text{hom}(TM, TM))$ y $Y \in \mathfrak{X}(M)$ se puede ver que

$$(\nabla \mathbf{T})(Y) \in \Gamma(\text{hom}(TM, TM))$$

está dada por

$$(\nabla \mathbf{T})(Y)(X) = (\nabla_X \mathbf{T})(Y) := \nabla_X(\mathbf{T}(Y)) - \mathbf{T}(\nabla_X Y),$$

mientras que $\operatorname{div} T \in \Omega^1(M)$ está dado por $(\operatorname{div} T)(Y) = \operatorname{Tr}((\nabla \mathbf{T})(Y))$. Así

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} T)(Y) &= \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_{X_i} \mathbf{T})(Y), X_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{X_i} (\mathbf{T}(Y)) - \mathbf{T}(\nabla_{X_i} Y), X_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n X_i(T(Y, X_i)) - T(Y, \nabla_{X_i} X_i) - T(\nabla_{X_i} Y, X_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \nabla T(X_i, Y, X_i). \end{aligned}$$

Para finalizar esta sección damos dos propiedades de los conceptos arriba definidos.

Proposición 4.21. $dS = 2 \operatorname{div} \operatorname{Ric}$. Además, si $\dim M = 4$, $\operatorname{div} G = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $p \in M$ y E_1, \dots, E_n un marco geodésico en p . Puesto que $\operatorname{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^n R(X, E_i, Y, E_i)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \nabla \operatorname{Ric}(Z, X, Y) &= Z(\operatorname{Ric}(X, Y)) - \operatorname{Ric}(\nabla_Z X, Y) - \operatorname{Ric}(X, \nabla_Z Y) \\ &= \sum_{i=1}^n \nabla R(Z, X, E_i, Y, E_i) + R(X, \nabla_Z E_i, Y, E_i) + \sum_{i=1}^n R(X, E_i, Y, \nabla_Z E_i), \end{aligned}$$

de modo que

$$\nabla \operatorname{Ric}(Z, X, Y)(p) = \sum_{i=1}^n \nabla R(Z, X, E_i, Y, E_i)(p).$$

Entonces

$$\operatorname{div} \operatorname{Ric}(X)(p) = \sum_{i,j=1}^n \nabla R(E_j, X, E_i, E_j, E_i)(p)$$

y

$$\begin{aligned} dS(X) &= \sum_{i,j=1}^n \nabla R(X, E_i, E_j, E_i, E_j) \\ &\quad + 2 \sum_{i,j=1}^n R(\nabla_X E_i, E_j, E_i, E_j) + R(E_i, \nabla_X E_j, E_i, E_j). \end{aligned}$$

Por el inciso (5) de la proposición 4.17,

$$-\nabla R(X, E_i, E_j, E_j, E_i) = \nabla R(E_i, E_j, X, E_j, E_i) + \nabla R(E_j, X, E_i, E_j, E_i);$$

es decir,

$$\nabla R(X, E_i, E_j, E_i, E_j) = 2 \sum_{i,j=1}^n \nabla R(E_j, X, E_i, E_j, E_i).$$

Utilizamos lo anterior para obtener

$$dS(X)(p) = 2 \sum_{i,j=1}^n \nabla R(E_j, X, E_i, E_j, E_i)(p) = \operatorname{div} \operatorname{Ric}(X)(p),$$

lo cual concluye la demostración. □

4.5. Ejercicios

1. Sea $\xi = (E, \pi)$ un haz trivial sobre una variedad M ; es decir, $E = M \times \mathbb{R}^n$ y π es la proyección natural. Cada elemento de $\Gamma(E)$ se puede identificar con una transformación $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$. Muestre que la asociación $d : f \mapsto df$ es una conexión en ξ .
2. Sean $\nabla, \bar{\nabla}$ dos conexiones en \mathbb{R}^n .

a) Muestre que $B(X, V) = \bar{\nabla}_X V - \nabla_X V$ es bilineal.

b) Demuestre que las conexiones $\nabla, \bar{\nabla}$ tienen las mismas geodésicas si y sólo si $B(X, X) = 0$ para todo X .

c) La *torsión* T asociada a una conexión ∇ se define como

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

Demuestre que dos conexiones con las mismas geodésicas y la misma torsión coinciden.

d) Dada una conexión ∇ se define la *conexión conjugada* ∇^* y la *simetrización* ∇^s mediante las expresiones

$$\nabla_X^* Y = \nabla_X Y + T(X, Y), \quad \nabla^s = \frac{1}{2}(\nabla + \nabla^*).$$

Muestre que ∇^* es una conexión cuya torsión es $-T$.

- e) Muestre que ∇^s es una conexión con torsión nula.
- f) Muestre que ∇ , ∇^* y ∇^s tienen las mismas geodésicas.
3. Sea ∇ una conexión en \mathbb{R}^2 cuyos símbolos de Christoffel son $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 1$ y $\Gamma_{ij}^k = 0$ en todos los demás casos.
- a) Determine y resuelva las ecuaciones de las geodésicas para esta conexión.
- b) Determine una geodésica que pase por $(2, 1)$ con vector tangente $(1, 1)$.
- c) ¿Es posible llegar a cualquier punto de \mathbb{R}^2 con una geodésica que parta de $(0, 0)$?
- d) Conteste los incisos anteriores para la conexión no simétrica tal que $\Gamma_{12}^1 = 1$, con todos los demás símbolos iguales a cero.
4. Muestre que la transformación $L : TM \times TM \rightarrow TM$ dada por la derivada de Lie $(X, Y) \mapsto L_X Y$ no es una conexión en TM .
5. El *rotacional* $\text{rot } V$ de un campo $V \in \mathfrak{X}(M)$ se define como

$$(\text{rot } V)(X, Y) = \langle \nabla_X V, Y \rangle - \langle \nabla_Y V, X \rangle.$$

Muestre que

- a) $\text{rot } V$ es un tensor antisimétrico de tipo $(0, 2)$ cuyas componentes en coordenadas son
- $$\frac{\partial V_j}{\partial x_i} - \frac{\partial V_i}{\partial x_j}.$$
- b) $\text{rot}(\text{grad } f) = 0$.
- c) $\text{rot } V = d\theta$, donde θ es la 1-forma dada por $\theta(W) = \langle V, W \rangle$.
- d) En \mathbb{R}^3 , $(\text{rot } V)(X, Y) = (X \times Y) \cdot (\nabla \times V)$.
6. Sea (M, g) una variedad riemanniana y N una subvariedad de M . Muestre que la conexión de Levi-Civita para N se obtiene a partir de la conexión de Levi-Civita para M mediante una proyección ortogonal.

7. Sea M una variedad riemanniana. Muestre que para cada $p \in M$ existe una carta de una vecindad de p tal que los símbolos de Christoffel se anulan en p ; es decir, tal que $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$ para toda i, j, k . Muestre que además se puede suponer que $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$; es decir que la base correspondiente es ortonormal en p . *Sugerencia:* Dada una carta (U, φ) de una vecindad U de p , $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$, con símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k simétricos en i, j , defina

$$y_k(q) = x_k(q) - x_k(p) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(\varphi(p))(x_j(q) - x_j(p))(x_k(q) - x_k(p)).$$

Verifique que existe un dominio $V \subset U$ tal que $y|_V : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una carta para la cual los símbolos de Christoffel se anulan en p .

8. Sean x_1, \dots, x_n las coordenadas cartesianas de \mathbb{R}^n .

- a) Sea X un campo definido en un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , que puede escribirse como

$$X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Muestre que la divergencia de X está dada por

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_i}.$$

- b) Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Muestre que el gradiente de f está dado por

$$\operatorname{grad} f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} e_i,$$

donde e_i es la base canónica de \mathbb{R}^n .

- c) Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Muestre que el laplaciano de f está dado por

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

9. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable definida en una variedad riemanniana M . Suponga que $|\text{grad } f| = 1$ en todo M y muestre que las curvas integrales de $\text{grad } f$ son geodésicas.
10. Sea M una variedad riemanniana, $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\phi_t : M \rightarrow M$ el flujo determinado por X . Demuestre que

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} V(\phi_t(D)) = \int_D \text{div } X \, dV$$

para todo conjunto relativamente compacto $D \subset M$. Aquí V denota la función de volumen en M .

11. Sean $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables y M^3 una variedad compacta con frontera ∂M .

a) Demuestre la *primera identidad de Green*

$$\int_M \langle \text{grad } f, \text{grad } g \rangle \, dV + \int_M f \Delta g \, dV = \int_{\partial M} f \langle \text{grad } g, N \rangle \, dA,$$

donde dV y dA son las formas de volumen de M y ∂M , respectivamente, y N es el vector unitario normal a ∂M .

b) Demuestre la *segunda identidad de Green*

$$\int_M (f \Delta g - g \Delta f) \, dV = \int_{\partial M} (f \langle \text{grad } g, N \rangle - g \langle \text{grad } f, N \rangle) \, dA,$$

donde la notación es como la del inciso anterior.

12. Sea M una variedad compacta orientable sin frontera. Muestre que M no es contraíble.
13. Sea M una variedad riemanniana. Un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ es un *campo de Killing* si y sólo si su flujo local ϕ_t es una isometría de M sobre M para toda t suficientemente pequeña.

a) Demuestre que X es un campo de Killing si y sólo si $X \langle Y, Z \rangle = \langle L_X Y, Z \rangle + \langle Y, L_X Z \rangle$ para todo $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

- b) Demuestre que X es un campo de Killing si y sólo si

$$\langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle Y, \nabla_Z X \rangle = 0$$

para todo $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Es decir, la transformación lineal $Y \mapsto \nabla_Y X$ es antisimétrica con respecto de la métrica.

- c) Demuestre que un campo coordenado $\partial/\partial x_k$ es de Killing si y sólo si $\partial g_{ij}/\partial x_k = 0$ para toda i, j .
- d) Muestre que si N es una subvariedad de M , X es un campo de Killing en M y $X(p) \in T_p N$ para toda $p \in N$, entonces $X|_N$ es un campo de Killing en N .
- e) Demuestre que si M es conexa, entonces el espacio de campos de Killing tiene dimensión menor o igual a $n(n+1)/2$.
- f) Determine todos los campos de Killing en \mathbb{R}^3 .
14. Una variedad riemanniana M^n con métrica g es *de Einstein* si y sólo si $\text{Ric} = \lambda g$ para cierta función λ . Muestre que
- a) Si M^n es conexa y de Einstein con $n \geq 3$, entonces λ es constante.
- b) Si M^3 es conexa y de Einstein, entonces M tiene curvatura seccional constante.
- c) Muestre que una variedad de Einstein de dimensión mayor que tres no necesariamente tiene curvatura seccional constante. *Sugerencia:* Considere la variedad $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$.

CAPÍTULO 5

Geodésicas y campos de Jacobi

En este capítulo haremos un estudio más detallado de las geodésicas de una variedad M . Primero utilizaremos a las geodésicas para definir una importante transformación, la exponencial. Con base en ella definiremos el concepto de completitud geodésica y mostraremos que esta condición es equivalente a la completitud de M como espacio métrico. Más adelante definiremos y analizaremos los llamados campos de Jacobi, que nos dan información acerca de relación entre la distribución de las geodésicas en M y la curvatura de esta variedad.

5.1. La transformación exponencial

Para definir esta transformación, usaremos el siguiente resultado, donde “coleccionamos” muchas geodésicas en una sola transformación.

Teorema 5.1. *Sea M una variedad riemanniana y $p \in M$. Entonces existen números $\epsilon, \delta > 0$, una vecindad W de p en M y una transformación diferenciable $\Phi : (-\epsilon, \epsilon) \times W' \rightarrow M$, donde*

$$W' = \{ (q, v) \mid q \in W, v \in T_q M, \|v\| < \delta \},$$

de modo que para cada $(q, v) \in W'$, la curva $\Phi(t, q, v)$ es la única geodésica que pasa por q con velocidad v en el instante $t = 0$. En símbolos,

$$\Phi(0, q, v) = q, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t}(0, q, v) = v \quad \text{y} \quad \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, q, v) = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que las condiciones para que una curva sea una geodésica de M están dadas por (4.6), que pueden escribirse como un sistema de ecuaciones de primer orden en el haz tangente, con el procedimiento siguiente. Sea (U, φ) una carta de una vecindad de p en M , con $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$. Entonces el sistema (4.6) se puede escribir como

$$\frac{dx_k}{dt} = a_k, \quad \frac{da_k}{dt} = - \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k a_i a_j,$$

donde $k = 1, \dots, n$. Podemos aplicar el teorema 1.51 a este sistema en una vecindad de $(p, 0)$ en TM , de modo que la transformación Φ no es más que el flujo local asociado. El mismo teorema garantiza que Φ está definida en un conjunto abierto en TM , de modo que sin pérdida de generalidad podemos suponer que su dominio W' tiene la forma indicada en el enunciado de este teorema. \square

La transformación Φ se llama el *flujo geodésico* en torno de p .

Nuestro siguiente resultado dice que podemos modificar el intervalo de definición de una geodésica cambiando su velocidad.

Proposición 5.2. *Sean a un número positivo y γ una geodésica en M , definida en un intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$, con $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = v$. Entonces la curva α dada por $\alpha(t) = \gamma(at)$ es la única geodésica de M definida en $(-\epsilon/a, \epsilon/a)$ tal que*

$$\alpha(0) = p \quad \text{y} \quad \alpha'(0) = av.$$

Demostración. Las igualdades $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = av$ son consecuencia directa de la definición de α y de la regla de la cadena. En particular,

$$\frac{D\alpha'}{dt} = a \frac{D\gamma'}{\partial t} = 0,$$

lo cual muestra que α es una geodésica. \square

En adelante utilizaremos la notación $\gamma(t, p, v)$ para la geodésica que pasa por un punto p con vector velocidad v en el instante $t = 0$. Con esta notación, la proposición anterior dice que

$$\gamma(t, p, av) = \gamma(at, p, v).$$

Definición 5.3. Supongamos que $(p, v) \in TM$ es tal que la geodésica $\gamma(t, p, v)$ está definida para $t = 1$. La imagen de v bajo la *transformación exponencial* en p , denotada por $\exp_p(v)$, es el punto en M dado por

$$\exp_p(v) = \gamma(1, p, v).$$

Observemos que

$$\exp_p(v) = \gamma(1, p, v) = \gamma\left(\frac{\|v\|}{\|v\|}, p, v\right) = \gamma\left(\|v\|, p, \frac{v}{\|v\|}\right).$$

La última expresión denota una geodésica con velocidad unitaria, de modo que la longitud recorrida por dicha curva en el intervalo $[0, \|v\|]$ es precisamente $\|v\|$.

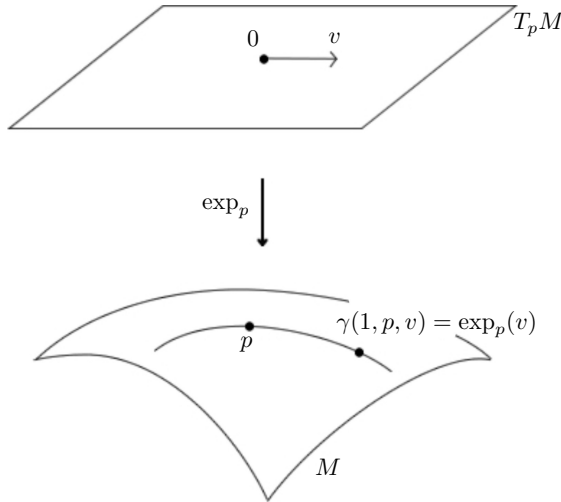


Figura 5.1: Definición de la transformación exponencial.

Teorema 5.4. Para cada $p \in M$ existe una vecindad W tal que para todo $q \in W$, la transformación exponencial \exp_q está definida y es invertible en una vecindad de $0 \in T_q S$.

DEMOSTRACIÓN. Dado $p \in M$, sean ϵ , δ y W los números y la vecindad de p en M dados por el teorema 5.1. Así, para cada $q \in W$ la geodésica $\gamma(t, q, u)$ está definida al menos para los vectores u tales que $\|u\| < \delta$. Por otro lado, si en la proposición 5.2 elegimos $a < \epsilon$, sabemos que la curva $\alpha(t) = \gamma(at, q, u)$ está definida para $t = 1$. Como $\gamma(at, q, u) = \gamma(t, q, au)$, tenemos que $\exp_q v = \gamma(t, q, v)$ está definida para $t = 1$, si $q \in W$ y $\|v\| < a\delta$. Además, \exp_q es diferenciable en una vecindad de $0 \in T_q S$, pues el flujo Φ dado en el teorema 5.1 lo es.

Para demostrar que cada transformación \exp_q es invertible, aplicamos el teorema de la función inversa. Formalmente, $(\exp_q)_{*0} : T_0(T_q S) \rightarrow T_q S$, aunque es claro que podemos identificar $T_0(T_q S)$ con $T_q S$. Bajo esta identificación, si $\eta \in T_q S$, entonces

$$\begin{aligned} (\exp_q)_{*0}(\eta) &= \left. \frac{d}{dt} \exp_q(t\eta) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \gamma(1, q, t\eta) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \gamma(t, q, \eta) \right|_{t=0} = \eta, \end{aligned}$$

lo cual muestra que $(\exp_q)_{*0}$ es la identidad. Usamos el teorema de la función inversa para concluir que \exp_q es invertible localmente. Sin embargo, la afirmación del teorema es un poco más fuerte, pues garantiza la existencia de toda una vecindad de $p \in M$ donde la exponencial es invertible. La demostración de este hecho depende nuevamente del teorema de la función inversa, esta vez aplicado a la transformación

$$\exp : W' \rightarrow M \times M, \quad \exp(q, \xi) = (q, \exp_q(\xi)),$$

donde W' es la vecindad dada en el teorema 5.1. □

La proposición anterior sugiere una definición.

Definición 5.5. Sea M una variedad riemanniana y $p \in M$. Entonces

1. M es *geodésicamente completa* en p si y sólo si \exp_p está definida para cada $v \in T_p M$.
2. M es *geodésicamente completa* si y sólo si es geodésicamente completa en p para todo $p \in M$.

Definición 5.6. Una vecindad W de $p \in M$ tal que $\exp_p : \exp_p^{-1}(W) \rightarrow W$ es un difeomorfismo se llamará una *vecindad normal* de p .

Con esta definición, podemos parafrasear la proposición 5.4 como sigue.

Proposición 5.7. *Para todo $p \in M$ existe un abierto W tal que es una vecindad normal de cada uno de sus puntos.*

La existencia de vecindades normales nos permite utilizar a la transformación exponencial como una parametrización en torno de un punto y trasladar a la variedad M algunos conceptos de \mathbb{R}^n .

Definición 5.8. Sea W una vecindad normal de $p \in M$. Entonces

1. Las *coordenadas normales* en W son las correspondientes a las coordenadas cartesianas en $\exp_p^{-1}(W)$.
2. Una *geodésica radial* que parte de p es la restricción $\gamma : [0, \epsilon) \rightarrow S$ de una geodésica que pasa por p .
3. Un *círculo geodésico* de radio r con centro en p (también llamado *círculo normal*) es la imagen bajo \exp_p de un círculo de radio r con centro en $0 \in T_pM$ contenido en W .
4. Una *bola geodésica* de radio r con centro en p (también llamada *bola normal*) es la imagen bajo \exp_p de una bola de radio r con centro en $0 \in T_pS$ contenida en W .

En la sección 5.2 usaremos el siguiente resultado para estudiar las propiedades minimizantes de las geodésicas. En este lema, $p \in M$, $v \in T_pM$ es un vector donde está definida $\exp_p v$ y $w \in T_v(T_pM)$; aquí usaremos la identificación natural de $T_v(T_pM)$ con T_pM .

Lema 5.9 (Gauss). *Con la notación anterior, se cumple*

$$\langle (\exp_p)_{*v}(v), (\exp_p)_{*v}(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Demostración. Escribimos $w = \lambda v + v^\perp$, donde $\langle v, v^\perp \rangle = 0$. Por la definición de \exp_p ,

$$\langle (\exp_p)_{*v}(v), (\exp_p)_{*v}(v) \rangle = \langle v, v \rangle,$$

de modo que por linealidad basta ver que se cumple la proposición para un vector de la forma $w = v^\perp \neq 0$. Sea $w(s)$ una curva en T_pM tal que $w(0) = v$, $w'(0) = v^\perp$ y $\|w(s)\|$ constante. Consideremos la transformación

$$f(t, s) = \exp_p tw(s), \quad \text{donde } t \in [0, 1] \text{ y } s \in (-\epsilon, \epsilon),$$

para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeña.

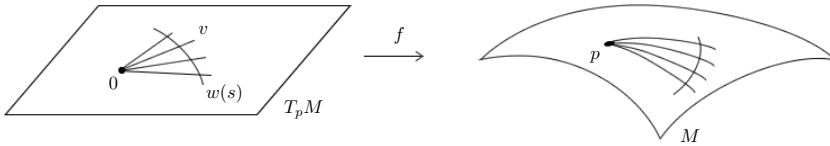


Figura 5.2: Interpretación geométrica de $f(t, s)$.

Observemos que

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle \Big|_{(1,0)} = \left\langle (\exp_p)_*v, (\exp_p)_*v(v^\perp) \right\rangle.$$

Primero demostraremos que $\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle$ no depende de t . Tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle = \left\langle \frac{D \partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{D \partial f}{\partial t} \right\rangle.$$

Por la definición de f , el primer término del lado derecho se anula, pues $f(t, s)$ describe una geodésica cuando s está fija. Por otro lado, es posible mostrar (¡ejercicio!) que

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{D \partial f}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{D \partial f}{\partial s} \right\rangle,$$

pero

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{D \partial f}{\partial s} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = 0,$$

donde usamos de nuevo el hecho de que $f(t, s)$ es una geodésica para s fija. Así, $\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle$ no depende de t ; pero

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left. \frac{\partial f}{\partial s} \right|_{(t,0)} = \lim_{t \rightarrow 0} (\exp_p)_{*tv} tv^\perp = 0,$$

lo cual muestra el resultado. □

5.2. Geodésicas y curvas minimizantes

Sean M una variedad y $p, q \in M$. Una *curva diferenciable por partes* que une a los puntos p y q es una función continua $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ tal que $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$ y existe una partición de $[a, b]$ de la forma

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$$

de tal manera que $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ es diferenciable de clase C^∞ . Denotaremos por $\ell(\alpha)$ la longitud de α desde $\alpha(a)$ hasta $\alpha(b)$. De hecho, deberíamos escribir $\ell_a^b(\alpha)$, pero preferimos no complicar la notación, pues el intervalo en cuestión será claro por el contexto.

Definición 5.10. Decimos que una curva $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ es *minimizante* si y sólo si para cada $t_1, t_2 \in I$, la longitud de α desde $\alpha(t_1)$ hasta $\alpha(t_2)$ es menor o igual que la longitud de cualquier otra curva que una $\alpha(t_1)$ con $\alpha(t_2)$.

En esta sección analizaremos la relación entre los conceptos de curva geodésica y curva minimizante. Primero mostraremos que, al menos localmente, las geodésicas son minimizantes.

Proposición 5.11. Sean M una variedad riemanniana, $p \in M$ y W una vecindad normal de p en M que contiene una bola geodésica B con centro en p . Sean $\gamma : [0, a] \rightarrow B$ una geodésica radial tal que $\gamma(0) = p$ y $\alpha : [0, a] \rightarrow M$ cualquier otra curva diferenciable por partes que una p con $\gamma(a)$. Entonces

$$\ell(\gamma) \leq \ell(\alpha).$$

Además, la igualdad vale si y sólo si α es una reparametrización de γ .

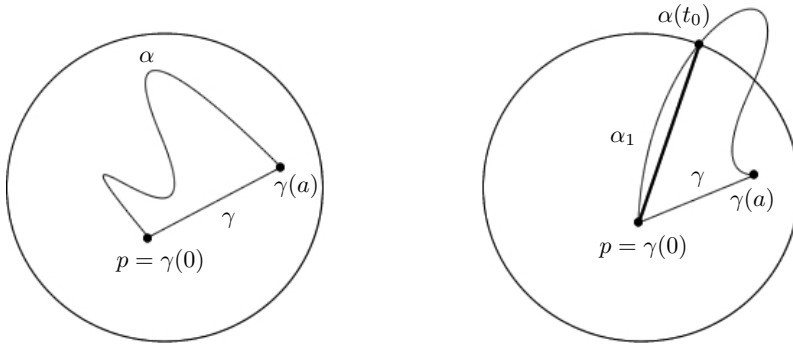


Figura 5.3: Demostración de la proposición 5.11.

Demostración. Supongamos primero que la imagen de α está contenida en la bola geodésica B y que $\alpha(t) \neq p$ para $t \neq 0$. Entonces $\alpha|_{(0,1]}$ se escribe de manera única como $\exp_p(r(t)v(t)) = f(r(t), t)$, donde $v(t)$ es una curva en T_pM con $\|v(t)\| = 1$ y $r : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$. Entonces, salvo por un número finito de puntos,

$$\alpha'(t) = \frac{\partial f}{\partial r} r'(t) + \frac{\partial f}{\partial t};$$

usando el lema de Gauss y $\|v(t)\| = 1$ tenemos que

$$\|\alpha'(t)\|^2 = |r'(t)|^2 + \left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|^2 \geq |r'(t)|^2.$$

Al integrar,

$$\int_{\epsilon}^1 \|\alpha'(t)\| dt \geq \int_{\epsilon}^1 |r'(t)| dt \geq \int_{\epsilon}^1 r'(t) dt = r(1) - r(\epsilon).$$

Al tomar el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$, tenemos que $\ell(\alpha) \geq r(1) = \ell(\gamma)$. Si $\ell(\alpha) = \ell(\gamma)$, entonces $\|\partial f / \partial t\| = 0$ (de modo que $v(t)$ es constante) y $r'(t)$ es positivo, por lo que α no es más que una reparametrización de γ .

Por otro lado, supongamos que la imagen de α sale de la bola B y que lo hace por primera vez en $\alpha(t_0)$. Si α_1 es el segmento de α que va de p a $\alpha(t_0)$, entonces

$$\ell(\alpha) > \ell(\alpha_1) \geq \ell(\gamma).$$

Esto concluye la prueba. \square

Ahora veremos que cualquier curva minimizante es necesariamente una geodésica.

Proposición 5.12. *Sean M una variedad riemanniana y $\alpha : [0, a] \rightarrow M$ una curva diferenciable por partes y parametrizada por longitud de arco. Si α es una curva minimizante, entonces α es una geodésica.*

Demostración. Supongamos primero que α es diferenciable en todo $[0, a]$. Mostraremos que para cada punto $p = \alpha(s_0)$, $s_0 \in (0, a)$, existe $\epsilon > 0$ tal que α es geodésica en $(s_0 - \epsilon, s_0 + \epsilon)$.

Sea W una vecindad normal de p y $q = \alpha(s) \in W$. Si γ es la geodésica radial que une p con q , entonces $\ell(\alpha) = \ell(\gamma)$ y por la proposición 5.11, α es una reparametrización de γ . Como α está parametrizada por longitud de arco, α es geodésica en (s_0, s) . Por continuidad, α es geodésica en $[s_0, s]$.

Ahora supongamos que existe una partición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = a$ de $[0, a]$ tal que α es diferenciable en cada subintervalo (t_{i-1}, t_i) . Mostraremos que α no tiene “picos” en los puntos t_i , $i = 1, \dots, k - 1$.

Sea W una vecindad de $p = \alpha(t_i)$ que es vecindad normal de cada uno de sus puntos y sea $\epsilon > 0$ tal que los puntos $q = \alpha(t_i - \epsilon)$ y $\tilde{q} = \alpha(t_i + \epsilon)$ estén en W . Sea γ la geodésica radial (minimizante) que une q con \tilde{q} . Entonces $\ell(\gamma) \leq \ell(\alpha)$ en $(t_i - \epsilon, t_i + \epsilon)$; pero por hipótesis se cumple la desigualdad $\ell(\alpha) \leq \ell(\gamma)$, de modo que la proposición 5.11 implica que α es una reparametrización de γ y entonces α es diferenciable en t_i . \square

5.3. Distancia y el teorema de Hopf-Rinow

Aprovecharemos el concepto de longitud de una curva para definir una distancia en una variedad M .

Definición 5.13. La *distancia intrínseca* entre dos puntos p, q de una variedad M es el ínfimo de las longitudes de las curvas diferenciables por partes

que unen p con q ; en símbolos,

$$d(p, q) = \inf\{ \ell(\alpha) \mid \alpha \text{ une } p \text{ con } q \}.$$

Lema 5.14. *La distancia intrínseca arriba definida es realmente una distancia; es decir, satisface las siguientes propiedades:*

1. Para cualesquiera $p, q \in M$, $d(p, q) = d(q, p)$.
2. Para cualesquiera $p, q \in M$, $d(p, q) \geq 0$. Además, $d(p, q) = 0$ si y sólo si $p = q$.
3. (Desigualdad del triángulo.) Para cualesquiera $p, q, r \in M$ se cumple que

$$d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r).$$

Demostración. Es claro que d satisface las dos primeras propiedades de la definición, por lo que basta demostrar la desigualdad del triángulo. Sean α_{pq} una curva que une p con q y α_{qr} una curva que une q con r . Denotamos por α_{pr} a la curva definida al recorrer primero α_{pq} y luego α_{qr} . Es claro que

$$d(p, r) \leq \ell(\alpha_{pr}) = \ell(\alpha_{pq}) + \ell(\alpha_{qr}),$$

de donde

$$d(p, r) - \ell(\alpha_{qr}) \leq \ell(\alpha_{pq}).$$

Como α_{pq} es una curva arbitraria que une p con q , esto implica que

$$d(p, r) - \ell(\alpha_{qr}) \leq d(p, q).$$

Análogamente, como α_{qr} es arbitraria, obtenemos que

$$d(p, r) - d(q, r) \leq d(p, q),$$

de donde se sigue la desigualdad del triángulo. □

Observación. Si una curva α une p con q y satisface $\ell(\alpha) = d(p, q)$, la proposición 5.12 implica que α es una geodésica.

Definición 5.15. Una variedad M es *completa* si lo es con respecto de la distancia intrínseca; es decir, si (M, d) es un espacio métrico completo.

El siguiente lema es el paso crucial de la demostración del teorema principal de esta sección.

Lema 5.16. *Sea M una variedad riemanniana. Si existe $p \in M$ tal que M es geodésicamente completa en p , entonces para todo $q \in M$ existe una geodésica γ que une p con q tal que $d(p, q) = \ell(\gamma)$.*

Demostración. Sea $B(p, \delta)$ una bola geodésica con centro en p contenida en una vecindad normal de p y supongamos que $q \notin B(p, \delta)$, pues de lo contrario basta elegir una geodésica radial. Si $S(p, \delta)$ denota la frontera de $B(p, \delta)$, entonces la función $f : S(p, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(s) = d(s, q)$ es continua y $S(p, \delta)$ es compacta, de modo que f alcanza su valor mínimo en algún punto $r \in S(p, \delta)$. Sea $\gamma(t)$ la geodésica con rapidez unitaria que pasa por r .

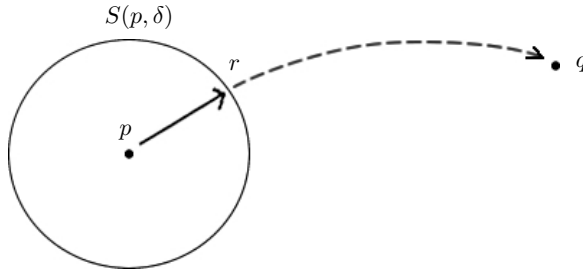


Figura 5.4: Elección de la dirección adecuada para hallar la geodésica que une p con q .

Probaremos que

$$d(p, q) = d(p, r) + d(r, q).$$

La desigualdad del triángulo garantiza que el lado izquierdo es menor o igual que el lado derecho. Para mostrar la otra desigualdad, observemos que si α es una curva que une p con q , ésta corta a $S(p, \delta)$ en algún punto que descompone a α en dos partes α_1 y α_2 . Tenemos entonces que

$$\ell(\alpha) = \ell(\alpha_1) + \ell(\alpha_2) \geq \delta + d(r, q) = d(p, r) + d(r, q).$$

Al considerar el ínfimo del lado izquierdo obtenemos la desigualdad requerida.

Afirmamos que γ es la geodésica minimizante que une p con q . Para mostrar esto, veremos que el conjunto

$$A = \{ t \in [0, d(p, q)] \mid d(\gamma(t), q) = d(p, q) - t \}$$

contiene al número $d(p, q)$, de modo que $\gamma(d(p, q)) = q$. Observemos que A es no vacío ($0 \in A$) y que por definición está acotado superiormente, de modo que $t_0 = \sup A$ existe. Como las funciones implicadas en la definición de A son continuas, A es cerrado y por tanto $t_0 \in A$. Supondremos que $t_0 < d(p, q)$ y llegaremos a una contradicción.

Sea $p' = \gamma(t_0)$. Como en el caso de p , sea $B(p', \delta')$ una bola geodésica con centro en p' contenida en una vecindad normal de p' . Si $S(p', \delta')$ denota a la frontera de $B(p', \delta')$, entonces la función $f : S(p', \delta') \rightarrow \mathbb{R}$, $f(s) = d(s, q)$, alcanza su mínimo en un punto $r' \in S(p', \delta')$. Sea σ la geodésica con rapidez unitaria que une $\gamma(t_0)$ con r' .

Con un razonamiento análogo al realizado para p ,

$$d(p', q) = d(p', r') + d(r', q) = \delta' + d(r', q).$$

Por otro lado, como $t_0 \in A$,

$$d(p', q) = d(p, q) - t_0.$$

De estas ecuaciones obtenemos que

$$d(p, q) - d(r', q) = \delta' + t_0.$$

Al aplicar la desigualdad del triángulo, obtenemos que

$$d(p, r') \geq \delta' + t_0.$$

Pero el lado derecho es precisamente la longitud de la curva $\gamma|_{[0, t_0]}$ unida a $\sigma|_{[0, \delta']}$. Así, esta curva minimiza la distancia entre p y r' , por lo que no puede quebrarse (proposición 5.12). Esto dice que podemos extender el dominio de γ a $[0, t_0 + \delta']$. Pero entonces $r' = \gamma(t_0 + \delta')$ y

$$d(\gamma(t_0 + \delta'), q) = d(r', q) = d(p, q) - d(p, r') = d(p, q) - (t_0 + \delta'),$$

de modo que $t_0 + \delta' \in A$, lo que contradice la elección de t_0 y concluye la demostración. \square

Teorema 5.17 (Hopf-Rinow). *Sea M una variedad conexa. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. (M, d) es un espacio métrico completo.
2. M es geodésicamente completa.
3. Existe p tal que M es geodésicamente completa en p .
4. (Condición de Heine-Borel) Todo conjunto cerrado y acotado en M es compacto.

Demostración. Supongamos que (M, d) es completo. Sea $\gamma : [0, a) \rightarrow M$ una geodésica. Queremos demostrar que γ se puede extender a a . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\|\gamma'\| = 1$. Si $\{t_i\}$ es una sucesión en $[0, a)$ tal que $t_i \rightarrow a$, entonces la sucesión $\{\gamma(t_i)\}$ es de Cauchy en (M, d) , pues

$$d(\gamma(t_i), \gamma(t_j)) \leq |t_i - t_j|$$

y $\{t_i\}$ es convergente. Como (M, d) es completo, $\{\gamma(t_i)\}$ converge a algún punto $p \in M$. Es claro que si $\{t'_i\}$ es otra sucesión en $[0, a)$ tal que $t'_i \rightarrow a$, $\{\gamma(t'_i)\}$ también converge a p , pues

$$d(\gamma(t_i), \gamma(t'_i)) \leq |t_i - t'_i|.$$

Esto nos dice que γ se puede extender como $\gamma(a) = p$.

La segunda implicación es clara. Supongamos ahora que M es geodésicamente completa en p y sea Λ un conjunto cerrado y acotado en M . Por el lema 5.16, sabemos que para cada $q \in \Lambda$ existe una geodésica minimizante γ_q que une p con q , tal que $\ell(\gamma_q) = d(p, q)$. Por otro lado, como Λ está acotado, existe $r \in M$ tal que $d(r, q) < \delta$ para algún número $\delta > 0$. La desigualdad del triángulo implica que

$$d(p, q) \leq d(p, r) + \delta = \delta'$$

para todo $q \in \Lambda$. Esto dice que Λ está contenido en una bola $B(p, \delta')$. Pero entonces

$$\Lambda \subset \exp_p(\overline{B(0, \delta')}),$$

donde $B(0, \delta')$ es la bola con centro en 0 y radio δ' en $T_p M$. Como $\overline{B(0, \delta')}$ es un conjunto compacto y \exp_p es continua, $K = \exp_p(\overline{B(0, \delta')})$ es un conjunto compacto. Como Λ es cerrado y $\Lambda \subset K$, Λ es compacto.

Finalmente, sea $\{p_i\}$ una sucesión de Cauchy en M . Entonces $\overline{\{p_i\}}$ es un conjunto cerrado y acotado, por tanto compacto. Esto implica que la sucesión debe tener una subsucesión convergente a un punto $p \in M$. Como la sucesión es de Cauchy, es fácil ver que toda la sucesión converge a p . Por tanto, (M, d) es completo. \square

5.4. Campos de Jacobi y puntos conjugados

Analizaremos ahora un tipo de campos vectoriales que nos dan información sobre la manera en que se distribuyen las geodésicas en una variedad, distribución que dependerá de la curvatura. Antes veremos algunos resultados auxiliares.

Proposición 5.18. *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ diferenciable, con $f = f(s, t)$ Sea V un campo vectorial definido en la imagen de f . Entonces*

$$\frac{D}{\partial s} \frac{DV}{\partial t} - \frac{D}{\partial t} \frac{DV}{\partial s} = R_{\frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t}} V$$

DEMOSTRACIÓN. Si (U, φ) es una carta, entonces podemos escribir

$$\varphi \circ f = (f_1, \dots, f_n), \quad V = \sum_j V_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

La expresión para la derivada covariante de V es

$$\frac{DV}{\partial t} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial V_j}{\partial t} + \sum_{i=1}^n V_i \omega_{ij} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Así,

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial s} \frac{DV}{\partial t} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial^2 V_k}{\partial s \partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V_i}{\partial s} \omega_{ik} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) + V_i \frac{\partial}{\partial s} \left(\omega_{ik} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) \right) \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial V_j}{\partial t} + \sum_{i=1}^n V_i \omega_{ij} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) \right) \omega_{jk} \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right) \frac{\partial}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

Al intercambiar los papeles de s y t y restar, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} V - \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} V &= \sum_{i,k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(\omega_{ik} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\omega_{ik} \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right) \right) \right) \\ &+ \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) \omega_{jk} \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right) - \omega_{ij} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) \omega_{jk} \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right) \Big) V_i \frac{\partial}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

Si $\omega = \sum_i a_i dx^i$, tenemos que

$$\omega \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) = \sum_i a_i \frac{\partial f_i}{\partial t},$$

de modo que

$$\frac{\partial}{\partial s} \omega \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x^j} \frac{\partial f_j}{\partial s} \frac{\partial f_i}{\partial t} + a_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial s \partial t}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial s} \omega \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \omega \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial a_i}{\partial x^j} - \frac{\partial a_j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial f_j}{\partial s} \frac{\partial f_i}{\partial t} = d\omega \left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right).$$

Así,

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} V - \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} V &= \sum_{i,k=1}^n \left(d\omega_{ik} - \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \wedge \omega_{jk} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) V_i \frac{\partial}{\partial x_k} \\ &= \sum_{i,k=1}^n \Omega_{ik} \left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) V_i \frac{\partial}{\partial x_k} = R_{\frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t}} V \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. \square

Corolario 5.19. Sean $p \in M$ y $f(t, s) = \exp_p(tu(s))$. El campo vectorial $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)$ definido a lo largo de $\gamma(t) = f(t, 0)$ satisface la ecuación de Jacobi

$$\frac{D^2 J}{dt^2}(t) + R_{J(t)\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0. \quad (5.1)$$

DEMOSTRACIÓN. Para s fija, la curva $t \mapsto f(t, s)$ es una geodésica, por lo que

$$0 = \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t} + R_{\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s} + R_{\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}} \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Evaluando en $s = 0$ obtenemos (5.1). \square

Definición 5.20. Un campo vectorial J definido a lo largo de una geodésica $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ es un *campo de Jacobi* si y sólo si satisface la ecuación (5.1).

Desde un punto de vista intuitivo, la siguiente proposición nos dice que podemos obtener un campo de Jacobi considerando una variación de γ por geodésicas.

Proposición 5.21. Sea J un campo de Jacobi, definido a lo largo de la geodésica $\gamma : [0, a] \rightarrow M$, con $J(0) = 0$. Entonces hay una curva $u : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow T_p M$, $p = \gamma(0)$ tal que si definimos $f(t, s) = \exp_p(tu(s))$, entonces

$$J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0).$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $v = \gamma'(0)$ y $u : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow T_p M$ tales que

$$u(0) = v \quad \text{y} \quad u'(0) = \frac{DJ}{dt}(0).$$

Si $f(t, s) = \exp_p(tu(s))$, entonces

$$Y(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0) = (\exp_p)_* t v (tu'(0))$$

es un campo de Jacobi con $Y(0) = 0$. Como

$$\frac{DY}{dt} = \frac{D}{dt}(t(\exp_p)_* t v u'(0)) = t \frac{D}{dt}(\exp_p)_* t p (u'(0)) + (\exp_p)_* t p (u'(0)),$$

al evaluar en 0 tenemos

$$\frac{DY}{dt}(0) = (\exp_p)_* 0 (u'(0)) = u'(0) = \frac{DJ}{dt}(0).$$

Por el teorema de existencia y unicidad 1.48, $J(t) = Y(t)$. \square

Definición 5.22. Sea $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ una geodésica. El punto $\gamma(T)$ ($0 < T \leq a$) es *conjugado* a $\gamma(0)$ a lo largo de γ si y sólo si existe un campo de Jacobi J no idénticamente nulo a lo largo de γ tal que $J(0) = 0 = J(T)$. El número máximo de tales campos linealmente independientes es la *multiplicidad* del punto conjugado $\gamma(T)$.

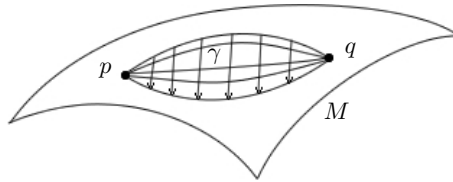


Figura 5.5: Los puntos p y q son conjugados a lo largo de γ .

Corolario 5.23. Sea $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ una geodésica. El punto $\gamma(T)$ es conjugado a $\gamma(0)$ a lo largo de γ si y sólo si $Tv = T\gamma'(0)$, es un punto crítico de \exp_p . Más aún, la multiplicidad del punto conjugado $\gamma(T)$ es igual a $\dim \ker(\exp_p)_*Tv$.

DEMOSTRACIÓN. Por la proposición 5.21, cualquier campo de Jacobi J a lo largo de γ con $J(0) = 0$ se escribe como

$$J(t) = (\exp_p)_*tv(tw), \quad w = \frac{DJ}{dt}(0).$$

Por el teorema de existencia y unicidad 1.48, sabemos que J no es nulo si y sólo si $w \neq 0$. Por lo tanto, $\gamma(T)$ es conjugado a $\gamma(0)$ si y sólo si existe $w \in T_pM \setminus \{0\}$ tal que

$$(\exp_p)_*Tv(Tw) = 0.$$

Usamos de nuevo el teorema 1.48 para obtener que los campos de Jacobi J_1, \dots, J_k con $J_i(0) = 0$ son linealmente independientes si y sólo si

$$\frac{DJ_1}{dt}(0), \dots, \frac{DJ_k}{dt}(0)$$

son linealmente independientes. □

5.5. La primera y segunda variaciones de la acción

El conjunto formado por las curvas diferenciables por partes que unen a p y q se llamará un *espacio de trayectorias* y se denotará por $\Omega(M; p, q)$.

Definición 5.24. El *espacio tangente* a $\Omega(M; p, q)$ en la trayectoria γ es el espacio vectorial que está formado por todos los campos vectoriales W a lo largo de γ , diferenciables por partes, para los cuales $W(0) = 0$ y $W(T) = 0$.

Definición 5.25. Considere una trayectoria $\gamma \in \Omega(M; p, q)$. Una *variación* de γ es una función continua $F : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Omega(M; p, q)$, $\varepsilon > 0$ tal que $F(0) = \gamma$ y para la cual existe una partición de $[0, T]$, con $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = T$, de tal manera que la función

$$f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, T] \rightarrow M$$

definida por $f(u, t) = F(u) \cdot t$ es C^∞ al restringirla a cada $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [t_{i-1}, t_i]$, con $i = 1, \dots, k$.

Observación.

1. Dado que cada $F(u)$ pertenece a $\Omega(M; p, q)$, se tiene que $f(u, 0) = p$ y $f(u, T) = q$ para todo $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.
2. Para referirnos a la variación usaremos f ó F indistintamente. En ocasiones, en vez de $(-\varepsilon, \varepsilon)$ se considera una vecindad U de \mathbb{R}^s con centro en 0; en ese caso, f se llama una *variación a s parámetros* de γ .
3. Si f es diferenciable simplemente diremos que la variación es diferenciable.

Para t fija, consideremos la curva diferenciable $f_t : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ dada por $f_t(u) = f(u, t)$. El vector velocidad de esta curva en $u = 0$ es

$$W(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(0, t).$$

El campo vectorial $W \in T_\gamma \Omega$ es el campo tangente a la variación f .

Observación. Dado cualquier campo W diferenciable por partes, a lo largo de γ la función $f(u, t) = \exp_{\gamma(t)}(uW(t))$ define una variación de γ cuyo campo tangente es $W(t)$. Consideremos el *funcional de acción* $E : \Omega(M; p, q) \rightarrow$

\mathbb{R} definida por

$$E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^T \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle dt. \quad (5.2)$$

Lema 5.26. Sean $p, q \in M$ y sea $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ una geodésica minimizante que une p con q . Para toda curva $c : [0, T] \rightarrow M$ que une p con q se tiene que

$$E(\gamma) \leq E(c)$$

y la igualdad vale si y sólo si c es una geodésica minimizante.

DEMOSTRACIÓN. Por la desigualdad de Schwarz,

$$l(c)^2 = \left(\int_0^T |c'| dt \right)^2 \leq T \int_0^T |c'|^2 dt = TE(c)$$

y la igualdad ocurre si y sólo si $|c'|$ es constante. Así

$$TE(\gamma) = l(\gamma)^2 \leq l(c)^2 \leq TE(c)$$

y $E(\gamma) = E(c)$ implica que $|c'|$ es constante y $l(\gamma) = l(c)$, lo que a su vez implica que c es una geodésica minimizante. \square

Teorema 5.27 (Fórmula de la primera variación). Sean F una variación de la curva $\gamma \in \Omega(M; p, q)$ y $W(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(0, t)$ su campo vectorial tangente. Entonces

$$(E \circ F)'(0) = - \int_0^T \left\langle \frac{D\gamma'}{dt}, W(t) \right\rangle dt - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \gamma'(t_i^+) - \gamma'(t_i^-), W(t_i) \rangle \quad (5.3)$$

donde

$$\gamma'(t_i^-) = \lim_{t \rightarrow t_i^-} \gamma'(t) \quad \text{y} \quad \gamma'(t_i^+) = \lim_{t \rightarrow t_i^+} \gamma'(t).$$

DEMOSTRACIÓN. Observemos que

$$E \circ F = \frac{1}{2} \int_0^T \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt,$$

de modo que

$$\begin{aligned} \frac{d(E \circ F)}{du} &= \int_0^T \left\langle \frac{D}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt = \int_0^T \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt \\ &= \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt - \int_0^T \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt \\ &= \sum_{i=1}^k \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} - \int_0^T \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt \end{aligned}$$

Evaluando en $u = 0$ obtenemos la fórmula (5.3). \square

Definición 5.28. Una trayectoria $\gamma \in \Omega(M; p, q)$ es *crítica* si y sólo si $(E \circ F)'(0) = 0$ para toda variación F de γ .

Corolario 5.29. Una trayectoria $\gamma \in \Omega(M; p, q)$ es crítica si y sólo si es una geodésica de M .

DEMOSTRACIÓN. Supóngase que γ es una trayectoria crítica. Por la ecuación (5.3), tenemos que

$$- \int_0^T \left\langle \frac{D\gamma'}{dt}, W(t) \right\rangle dt + \sum_{i=1}^k \left\langle \gamma', W \right\rangle \Big|_{t_{i-1}}^{t_i} = 0 \quad (5.4)$$

para toda variación. Sea $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable por partes, con $g(t) > 0$ si $t \neq t_i$, y $g(t_i) = 0$ con $i = 0, 1, \dots, k-1$. Si

$$W(t) = g(t) \frac{D\gamma'}{dt},$$

entonces

$$\sum_{i=1}^k \left\langle \gamma', W \right\rangle \Big|_{t_{i-1}}^{t_i} = 0.$$

Así, por (5.4),

$$\int_0^T g(t) \left| \frac{D\gamma'}{dt} \right|^2 dt = 0.$$

de donde $D\gamma'(t)/dt = 0$ para toda $t \leq t_i$ y así cada $\gamma|(t_i, t_{i+1})$ es una geodésica. Sólo falta ver lo que ocurre en los puntos t_i . Consideremos otro campo variacional $W^*(t)$ con $W^*(0) = 0 = W^*(1)$. Si $t_i \neq 0, 1$, definimos $W^*(t_i) = \gamma'(t_i^-) - \gamma'(t_i^+)$. Usaremos el hecho de que $\gamma|(t_i, t_{i+1})$ es una geodésica. Así,

$$0 = \sum_{i=1}^k |\gamma'(t_i^-) - \gamma'(t_i^+)|^2$$

de donde $\gamma \in C^1$ en cada t_i y por lo tanto γ es una geodésica.

Ahora supongamos que $\gamma \in \Omega(M; p, q)$ es una geodésica. Entonces

$$\int_0^T \left\langle \frac{D\gamma'}{dt}, W(t) \right\rangle dt = 0 \quad \text{para todo } W \in T_\gamma\Omega.$$

Como γ es diferenciable,

$$\sum_{i=1}^k \langle \gamma', W \rangle \Big|_{t_{i-1}}^{t_i} = 0.$$

Al sumar estas dos condiciones obtenemos que $(E \circ F)'(0) = 0$. □

Teorema 5.30 (Fórmula de la segunda variación). *Sea F una variación de la geodésica γ con campo tangente W . Entonces*

$$\begin{aligned} (E \circ F)''(0) = & - \int_0^T \left\langle W(t), \frac{D^2W}{dt} + R_{W\gamma'(t)}\gamma'(t) \right\rangle dt \\ & - \sum_{i=1}^{k-1} \left\langle W(t_i), \frac{DW}{dt}(t_i^+) - \frac{DW}{dt}(t_i^-) \right\rangle. \end{aligned} \quad (5.5)$$

DEMOSTRACIÓN. Observemos primero que

$$\begin{aligned} (E \circ F)'' = & \sum_{i=1}^k \left\langle \frac{D}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} + \sum_{i=1}^k \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{D}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} \\ & - \int_0^T \left\langle \frac{D}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt - \int_0^T \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt. \end{aligned}$$

Al evaluar en $u = 0$, el primer término se anula, y ya que γ es una geodésica, también lo hace el tercero. Como en el corolario 5.19,

$$\frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t}(0, t) = \frac{D^2 W}{dt^2} + R_{W\gamma'(t)} \gamma'(t).$$

Evaluando el segundo término de la expresión para $(E \circ F)''$ en $u = 0$,

$$\sum_{i=1}^k \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{D}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} = - \sum_{i=1}^{k-1} \left\langle W(t_i), \frac{DW}{dt}(t_i^+) - \frac{DW}{dt}(t_i^-) \right\rangle.$$

Al reunir estos hechos obtenemos (5.5). □

Teorema 5.31 (Bonnet-Myers). *Sea M una variedad riemanniana completa de dimensión n tal que para todo $p \in M$, $v \in T_p M$, $|v| = 1$ se tiene que*

$$\text{Ric}(v, v) \geq \frac{(n-1)}{r^2} > 0.$$

Entonces M es compacta y el diámetro de M es menor o igual a πr .

DEMOSTRACIÓN. Sean $p, q \in M$ y $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ una geodésica minimizante que une p con q . Basta demostrar que $l(\gamma) \leq \pi r$.

Supongamos por el contrario que $l(\gamma) > \pi r$. Sean

$$e_1(t), \dots, e_{n-1}(t), e_n(t) = \frac{\gamma'(t)}{l(\gamma)}$$

campos paralelos ortonormales a lo largo de γ . Definamos

$$W_j(t) = \text{sen}(\pi t) e_j(t), \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Sean F_j una variación con campo tangente W_j y $E_j = E \circ F_j$. Usando que e_j es paralelo en (5.5) tenemos

$$\begin{aligned} E_j''(0) &= - \int_0^1 \left\langle W_j, \frac{D^2 W_j}{dt} + R_{W_j \gamma'(t)} \gamma'(t) \right\rangle dt \\ &= \int_0^1 \text{sen}^2(\pi t) (\pi^2 - l^2 K(e_n(t), e_j(t))) dt \end{aligned}$$

donde $K(e_n(t), e_j(t))$ es la curvatura seccional del plano generado por $e_n(t)$ y $e_j(t)$. Sumando

$$\sum_{i=1}^{n-1} E_j''(0) = \int_0^1 \text{sen}^2(\pi t) ((n-1)\pi^2 - l^2 \text{Ric}(e_n(t), e_n(t))) dt.$$

Como $\text{Ric}(e_n(t), e_n(t)) \geq \frac{(n-1)}{r^2}$ y $l > \pi r$,

$$\sum_{i=1}^{n-1} E_j''(0) < 0$$

y por lo tanto existe j tal que $E_j''(0) < 0$, lo que contradice el hecho de que γ es minimizante. \square

Corolario 5.32. Sea $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ una variedad riemanniana completa con la propiedad de que $\text{Ric}(v, v) \geq \delta > 0$ para todo $p \in M$, $v \in T_p M$. Entonces el cubriente universal de M es compacto. En particular, el grupo fundamental $\pi_1(M)$ es finito.

DEMOSTRACIÓN. Si $P : \tilde{M} \rightarrow M$ es el recubrimiento universal de M , tenemos que \tilde{M} con la métrica $P^* \langle \cdot, \cdot \rangle$ es una variedad completa con $\text{Ric}(\tilde{M}) \geq \delta > 0$. Por el teorema 5.31, \tilde{M} es compacta. Así, las fibras de P son finitas. Pero la cardinalidad de $\pi_1(M)$ coincide con la de las fibras. \square

5.6. Ejercicios

1. Muestre que en un sistema de coordenadas normales con centro en $p \in S$, todos los símbolos de Christoffel se anulan en p .
2. Sea M una variedad paralelizable (definición 6) y $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{X}(M)$ tales que en cada punto $p \in M$ los vectores $X_1(p), \dots, X_n(p)$ son una base de $T_p M$. Se dice que X_1, \dots, X_n es una *paralelización* de TM . La *conexión de la paralelización* ∇ se define mediante la expresión

$$\nabla_X \left(\sum_i f_i X_i \right) = \sum_i X(f_i) X_i.$$

- a) Muestre que los símbolos de Christoffel de ∇ con respecto de X_i son nulos.
- b) Sea $M = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, el conjunto de números complejos diferentes de cero, que puede identificarse con $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Si (x, y) son las coordenadas cartesianas en M , muestre que los campos X y Y dados por $X(x, y) = (x, y)$ y $Y(x, y) = (-y, x)$ son una paralelización de TM . Si ∇ es la conexión de esta paralelización, muestre que la transformación exponencial en $p = (1, 0)$ coincide con la función exponencial compleja al identificar T_pM con \mathbb{C} ; es decir,

$$\exp_p \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) = e^{u+iv}.$$

3. Un difeomorfismo $F : S_1 \rightarrow S_2$ es una *transformación geodésica* si y sólo si para cada curva γ geodésica en S_1 se tiene que la curva imagen $F \circ \gamma$ es una geodésica en S_2 . Muestre que si F es una transformación geodésica conforme, entonces existe λ constante tal que para todo $p \in S_1$, $\xi, \eta \in T_pS_1$ se tiene que

$$\langle \xi, \eta \rangle_p = \lambda \langle dF_p(\xi), dF_p(\eta) \rangle_{F(p)}.$$

4. Considere el semiplano superior $\mathbb{H}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ dotado con la métrica

$$(g_{ij}(x, y)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix}$$

Demuestre que la longitud de los vectores es arbitrariamente grande cuando están cerca de la frontera de \mathbb{H}_+^2 . Demuestre que este espacio no es completo probando el hecho de que la longitud del segmento de recta vertical $(0, t)$, con $0 < t \leq 1$, tiende a 2 si $t \rightarrow 0$.

5. Un *rayo geodésico* en S desde un punto $p \in S$ es una geodésica $\gamma : [0, \infty) \rightarrow S$ tal que $\gamma(0) = p$ con la propiedad de que para todo $t \in [0, \infty)$, la restricción de γ a $[0, t]$ es la geodésica minimizante entre p y $\gamma(t)$. Muestre que si S es una superficie completa conexa y no compacta, entonces para cada $p \in S$ existe un rayo desde p .
6. Sea M una variedad conexa y $f, g : M \rightarrow N$ isometrías. Muestre que si existe $p \in M$ tal que $f(p) = g(p)$ y $f_{*p} = g_{*p}$, entonces $f = g$.

7. Una subvariedad $N \subset M$ es *totalmente geodésica* si y sólo si siempre que γ sea una geodésica de M tal que $\gamma(0) \in N$ y $\gamma'(0) \in T_{\gamma(0)}N$, entonces γ está totalmente contenida en N .

a) Sea \mathcal{I} un conjunto de isometrías de M . Muestre que el conjunto de puntos fijos de \mathcal{I} dado por

$$F(\mathcal{I}) = \{p \in M \mid f(p) = p \text{ para todo } f \in \mathcal{I}\}$$

es una subvariedad totalmente geodésica de M .

b) Muestre que si N es una subvariedad totalmente geodésica de M y X es un campo de Killing en M , entonces la proyección de X sobre cada espacio tangente a N es un campo de Killing en N .

Bibliografía

- [1] M. Aguilar, S. Gitler y C. Prieto, *Topología algebraica, un enfoque homotópico*. Mc Graw-Hill y UNAM, 1998.
- [2] R. L. Bishop y S. I. Goldberg, *Tensor analysis on manifolds*. Dover, 1980.
- [3] R. Bott y L. W. Tu, *Differential forms in algebraic topology*. Springer, 1982.
- [4] M. P. do Carmo, *Geometria riemanniana*, Projeto Euclides IMPA, 1988.
- [5] V. Guillemin y A. Pollack, *Topología diferencial*, Sociedad Matemática Mexicana, 2003.
- [6] M. Hirsch, S. Smale y R. Devaney, *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*, Academic Press, 2003.
- [7] S. Kobayashi y K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, Interscience, 1963.
- [8] S. Lang, *Differential and riemannian manifolds*, Springer, 1995.
- [9] B. O'Neill, *Semi-riemannian geometry*, Academic Press, 1983.
- [10] P. Petersen, *Riemannian geometry*, Springer, 1997.
- [11] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry*, Volúmenes I-II. Publish or Perish, 1999.
- [12] F. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Springer, 1983.

Índice alfabético

- Acción
 - de un grupo de Lie, 44
 - transitiva, 44
- Álgebra exterior, 80
- Alternante, 79
- Anulador, 105
- Atlas
 - de haz vectorial, 52
 - de variedad con frontera, 28
 - diferenciable, 2
- Base
 - de un haz, 53
- Bianchi
 - primera identidad, 131
 - segunda identidad, 131
- Bola
 - geodésica, 147
 - normal, 147
- Cadena, 94
- Campo
 - de Jacobi, 158
 - de Killing, 140
 - diferenciable, 32
 - paralelo, 121
 - vectorial, 30, 62
- Campos
 - f -relacionados, 43
- Carta
 - de coordenadas, 1
 - de haz vectorial, 51
 - de variedad con frontera, 28
- Cartas
 - C^k compatibles, 2
 - compatibles, 28
 - de haz compatibles, 52
- Christoffel, símbolos de, 117, 122
- Círculo
 - geodésico, 147
 - normal, 147
- Cociclo, 57
- Coefficientes
 - de un tensor, 71
- Coefficientes de una métrica, 72
- Compatibilidad
 - de una conexión con una métrica, 124
 - de una derivada covariante con una conexión, 118
- Condición de Heine-Borel, 155
- Conexión, 116
 - conjugada, 137
 - de Levi-Civita, 125
 - de una paralelización, 165

- en un haz vectorial, 121
- Contracción, 104
 - de un tensor, 75
- Coordenadas
 - normales, 147
- Corchete de Lie, 37
- Cubierta
 - de una variedad, 22
- Cubo singular, 93
- Curva
 - diferenciable por partes, 149
 - minimizante, 149
- Curvas equivalentes, 6
- Curvatura
 - de Ricci, 135
 - escalar, 135
- Derivada
 - de Lie, 36, 77
 - direccional, 7
 - exterior, 85, 88
- Derivada covariante, 117
 - de una sección, 122, 123
- Difeomorfismo, 15
 - local, 15
- Diferencial
 - de una transformación, 13
- Dimensión
 - de una variedad, 1
 - finita, 64
- Distancia intrínseca, 151
- Divergencia, 134
- Ecuaciones de estructura, 131
- Encaje, 21
- Equivalencia de haces, 62
- Espacio
 - localmente homeomorfo a \mathbb{R}^n , 1
 - normal, 47
 - paracompacto, 23
 - tangente, 7, 9
 - a un espacio de trayectorias, 160
 - total de un haz, 53
- Espacio proyectivo
 - complejo, 45
 - real, 41, 53
- Estructura
 - de haz vectorial, 52
 - diferenciable, 2
- Fibra, 53
- Flujo
 - geodésico, 144
 - local, 32
- Forma
 - 1-forma, 62
 - cerrada, 90
 - de volumen, 108
 - de volumen de \mathbb{R}^n , 108
 - exacta, 90
 - k -forma, 83
- Frontera
 - de \mathbb{H}^n , 28
 - de una variedad, 29
- Funcional de acción, 161
- Geodésica, 120
 - en un punto, 120
 - radial, 147
- Gradiente, 134
- Grupo
 - de cohomología de de Rham, 90
 - con soporte compacto, 90

- de isotropía, 44
 - de Lie, 44
 - ortogonal, 20
 - propiaamente discontinuo, 110
- Haz
- cotangente, 59
 - de subespacios, 48
 - de tipo finito, 63
 - dual, 59
 - inducido, 57
 - lineal canónico, 53
 - normal, 47
 - orientable, 60
 - producto, 56
 - tangente, 12
 - trivial, 49, 53, 62
 - universal, 55
 - vectorial, 52
- Hessiano, 134
- Homomorfismo de haces, 62
- Identidades de Green
- primera, 140
 - segunda, 140
- Inmersión, 21
- Integral de una forma, 97
- Interior de una variedad, 29
- Isometría, 72
- Isomorfismo de haces, 50, 62
- Jacobi
- ecuación de, 157
 - identidad de, 37
- Laplaciano, 134
- Lema
- de Cartan, 106
- de Gauss, 147
- Marco, 54
- móvil, 121
- Métrica
- en un haz, 72
 - riemanniana, 72
- Multiplicidad de un punto conjugado, 159
- Órbita, 44
- Orientación
- de un espacio vectorial, 59
 - natural, 59
- Par fibrado, 61
- Paralelización, 165
- Parametrización, 1
- Partición de la unidad, 23
- Producto
- cuña, 80
 - tensorial
 - de espacios, 69
 - de haces, 71
 - de transformaciones, 69
- Proyección de un haz, 53
- Punto
- conjugado, 159
 - crítico, 43
 - frontera, 29
- Rango de una transformación, 17
- Rayo geodésico, 166
- Refinamiento, 22
- Sección
- a lo largo de una curva, 123
 - de un haz, 62

- paralela, 123
- Semiplano superior, 110
- Simetrización
 - de una conexión, 137
- Soporte de una función, 23
- Subhaz, 56
- Subvariedad, 19
- Suma de Whitney, 57
- Tensor, 69
 - alternante, 79
 - de curvatura, 132
 - de Einstein, 135
 - de Kronecker, 75
 - de tipo (k, l) , 70, 73
 - descomponible, 105
- Teorema
 - de Bonnet-Myers, 164
 - de existencia y unicidad, 32, 33
 - de Hopf-Rinow, 155
 - de la caja de flujo, 35
 - de la función inversa, 15, 16
 - de particiones de la unidad, 24
 - de Stokes, 98
 - de Whitney, 27
 - del rango, 17
- Torsión, 137
- Transformación
 - de cambio de coordenadas, 2
 - de Gauss, 64
 - diferenciable, 4, 27
 - exponencial, 145
 - fibrada, 61
 - geodésica, 166
 - multilineal, 69
 - propia, 91
- Transformaciones homotópicas, 91
- Transporte paralelo, 124
- Trayectoria
 - crítica, 162
- Trivialización local, 53
- Valor regular, 19
- Variación, 160
 - a s parámetros, 160
 - primera, 161
 - segunda, 163
- Variedad, 3
 - completa, 152
 - con frontera, 29
 - de Einstein, 141
 - de Stiefel, 54
 - diferenciable, 3
 - grassmanniana, 53
 - orientable, 60
 - paralelizable, 62
 - riemanniana, 72
- Variedades isométricas, 72
- Vecindad
 - normal, 147
- Vector tangente, 9
 - a una curva, 6, 33