

# Instrumentos y Matemáticas

Historia, fundamentos y perspectivas educativas

Manuel Falconi Magaña  
Verónica Hoyos Aguilar  
*(Compiladores)*



**UN**  
UNIVERSIDAD  
PEDAGÓGICA  
NACIONAL

Los puntos que definen las ideas directrices de este libro son los siguientes:

- I. Construcción de máquinas y juegos o instrumentos matemáticos.
- II. Investigación histórica de la relación instrumento-matemática en la evolución del álgebra, el cálculo y la geometría.
- III. Diseño y uso de máquinas y juegos o de instrumentos matemáticos en la enseñanza del álgebra, el cálculo y la geometría.

Desde estas fuentes, los distintos autores atienden la necesidad de desarrollar una propuesta de enseñanza de la matemática que propicie un pensamiento creativo, indispensable para el desarrollo de cualquier esfera profesional, y el despliegue de capacidades de abstracción y razonamiento lógico. Si bien una línea de experimentación e investigación docente al respecto se basa en el uso de las nuevas tecnologías, también es conveniente buscar otros ámbitos de experiencia vinculados con aspectos importantes de la cultura que tienen una carga semántica fuerte. En esta dirección, en el libro se revisan algunas propuestas que se basan en la utilización de “máquinas matemáticas” que a lo largo de la historia se crearon para trazar curvas y para resolver problemas geométricos. El uso de estas máquinas junto con su simulación a través de la computadora, le brindan al estudiante la oportunidad de percibir a la matemática como un instrumento que trasciende y modela el mundo físico.



# Instrumentos y matemáticas

Historia, fundamentos y perspectivas históricas

MANUEL FALCONI MAGAÑA

VERÓNICA HOYOS AGUILAR

Compiladores



Instrumentos y matemáticas

1a. edición, 2005

Diseño de portada: Laura Uribe

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias, Coordinación de Servicios Editoriales

ISBN: 970-32-2510-1

# Historia de los instrumentos matemáticos. Arte, astronomía y geometría

---

**César Guevara B.**

Facultad de Ciencias, UNAM.

jcgb@hp.fciencias.unam.mx

## 1.1 Resumen

El desarrollo de las matemáticas no se podría entender plenamente si se estudian únicamente sus elementos teóricos y se ignora el uso de los instrumentos y máquinas, que la han apuntalado en la validación y generación de sus múltiples resultados. Los instrumentos matemáticos se han usado en diferentes ámbitos de las ciencias matemáticas e incluso han sido aprovechados para transmitir en forma más gráfica algunos mensajes religiosos.

En las páginas que siguen se hará el análisis de algunos ejemplos en la larga travesía por la que han pasado los instrumentos matemáticos en la historia. Como el objetivo es mostrar la diversidad de sus usos, entonces los ejemplos seleccionados apuntan en direcciones diferentes, y es la razón por la que es posible encontrar algunos saltos temáticos entre las secciones del capítulo.

Se mostrará el contraste entre usarlos como elementos centrales en las pinturas religiosas para transmitir mensajes bíblicos y, por otro lado, el rechazo hacia ellos por parte de influyentes filósofos griegos. Se abordarán las técnicas heurísticas empleadas por Arquímedes en *El Método*, y la ‘sintaxis matemática’ de Ptolomeo se expondrá desde sus características instrumentales; se verá el trazado de cónicas de Descartes y el esbozo de óvalos de los artistas en el renacimiento; finalmente, se mostrarán algunas técnicas instrumentales empleadas en la navegación.

## 1.2 La representación del orden

Una de las preocupaciones fundamentales del hombre desde la antigüedad fue la de tratar de entender y controlar su entorno. La permanente incertidumbre que le provocaba no comprender al universo en sus grandes dimen-

siones, así como en su mínima pequeñez —siéndole ambas inaccesibles— lo impulsaron a tratar de estructurar, numerar, medir y observar en forma sistemática. Para enfrentar tal incertidumbre creó instrumentos que lo auxiliaron para entender las reglas de la naturaleza. Los instrumentos que diseñó a lo largo de la historia son variados y van desde los utilizados en agrimensura, astronomía, geometría, hasta los de uso artístico, entre otros. Todos fueron utilizados para el trabajo en las disciplinas teóricas o directamente para la solución de problemas prácticos.

Antes de abordar los diversos aspectos de los instrumentos matemáticos cabe señalar que su uso no siempre ha sido el mencionado anteriormente. La confianza que el hombre ha depositado en el empleo de los instrumentos para extraer datos de su entorno trascendió incluso a su mundo físico inmediato. Esto es, el apego a sus creencias religiosas así como el uso de instrumentos se dio paralelamente en el tiempo. Como ejemplo de ello empezaremos por abordar la relación entre instrumentos e iconografía cristiana.

En los textos bíblicos se encuentran pasajes que hacen ver a Dios como el creador del mundo a partir de elementos amorfos, donde él dio orden al caos existente del universo, para lo cual necesitó poder medir, pesar y contar.

La idea de un Dios creador del universo a través de un acto de medición se encuentra con frecuencia en las culturas del mediterráneo.

Platón, en el *Timeo*, describe al ‘demiurgo’ como una fuerza creadora que a partir del caos dio vida a lo racional por medio de un acto de medición.



Fig. 1

En el *Libro de la sabiduría*<sup>1</sup> se describe el poder creador de Dios de la siguiente forma: “tu mano poderosa sólo tenía que elegir: como tú creaste el mundo a partir de una materia informe” [*Sabiduría* 11, 17]. En el libro de Isaías, cuando se toca la consolación de Israel y que Dios acudirá con su poder, se encuentra la siguiente pregunta: “¿Quién midió las aguas en el hueco de su mano, con su palmo tomó la medida de los cielos, con un tercio de medida calculó el polvo de la tierra, pesó los montes con la báscula y las colinas con la balanza?” [Isaías 40, 12]. Y en *Proverbios*, cuando la sabiduría se elogia a sí misma y a la vez se personifican los atributos de la sabiduría de Dios, se encuentra lo siguiente: “[...] Cuando estableció los cielos. Allí estaba yo [la sabiduría]; cuando trazó un círculo sobre la faz del abismo, cuando arriba afirmó los cielos [...] cuando señaló los cimientos de la tierra, yo estaba entonces junto a él como arquitecto”<sup>2</sup> [*Proverbios* 8, 27].

Los anteriores pasajes bíblicos fueron razón suficiente para que algunos artistas desde la edad media crearan pinturas e incluso ilustraran la Biblia representando a Dios —en su capacidad de ordenar y medir— utilizando un compás o una balanza con los que daría forma al universo a partir de un caos primigenio<sup>3</sup> (Figura 1). Se recurrió a lo expresivo y alegórico de las imágenes con el afán de llegar a un público más profano y hacerlo entender los pasajes bíblicos de mayor profundidad. Así, en los pasajes anteriores la geometría está simbolizada por un lado en un sentido individual y por otro en uno universal, en tanto que el instrumento transmite el orden y la armonía al mundo.

Paralelamente a la creación de los textos que dieron origen al Antiguo Testamento se desarrollaban otras actividades de carácter científico y técnico que ocuparon la atención de los filósofos y académicos del siglo IV a. C.. Este camino y el cambio de rumbo que experimentó la matemática de una cultura a otra es lo que se expondrá en adelante. El análisis se presentará desde la perspectiva de diversos instrumentos de uso matemático.

---

<sup>1</sup> Libro apócrifo del *Antiguo Testamento*.

<sup>2</sup> Cabe señalar que en el libro de Job [26, 10] se encuentra lo siguiente: “Ha trazado un círculo sobre la superficie de las aguas, en el límite de la luz y las tinieblas”.

<sup>3</sup> Como ejemplos de obras con las características mencionadas tenemos: la denominada *Biblia Moralisée*; la ilustración de Guyart des Moulins en la obra *Historia Scholastica* (1411-12); la pintura de William Blake *Frontispicio para Europa, una profecía* (1793). Aquí Blake se inspiró para su obra en un pasaje del *Paraíso Perdido* de Millon. Aunque sólo se mencionan algunas representaciones, se tiene un registro de aproximadamente 40 obras con estas características.

---

### 1.3 El mundo griego

Desde el siglo VI a. C. el centro de producción matemática se desplazó de Mesopotamia y Egipto al mundo griego. Los griegos jónicos se abrieron paso entre la arraigada mitología para adaptar una cosmovisión basada en un pensamiento racional y empírico, y así dar lugar a un modo de pensamiento más especulativo, del que carecieron las civilizaciones de Oriente Próximo. Así, la matemática ocupó el lugar de una ciencia racional y universal, y la geometría en particular el del centro del conocimiento.

Que se considere que la matemática prehelénica tenía un carácter meramente instrumental y técnico, útil como un medio para resolver de forma empírica problemas concretos, y que por otro lado a la matemática griega se le vea como la verdaderamente racional, no es una apreciación del todo justa. Si bien es cierto que la matemática griega ya no estaba apuntalada sobre las bases del empirismo de los mercaderes de Egipto y Mesopotamia, y que se reconoce que transitó de lo empírico a lo teórico a través de implantar los elementos formales de prueba, demostración, axioma, proposición, entre otros<sup>4</sup>; tampoco se puede descartar la posibilidad de que sí se auxiliaron de instrumentos para el desarrollo de las ideas matemáticas, principalmente en una fase previa a la presentación de los resultados finales (es decir, de la enunciación del teorema y de su demostración).

Más aún, los problemas políticos y militares del mundo greco-romano provocaron la destrucción de las bibliotecas que contenían los escritos originales, consumándose así la pérdida de las posibles fuentes donde se pudieron encontrar las técnicas de investigación empleadas.

Las fuentes de la matemática griega que se consideran de mayor importancia provienen de códices bizantinos escritos entre 500 y 1500 años después que fueron escritos los originales griegos o sus traducciones árabes y latinas. Para el siglo XVIII se podía disponer de obras de Euclides, Apolonio, Arquímedes, Ptolomeo, Diofanto, Teodosio, Nicómaco, Menelao, entre otros.

---

<sup>4</sup> A estas características se puede agregar también las de un sector de los científicos griegos que llevaron a la matemática a ser una disciplina totalmente teórica, donde la investigación de los teoremas se hacía de una forma inmaterial y abstracta, es decir, sin instrumentos, ni mediciones materiales, y se realizaba sólo mediante la intuición de ideas y del proceso lógico-matemático. Como ejemplo de ello se tiene a Proclo [*A commentary*, 52] y su comentario sobre Tales: “Tales, de su viaje por Egipto fue el primero que trajo a Grecia esta teoría [la geometría]; y él mismo encontró muchas cosas y descubrió a los que después de él vinieron, los principios de otras muchas, apuntando en algunos casos a lo más universal, en otros casos a lo más intuitivo”.

---



Las obras mencionadas son tesoros y memorias de la ciencia, dan muestra de lo refinado y detallado que fue la exposición de los temas, pero a la vez dan muy poca información sobre las fuentes y los métodos que usaron los autores para llegar a tales descubrimientos.<sup>5</sup> Y a pesar de que sabemos del rechazo que existió entre los filósofos griegos por el uso de instrumentos, no es adecuado descartar que el uso de ellos sí formó parte de la metodología para estimular el razonamiento creativo.

De manera documentada sabemos que Platón —siendo uno de los hombres de mayor presencia en la cultura griega— asignó a la matemática la cualidad de poder ejercer influencia sobre todo el saber humano, y además tener un lugar fundamental en el desarrollo de las ideas. Así, la geometría quedó vinculada con el modelo teórico de la matemática pura, rechazando de forma elitista la aplicación práctica así como el estudio de las dimensiones geométricas de la realidad física.

Como uno de los fines del estudio de las matemáticas —para Platón— era el de la formación y desarrollo de la inteligencia para la mejor comprensión de los estudios filosóficos<sup>6</sup>, entonces es posible que su influencia fuera uno de los factores para que el trabajo instrumental en la geometría se restringiera sólo al uso de la regla y el compás.

Plutarco, en sus *Vidas paralelas (Vida de Marcelo)* (1980, 252), comenta la indignación de Platón ante el uso de los instrumentos en la geometría:

Platón se indispuso e indignó con ellos [Arquitas de Tarento y Eudoxo de Nidos] porque degradaban y echaban a perder lo más excelente de la geometría al trasladarla de lo incorpóreo e intelectual a lo sensible, para emplearla en los cuerpos que son objeto de oficios toscos y manuales.

Posteriormente, Plutarco comenta en el mismo pasaje que así fue como decayó la mecánica al separarse de la geometría y quedar desdeñada por los filósofos para permanecer relegada sólo al servicio del arte militar. Aunado a lo anterior, Aristóteles consideraba que la física sería el estudio del movimiento, pero sólo de aquél que fuera una consecuencia de las fuerzas de la

---

<sup>5</sup> Cabe señalar que los métodos usados para proponer resultados científicos en ocasiones pueden ser un tanto azarosos o casuales, y desde la perspectiva del rigor matemático se podrían considerar como informales. Para casos como éstos, es frecuente que se opte por presentar el resultado y su demostración, pero no el método, ya que podría dar lugar a críticas.

<sup>6</sup> Platón se interesaba por la preparación de los futuros hombres de estado. Él planteó formas en que se podía estimular el razonamiento y generar hombres más preparados para la discusión, la oratoria o la gramática.

naturaleza, de modo que las cosas movidas de manera artificial caerían fuera del ámbito de la física. En la *Física* [Libro VIII 255a 15-25] Aristóteles expone que el movimiento siempre tendrá una causa que se podrá distinguir.

Las distinciones anteriores [de las causas del movimiento] se pueden hacer también en el caso de las cosas movientes: algunas de ellas pueden producir movimiento contra naturaleza (la palanca, por ejemplo, no es naturalmente capaz de mover lo pesado).

En la cita se encuentra que para Aristóteles el uso de los instrumentos daba lugar a movimientos antinaturales, los cuales no consideraba que formarían parte de lo que estudiaba la física.

Con influencias tan poderosas como las de Platón y Aristóteles, entonces no era común que se difundiera el uso de los métodos instrumentales para la creación de resultados matemáticos o físicos.

Pero a pesar de los obstáculos y del papel secundario que tenían las técnicas instrumentales, éstas se pudieron abrir paso en forma natural debido al auge de las grandes construcciones y a la necesidad de crear grandes máquinas para usos prácticos. Para finales del siglo IV a. C. ya eran conocidas cinco máquinas: la cuña, el tornillo, el cabestrante, la polea y la palanca<sup>7</sup>.

En las dos secciones que siguen se ejemplifica cómo fue el uso de algunos métodos y técnicas instrumentales. Arquímedes y Ptolomeo, autores de *El método* y el *Almagesto* respectivamente, serán la muestra.

## 1.4 Arquímedes

En las épocas de Platón y de Aristóteles el uso práctico de las técnicas instrumentales desarrolladas por los ingenieros alejandrinos tuvo poca ingerencia en las principales áreas de la vida griega. Después de la muerte de Alejandro Magno la producción comercial se elevó significativamente y las actividades artesanales y comerciales crecieron en importancia en la vida política y social. Por estas razones, el trabajo de las artes prácticas se revaloró y desde el siglo II algunos hombres de la élite cultural miraron hacia las discipli-

---

<sup>7</sup> No es casualidad que una obra titulada *Mecánica*, atribuida erróneamente a Aristóteles, se ocupara de presentar una teoría unificadora sobre estos instrumentos.

---

nas técnicas. Y en este tenor aparecieron personajes como Arquímedes, convencidos del lugar que se debería de dar al uso matemático de las máquinas. El trabajo de Arquímedes es amplio, sus principales obras fueron impresas y traducidas al latín por primera vez entre 1503 y 1588<sup>8</sup>. Estas obras lograron ejercer inmediatamente una importante influencia sobre el pensamiento científico de esa época y de los siglos que le sucedieron.<sup>9</sup>

En lo general el trabajo de Arquímedes se apejó al estándar geométrico de la escuela euclidiana, y se adhirió al tipo de exposición basada en fijar con antelación las hipótesis que se querían postular, previo a la demostración rigurosa. Pero también hay certeza en que no hubo un Arquímedes metodológico y sintético, como fue el caso de Euclides.

A pesar de que los trabajos de Arquímedes tuvieron que enfrentar el prejuicio platónico, en ellos no se descartó ningún procedimiento técnico emanado de la mecánica o de la geometría del mundo real. Libre de compromisos filosóficos aprovechó lo que otros despreciaron: lo infinitesimal, lo mecánico, lo instrumental, así como todo lo que le presentó su entorno real y que lo consideraba como un potencial elemento para su investigación; en esta dirección se tiene que aprovechó los casos de lo irregular, lo tangible y todo lo que pudiera ser construible. Cabe señalar que su adhesión a lo anterior no lo separó en la presentación de sus resultados, del espíritu del rigor euclidiano, como se aprecia en sus obras.

De lo anterior se pueden distinguir tres vertientes en la metodología que empleó Arquímedes para desarrollar su trabajo: la inicial, donde se intuye algún resultado basado en las leyes geométricas; una intermedia, de factibilidad del resultado comprobado a través de instrumentos; y finalmente, la demostración empleando —en algunos casos— el método de exhaustión que proporcionaba la demostración formal de lo que se auguraba en la fase previa —es decir, la de invención.

Pero en sus trabajos sólo se encontraba la exposición de la última etapa, es decir, el enunciado y la demostración, quedando oculto el proceso creativo que daba lugar al enunciado (se presentará ejemplo en pag. 16). Como dijo John Wallis en 1676, “al parecer Arquímedes ocultó adrede las huellas de su investigación como si hubiera sepultado para la posteridad el secreto de su método de investigación”.

---

<sup>8</sup> Existió una fuerte tradición de corte arquimediano durante la Edad Media. Esta se facilitó mediante la circulación de manuscritos que contenían obras o fragmentos de textos de Arquímedes (Clagett, 1964).

<sup>9</sup> Koyrè [*Estudios de historia*, 44] afirma que “son la reanudación y asimilación de la obra de Arquímedes las que sirvieron de base a la revolución científica del siglo XVII”.

Si el método de exhaustión —dado por Eudoxo— que empleaba Arquímedes lo obligaba a conocer previamente el resultado de lo que se quería demostrar, entonces carecía de valor heurístico, esto es, dicho método no era apto para poder crear, sino sólo para demostrar aquellos resultados de los que ya se tenía conocimiento previo. Entonces ¿cuál era el método *a priori* que empleó para descubrir los resultados?

Para casos sencillos Arquímedes pudo llegar a los resultados intuitivamente por vía inductiva ¿pero cómo pudo intuir que la superficie de una esfera es cuatro veces un círculo máximo? o ¿que el área de la primera vuelta de la espiral es un tercio del primer círculo? o ¿que el área de un segmento parabólico es cuatro tercios del área del triángulo inscrito con la misma base y altura sobre el eje? o ¿cómo encuentra el centro de gravedad de un segmento de paraboloides?

Desgraciadamente Wallis no pudo conocer el método de investigación que usó Arquímedes (1988) y que nos dejó en una obra titulada *El método relativo a los teoremas mecánicos* (conocida como *El Método*) en la que mediante procedimientos mecánicos no rigurosos —él lo reconoce— dedujo los sorprendentes resultados matemáticos que después demostraba formalmente. Tomando como base un esquema diferente a los métodos alejandrinos, llevó a cabo una excelsa conjunción de mecánica y geometría donde ponía al descubierto cuáles eran los métodos que utilizaba en sus invenciones matemáticas.

*El Método* inicia con la carta de Arquímedes a Eratóstenes donde le reconoce su excelente dominio en materia de filosofía y su aprecio por las cuestiones matemáticas. Por estas cualidades Arquímedes consideró que era adecuado confiarle por escrito su método gracias al cual le sería posible abordar la investigación de ciertas cuestiones matemáticas por medio de la mecánica. Arquímedes le confiesa a Eratóstenes que algunos de sus teoremas primero los concibió a través de métodos mecánicos y, posteriormente, les suministró una demostración geométrica. Es importante señalar que estaba plenamente consciente de que la investigación restringida sólo a lo instrumental no tendría las cualidades de una demostración matemática, y en la carta de introducción a *El Método* Arquímedes escribió: “yo mismo, algunas de las cosas que descubrí primero por la vía mecánica las demostré luego geométricamente, ya que la investigación hecha por este método no implica una verdadera demostración”. Pero Arquímedes hace patente a Eratóstenes que si bien es cierto que con los instrumentos mecánicos no se llega a una demostración, sí serían un estímulo a la creatividad científica, y le señaló lo siguiente: “como que es más fácil construir la demostración después de haber

---

adquirido por ese método cierto conocimiento de los problemas, que buscarla sin la menor idea al respecto”.

Como ejemplo del uso de los medios mecánicos para proponer teoremas de geometría enseguida se presenta la cuarta proposición de *El método*, que dice lo siguiente:

(Volumen de un segmento de paraboloides)

*Todo segmento de un conoide [paraboloides ABG] rectángulo cortado por un plano perpendicular al eje es una vez y media el cono que tiene la misma base y el mismo eje que el [paraboloides] segmento (véase Fig. 3).*

Pero también se tiene la proposición 21 de su obra *Sobre conoides y esferoides*, donde no usa métodos instrumentales, y escribe lo siguiente:

*El segmento de conoide parabólico producido por un plano perpendicular al eje equivale a tres veces la mitad del cono de la misma base y del mismo eje (véase Fig. 2).*

En el libro *Sobre conoides y esferoides* Arquímedes apoya su demostración en considerar un volumen X igual a  $3/2$  el volumen del cono ABG y enseguida, para demostrarlo por contradicción, señala que si X no es igual al volumen  $\Gamma$  del paraboloides, entonces X es mayor al volumen del paraboloides o menor.

Supone primero que  $\Gamma > X$ , y por un método que resurre a cilindros inscritos y circunscritos (Figura 2), que usará junto con el método de exhaustión, llega a que el paraboloides  $\Gamma$  no puede ser mayor que X. Usando un razonamiento análogo demuestra que  $\Gamma$  no puede ser menor que X. Por tanto sólo queda que  $\Gamma = X$ .

Aquí es importante señalar que Arquímedes parte del hecho de suponer que tomará un volumen X igual a  $3/2$  del volumen del cono ABG, y después construye una justificación de que la relación entre X y  $3/2$  el volumen del cono ABG es de igualdad. Pero como ya se mencionó antes ¿cómo se imaginó que lo más conveniente era tomar  $3/2$  del volumen del cono? La respuesta

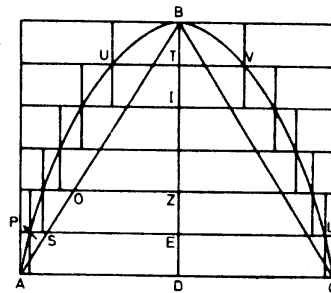


Fig. 2

se encuentra en la proposición cuatro —arriba mencionada— de *El Método*, donde establece que la relación de volúmenes es igual a 3/2.

Arquímedes propone lo siguiente:

Sea el paraboloides BAG (Figura 3) con eje AD, y prolongúese DA hasta T de tal forma que DA = AT, y considérese DT como una palanca con punto medio en A.

Ahora, como las rectas  $\Xi\Sigma$  y BD son dos ordenadas de la parábola, entonces:

$$\frac{DA}{A\Sigma} = \frac{(BD)^2}{(\Xi\Sigma)^2}$$

pero como DA = AT, entonces  $\frac{TA}{A\Sigma} = \frac{(M\Sigma)^2}{(\Sigma\Xi)^2}$

Por otra parte  $\frac{(M\Sigma)^2}{(\Sigma\Xi)^2}$  es igual a la razón del área del círculo de diámetro MN y el área del círculo de diámetro  $\Xi O$ , es decir:

$$\frac{(M\Sigma)^2}{(\Sigma\Xi)^2} = \frac{\text{Área de círculo de diámetro MN}}{\text{Área de círculo de diámetro } \Xi O}$$

Por lo tanto  $\frac{TA}{A\Sigma} = \frac{\text{Área de círculo de diámetro MN}}{\text{Área de círculo de diámetro } \Xi O}$

Después Arquímedes nos propone que el área del círculo de diámetro MN se equilibre con el área del círculo de diámetro  $\Xi O$ , teniendo como punto de equilibrio el punto A de la palanca T $\Sigma$ . Lo hace considerando que el círculo de diámetro  $\Xi O$  se traslada al punto T, el cual será su centro de gravedad (el centro de gravedad del círculo de diámetro MN es  $\Sigma$ ).

Posteriormente Arquímedes enunciaba que del mismo modo se podía demostrar que si se trazaba en el rectángulo EZGB cualquier otra recta paralela a BG, entonces el área del círculo generado del cilindro se equilibraría respecto del punto A con el círculo generado por el paraboloides trasladado a T (de modo que sea su centro de gravedad).

Ahora, llenando el cilindro y el segmento del paraboloides con círculos concéntricos proponía que se podían equilibrar respecto de A, esto es, el cilindro en K y el paraboloides con su centro de gravedad en T.

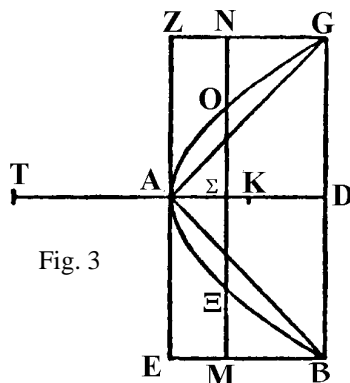


Fig. 3

Por lo tanto como  $TA = 2AK$ ,  
 entonces cilindro = 2 paraboloides;  
 pero cilindro = 3 veces el cono (resultado conocido),  
 entonces 2 paraboloides = 3 conos;  
 finalmente paraboloide =  $3/2$  cono

En la construcción anterior de *El Método* se ve cómo el uso instrumental de la palanca junto con el equilibrio de los círculos generaba la esperada relación de  $3/2$ . Y aunque el instrumento no tenía realidad física ni generaba una demostración para el problema, sí era un vehículo que estimularía el razonamiento y la inventiva. Con esos antecedentes, en *Sobre conoides y esferoides* ya podía presentar la demostración matemática, la que sí cumpliría con las exigencias de la validación matemática.

## 1.4 Ptolomeo el instrumentalista

La contribución de los griegos en el empleo de procesos instrumentales no se limitó a lo geométrico, también dirigieron su atención a la interpretación de los fenómenos observados en el universo. Tales observaciones se generaban en el espíritu de un modelo mecanicista, que atendería a una geometría plana y/o esférica, así como a reglas de movimiento regular. La suma de estas cualidades generó mecanismos útiles para visualizar los movimientos astrales<sup>10</sup>. La presente sección se ocupará de modelos de carácter instrumental, que potencialmente podrían ser máquinas para imitar el desarrollo de algunos fenómenos en el universo.

Uno de los objetivos de la ciencia es que podamos explicar los fenómenos o justificar las apariencias de lo que vemos, y lo hacemos a través de construir teorías que supongan una descripción correcta de los aspectos observables del mundo cercano. Para los griegos era de particular importancia la capacidad que se podía llegar a tener para predecir lo que sería observable en un futuro, aunque en el momento de la predicción no se tuviera ni una sola señal empírica de ello. La mecanización griega requería de un lenguaje técnico extraído de la geometría; para esto los astrónomos griegos crearon todo un

---

<sup>10</sup> Para la recolección de datos los astrónomos desde épocas remotas contaron con instrumentos rudimentarios para la medición y localización de objetos en el cosmos, y en siglos más recientes ya tuvieron instrumentos de observación más sofisticados, tales como las diferentes modalidades de sextantes, cuadrantes, astrolabios, telescopios, etc.

elenco de conceptos que se ocupaban de los objetos intangibles. Este proyecto fue guiado por las características mismas de los objetos observados tanto en su forma como en su movimiento. Un ejemplo de ello se puede apreciar desde la Tierra: el universo se ‘ve’ como una esfera y los cuerpos que en él hay pueden reducirse —para su estudio— a meros puntos geométricos en esa esfera, o a curvas cerradas para el caso de sus trayectorias.

Lo que resultaba controvertido era definir si la ciencia debía también aspirar a la verdad intrínseca sobre aquello que no es observable, con la única finalidad de comprender al mundo; o se debería hacer sólo teorías sobre lo que sí vemos, ya que desde esta perspectiva las teorías no son descripciones del mundo invisible sino que son como una especie de instrumentos empleados para validar las predicciones sobre el mundo observable. Además, cuando los modelos atienden más a las características geométrico-mecánicas —no a las físicas— y no son capaces de proporcionar una curva que represente a la trayectoria del planeta, entonces lo que tenemos es un razonamiento cuyo único compromiso era el tratar de materializar o simplemente corroborar lo que los datos experimentales sí permitían ver; pero esto último es lo mismo que usar un instrumento que pase por un conjunto de puntos, aunque la curva que los una no tenga sentido dentro del modelo —real— propuesto.

Sobre la base de que no se puede dar significado a lo que no se puede ver, un astrónomo griego de corte instrumentalista no daría lugar a un modelo que pudiera describir objetos no observables desde la Tierra —recordemos que una teoría instrumentalista va a salvar las apariencias—. Así, tenemos que el instrumento —o el modelo— le va a auxiliar en algo que ya conoce —aunque sea en lo visual— o que se intuye que existe.

En esa búsqueda por justificar las apariencias, los astrónomos afrontaron el problema de determinar esas trayectorias que seguían los puntos luminosos o su posición en la esfera celeste, fundamentalmente para establecer patrones temporales de las trayectorias, lo que era necesario para diversas actividades de la vida comercial, militar, filosófica o científica. Esas características —de trayectoria y posición— de los objetos en el cosmos permitieron las primeras geometrificaciones, condición considerada como necesaria y fundamental para el desarrollo de la astronomía de predicción.

Pero las primeras geometrificaciones presentaban ciertos riesgos: el principal era dar demasiada factibilidad a un modelo geométrico creado para interpretar algo que sí es real. Es decir, que una construcción geométrica —que pretendiera representar al universo— se prestara a ser considerada como una recreación definitiva de cómo se estructuraba el universo en realidad. Y por otro lado considerar a sus elementos geométricos —de ese modelo definitivo—

---



como leyes generales que gobernarán al mundo. Aunado a estas propiedades dicha geometrización se podría tomar como un modelo cosmológico, que para el caso de un aristotélico quedaba dentro del dominio de la física.

Así, por lo anterior podríamos distinguir dos formas de abordar el trabajo astronómico: a) la astronomía matemática, puramente computacional, que mediante paradigmas geométricos intenta resolver los problemas de posiciones locales<sup>11</sup> y de predicciones correctas que le plantean los movimientos del Sol, la Luna y los planetas; b) la astronomía física, que estima que esta disciplina se debe ocupar de elaborar cosmologías que describan el mundo tal y como de hecho es. Estas dos maneras de hacer astronomía serían simplemente la manifestación de dos programas de investigación distintos: el programa astronómico de Platón dio origen a la primera, mientras que el programa aristotélico produjo la segunda.

Ambas formas de entender la actividad del astrónomo —supuestamente irreconciliables— habrían dado origen en Grecia a dos actitudes opuestas, a dos concepciones filosóficas distintas, acerca del status cognoscitivo de las teorías científicas. Por lo tanto se puede decir que dicha cuestión se reduce a si una teoría es o no un mero aparato conceptual que nos permite organizar nuestra experiencia y efectuar predicciones.

Recapitulando: el sistema instrumentalista se apega a una astronomía matemática que por su misma composición se halla en posibilidades de evolucionar en lo conceptual y estructural, es decir, no se corre el riesgo, como se señaló antes, de tener que dar demasiada factibilidad a una representación. Entonces, el justificar las apariencias de un conjunto de datos reales (y no necesariamente tomados correctamente) a través de una teoría instrumentalista lleva inevitablemente a recurrir a lo que se consideraría como la indeterminación de una teoría. Esto es, no importa el grado de exactitud de la evidencia, sabemos que hay en principio innumerables teorías, incompatibles entre sí pero todas compatibles con esas evidencias. Posiblemente una de esas teorías pueda ser verdadera<sup>12</sup>.

Ahora, si a un modelo por sus cualidades se le reconoce en lo instrumental, entonces se tiene que asumir que de él no se pueden concluir ni verdades ni falsedades categóricas; de él sólo se podrán obtener conclusiones mejores o peores, más o menos útiles para el fin con el que fue creado.

---

<sup>11</sup> Y no trayectorias orbitales completas.

<sup>12</sup> Por ejemplo, si queremos reproducir un óvalo o una elipse, entonces es posible que no exista un solo instrumento o técnica para hacerlo. Tenemos también el caso de la astronomía ptolemaica y sus múltiples posibilidades desarrolladas durante más de mil años.

Los modelos instrumentalistas tienen más grados de libertad para llegar a sus objetivos pues no tienen que comprometerse con la existencia de las entidades postuladas por sus teorías. Una teoría puede utilizar todo tipo de artilugios sin que en ningún momento se les tenga que atribuir realidad física, en el sentido en que sí se le tiene que atribuir a cualquier objeto tangible que nos rodea o a la trayectoria seguida por un planeta, pero no así a los epiciclos o a los círculos deferentes propuestos para los planetas.

Y desde este mismo punto de vista de un discurso instrumentalista se puede plantear la posibilidad de que exista una ‘inducción pesimista’, en la que casi todas las teorías con un cierto número de años pueden ser asumidas como obsoletas en cuanto a la exactitud de sus predicciones de lo observable o medible. Por ejemplo, desde el punto de vista de la física contemporánea, Kepler se equivocó al afirmar que los planetas se mueven en órbitas rigurosamente elípticas. Y si todas las teorías son consideradas como incorrectas, entonces la única deducción razonable es que todas, o casi todas, las teorías actuales serán consideradas erróneas de aquí a unas décadas. De esta manera se sigue que de una teoría instrumental se puede llegar a generar un proceso acumulativo en el alcance y precisión de sus predicciones observables. Así, cada vez se puede lograr un mejor grado de aproximación en la forma en que se justifican las apariencias de algún fenómeno, que a fin de cuentas pareciera ser el cometido final.

De esta forma, las teorías instrumentalistas al igual que una máquina, se pueden adaptar (o actualizar) según las necesidades que se le presentan a través del tiempo, y estas adecuaciones pueden ser tanto de precisión como de incremento de datos. Esto lleva, como consecuencia, a que una teoría desplace a otra, como sucede con las máquinas.

Los que piensan de forma contraria al instrumentalismo atribuyen realidad a las entidades postuladas por la teoría; para ellos éstas no son meros instrumentos de cálculo que permiten efectuar predicciones más o menos acertadas, sino que pretenden explicar a partir de los datos obtenidos del modelo, cómo es exactamente el mundo.

En adelante se presenta como ejemplo de instrumentalismo el trabajo de Ptolomeo en el *Almagesto* y, posteriormente, el cambio de enfoque que presenta en *Hipótesis de los planetas*.

La propuesta ptolemaica en el *Almagesto* dista mucho de ser metodológicamente perfecta, ya que violó algunos supuestos cosmológicos arraigados

---

entre los griegos<sup>13</sup>. Por una parte, se va a distanciar de la opinión general al introducir epiciclos y excéntricas para los planetas<sup>14</sup>, lo que le llevó inevitablemente a romper con el principio cosmológico del movimiento planetario concéntrico alrededor de la Tierra; por otra parte, chocará con la interpretación estricta del principio de orden y uniformidad de los cielos, ya que introducirá modelos e hipótesis diferentes para distintos planetas (Mercurio tendrá una excéntrica móvil como la Luna, el Sol no tiene ecuante, los planetas sí, etc), como si obedecieran distintas leyes<sup>15</sup>; pero, sobre todo, va a utilizar el ecuante sin justificarlo ni física, ni matemáticamente.<sup>16</sup>

Aquí queda de manifiesto cómo el modelo se puede considerar un instrumento al que se le puede quitar y poner según convenga, sin tener un compromiso de inmutabilidad. Se tiene que recordar que el sistema planteado

---

<sup>13</sup> Entre los supuestos y asunciones físicas más arraigados en la ciencia griega se pueden mencionar la esfericidad del cielo y los planetas, la posición geocéntrica e inmóvil de la tierra, así como su tamaño y distancia en comparación con las estrellas fijas. A los anteriores supuestos se les puede agregar otro que podemos considerar como una definición, y que se refiere a que hay dos tipos primarios de movimientos celestes: uno diario de rotación y otro de traslación. Entre los supuestos iniciales no aparece ninguna referencia a movimientos circulares o uniformes. La razón es que Ptolomeo no los considera un supuesto, sino algo más fundamental a medio camino, entre un requisito formal y un principio metodológico que no necesita defensa ni prueba.

<sup>14</sup> Ya lo había hecho con el Sol y la Luna, pero en ambos casos tenía el respaldo de Hiparco y además eran cuerpos especiales que poseían cualidades adicionales a las de los planetas.

<sup>15</sup> Copérnico, en su *De Revolutionibus* (1987, 9), critica esta desarticulación del sistema ptolemaico. La siguiente cita es parte de la dedicatoria al Papa Pablo III: “Tampoco pudieron hallar o calcular [...] la forma del mundo y la simetría exacta de sus partes, sino que les sucedió como si alguien tomase de diversos lugares manos, pies, cabeza y otros miembros auténticamente óptimos pero no representativos de un solo cuerpo, no correspondiéndose entre sí de modo que con ellos se compondría más un monstruo que un hombre”.

<sup>16</sup> Él mismo prevé estas objeciones, porque inmediatamente después del *excursus* metodológico anterior les sale al paso, aunque sin citarlas. Así, afirma que a veces puede ser necesario usar algo que vaya contra la argumentación general (por razones de claridad, simplicidad, etc), pero mantiene que eso no invalida la cuestión si lo que se usa no da lugar a diferencias apreciables en los resultados; igualmente, continúa, a veces puede ser imprescindible suponer que no en todos sitios se da el mismo modo de movimiento o inclinación de los círculos, pero, puesto que las apariencias de los astros cambian, es lícito cambiar el modo de las hipótesis de los círculos, especialmente si se mantienen los movimientos circulares en todos los casos (ya no habla, sin embargo, de los uniformes); por último, concluye en clara referencia al ecuante, que en ciertas ocasiones se puede estar forzado a presuponer sin justificación ni fundamento inmediato en las 'apariencias', una aprehensión o una conjetura alcanzada por ensayo y error, pero mantiene que, si las cosas supuestas sin prueba casan con las apariencias, entonces no pueden ser gratuitas aunque sean difíciles de explicar [*Almagesto* IX, 2].

en el *Almagesto* no proporcionaba las trayectorias de los astros, lo que sí pretendía era dar cuenta de los datos de las tablas de observaciones. Por estas razones el sistema lo podían modificar en su estructura cada vez que algún científico de respeto lo considerara necesario.

Ptolomeo fue un ejemplo en el que convergen las dos corrientes: el instrumentalismo y el realismo. Por un lado el Ptolomeo cosmólogo aristotélico, y por otro el Ptolomeo astrónomo geocéntrico. Así, tenemos a dos pensadores distintos unidos en la misma persona. El Ptolomeo cosmólogo repetía al pie de la letra las visiones del mundo de la antigüedad al discutir su filosofía del universo. Con todo, el Ptolomeo astrónomo niega que la explicación plena de las perturbaciones planetarias esté dentro de las posibilidades humanas. Así, se tiene que la explicación astronómica es virtualmente inconcebible para Ptolomeo. Entonces, desde el punto de vista del *Almagesto*, tenemos a uno de los máximos exponentes de un instrumentalista que no atribuía materialidad ni a las esferas celestes ni a los epiciclos; lo importante para él era ofrecer un modelo matemáticamente exacto, esto es, que permitiera efectuar buenas predicciones sin que le importaran las causas de los movimientos o que su modelo fuera físicamente verdadero. Pero desde la visión de *Las hipótesis de los planetas* se puede atribuir a Ptolomeo, de forma inequívoca, la elaboración del denominado sistema ptolemaico<sup>17</sup>. *Las hipótesis* fueron el elemento de juicio vital acerca de la pretendida polémica entre instrumentalistas y realistas en la antigüedad, y en la que supuestamente Ptolomeo pertenecía al grupo de los primeros.

## 1.6 Del cono al plano

En las dos secciones que siguen se abordará el tema de los instrumentos desde diversos puntos de vista: a) la creación de instrumentos vinculados con la generación de cónicas, así como los intentos y errores de Descartes por trasladar curvas del cono al plano; b) por otro lado, se verá por qué los artistas prefieren usar óvalos en lugar de cónicas.

Como se mencionó anteriormente, el hombre de ciencia siempre ha tratado de imitar lo que ve o lo que intuye que puede existir, esto es, siempre tratará de reproducir los patrones matemáticos de la naturaleza o de materializar

---

<sup>17</sup> En esta obra sí tiene el objetivo de presentar los modelos explícitos de cómo es que los planetas describen sus trayectorias.

los objetos matemáticos que él mismo crea<sup>18</sup>. En este caso no se tratarán de justificar las apariencias como sucedió con los astrónomos o los físicos. Aquí no se requiere de una explicación física y, en ocasiones, ni matemática de la trayectoria de la curva; lo que se necesita es un instrumento que trace la curva según las propiedades cinemáticas y dinámicas que le corresponden, y que además lo pudiera hacer repetidas veces obteniendo siempre la misma precisión en el trazo.

Si fuera necesario iniciar cronológicamente la mención de los instrumentos matemáticos<sup>19</sup>, inevitablemente tendríamos que hacerlo iniciando con la regla y el compás de la geometría de Euclides. Como se sabe, la geometría griega se cimentó en la invariabilidad, homogeneidad, eternidad<sup>20</sup> y finitud del círculo, así como en la infinitud de la recta. De este modo, los criterios de existencia de los objetos geométricos estaban supeditados a su constructibilidad utilizando, exclusivamente regla y compás; por tal razón diversos problemas por todos conocidos (los llamados 'clásicos') no pudieron ser resueltos en esa época (ver capítulo 2 de este libro). Cabe mencionar que el hecho de que la existencia de los objetos matemáticos dependiera de su potencial constructibilidad sólo con regla y compás no implicaba que se tuviera que llegar al acto mismo, es decir, se contemplaba que el uso mental de la regla y compás diera el sustento necesario para los resultados teóricos. La sintaxis euclidiana ya exhibía en las demostraciones el uso intrínseco de los instrumentos; éstos se pueden apreciar cuando se recurre a traslaciones, duplicaciones o rotaciones de ángulos y segmentos, entre otros.

Por otra parte, en la geometría plana, esférica o cónica se tuvo la existencia de modelos teóricos que pudieron ser considerados como instrumentales<sup>21</sup>. Esto es, los modelos teóricos de la geometría se encontraban en capacidad de transformarse para poderse adaptar al significado y funcionamiento de las leyes que gobiernan los objetos que ellos mismos generan. Así, es más fácil superar los obstáculos de la tradición cultural que no aceptaba el uso de

---

<sup>18</sup> Por objetos matemáticos entiéndase a las curvas geométricas que representan mediante una convención que liga elementos matemáticos y forma de representación gráfica, una relación matemática en cada uno de sus puntos y que los conocemos como 'lugares geométricos'.

<sup>19</sup> Como instrumentos matemáticos me referiré sólo a los de trazo o cálculo, mas no a los de contabilidad como pueden ser el caso de tablillas, barras de calendarios, cuentas de barro, ábacos etc.

<sup>20</sup> Para los griegos el círculo fue un instrumento que por sus características fue el conducto para pensar en el movimiento homogéneo y perpetuo, ya que el círculo no tiene principio ni fin y su curvatura no cambia.

<sup>21</sup> Pero no como en el caso arquimediano donde la máquina era la parte heurística de la teoría, aquí el modelo está en capacidad de evolucionar según se lo exijan los avances teóricos.

los instrumentos convencionales. Para este nivel de la geometría poco importaba si el instrumento era real o era una creación de la mente. El proceso de unificación entre la matemática teórica y los métodos mecánicos llegó a tal punto de simbiosis que se transformó en una práctica común, en donde sólo los inexpertos rechazarían las importantes aportaciones explícitas de esta relación.

Sin duda las cónicas son el conjunto de curvas generadas por procesos mecánicos, explícitos o mentales que más fueron estudiadas en la antigüedad griega. Por un lado tenemos a Menecmo con el ortotome, oitome y el ambliotome, y por el otro a Apolonio con la parábola, elipse e hipérbola. En cuanto a Menecmo sabemos que usó sólo conos rectos y cortes perpendiculares a la recta generatriz. Si el ángulo del vértice del cono es recto, entonces al cortar el cono con un plano perpendicular a la generatriz, a la curva intersección la llamó una parábola. Si el ángulo es agudo, la curva intersección fue llamada elipse. Apolonio usó un cono genérico (oblicuo con directriz circular) y las curvas que extrae son estáticas.

Posteriormente, el problema fue el de representar (o proyectar) en el plano las curvas extraídas del cono. Entre otras formas de abordar el problema se diseñaron máquinas que extrajeran las características matemáticas de las curvas en el cono y, que además trazarán a éstas últimas sobre una superficie plana. A lo anterior se agrega que los puntos de las curvas en el plano tendrían un lugar de referencia, lo que sería el punto fijo del instrumento que las generaba<sup>22</sup>. Entonces, se puede decir que los trazadores de cónicas ya se podían concebir como máquinas-matemáticas en el sentido de que conseguían trazar en el plano objetos con las propiedades geométricas que originalmente sólo tenían en el cono.

Pero los usuarios de este tipo de instrumentos-matemáticos<sup>23</sup> eran conscientes de la imprecisión o discontinuidad que podían tener las curvas generadas por los instrumentos trazadores. Después de Descartes los métodos de la geometría analítica ya estaban mezclados con los de la geometría proyectiva, y aunque el uso de los instrumentos para la creación de resultados matemáticos ya era algo común, aún se reconocía que plasmar las cónicas en el plano en forma real, y no sólo como la tosca representación de una ecuación, implicaba múltiples obstáculos. Esto resultaba evidente para los que reque-

---

<sup>22</sup> Aquí se debe de entender que el lugar de referencia o punto fijo pueden ser los vértices, focos, o la intersección de los ejes en el caso de la elipse.

<sup>23</sup> Para esta sección se considera que los usuarios se ubican entre los siglos XV al XVII.

rían instrumentos que generaran curvas que se emplearían en el diseño arquitectónico, de lentes y en los talleres de orfebres.

Un ejemplo de lo anterior lo tenemos en Descartes cuando necesitó trazar cónicas en el plano, pues el instrumento que requería, además de hacer trazos en papel, los tenía que hacer también como cortes en metal, madera o en cristal. Para ilustrar esta situación lo mejor es presentar un instrumento típico que respondiera a estas necesidades, y que en este caso está relacionado con la óptica.

Descartes requería dirigir un conjunto de rayos de luz paralelos a través de un cristal y que se refractaran en grupos sobre una línea. En el discurso décimo de la *Dióptrica* (1987) Descartes abordó el problema, y en primer lugar esbozó una solución de cómo determinar el índice de refracción de un prisma triangular. Usó un instrumento donde un rayo pasaba por A y L, para después atravesar el prisma, salir por B y finalmente desviarse a I (Figura 4). Aquí es donde Descartes se interesaba por saber cómo se daba la relación que tiene el punto I, situado sobre la placa EFI con respecto a los otros puntos B y P. Después trasladó el problema al plano para tener un manejo más preciso (Figura 5). Con centro en B y radio BP trazó un arco que cortaba a BI en T y a la vez dibujó el arco PN, igual que en PT. Después unió B con N y a la prolongación de IP la corta en H. Con centro en B y radio BH dibujó un arco HO, que corta a BI en O. Así, obtiene que la razón de la línea HI y OI es la medida común de todas las “refracciones que causa la transición del aire al vidrio que examinamos” (ibid, 1987, 163-164)

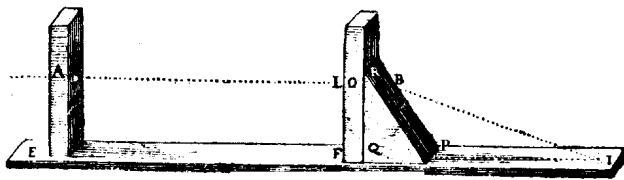


Fig. 4

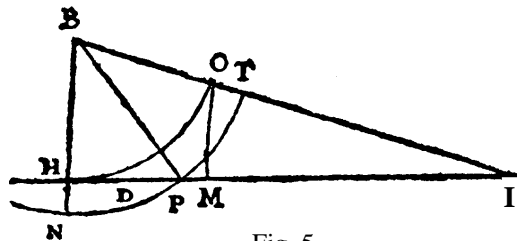


Fig. 5

Aunque Descartes no mencionó que  $OI$  es el seno del ángulo de incidencia, y que  $HI$  es el seno del ángulo de refracción, —y sin justificar la continuidad— afirma que si se toma sobre  $HI$ ,  $MI = OI$  y  $HD = DM$ , entonces  $D$  es el vértice y  $H$  e  $I$  los focos de la lente hiperbólica que se desea construir. En la siguiente cita Descartes comenta que con estos puntos es fácil trazar la hipérbola:

*“Colocando dos estacas en los puntos  $H$  e  $I$  y haciendo que la cuerda que rodea la estaca  $H$  esté atada a la regla de forma tal que no pueda plegarse hacia  $I$  antes que hacia  $D$ ”.*

Después propuso un método en el que usaba un compás con el que se podían generar puntos de una hipérbola, pero el proceso tenía la restricción de que no generaba la curva de un solo trazo (Figura 6),

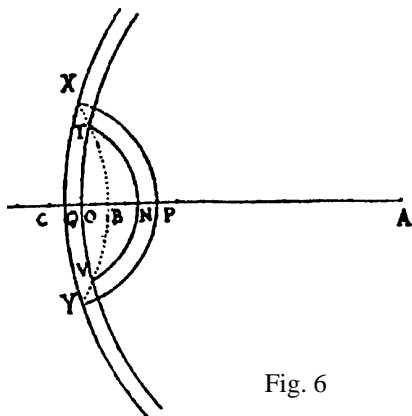


Fig. 6

Descartes propuso un método en el que tomó los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  como puntos de referencia (no lo menciona en la *Dióptrica* pero  $A$  y  $C$  serán los focos y  $B$  uno de los vértices). Tóme-se  $N$  y  $O$  sobre  $AC$ , de manera que  $BN = BO$ , y con  $A$  como centro trázese el arco  $TOV$ . Entonces con  $C$  como centro y con radio  $CN$ , trázese el arco  $VNT$ , que corta el arco  $TOV$  en  $V$  y  $T$ . La hipérbola pasará sobre los puntos de intersección de los arcos. Si se resta a  $OA$  el segmento  $CN$  se obtiene un segmento  $BA-CB$  que sería la distancia entre los vértices de la hipérbola considerando  $A$  y  $C$  como los focos. Lo mismo se puede hacer con otros dos arcos un poco mayores  $XQY$  y  $YPX$  para obtener más puntos de la cónica, como se ve en la curva punteada.

Descartes opinaba que “tal procedimiento puede no ser malo para trazar groseramente algún modelo que representa aproximadamente la figura de los vidrios que deseamos tallar” (Descartes 1987, p. 166). Pero Descartes lo que necesitaba era tener algún instrumento con el cual pudiera generar una hipérbola de un solo trazo,

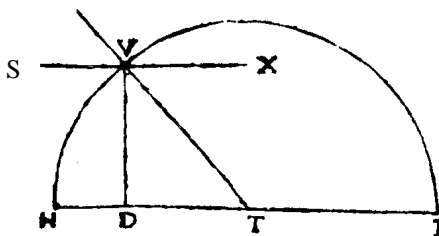
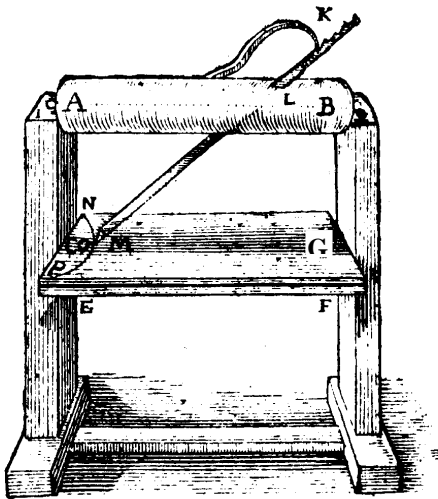


Fig. 7



como sucede en el caso del círculo al ser dibujados por el compás. Para tal propósito señaló que del círculo HVI (Figura 7) se trazará la recta TVS y también la recta VX paralela a HI. Ahora, si imaginamos que la recta TVS gira alrededor del eje HT, entonces la línea TVS describiría la superficie de un cono, y el plano fijo que pasa por VX cortará al cono dando lugar a una hipérbola. Éste es un ejemplo cartesiano de una ‘máquina mental’ de las que se mencionaban anteriormente.

Pero Descartes no lo dejó en un ejercicio intelectual, y se propuso diseñar una máquina cuyo resultado se muestra en la Figura 8.



AB es un rodillo (la línea HI de la Figura 7), GM es una placa paralela al rodillo; KLM es una regla con filo en la punta que atraviesa el rodillo conservando siempre el ángulo, y con la cualidad de poder moverse (por el resorte en K) para estar siempre en contacto con la placa GM. Cuando el rodillo gira la regla siempre estará en contacto con la placa y con el filo trazará (o cortará si es un material delgado) en ella una hipérbola.

Fig. 8

Sin embargo la máquina posee un defecto, y es que la punta de acero M varía de posición según se dirija hacia N o hacia P y el corte no será exactamente igual en todas partes, y como el interés de Descartes en este pasaje de la *Dióptrica* es el tallado de cristales, entonces la máquina de la Fig. 8 no es la más adecuada. Por razones de exactitud en la fabricación de los cristales propuso otra máquina, que pensó podría corregir el defecto en el corte, pero esta máquina ya no es un mecanismo simple dado que involucraba varios módulos.

No fueron pocos los trabajos de Descartes sobre el uso de compases. Conocemos su compás proporcional, con el que encontraba las medias proporcionales para construir ecuaciones algebraicas, y también se conoce el compás para la trisección del ángulo, entre otros (ver capítulo 2 de este libro).

## 1.7 Las curvas y el ornamento

Desde otro punto de vista las inexactitudes antes señaladas serían menos relevantes frente a los ojos de los artistas, arquitectos o artesanos; algunos de ellos esperaban que los instrumentos llegasen a resolver sus problemas por el simple hecho de que su apariencia era la de ser una máquina de precisión. En diversas disciplinas los instrumentos llegaron a ser sólo un auxiliar heurístico, y si bien se aceptaba que no resolvían el problema, al menos daban certidumbre —para soluciones parciales— al que pretendía hacerlo, es decir, quien abordaba el problema tenía más seguridad si se apoyaba en una máquina o en un modelo geométrico que tuviera la capacidad mecánica —como si fuera un instrumento— de poderse adaptar a la variabilidad de las condiciones iniciales del problema.

Pintores, arquitectos y artesanos tenían frecuentemente la necesidad de trazar determinadas figuras que dieran la apariencia de ser una cónica. Y para estos casos, —principalmente los artistas relacionados con la ciencia experimental— se optó por crear o usar un instrumento que les generara exactamente lo que querían. Y los pintores o grabadores crearon métodos geométrico-mecánicos que generaran el trazo que querían ver representado en sus obras, independientemente de si la curva era el lugar geométrico de una cónica.

Este tipo de usuarios de los instrumentos generalmente no consideraban necesaria una demostración o justificación teórica de las propiedades de las curvas que usaban. Aunque se debe señalar que en la mayoría de los casos no tenían la posibilidad de hacerlo —por la carencia de conocimientos matemáticos, pero era algo que tampoco a ellos se les exigía. El fin para el que se hacían los trazos no implicaba que matemáticamente fuera lo que se decía que era, lo que importaba era que pareciera que sí lo era; así mismo, los que pedían el trabajo a los artistas tampoco exigían la exactitud de los trazos desde la visión crítica de un matemático.

Para fines del siglo XV y principios del XVI los artistas mostraron interés y necesidad de trazar curvas elípticas, y estas curvas aparecieron en iglesias, pisos, patios, ornamentos, pinturas, grabados, etc. Las formas circulares que tanto se habían usado desde los griegos ya no eran las únicas en su preferencia. La representación más real de las escenas creadas por un pintor exigía el uso de formas elípticas u ovaladas<sup>24</sup>. Para resolver tal problema contaban con tres formas de hacer el trazo de las curvas —aparentemente— elípticas:

---

<sup>24</sup> La representación en perspectiva que ya se usaba en las obras desde el siglo XV exigía que los círculos pudieran ser representados ya no sólo de manera frontal, se requería que pudieran

- 1) Con los elementos teóricos de la geometría euclidiana y de las cónicas que permitían el trazo de elipses verdaderas.
- 2) Con instrumentos que pudieran trazar elipses verdaderas.
- 3) Con elementos de la geometría euclidiana que permitían trazar aproximaciones de elipses usando 4 arcos de círculo.

Y en cada caso sucedía lo siguiente:

1) Se usaban los elementos de la definición matemática de elipse y algunos teoremas que permitían su construcción a través de cuerdas sujetas a clavos que fungían como los focos. Pero este método es muy impreciso a pesar de que recurre a la definición matemática de elipse, y se debe a que las elipses que traza son muy toscas dado que hay problemas para mantener la tensión del hilo y a que las condiciones de la cuerda cambian con la temperatura y la humedad. Y lo anterior es de señalarse porque se daba el caso que se tuvieran que repetir las mismas elipses en diferentes días de construcción o del diseño de la obra y los resultados no coincidían. Por otro lado se presentaban irregularidades al no poder mantener siempre perpendicular el trazador al plano de la elipse a lo largo de los  $360^\circ$ , y finalmente la inestabilidad de los nudos (en los focos) podía afectar el trazo del constructor o del artista.

El marco teórico que se requería para dar credibilidad a los trazos anteriores es el de los tratados de cónicas, como el de Apolonio, que ya se tenía en su edición veneciana de 1541, el de Werner de 1522 o el de Durero de 1525. Sin embargo no era fácil llevar a la práctica los conocimientos teóricos de estas obras a través de los instrumentos.

2) A principios del siglo XVI ya existían diversos instrumentos para trazar elipses. Uno de los primeros fue el de Leonardo (1510) (parece que él ya estaba usando el de Proclo), aunque también se tiene información de los de Durero y Miguel Ángel. Cabe mencionar que Leonardo también planteó el uso del elipsógrafo (ver Figura 9) para resolver un problema de óptica de Alhazen<sup>25</sup>. Esta técnica de trazado con elipsógrafos es muy precisa, pero tiene el problema de ser poco manejable para superficies mayores, como en el caso de los edificios o de superficies pequeñas, como puede ser un grabado o

---

ser vistos en perspectiva, con lo cual parecían óvalos. Y en la arquitectura también se dio un auge en el uso ornamental de los óvalos, y éstos se podían ver en ventanas, pisos, plafones, barandales, por mencionar algunos.

<sup>25</sup> El problema era poder trazar el camino que sigue un rayo de luz que choca contra un espejo circular. Parte de la solución implicaba construir una elipse.

---

una pintura de bastidor. Para el segundo caso se hubiera necesitaba construir elipsógrafos de dos o tres centímetros de tamaño.

3) La última opción parece que se aleja de la formalidad matemática del caso 1) o de la precisión de los instrumentos del 2), pero aquí lo que se requería era un contorno que pareciera una elipse. En las representaciones artísticas los elementos geométricos generalmente no ocupaban de manera conspicua los principales espacios de la obra —a menos que el motivo fuera algo científico—, es decir, la atención generalmente se centraba en

los individuos, los espacios naturales, los objetos arquitectónicos. Las figuras geométricas (principalmente las curvas, ya que las cuadrículas en los pisos sí eran objeto de interés en la representación) generalmente ocupaban un espacio pequeño en la obra y no estaban inmersos en la problemática asociada con respecto a las proporciones de los objetos, es decir, no se daba el caso de tener que respetar proporciones como sucedió con el cuerpo humano, o la representación proporcional entre objetos colocados a diferentes distancias en la pintura<sup>26</sup>.

Para este punto 3) el uso de los instrumentos sufrió un cambio y lo que convenía era ir a la segura con la regla y compás, que en el fondo era lo mismo que estaban haciendo en 2) cuando usan los elipsógrafos, es decir, si se requería trazar una elipse o algo que pareciera una elipse, los elipsógrafos trazaban una curva con características constantes de un lugar geométrico en cada uno de sus puntos. Con la nueva técnica (que se presenta en la siguiente página) se tendrían óvalos con características de un lugar geométrico pero contruidos uniendo intervalos de cuatro arcos de círculo, con lo cual se obtenía un óvalo con la estabilidad estructural de un círculo pero en 4 secciones. Esto es, como la elipse tiene continuas variaciones en su curvatura, entonces a los artistas y arquitectos se les complicaba poder medir perímetros,

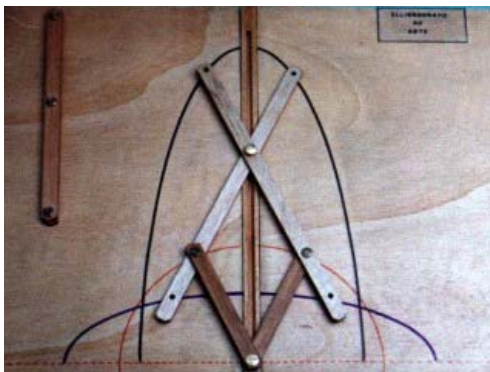


Fig. 9

Del museo de la Universidad de Modena

<sup>26</sup> A partir del siglo XV fueron de gran interés el estudio de las teorías de la perspectiva, de las proporciones del cuerpo humano y otras que pretendían la fiel representación de lo que ve el ojo (ver Alberti 1997).

molduras, áreas, volúmenes, ya que sus soluciones sólo eran aproximadas y no eran obtenidas por medios analíticos. Y reproducir múltiples veces una misma elipse no era fácil, así como tampoco lo era el cálculo de materiales.

Cuando se usan sectores de círculos entonces es más sencillo reproducir los ángulos, lúnulas, áreas, perímetros, bisecar ángulos, construir perpendiculares, tangentes y, en general, todo el amplio repertorio de propiedades del círculo que ya se conocían gracias al tratado de Euclides<sup>27</sup>, y por esta razón los libros más importantes de arquitectura incluían una introducción a la geometría euclidiana.

Para el trazo de los óvalos a través de sectores de círculos se desarrollaron varias técnicas. Se tienen los casos de Sebastiano Serlio, de Joan de Arphe o de Vignola, por nombrar algunos.

En el casos de Joan de Arphe su contribución más relevante aparece en su obra *De varia commensuracion para la escultura y arquitectura*, y en el de Sebastiano Serlio en su libro *Cinco libros de arquitectura*. Ambos autores presentan métodos para el trazo de óvalos que resultan semejantes. Serlio propuso cuatro métodos y de Arphe tres. En ambos casos trabajaron con cuatro arcos de círculos. En la Figura 10 (a, b, c) se pueden apreciar tres métodos que ambos usaron.

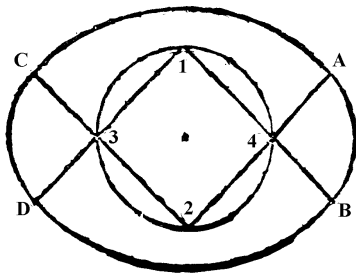


Fig. 10 a. Sea un círculo dividido en 4, en los puntos 1, 2, 3 y 4. Se pone la regla en 1 y en 4 y se prolonga hasta B, y se hace lo mismo para obtener A, C y D. Ahora se fija el compás en 2 y se traza el arco CA, después se fija en 4 y se traza el arco AB, así se trazan los arcos para formar el óvalo. Nótese que la distancia 4A puede elegirse a conveniencia.

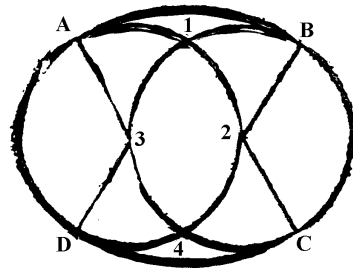


Fig. 10 b. Trácese 2 círculos iguales, donde cada uno pase por el centro del otro. Con la regla una 3 y 4 y en esa dirección trace 3A, después una 1 y 3 y trace 3D, y lo mismo para B y C. Después fije el compás en 4 y trace el arco AB, lo mismo para el arco DC con lo que finalmente se forma el óvalo.

<sup>27</sup> Ver los *Elementos*, libros 3 y 4

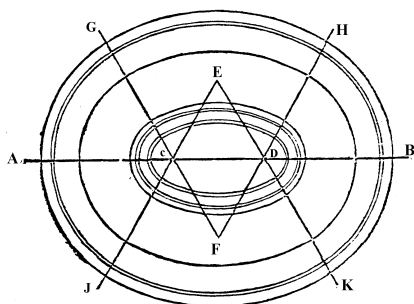


Fig. 10 c. Se presenta un método semejante al de 10 a., pero lo importante es que aquí se pretende enseñar a diseñar molduras ornamentales. Nótese que con arcos de círculos se puede llegar a un paralelismo entre óvalos que difícilmente se lograría con el método de la cuerda clavada en los focos.

En las dos obras se pueden encontrar ejemplos del uso práctico de los óvalos; por ejemplo Serlio muestra el diseño de piezas de alfarería y orfebrería.

Aquí sólo se muestran dos autores, pero existían más técnicas para el trazo de óvalos, como las de Vignola, Bianchi, Langley, Kitao, Mott. En un artículo de Paul. L. Rosen (2001) se encuentra un estudio comparativo de los diferentes métodos para trazar óvalos, y el autor llega a la conclusión de que los óvalos de Vignola son los que más se acercan a la verdadera elipse

Al igual que Descartes, Joan de Arphe es consciente de que sus trazos y técnicas encierran una inexactitud. Vale la pena mencionar que reconoce honestamente que para el artista no importa tanto la exactitud, contrario a lo que sería el caso para el matemático. En su exposición sobre la cuadratura del círculo advierte que el método no es exacto, y tampoco lo son los procedimientos para la división del diámetro en siete partes. Advierte que el error es un poco mayor a una milésima del diámetro, pero inapreciable para las dimensiones pequeñas utilizadas por los plateros o escultores de retablos.

En su libro *De varia commensuration* dice: "Y si alguna gracia se debe a mi estudio y trabajo, no quiero que sea mas que recibido con el ánimo que le ofrezco a la unidad de los artífices de mi profesión". Este es el fin propuesto por Arphe en su libro, y por ello no incluye las demostraciones geométricas de "Arquímedes, Euclides, Theon, y otros", contentándose con exponer de modo claro los resultados, tanto gráficos como escritos, y principalmente la enseñanza del uso del compás para la construcción de las curvas requeridas para el ornamento.

En el caso de Durero (1979) tenemos que en el prefacio a sus *Instituciones de Geometría* advierte: "Ya que la geometría es la base correcta para toda pintura, he decidido enseñar sus rudimentos y principios a todos los jóvenes aficionados al arte [...]. Pero el libro va destinado a ser de utilidad práctica y no un tratado sobre matemáticas puras". La presente cita justifica por qué es

que Durero, cuando muestra cómo trazar las elipses, no lo hace pensando en la exactitud matemática; sucede que para los fines prácticos de la obra le bastaba con obtener algo que pareciera una elipse.

Para el ojo del inexperto todas las técnicas presentadas en esta sección tendrían aprobación *a priori*, y esto era porque al ver los instrumentos o las técnicas geométricas que se emplearían, quedaría impresionado por lo elaboradas que eran. Aunque el instrumento (que podía ser virtual) ante sus ojos no resolviera totalmente el problema, pensaría que lo podría hacer. Así, tenemos el caso del astrario de Giovanni Dondi, en el que los instrumentos o las técnicas muchas veces maravillan no por lo que hacen, sino por lo que creemos que pueden llegar a hacer.

## 1.8 Los cielos la tierra y el tiempo

El hombre en forma natural tiende a dominar su territorio y como consecuencia cada vez ocupa regiones más extensas. Su instinto es el de la conquista y control de las zonas que lo rodean, y para poder sentir seguro su entorno se ha visto en la necesidad de desarrollar los elementos necesarios para entender, ordenar y medir parcialmente aquello que lo rodea. Por ello le es importante conocer en todo momento sus colindancias geográficas, y así poderlas plasmar en un mapa, ya sea por razones comerciales, bélicas o de navegación. Se tienen registros de mapas desde el año 2200 a. C., y es el caso de una estatua que representaba a Gudea (señor de la ciudad sumeria de Lagash) sosteniendo un plano a escala del templo de Ningirsu, junto con una regla y un instrumento para escribir.

Esta última sección tiene la finalidad de mostrar algunas técnicas geométricas empleadas en la navegación. En este tema los instrumentos podrían ser muchos y muy sofisticados, pero nos centraremos principalmente en el uso de las cartas de navegación y el compás ordinario.

Antes del uso generalizado de la aguja náutica (lo cual ocurre aproximadamente en el

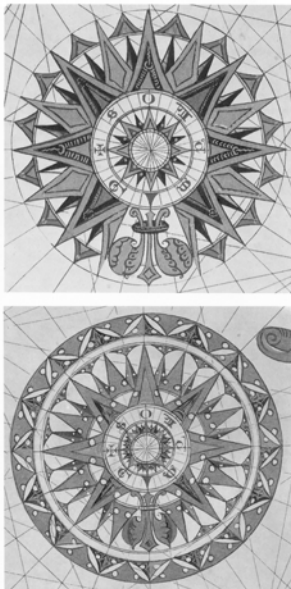


Figura tomada de [Sellés 1994]

siglo XII), los marinos estaban capacitados para navegar entre los distintos puertos, principalmente en la zona mediterránea. En dicha región los vientos dominantes eran generalmente estables, su variación principal era del noroeste al noreste según la región y la estación del año. Estas condiciones del viento favorecían principalmente los viajes hacia el sur y al este, el problema para estos casos era el regreso, para lo que se tenía que recurrir a la navegación costera y poder así salvar el inconveniente de los vientos en contra. Por estas razones la navegación antigua se practicaba con mayor frecuencia entre el final de la primavera y los principios de otoño ya que en estos meses la nubosidad y la violencia de los vientos era menor. En dichos meses los navegantes se orientaban principalmente a través de la posición del Sol durante el día, y por la noche lo hacían mediante las estrellas de la bóveda celeste.

Los antiguos navegantes —aun con el uso del firmamento como guía—, no recurrían con frecuencia a las técnicas de la geometría para ubicarse; conocían bien los movimientos celestes y así podían determinar las latitudes de diferentes puntos mediante observaciones astronómicas. Pero como se mencionó antes, su conocimiento de los vientos era importante. Es a Atimóstenes en el siglo III a.C. a quien se le atribuye haber formado una rosa de los vientos de doce divisiones (aunque la más empleada fuera la de 8).

En las épocas del año (a principios de Siglo XII) en que las costas, así como la posición de las estrellas y del Sol eran imperceptibles, ya se contaba con la aguja náutica, y aunque aún era un instrumento rudimentario ya se empleaba ocasionalmente.

Para 1269 se reconoce la utilidad del magnetismo y sus ventajas navegacionales ya eran algo tangibles. Pierre de Mericourt, conocido como Pedro el Peregrino, escribió la *Epistola de magnete*; éste es un tratado para la construcción de instrumentos magnéticos destinados a la orientación. Mericourt explicó el magnetismo por medio de esferas concéntricas, es decir, estableció una analogía entre la esfera de los cielos y una esfera que él construyó; el caso es que creó una piedra imán de forma esférica donde se establece que sus polos magnéticos son análogos a los polos de la esfera celeste. A esta piedra se le llamó *Terrella* y se pensaba que si se montaba adecuadamente sobre un eje, ésta giraría por sus cualidades a la par que las estrellas. Pero el modelo que se usaba en la práctica de la navegación consistía en pegar una rosa de los vientos directamente encima de la aguja con la superficie dividida en cuadrantes.

En la segunda mitad del siglo XIII la navegación ‘magnética’ ya era más aceptada. Esta clase de travesías se apoyaban también en libros de rutas y en

---



cartas de navegación y era muy importante contar con el conocimiento matemático para saber en todo momento el curso que seguía la nave, así como las desviaciones que se sufrían debido a la dirección de los vientos. Esto último era lo que más inquietaba a los navegantes, pero con las mejoras a la aguja náutica aumentó la certidumbre y con ella el tráfico marítimo, el cual ahora sí se podía hacer en las épocas del año en que las condiciones meteorológicas dificultaban la orientación a través de observar los astros o el Sol.

Los libros de rutas o *cartas portulano* que se usaron en los siglos XIII y XIV reúnen la información de las distancias y direcciones entre los principales puertos, puntos costeros de interés o, simplemente, lugares de referencia para las cartas. Las *cartas portulano* tienen la característica de estar cruzadas por lo que parecen ser haces de rectas (Figura 11) que aparentemente muestran desorden, pero que en la realidad son las uniones de las rutas constantes antes mencionadas.

**Configuración de la construcción de una carta portulano.** Como se ve, la red de líneas que recorre la carta está formada por una circunferencia y 16 puntos nodales sobre ella y a su vez sobre una cuadrícula. Para una carta mediterránea se usaban dos círculos. Cabe señalar que las líneas del cuadrículado no tienen que ver con los meridianos y los paralelos terrestres; pero sí se tiene que considerar que las líneas verticales corresponden a la dirección del norte magnético y no del norte geográfico.

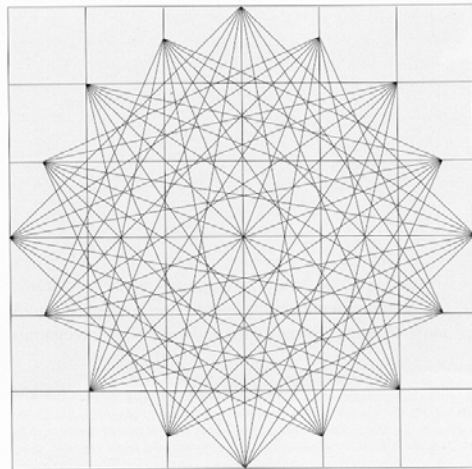


Fig. 11, tomada de [Sellés 1994]

Pero estas cartas tenían sentido siempre que se usara la aguja náutica, ya que sólo con ella se podía seguir el rumbo marcado. Aquí cabe señalar que aún hay controversia sobre el papel que jugó la aguja náutica para el diseño de las cartas. La opinión más generalizada es que se hizo una recopilación de la experiencia acumulada por los navegantes, y todo parece indicar que se pudo llegar más o menos a un acoplamiento de las direcciones de la aguja

náutica, del diseño de la rosa de los vientos y, finalmente, de las rutas ya conocidas por los navegantes<sup>28</sup>.

Navegar usando el compás y las cartas portulano se volvió algo sistemático y de una dificultad manejable. En la carta se localizaban los dos puntos (ver Figura 12): el de salida A y el de arribo B. Si al unirlos la recta coincidía con una de la carta entonces se tenía el rumbo y la distancia a seguir; en caso de no darse la coincidencia se tomaría una de rumbo paralelo<sup>29</sup> a las existentes en los haces de la carta.

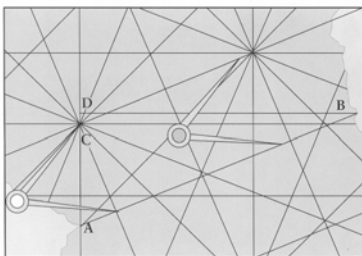


Fig. 12, tomada de [Sellés 1994]

Pero a pesar de que se tuviera la ruta angular y la distancia del recorrido, los vientos no necesariamente llevarían al barco exactamente por la ruta marcada, lo que podía suceder era que el barco cruzara una y otra vez la ruta marcada describiendo así una línea quebrada. Entonces, los navegantes necesitaban saber en todo momento cuánto es lo que se habían desviado de la ruta y, al mismo tiempo, cuánto se habían acercado al destino para que posteriormente virasen el ángulo adecuado rumbo al destino trazado. La solución al problema le exigía poder resolver triángulos rectángulos. En la obra de Ramon Llull, escrita a finales del siglo XIII, se encuentra una de las formas en que se podía

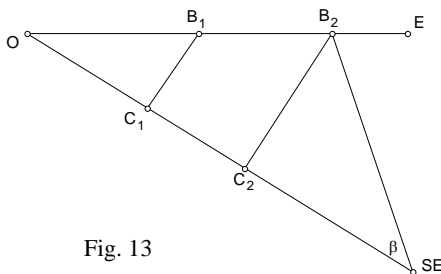


Fig. 13

<sup>28</sup> En las ilustraciones de las cartas portulano se ve una estricta simetría, pero al estudiar las que se conservan se detecta una inclinación generalizada del eje este-oeste del Mediterráneo de aproximadamente  $8^\circ$ , esta asimetría puede ser la consecuencia de la declinación magnética detectada en aquella época.

<sup>29</sup> Se tiene que considerar que para esta época se usaban rosas de los vientos de hasta 32 direcciones, por lo que no era tan difícil encontrar una recta casi paralela de entre los haces.

atacar el problema desde el punto de vista geométrico. El rumbo que el timonel del barco desea seguir es de O al SE (ver Figura 13), pero la dirección del viento lo arrastra en dirección a E. Ahora, se divide el curso que sigue la dirección E en segmentos  $OB_1, OB_2, \dots$  de 100 millas cada uno, y desde los puntos  $B_1, B_2, \dots$  se trazan perpendiculares a la línea del rumbo SE que se cortan en  $C_1, C_2, \dots$ . Así, si se avanzó 100 millas hacia el este recorriendo el tramo  $OB_1$ , se ha avanzado  $OC_1$ , en la dirección de SE, habiéndose separado de este rumbo en la línea recta de distancia  $B_1C_1$ , y la misma relación se puede establecer entre  $B_2$  y  $C_2$ ; entonces, cuando el barco se encuentra en  $B_2$ , y si los vientos le permiten virar hacia SE, entonces, sería necesario conocer el ángulo  $\beta$ , para lo cual va a necesitar la magnitud de  $B_2C_2$ . Para obtener los ángulos y los segmentos antes mencionados sería necesario tener conocimientos de aritmética y trigonometría, lo cual no era algo común entre los navegantes, para estos casos se contaba con una tabla de datos llamada *toleta de marteloio*<sup>30</sup>.

Pero la efectividad de los cálculos dependía en gran medida de la manera en que se hubieran tomado los tiempos de recorrido, y de los instrumentos utilizados para el cálculo del tiempo.

Aún en el siglo XVII el tiempo se medía básicamente observando el movimiento de los astros en sus esferas correspondientes. Para este modelo de predicción, el Sol tenía un papel fundamental, ya que de él dependía la medida de las trayectorias de los planetas, así como las primeras formas primitivas que dieron lugar a instrumentos para medir el tiempo y dar forma a los primeros calendarios. Los movimientos de la salida y la puesta del Sol, así como los correspondientes a las estrellas, fueron la base fundamental de la medición del tiempo hasta que surge el reloj mecánico. La comprensión de los principios matemáticos intrínsecos al movimiento de los astros fueron la base necesaria e imprescindible para entender el principio de los primeros relojes de Sol así como de los astrolabios. Como los instrumentos para el cálculo del tiempo dependían de la posición de los astros, el diseño contemplaba determinar la hora durante el día con relojes de Sol, y para la noche se diseñó el nocturnlabio, instrumento cuyo funcionamiento dependía de la localización de la estrella polar.

Uno de los fenómenos variables que se utilizaron para la medición astronómica del tiempo fue la altura del Sol o de una determinada estrella sobre el horizonte. Pero para calcular la hora a través de la observación de arcos del recorrido del Sol o de una estrella, se necesitó del uso de complejas técnicas trigonométricas que no eran muy conocidas en el occidente latino, pero aún

---

<sup>30</sup> Para más precisiones del ejemplo anterior véase [Sellés 1994]

conociendo estas herramientas matemáticas los cálculos resultaban complicados. Por dicha razón se tuvieron que desarrollar soluciones alternativas.

Así, el astrolabio llega a ser el instrumento más depurado para obtener la hora. El principio fundamental del instrumento es el de una proyección estereográfica de la esfera celeste sobre el plano que cruza el ecuador. Así, resulta que la esfera celeste y el globo terrestre se pueden trasladar sistemáticamente a una superficie plana. Aunque no se tienen registros plenos de la existencia de los astrolabios entre los griegos, Ptolomeo escribió una obra donde muestra los principios matemáticos de la proyección estereográfica, y que nos ha llegado bajo el nombre de *Planispherium*. Y es a Teón de Alejandría a quien se le debe el registro más antiguo sobre la construcción y el uso del astrolabio, el mismo que posteriormente sería conocido por los árabes. Es necesario señalar que a pesar de los múltiples tratados sobre el uso del astrolabio que se escribieron durante la Edad Media, esto no significó que sus usuarios estuvieran familiarizados con los principios matemáticos de la proyección estereográfica. quienes recurrían al astrolabio en su mayoría se limitaban a ejecutar una serie de instrucciones como sucede en el presente con el uso de algunas máquinas.

Pero cientos de años antes de la aparición del astrolabio el instrumento predominante para determinar la hora durante el día fue el reloj de Sol. El reloj se formaba con un gnomon que proyectaba la sombra sobre una superficie que tenía marcadas las líneas horarias. El uso de la sombra durante el día parece ser la forma más natural y lógica de medir el tiempo, pero matemáticamente es de las más difíciles de controlar, y se debe a que la posición de las líneas horarias varían considerablemente de una estación a otra durante el año: sucede que durante el verano las líneas están más separadas que en la primavera o en el otoño, pero pasa que en el invierno están más juntas. Por estas razones la hora está marcada por la punta de la sombra del gnomon y no por la recta total descrita por la sombra.

La construcción de las líneas horarias donde el gnomon proyecta la sombra fue un tema para los mejores matemáticos griegos. Afortunadamente sobrevive la obra ptolemaica titulada *Analema*, donde describe en detalle las características matemáticas de las citadas líneas, esto es, las líneas de la escala de la declinación diaria del Sol trazadas en un globo terrestre artificial. Es en este sentido que la analema está estrechamente relacionada (en su metodo-

---

logía) con las proyecciones estereográficas y ortogonales<sup>31</sup> usadas para resolver los problemas de la esfera.

**Reconocimientos:** Agradezco las valiosas opiniones de Rafael Martínez, Antonieta Fregoso y Juan Ojeda.

---

<sup>31</sup> La proyección ortogonal se empleó también para determinar la hora; se basa en proyectar la esfera ortogonalmente sobre el plano del meridiano. En el Medioevo se usaba esta clase de proyección a través de un instrumento llamado *organum Ptolemei*.

---

## Referencias

- Alberti, Leon B. (1997). *De la pintura*. Colección Mathema. México: UNAM. Estudio preliminar y traducción: J. Rafael Martínez E.
- Aristóteles (1998). *Física*. Madrid: Editorial Gredos. Traducción: Guillermo R. de Echandía. Vol. 203.
- Arphe, Joan de (1979). *De varia commensuracion para la escultura y arquitectura*. Valencia: Albatros Ediciones.
- Arquímedes (1980). *On conoids and spheroids*. Great Books. Encyclopaedia Britannica. Vol. 11.
- Arquímedes (1988). *El método*. México: Alianza Editorial Mexicana.
- Clagett, Marshall. (1964). *Archimedes in the Middle Ages*. Madison: University of Wisconsin Press.
- Copérnico, Nicolás (1987). *Sobre las revoluciones*. Madrid: Tecnos.
- Descartes, René (1987). *La dióptrica*. Madrid: Editorial Alfaguara.
- Dureró, Alberto. (1979). *Instituciones de geometría*. México: UNAM.
- Euclides (1991). *Elementos*. Introducción: Luis Vega, traducción: M. Luisa Puerta. Madrid: Editorial Gredos.
- Koyrè, Alexandre (1985). *Estudios de historia del pensamiento científico*. México: Siglo XXI Editores.
- Plutarco (1980). *The lives of the noble grecians and Romans. Marcellus*. Great Books. Encyclopaedia Britannica. Vol. 14.
- Platón (1980). *Timaes*. Great Books. Encyclopaedia Britannica. Vol. 7.
- Proclus (1992). *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*. Traducción e introducción de Glenn R. Morrow. Princeton: Princeton University Press.
- Ptolomeo, Claudio (1987). *Hipótesis de los planetas*. Madrid: Alianza Editorial.
- Ptolomeo, Claudio (1998). *Ptolemy's Almagest*. Traducción de: G. J. Toomer. Princeton: Princeton University Press.
- Ptolomeo, Claudio (1992). *Analemma*. Editado por: Rocco Sinisgalli. Florencia: Edizioni Cadmo.
- Ptolomeo, Claudio (1992). *Il planisfero*. Editado por: Rocco Sinisgalli. Florencia: Edizioni Cadmo.
- Rosen, Paul (2001). "On Serlio's constructions of ovals". *The Mathematical Intelligencer*. 23 1:58-69.
- Sellés, Manuel (1994). *Instrumentos de navegación. Del Mediterraneo al Pacífico*. Madrid: Ed. Lunwarg Editores.
- Serlio, Sebastiano (1982). *The five books of architecture*. New York: Dover Publications.
-

# Geometría, álgebra y máquinas

---

**Manuel Falconi Magaña**

Facultad de Ciencias, UNAM

falconi@servidor.unam.mx

## 2.1 Introducción

Estas notas fueron presentadas en una plática que dio el autor en el Foro "Matemáticas, máquinas para hacer matemáticas" que se desarrolló en la Facultad de Ciencias de la UNAM en septiembre de 2001. El propósito de la plática era mostrar como los problemas de construcción con regla y compás, son parte de una serie de tópicos interesantes de la matemática que no requieren un alto nivel teórico para ser entendidos y que han sido determinantes en el avance de la matemática, por lo que su estudio además de enriquecer la cultura matemática del alumno nos permite aprender aspectos teóricos de las diversas ramas de la matemática que se vieron fortalecidas por las investigaciones realizadas alrededor de ellos.

Posteriormente, en el mes de noviembre se impartió un taller con el objetivo de demostrar la imposibilidad de la trisección de un ángulo y la duplicación del cubo. El material cubierto sirvió para ilustrar importantes aspectos estructurales de la matemática como son su unidad y cohesión interna basada en la demostración matemática de las conjeturas, y para mostrar aspectos metodológicos como el uso de las generalizaciones y analogías para descubrir nuevos hechos y facilitar la comprensión de la matemática.

La problemática abordada es muy rica y permite tratar temas del álgebra de polinomios, gráficas de curvas, intersección de curvas, números y divisibilidad, entre otros. El contenido de este trabajo cubre primeramente la teoría básica relacionada con la imposibilidad de la trisección de ciertos ángulos y la duplicación de un cubo. En la segunda parte se describen algunos de los intentos de la matemática griega para resolver estos problemas, los cuales generaron el desarrollo de interesantes instrumentos que son parte de los orígenes de los mecanismos articulados.

## 2.2 Algunos problemas de construcción

En los problemas de construcción propuestos por Euclides<sup>1</sup> sólo se permite el uso de una regla no graduada y un compás. En principio, el compás sólo sirve para trazar círculos con un centro dado y que pasen por un punto conocido. Con el fin de facilitar la lectura de estas notas introducimos la siguiente notación. El símbolo  $AB$  denota el segmento cuyos extremos son los puntos  $A$  y  $B$ . La longitud del segmento  $AB$  se denota por  $|AB|$ . Para identificar a la recta que pasa por los puntos  $A$  y  $B$  utilizamos el símbolo  $\Downarrow AB$ . El rayo que inicia en el punto  $A$  y pasa por el punto  $B$  se identifica con  $\Uparrow AB$ . La recta o el rayo que pasa por los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ , con el punto  $C$  entre  $A$  y  $B$ , se denota por  $\Downarrow ACB$  o  $\Uparrow ACB$ , respectivamente. El triángulo con vértices  $A$ ,  $B$  y  $C$  se denota por  $\Delta ABC$  y el ángulo formado por  $A$ ,  $B$  y  $C$  con vértice  $B$  es  $ABC$ . Si no hay peligro de confusión se utilizará la misma notación para identificar a un ángulo y a su medida. Finalmente, el círculo con centro en el punto  $A$  y que pasa por el punto  $B$  se denota por  $S(A, B)$  y  $S(A, |BC|)$  es el círculo centrado en  $A$  y de radio  $|BC|$ .

Buena parte de la importantísima obra *Elementos* de Euclides, se dedica a resolver problemas de construcción con regla y compás. Entre ellos elegiremos algunos que son adecuados para ilustrar los métodos utilizados y para mostrar puntos interesantes de la matemática. En lo que sigue para referirnos al libro I o II de los elementos de Euclides, diremos simplemente libro I o libro II.

Iniciemos con uno de los problemas básicos de construcción.

**Proposición 2.1.** *Por el punto  $A$ , construir la recta perpendicular a la recta  $\Downarrow AB$ .*

*Construcción:* Una construcción sencilla es la siguiente: Con centro en el punto  $A$ , trazamos un círculo que intersecta a la recta  $\Downarrow AB$  en los puntos  $C$  y  $D$ . Ahora trazamos los círculos  $S(C, D)$  y  $S(D, C)$ , los cuales se intersectan en el punto  $E$ . La recta  $\Downarrow AE$  es perpendicular a la recta  $\Downarrow AB$ . (Ver Figura 1).

---

<sup>1</sup> Euclides (c. 430-360 BCE.), matemático griego, su obra principal, *Elementos* de geometría, es un tratado de matemáticas en 13 volúmenes sobre materias tales como geometría plana, proporciones en general, propiedades de los números, magnitudes inconmensurables y geometría del espacio.

---



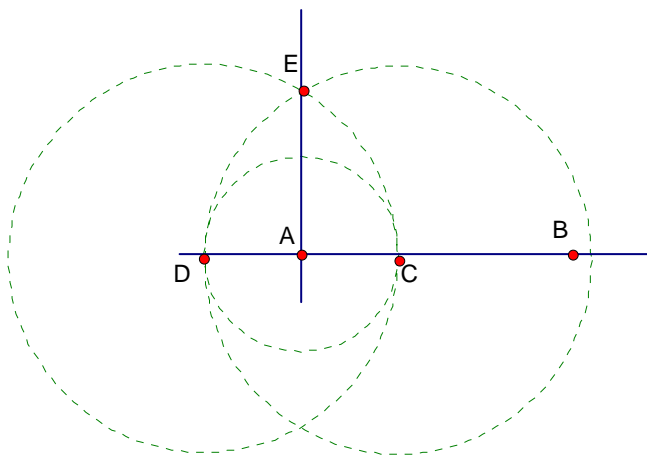


Fig. 1

Para demostrar que  $\uparrow AE$  es perpendicular a  $\uparrow AB$ , notemos que  $|DA| = |AC|$ , por ser radios del círculo  $S(A, C)$  y  $|CE| = |DE|$  ya que son iguales al radio  $|DC|$  del círculo  $S(C, D)$ . Por lo tanto los triángulos  $\triangle DAE$  y  $\triangle ACE$  son congruentes y entonces los ángulos  $DAE$  y  $EAC$  son iguales y como su suma es  $180^\circ$ . Se concluye que cada uno de ellos es de  $90^\circ$ .

La construcción anterior se puede utilizar para construir una recta perpendicular a la recta  $\uparrow AB$  que pase por un punto  $C$  fuera de  $\uparrow AB$ . Con esta construcción se puede trazar la paralela a una recta dada  $\uparrow AB$  que pase por un punto  $C$ . En efecto, se traza la perpendicular  $\uparrow CD$  a  $\uparrow AB$ . La perpendicular a  $\uparrow CD$  por el punto  $C$  es paralela a  $\uparrow AB$ . La demostración se obtiene directamente del llamado *Quinto Postulado (de las Paralelas)*, que Euclides enunció de esta manera: *Si una recta al incidir sobre dos rectas hace que la suma de los ángulos interiores del mismo sea menor que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en que están los (ángulos) menores que dos rectos.*

También es cierto que si sabemos trazar la paralela a una recta por un punto dado, entonces se puede trazar la perpendicular por ese punto. Sin embargo es conveniente dar una construcción independiente.

**Proposición 2.2.** *Construir una recta paralela a la recta  $L$ , que pase por un punto  $C$ .*

*Construcción:* Sean  $A$  y  $B$  dos puntos de la recta  $L$ . Se traza un círculo con centro en  $C$  que intersecte a  $\uparrow AB$  en  $D$ . Con centro en  $D$  se traza el círculo que pasa por  $C$  e intersecta a  $\uparrow AB$ , en el punto  $E$ . Finalmente se traza el círculo  $S(E,D)$ . Los círculos  $S(E,D)$  y  $S(D,C)$  se intersectan en  $F$ . Las rectas  $L$  y  $\uparrow CF$  son paralelas (ver Figura 2).

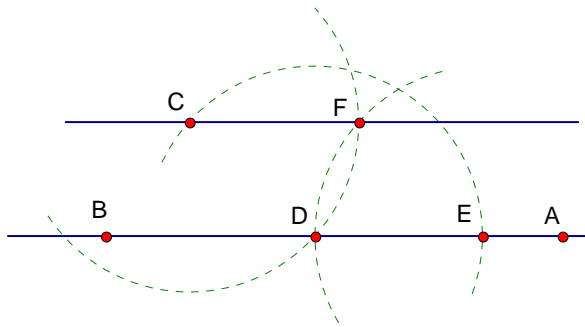


Fig. 2

La demostración es simple. Basta notar que  $|CD| = |DE| = |EF| = |FC|$ .

Una demostración muy sencilla de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo suman  $180^\circ$ , se basa en la construcción de una recta paralela a uno de los lados del triángulo. Consideremos el triángulo  $\triangle ABC$  y por el punto  $C$  tracemos la paralela  $L$  a la recta  $\uparrow AB$ . En la Figura 3, el ángulo  $\alpha$  es igual al ángulo  $CAB$  y el ángulo  $\beta$  es igual al ángulo  $ABC$ . Entonces  $180^\circ = \alpha + ACB + \beta = CAB + ACB + ABC$ .

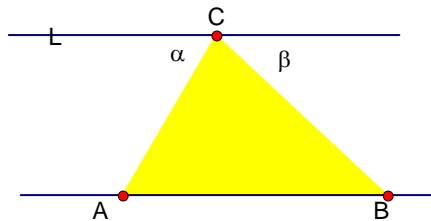


Fig. 3

Una demostración más elaborada se obtiene a través de una reducción. Como un triángulo rectángulo es la mitad de un rectángulo, la suma de sus ángulos interiores es  $180^\circ$ . Así el resultado se obtiene del hecho de que un triángulo cualquiera es la unión de dos triángulos rectángulos que no se traslapan.

Los tres problemas de construcción tal vez más importantes en la historia de la matemática son la trisección de un ángulo, la duplicación de un cubo y la cuadratura de un círculo. El primero consiste en dividir un ángulo dado en tres ángulos iguales utilizando sólo la regla y el compás. Resulta sorprendente la dificultad de este problema si lo comparamos con la bisección de un ángulo que aparece como la novena proposición del libro I.

La duplicación del cubo y la cuadratura del círculo son problemas del mismo tipo. En ambos se pide construir una figura o un sólido que tenga el área o volumen de otro dado. Específicamente en la cuadratura del círculo se requiere construir un cuadrado cuya área sea igual a la de un círculo dado y en la duplicación del cubo se trata de construir un cubo cuyo volumen sea el doble de otro dado. En los *Elementos* de Euclides aparecen varios problemas de cuadraturas; por ejemplo, en el libro I la proposición 42 pide construir un paralelogramo que tenga área igual a la de un triángulo y un ángulo congruente a un ángulo dado. La proposición 14 del libro II se refiere a la cuadratura de un polígono dado.

La construcción de polígonos regulares está muy relacionada con el problema de dividir un ángulo en partes iguales. Claramente, la construcción de polígonos se reduce a dividir el ángulo de  $360^\circ$  en partes iguales. Ahora daremos algunos métodos para construir polígonos regulares.

La Proposición 1 del libro I pide construir un triángulo equilátero que tenga un segmento dado  $AB$  como uno de sus lados. Para construirlo notemos que dos vértices son los puntos  $A$  y  $B$ ; el tercer vértice es cualquiera de los dos puntos de intersección de los círculos  $S(A,B)$  y  $S(B,A)$ . Un poco más complicada es la construcción de un triángulo equilátero inscrito en un círculo dado  $S(A,B)$ . Para construirlo se traza el círculo  $S(B,A)$  que intersecta a  $S(A,B)$  en los puntos  $C$  y  $D$ . Ahora se traza el círculo  $S(C,D)$  que intersecta a  $S(A,B)$  en el punto  $E$ . El triángulo cuyos vértices son  $C$ ,  $D$  y  $E$ , es obviamente equilátero (ver Figura 4(a)).

---

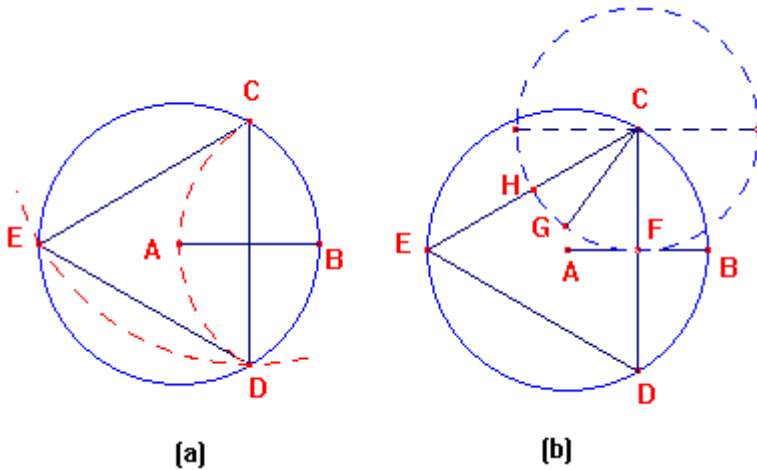


Fig. 4

La construcción del triángulo equilátero en particular resuelve la trisección del ángulo de  $180^\circ$  o del ángulo de  $360^\circ$ . En general, la construcción de un polígono regular de  $n$  lados se reduce a construir un ángulo de  $(360/n)^\circ$ .

La construcción del cuadrado es muy simple. La construcción del pentágono es equivalente a la del decágono. El pentágono se obtiene uniendo alternadamente los vértices del decágono.

**Proposición 2.3.** *Construir un decágono inscrito en el círculo  $S(A,B)$ .*

*Construcción:* La perpendicular al segmento  $AB$  por el punto  $A$  corta al círculo  $S(A,B)$  en el punto  $C$ . Sea  $D$  el punto medio del segmento  $AC$ . El círculo  $S(D, |DB|)$  intersecta al rayo  $\hat{C}A$  en el punto  $E$ . Ahora trazamos el círculo  $S(A,E)$  que corta al segmento  $AB$  en el punto  $F$ . El círculo  $S(B, |AF|)$  intersecta a  $S(A,B)$  en los puntos  $G$  y  $H$ . El ángulo  $BAG$  mide  $36^\circ$  y  $GAH$  mide  $72^\circ$  (ver Figura 5).

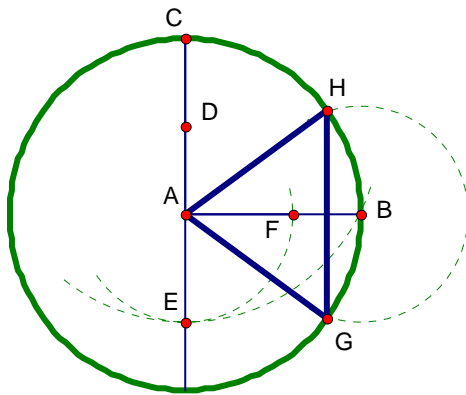


Fig. 5

Para la demostración, supongamos que el segmento  $GB$  es tangente al círculo  $S_c$  que pasa por los puntos  $A$ ,  $F$  y  $G$ . En este caso, el ángulo  $BAG$  es igual a  $FGB$ ; por otra parte,  $FAG + FGA + 180^\circ - BFG = 180^\circ$ , por lo tanto  $BFG = FAG + FGA = BAG + FGA$  y entonces  $BFG = FGA + FGB$ ; como el triángulo  $\triangle BAG$  es isósceles, se tiene la igualdad  $ABG = AGB$ , pero  $AGB = FGA + FGB$  y  $ABG = FBG$ , se concluye que  $BFG = FBG$ ; es decir el triángulo  $\triangle GBF$  es isósceles. Así,  $GF = AF$  y el triángulo  $\triangle AGF$  es isósceles y en particular  $FAG = AGF$ , lo cual implica que  $BFG = 2FGB$  y como  $2BFG + FGB = 180^\circ$ , se tiene que  $BAG = 36^\circ$ .

La demostración de que el segmento  $BG$  es tangente al círculo  $S_c$ , descansa en la Proposición 37 del libro III que afirma que la recta  $\uparrow BG$  es tangente al círculo que pasa por los puntos  $A, F, G$  si  $B$  es un punto fuera del círculo con la propiedad de que  $|BF||BA| = |BG|^2$ . Demostremos ahora la última igualdad.

Por el Teorema de Pitágoras  $|AB|^2 = |BD|^2 - |AD|^2 = |DE|^2 - |AD|^2$ . Sustituyendo  $|AB| = |AF| + |FB|$  en la igualdad anterior se obtiene  $|AB|(|AF| + |FB|) = |DE|^2 - |AD|^2 = (|DE| + |AD|)(|DE| - |AD|) = |EC||AF| = (|AF| + |AB|)|AF|$ .

De donde  $|AB||FB| = |AF|^2 = |BG|^2$ .

La construcción del pentadecágono regular se obtiene con la construcción conjunta del triángulo equilátero y del decágono. En la Figura 4(b) construimos sobre el segmento  $CF$ , el ángulo  $GCF$  de  $36^\circ$  (Proposición 2.3). Entonces el ángulo  $HCG$  mide  $24^\circ$  ya que  $ECD$  mide  $60^\circ$ . En general, si podemos construir los ángulos con medidas  $x$ ,  $y$ , tales que  $x > y$  y  $z = x - y$  divide a 360, entonces se puede construir el ángulo  $z$ . Hasta fines del siglo XVIII los únicos polígonos regulares construibles eran los de 3,4,5,15 lados, junto con los que se obtienen por medio de la bisección. En 1796 Gauss<sup>2</sup> construyó el heptadecágono y posteriormente enunció que "*Un polígono regular de  $n$  lados es construible si y solo si el máximo factor impar de  $n$  es 1 o un producto de números primos de Fermat distintos*". Este resultado fue demostrado por L. Wantzel<sup>3</sup> en 1837. El problema de saber cuales son los polígonos regulares construibles se redujo a conocer cuales son los números primos de Fermat. Un número primo de la forma  $2^{2^n} + 1$  se llama número primo de Fermat<sup>4</sup>. Actualmente los únicos números primos de Fermat que se conocen son 3, 5, 17, 257 y 65537 que corresponden a  $n = 0, 1, 2, 3, 4$ , respectivamente y no se sabe si el conjunto de primos de Fermat es finito o no.

Si revisamos las construcciones que hemos realizado, notamos que todo se reduce a trazar puntos nuevos con regla y compás partiendo de un conjunto de puntos previamente determinado. Para hacer un trazo con una recta requerimos al menos un punto y para hacer un círculo se necesita un punto para el centro y otro punto por el cual pasa, o bien un punto central y un radio; este radio necesariamente se especifica por medio de un segmento definido por dos puntos. Por ejemplo, en la Figura 5 se inicia con los puntos  $A$  y  $B$ , a partir de los cuales se van construyendo los puntos  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $G$  y  $H$ ; la información deseada está contenida en los puntos  $A$ ,  $B$ ,  $H$  y  $G$ . De este modo para saber cuales son los problemas de construcción que se pueden resolver, debemos saber cuales son los puntos que podemos construir.

---

<sup>2</sup> C. F. Gauss (1777, 1855) como resultado de sus investigaciones sobre ecuaciones ciclotómicas, él obtuvo condiciones para la constructibilidad con regla y compás de los polígonos regulares. Tenía 18 años de edad cuando encontró que el heptadecágono es construible.

<sup>3</sup> P. L. Wantzel (1814-1848) famoso por sus trabajos sobre la resolución de ecuaciones por medio de radicales, también dio la primera demostración de la imposibilidad de duplicar el cubo y trisectar el ángulo con regla y compás.

<sup>4</sup> Pierre de Fermat (1601-1665), conjeturó que los números de la forma  $2^{2^n} + 1$  eran primos. En 1732, L. Euler encontró que 641 divide a  $2^{2^5} + 1$ .

## 2.3 Números construibles con regla y compás

En esta sección se dará una caracterización de los puntos del plano que se pueden construir con regla y compás si se inicia con un par de puntos. Esta caracterización nos servirá para demostrar la imposibilidad de la trisección de un ángulo y de la duplicación del cubo.

En el plano elegimos una pareja de puntos que denotamos con  $(0,0)$  y  $(1,0)$  o con  $O$  y  $e_1$ , respectivamente. La distancia entre esos puntos la identificamos con la unidad. Una recta es *construible* si pasa por dos puntos construibles. Un círculo es *construible* si su centro es un punto construible y pasa por un punto construible. Identificamos con el eje de las abscisas a la recta  $Oe_1$  y con el eje de las ordenadas a la recta perpendicular a  $Oe_1$  que pasa por el punto  $O$ . Un punto es *construible* si (i) es  $O$  o  $e_1$ , o (ii) es la intersección de dos rectas construibles, o (iii) es la intersección de una recta y un círculo construibles, o (iv) es la intersección de dos círculos construibles.

Un número es *construible* si es la abscisa de un punto construible. Denotemos con  $\mathbf{Q}$  al conjunto de los números racionales y con  $\mathbf{QQ}$  el conjunto de todos los números construibles.

Si ya hemos construido hasta los puntos  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,...,  $(n,0)$ , con  $n>0$ , el punto  $(n+1,0)$  es la intersección de  $\mathbf{S}((n,0),(n-1,0))$  con la recta  $\uparrow Oe_1$ . En forma análoga se demuestra que todos los puntos de la forma  $(n,0)$  con  $n<0$  son construibles. Es decir, los números enteros  $\mathbf{Z}$  son construibles. Con mayor generalidad, los racionales los construimos de la manera siguiente: Dado el racional  $a/b$ , construimos los puntos  $A=(a,0)$  y  $B=(0,b)$ . Se traza la recta paralela a  $\uparrow AB$  por el punto  $e_2=(0,1)$ , que intersecciona a  $\uparrow Oe_1$  en un punto  $X=(x,0)$ . Los triángulos  $\Delta OAB$  y  $\Delta OXe_2$  son semejantes. Por lo tanto  $x=a/b$ . El círculo  $\mathbf{S}(O,(1,1))$  intersecciona a  $\uparrow Oe_1$  en el punto  $(\sqrt{2},0)$ , por lo tanto  $\sqrt{2}$  es construible. Estas observaciones demuestran la siguiente proposición

**Proposición 2.4.** *El conjunto  $\mathbf{Q}$  es un subconjunto propio de  $\mathbf{QQ}$ .*

En la Proposición 2.5 se demuestra que el conjunto  $\mathbf{QQ}$  tiene una rica estructura algebraica.

**Proposición 2.5.** *El conjunto  $\mathbf{QQ}$  tiene las siguientes propiedades:*

1. Si  $a, b \in \mathbf{QQ}$ , entonces  $a \pm b \in \mathbf{QQ}$ ,
2. Si  $a, b, c \in \mathbf{QQ}$  y  $c \neq 0$ , entonces  $ab \in \mathbf{QQ}$  y  $a/c \in \mathbf{QQ}$ ,
3. Si  $a \in \mathbf{QQ}$  y  $a \geq 0$ , entonces  $\sqrt{a} \in \mathbf{QQ}$ .

*Demostración:* Sólo daremos la idea general, ya que los detalles son simples y se dejan al lector (ver Figura 6). Supongamos que  $a$  y  $b$  son números no negativos, que pertenecen a  $\mathbf{QQ}$ . Se construye el punto  $(b,a)$  (Fig. 6(a)). El círculo  $\mathbb{S}((b,0),(b,a))$  intersecta a  $\uparrow\downarrow Oe_1$  en dos puntos. El punto a la derecha de  $(b,0)$  es  $(a+b,0)$  y el de la izquierda es  $(b-a,0)$ . Así,  $b-a$  y  $a+b$  son construibles. En la Figura 6(b), la recta por  $(0,b)$  paralela a la recta  $\uparrow\downarrow e_2(a,0)$  intersecta a  $\uparrow\downarrow Oe_1$  en el punto  $(ab,0)$ . Análogamente, la recta por  $e_2$  paralela a  $\uparrow\downarrow(0,b)(a,0)$  intersecta a  $\uparrow\downarrow Oe_1$  en el punto  $(a/b,0)$ .

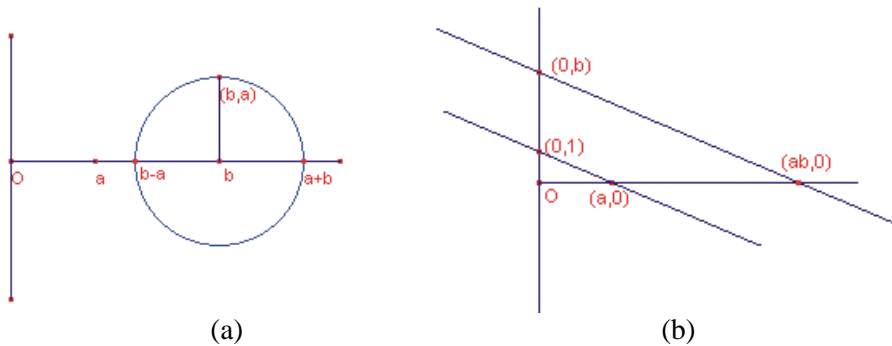


Fig. 6

Una cuestión muy importante es saber que tan grande es el conjunto  $\mathbf{QQ}$ . Si  $\mathbf{QQ}$  es el conjunto  $\mathbf{R}$  de los números reales, entonces la trisección del ángulo, la duplicación del cubo, la cuadratura del círculo, etc. serían posibles con sólo regla y compás. En este caso podríamos por ejemplo, construir  $\pi$  y entonces el círculo se podría cuadrar ya que dada su área  $a$ , su radio  $\sqrt{a/\pi}$  sería construible; o bien se podría construir el  $\text{Cos}(\alpha/3)$  de cualquier ángulo  $\alpha$  y entonces sería posible trisectarlo, ya que el triángulo rectángulo con uno de sus lados igual a  $\text{Cos}(\alpha/3)$  e hipotenusa igual 1 sería construible.



Una vez que se han construido los números racionales, la forma de obtener nuevos números consiste en:

- i) Interseccionar dos rectas que pasan cada una por dos puntos con coordenadas racionales, o
- ii) Interseccionar una recta que pasa por dos puntos con coordenadas racionales con un círculo con centro en un punto con coordenadas racionales y que pasa por un punto con coordenadas racionales, o
- iii) Interseccionar dos círculos con centros que tengan coordenadas racionales y que pasen por un punto con coordenadas racionales cada uno.

Finalmente,

iv) Los nuevos números son las abscisas de los puntos de intersección. Es fácil demostrar que en el caso (i), el punto de intersección tiene coordenadas racionales; por lo tanto ningún nuevo número se obtiene en este caso. Sin embargo, en los casos (ii) y (iii) los puntos de intersección tienen coordenadas de la forma  $q + p\sqrt{a}$ , con  $p, q, a \in \mathbf{Q}$ . De este modo se obtienen nuevos números cuando  $\sqrt{a} \notin \mathbf{Q}$ . Por ejemplo,  $q + p\sqrt{3}$  es un número construible no racional. De hecho,  $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$  contiene al conjunto  $\{q + p\sqrt{a} \mid q, p, a \in \mathbf{Q}\}$ . Es útil introducir la siguiente definición.

**Definición 2.1.** *Sea  $B$  un conjunto de números reales que contiene al cero. Si  $a \in B$  y  $\sqrt{a} \notin B$ , al conjunto  $\{q + p\sqrt{a} \mid q, p \in B\}$  se le llama extensión cuadrática de  $B$  y la denotaremos por  $B(\sqrt{a})$ .*

Los elementos de los conjuntos  $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$ , donde  $a \in \mathbf{Q}$  son construibles y cada conjunto  $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$  tiene las propiedades enunciadas en la Proposición 2.2. Esto se obtiene de las ecuaciones siguientes,

$$\begin{aligned} (b + c\sqrt{a})(\alpha + \beta\sqrt{a}) &= (b\alpha + a\beta c) + (c\alpha + b\beta)\sqrt{a}, \\ (b + c\sqrt{a})^{-1} &= \frac{1}{b^2 - c^2a}(b - c\sqrt{a}), \\ (b + c\sqrt{a}) + (\alpha + \beta\sqrt{a}) &= (b + \alpha) + (c + \beta)\sqrt{a}. \end{aligned} \tag{0.1}$$

Entonces podemos repetir el proceso (i)–(iv), utilizando una extensión cuadrática  $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$  en lugar de  $\mathbf{Q}$  y en forma análoga, se obtendrán nuevos puntos construibles de la forma  $\alpha + \beta\sqrt{\gamma}$ , con  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{Q}(\sqrt{a})$  y  $\sqrt{\gamma} \notin \mathbf{Q}(\sqrt{a})$ . Es decir, puntos construibles que pertenecen a una extensión cuadrática  $\mathbf{Q}(\sqrt{a})(\sqrt{\gamma})$  de  $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$ . La extensión cuadrática  $\mathbf{Q}(\sqrt{a})(\sqrt{\gamma})$

generalmente se denota por  $\mathbf{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{\gamma})$  y decimos que es una extensión iterada de  $\mathbf{Q}$ . De este modo se demuestra que los puntos de cualquier extensión iterada  $\mathbf{Q}(\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_n}) = \mathbf{Q}(\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_{n-1}})(\sqrt{a_n})$  son números construibles. Por otra parte, como cada punto construible  $P$  se obtiene como el punto  $P_n$  de una sucesión de puntos  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , donde cada punto  $P_i$  es  $(0,0)$ , o  $(1,0)$ , o se pudo obtener como:

Intersección de dos rectas, cada una de las cuales pasa por puntos  $P_j, P_k$  con  $j, k < i$ , o

Como intersección de una recta que pasa por puntos  $P_j, P_k$  con  $j, k < i$ , y un círculo con centro en un punto  $P_l$  y que pasa por  $P_m$  con  $l, m < i$ , o

De la intersección de dos círculos, cada uno de los cuales tiene centro en un punto  $P_l$  y que pasa por  $P_m$  con  $l, m < i$ .

El punto  $P_1$  se obtiene con el proceso anterior empezando con  $(0,0)$  y  $(1,0)$  y por lo tanto sus coordenadas están en una extensión iterada  $E_1$  de  $\mathbf{Q}$ . Del mismo modo, el punto  $P_2$  se obtiene de una sucesión que inicia en  $(0,0)$  y  $(1,0)$  y termina en  $P_1$  y por lo tanto tiene coordenadas en  $E_1$  o en una extensión cuadrática de  $E_1$ , y así sucesivamente. De este modo podemos enunciar el siguiente teorema.

**Teorema 2.1.** *Todo número construible pertenece a una extensión iterada de los números racionales.*

Esta es una caracterización muy útil para demostrar la imposibilidad de muchos problemas de construcción con regla y compás.

### 3.4 La imposibilidad de la trisección de un ángulo y la duplicación del cubo

Un cubo cuya arista mide  $2^{1/3}l$  tiene el doble del volumen de un cubo cuya arista es  $l$ . Por lo tanto construir un cubo con el doble de volumen de un dado es equivalente a construir el número  $2^{1/3}$ . Observemos que  $2^{1/3}$  es raíz de la ecuación

$$x^3 - 2 = 0. \quad (4.1)$$

El ángulo  $\pi/3$  es construible, ya que es igual a un ángulo interior del triángulo equilátero. Si este ángulo fuera trisectable entonces se podría construir el número  $\pi/9$  y por lo tanto sería construible el número  $\cos \pi/9$ . An-

tes de demostrar que  $\cos \pi/9$  no es construible, se verá que  $2 \cos \pi/9$  es raíz de la ecuación

$$x^3 - 3x - 1 = 0. \quad (4.2)$$

En efecto, sea  $y = \pi/9$ , entonces utilizando las identidades trigonométricas

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta, \quad (4.3)$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha, \quad (4.4)$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \cos 3y &= 1/2 \quad \cos 3y = \cos y \cos 2y - \operatorname{sen} y \operatorname{sen} 2y \\ &= \cos y (\cos^2 y - \operatorname{sen}^2 y) - \operatorname{sen} y (2 \operatorname{sen} y \cos y). \end{aligned}$$

Substituyendo en esta expresión  $\operatorname{sen}^2 y$  por  $1 - \cos^2 y$ , resulta que

$1/2 = \cos^3 y - \cos y + \cos^3 y - 2 \cos y + 2 \cos^3 y = 4 \cos^3 y - 3 \cos y$ . O equivalentemente,  $8 \cos^3 y - 6 \cos y - 1 = 0$ . Esto significa que  $x = 2 \cos y$  es raíz de (4.2).

La imposibilidad de resolver los dos problemas planteados se reduce a demostrar que las ecuaciones (4.1) y (4.2) no tienen soluciones construibles; o dicho de otra manera, las raíces de los polinomios correspondientes no pertenecen a ninguna extensión iterada de los números racionales (ver Teorema 3.1). Esto se demuestra en la siguiente proposición.

**Proposición 2.5** *Las ecuaciones (4.1) y (4.2) no tienen raíces en ninguna extensión iterada de  $\mathbf{Q}$ .*

*Demostración:* Evidentemente la ecuación (4.1) no tiene raíces racionales. Supongamos que  $a/b$ , con  $a$  y  $b$  primos relativos, es una raíz racional de (4.2). Al substituir en la ecuación y después de simplificar se obtiene  $a^3 = b(3ab + b^2)$ ; lo cual es imposible ya que  $a$  y  $b$  no tienen factores comunes. Así queda demostrado que (4.2) no tiene raíces racionales.

Consideremos la ecuación (4.1) y supongamos que la raíz  $\sqrt[3]{2}$  pertenece a la extensión iterada  $F = \mathbf{Q}(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \dots, \sqrt{a_n})$  y no pertenece a  $E = \mathbf{Q}(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \dots, \sqrt{a_{n-1}})$ . Entonces  $\sqrt[3]{2} = a + b\sqrt{q}$ , con  $a, b, q$  en  $E$ . Si substituímos en (4.1) encontramos que

$$\sqrt{q} = \frac{2 - a^3 - 3ab^2q}{3a^2b + b^3q};$$

Note que la parte derecha de esta igualdad pertenece a E. Esto es una contradicción ya que  $\sqrt{q}$  no está en E. Se concluye que  $\sqrt[3]{2}$  no pertenece a ninguna extensión iterada de  $\mathbf{Q}$ .

Como en el caso anterior, supongamos que  $x = a + b\sqrt{q}$  es una raíz de (4.2) que pertenece a F y no está en E. Nuevamente se llega a una contradicción, ya que de la sustitución en (4.2) se llega a la igualdad

$$\sqrt{q} = \frac{1 + 3a(1 - b^2q) - a^3}{3b(3a^2 - 1) + b^3q},$$

cuya parte derecha es un elemento de E, pero  $\sqrt{q}$  no está en E.

El argumento de la demostración anterior se puede generalizar de la forma siguiente. Sea  $y$  la tercera parte de un ángulo  $\theta$ ; es decir  $\theta = 3y$ . Si  $\alpha = \cos \theta$ , entonces  $x = \cos y$  satisface la ecuación

$$4x^3 - 3x = \alpha. \quad (4.5)$$

Con la notación utilizada en la demostración de la Proposición 2.5, tomemos  $x = a + b\sqrt{q}$ , una raíz de (4.5). Como antes se obtiene

$$\sqrt{q} = \frac{\alpha - a^3 - 3ab^2q}{3a^2b + b^3q}. \quad (4.6)$$

De esta igualdad se concluye el siguiente teorema.

**Teorema 2.1.** *Sea  $\alpha = \cos \theta$ . El ángulo  $\theta$  no se puede trisectar si  $\alpha \in \mathbf{Q}$  y la ecuación (4.5) no tiene raíz racional.*

El procedimiento utilizado para analizar la trisección de un ángulo y la duplicación del cubo, se puede usar para tratar el problema de la construcción de un polígono regular de  $n$  lados, o equivalentemente, de la construcción de  $\cos y$  con  $y = 2\pi/n$ . Sea  $x = \cos y$ . De la igualdad  $\cos ny = 1$  y con la ayuda de la identidades trigonométricas (4.3) y (4.4), se demuestra que  $x$  es solución de una ecuación polinomial

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x = 1, \quad (4.7)$$

con coeficientes  $a_i \in \mathbf{Z}, i=1, \dots, n$ . Para demostrar que  $x$  no se puede construir, debemos probar que la ecuación (4.7) no tiene raíces en ninguna extensión iterada de  $\mathbf{Q}$ . Esto se reduce a demostrar que no tiene raíces racionales, ya que en este caso  $x$  no puede pertenecer a ninguna extensión iterada de  $\mathbf{Q}$  debido a que si  $x = a + b\sqrt{q}$  entonces  $\sqrt{q} = R(a, b, q)$ , donde  $R$  es una función racional.

Veamos ahora una demostración de que el heptágono regular no se puede construir. Después de algunas manipulaciones algebraicas<sup>5</sup> -basadas en las identidades (4.2) y (4.3)-, se observa que  $x = \cos 2\pi/7$  satisface la ecuación

$$h(x) = 64x^7 - 112x^5 - 56x^3 - 7x - 1 = 0.$$

Note que si  $h(x)$  reducible entonces  $h(x+1)$  es reducible. En efecto,  $h(x) = r(x)s(x) \Rightarrow h(x+1) = r(x+1)s(x+1)$ . Consecuentemente, para saber que el polinomio  $h(x)$  no tiene raíces racionales, basta demostrar que  $h(x+1)$  es irreducible sobre  $\mathbf{Q}$ . Para esto se utilizará el *Criterio de Eisenstein* que se enuncia a continuación.

**Teorema 2.2<sup>6</sup>** *Sea  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  un polinomio con coeficientes enteros. Supongamos que existe un primo  $p$  tal que  $p$  divide a  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ ,  $p$  no divide a  $a_n$  y  $p^2$  no divide a  $a_0$ . Entonces  $f(x)$  es irreducible sobre los racionales*

El polinomio  $h(x+1)$  es

$$64x^7 + 448x^6 + 1232x^5 + 1680x^4 + 1064x^3 + 56x^2 - 287x - 112.$$

Se verifica fácilmente que satisface las condiciones del Teorema 2.2 con  $p=7$  y por lo tanto es irreducible.

### 3.5 Algunas notas históricas

Aunque los griegos no pudieron demostrar la imposibilidad de la solución de los problemas mencionados, sus esfuerzos por resolverlos los llevaron a encontrar algunas construcciones alternativas. Por ejemplo, observaron que la

---

<sup>5</sup> Las simplificaciones se realizaron con a ayuda de Mathematica.

<sup>6</sup> El lector interesado puede ver la demostración en (Herstein, 1975).

---

duplicación del cubo era equivalente a encontrar la intersección de la hipérbola

$$xy = 2l^2, \quad (5.1)$$

con la parábola

$$x^2 = ly, \quad (5.2)$$

ya que la solución de estas dos ecuaciones está dada por  $x^3 = 2l^3$ . Por otra parte este punto de intersección está ligado al problema de construir las medias proporcionales de dos números dados  $a$  y  $b$ . Recordemos que las medias proporcionales de los números  $a$  y  $b$  son dos números  $x$ ,  $y$ , tales que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}. \quad (5.3)$$

De aquí se obtienen las igualdades  $xy=ab$ ,  $x^2 = ay$ , las cuales se convierten en las igualdades 5.1 y 5.2, si  $a=l$  y  $b=2l$ .

Muchos métodos propuestos en la antigüedad para duplicar el cubo se basaron en la construcción de las medias proporcionales. Es interesante analizar la construcción de Herón tal como aparece en su obra *Mecánica*. Sean  $AB$  y  $BG$  dos segmentos perpendiculares de cuyas longitudes se desea encontrar sus medias proporcionales. Completamos el rectángulo  $ABGD$



Fig. 7

y se trazan los rayos  $\uparrow DG$  y  $\uparrow DA$  y los segmentos  $BD$  y  $GA$  (Fig. 8).

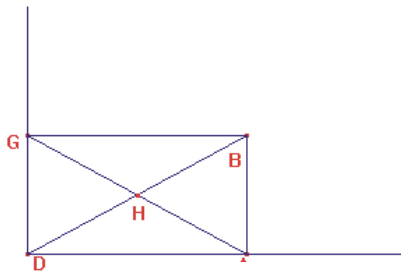


Fig. 8

Ahora colocamos una regla que pase por el punto  $B$  y la rotamos hasta que los segmentos  $EH$  y  $HZ$  sean iguales, donde  $E$  y  $H$  son los puntos donde la regla corta a los rayos  $\uparrow DG$  y  $\uparrow DA$ , respectivamente.

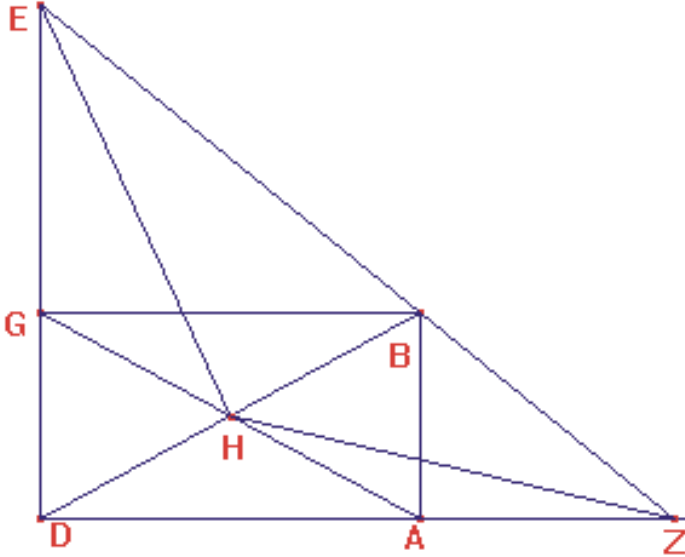


Fig. 9

Entonces  $|AZ|$  y  $|GE|$  son las medias proporcionales de  $|AB|$  y  $|BG|$ .<sup>7</sup> Damos una demostración que sigue muy de cerca la propuesta por Herón<sup>7</sup>. Sea  $\theta$  el punto donde la recta perpendicular a  $DE$  que pasa por  $H$ , interseca a  $DE$ . Como  $|G\theta| = |D\theta|$  y  $|DE| = |D\theta| + |\theta E|$ , se tiene que  $|\theta E|^2 = |DE||GE| + |\theta G|^2$ ; si agregamos  $|H\theta|^2$  a ambos lados de esta igualdad resulta que

$$|EH|^2 = |DE||GE| + |GH|^2.$$

<sup>7</sup> Heron of Alexandria (10?, 75?) geómetra importante y prolífico escritor. Algunas de sus obras son: Dioptrica, Neumática, Belopoeica, Mecánica, Geometría y Métrica. En este último, aparece la famosa fórmula para el área  $A$  de un triángulo de semiperímetro  $s$ :

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Análogamente,

$$|HZ|^2 = |DZ||ZA| + |HA|^2.$$

Recordando que  $|EH| = |HZ|$  y que  $|GH| = |HA|$ , se llega a  $|DE||GE| = |DZ||ZA|$ . O equivalentemente,

$$\frac{|DZ|}{|DE|} = \frac{|GE|}{|AZ|}. \quad (5.4)$$

Por semejanza de triángulos se obtienen las igualdades  $\frac{|DZ|}{|DE|} = \frac{|AZ|}{|AB|} = \frac{|GB|}{|GE|}$  y entonces por (5.4)

$$\frac{|GB|}{|GE|} = \frac{|GE|}{|AZ|} = \frac{|AZ|}{|AB|}. \quad (5.5)$$

Con esto se demuestra que  $|GE|$  y  $|AZ|$  son las medias proporcionales de  $|BG|$  y  $|AB|$ .

Entre los muchos instrumentos que se diseñaron para construir las medias proporcionales se encuentra el muy famoso *Mesolabio* de Eratóstenes<sup>8</sup>. Este aparato consiste de tres rectángulos iguales  $ABCD$ ,  $A'B'C'D'$  y  $A''B''C''D''$ , de los cuales el primero se puede deslizar sobre el segundo y este sobre el tercero. Un hilo tensado mediante un peso que cuelga de uno de sus extremos, une el punto  $A$  con el punto  $E$  e intersecta a las diagonales  $A'C'$  y  $A''C''$  en  $F$  y  $G$ , respectivamente. Los rectángulos se acomodan de modo que el segmento  $BC$  pase por  $F$  y el segmento  $B'C'$  pase por  $G$ . Las magnitudes  $|FC|$  y  $|GC'|$  son las medias proporcionales de  $|DA|$  y

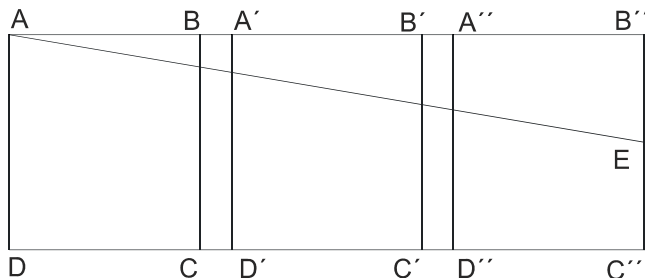
---

<sup>8</sup> Eratóstenes de Cyrene (276 ac, 194 ac) matemático y filósofo popularmente conocido por su famosa criba de números primos y por haber medido con gran exactitud la circunferencia de la tierra.

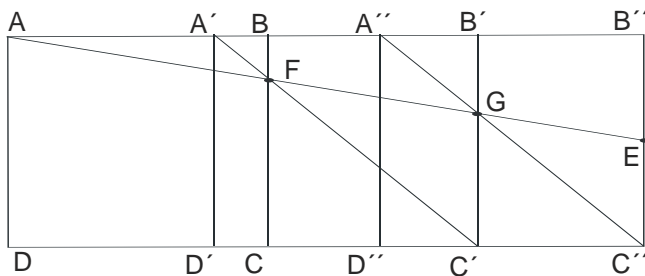
---



$|C''E|$ . En la Figura 10 se muestra la posición original del mesolabio y la posición final después de localizar los puntos  $F$  y  $G$ .



(a)



(b)

Fig. 10

El rectángulo de Platón es otro instrumento que sirve para construir las medias proporcionales de dos magnitudes  $|OA|$  y  $|OB|$ . Este aparato es una escuadra de lados  $L_1$  y  $L_2$  a la que se le ha agregado un tercer brazo que corre ortogonalmente a uno de sus lados (digamos, al lado  $L_2$ ). Para construir las medias proporcionales se dibujan perpendicularmente a partir del origen  $O$  del plano cartesiano, los segmentos  $OA$  y  $OB$ . La escuadra y el lado corredizo se mueven hasta lograr que el lado  $L_1$  pase por el punto  $A$  y que el vértice del ángulo recto entre  $L_1$  y  $L_2$  coincida con el semirrayo  $\hat{B}O$  en un punto  $C$  y simultáneamente, que el lado corredizo pase por  $B$  y que el vértice del ángulo recto que forma con  $L_2$  coincida con el semirrayo  $\hat{A}O$  en un punto  $D$ . Las magnitudes  $|OC|$  y  $|OD|$  son las medias proporcionales de  $|OA|$  y  $|OB|$ . (Ver Figura 11).

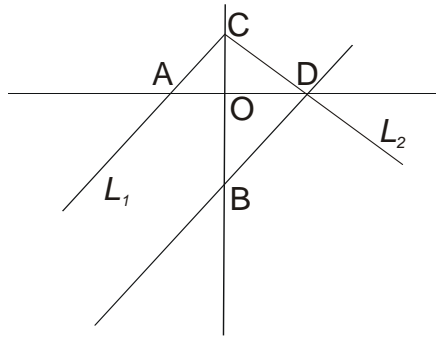


Fig. 11

Diocles (entre 250 y 100 a.c.) utilizó la curva conocida como Cisoide, para encontrar la media proporcional de 2 números (longitudes). Dado un punto  $X$  en el círculo  $S_r = S(C, r)$ , tomemos la recta  $L$  tangente a  $S_r$  por el punto diametralmente opuesto a  $X$ . Sea  $R$  un punto de  $L$ ; el segmento  $XR$  corta al círculo  $S_r$  en un punto  $Q$ . La cisoide se define como el lugar geométrico de los puntos  $P \in XR$ , tal que  $|XP| = |QR|$ , cuando  $R$  varía sobre  $L$  (ver Figura 12(a)).

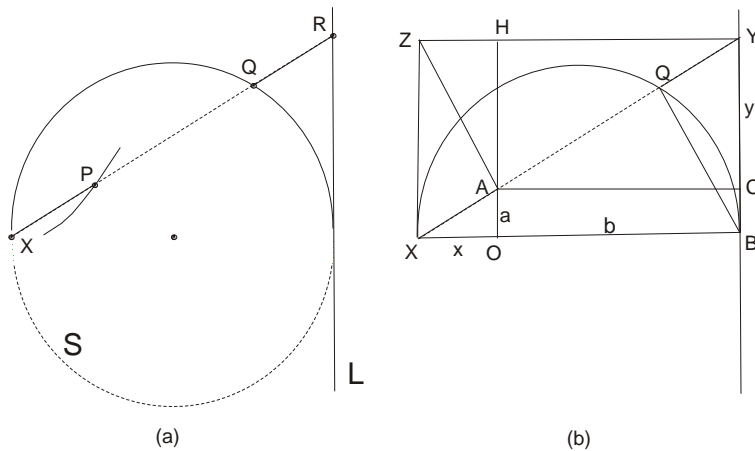


Fig. 12

Veamos ahora la relación de esta curva cisoide con la solución del sistema de igualdades  $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$ . Consideremos el rectángulo  $OACB$  con lados  $OA=a$  y  $OB=b$  (ver Figura 12(b)).

Sea  $X$  el punto sobre el rayo  $\hat{BO}$  tal que  $|OX|=x$ . En  $\hat{BC}$  se toma el punto  $Y$  tal que  $|CY|=y$ . Los puntos  $X, A$  y  $Y$  están alineados dado que  $\frac{a}{x} = \frac{y}{b}$ . Sea  $Z$  el cuarto vértice del rectángulo con lados  $XB$  y  $BY$ . Como  $\frac{a}{x} = \frac{x}{y}$ , los ángulos  $ZAH$  y  $AXO$  son iguales. De lo que se sigue que el ángulo  $ZAX$  es recto.

Sea  $S_d$  el círculo con diámetro  $XB$  y  $Q$  el punto de intersección de  $XY$  con  $S_d$ . Obviamente, el ángulo  $XQB$  es recto; por lo tanto los triángulos  $YQB$  y  $ZAX$  son congruentes. Así,  $|XA|=|QY|$  y entonces  $A$  está sobre la Cisoide de Diocles.

Una modificación del rectángulo de Platón nos permite diseñar una máquina que consiste de varillas articuladas y correderas para construir la cisoide de Diocles (Figura 13).

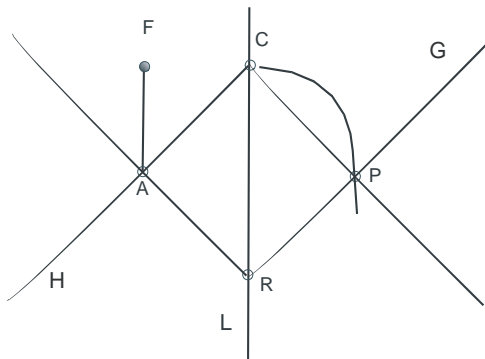


Fig. 13

Cuando el segmento  $FA$  gira alrededor del punto fijo  $F$ , el punto  $A$  describe un círculo que pasa por  $C$ . Este movimiento de giro hace que la escuadra  $H$  rote alrededor de  $C$ . Al mismo tiempo, la escuadra  $G$  se mueve manteniendo su vértice  $R$  sobre la recta  $L$ . Los puntos  $A$  y  $P$  se mueven a lo largo de los brazos de ambas escuadras. El punto  $P$  describe la cisoide de Diocles. En la Figura 13 se muestra un segmento de esta curva.

En el cuadro de abajo se muestra un modelo de esta máquina tal y como se exhibe en el museo universitario de historia natural e instrumentos científicos de la Universidad de Modena, Italia.

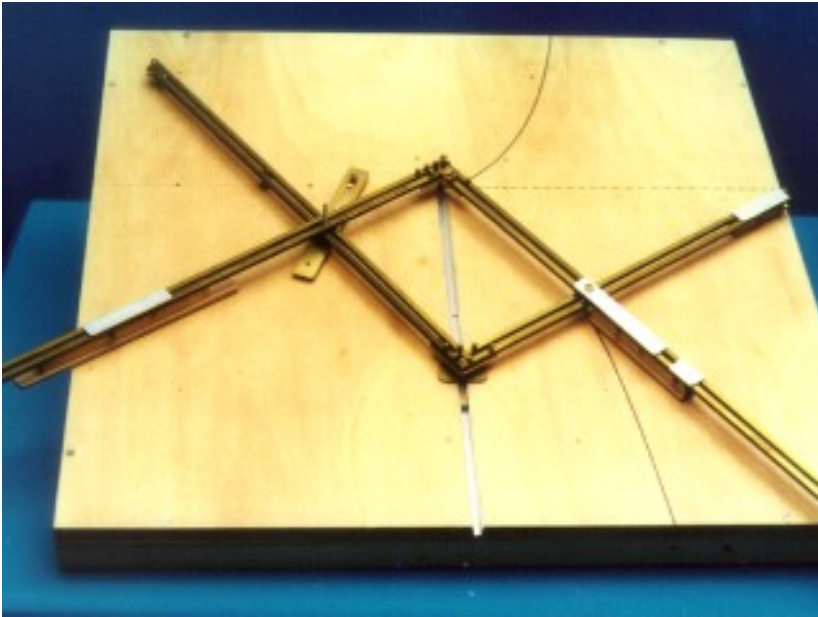


Fig. 14

Sabemos pues, que no todo ángulo se puede trisectar. Sin embargo, existe un método muy sencillo para triplicar cualquier ángulo. Tomemos el ángulo formado por los semirrayos  $L_1$  y  $L_2$ , que se intersectan en el punto  $O$  (ver Figura 15). Con centro en un punto  $A$  de  $L_2$  se traza un círculo que pasa por  $O$  e intersecta a  $L_1$  en el punto  $B$ . Ahora, el círculo con centro en  $B$  y

que pasa por A, corta a  $L_2$  en el punto C. Sea  $L_3$  el semirrayo  $\hat{BC}$ ; es fácil demostrar que el ángulo  $L_1L_3$  es el triple del ángulo  $L_1L_2$ <sup>9</sup>. Notemos que en esta construcción se tiene que  $OBD$  es un ángulo recto, siendo D el punto donde el círculo  $\mathcal{S}(A, |OA|)$  corta a  $L_2$ .

Supóngase ahora que para trisectar el ángulo  $L_1L_3$ , se invierte el proceso anterior. Se toma un punto C sobre el semirrayo  $L_3$  y el problema consiste en determinar el punto O sobre la prolongación del semirrayo  $L_1$  de modo que  $(\hat{OC})L_1$  sea un tercio de  $L_1L_3$ . Observe que las propiedades que determinan al punto O son:

- i. D está sobre el semirrayo  $L_4$  que pasa por el vértice B de  $L_1L_3$  y es perpendicular a  $L_1$ .
- ii. La distancia  $|OD|$  es igual a  $2|CB|$ .

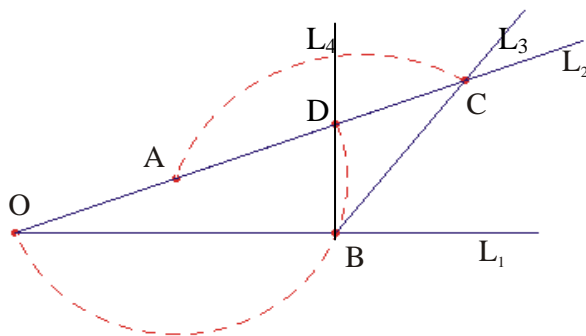


Fig. 15

Estos puntos conforman un caso particular de un problema conocido como problema de Pappus: dados un ángulo recto  $L_1L_4$ , una longitud  $d$  y un punto C, construir una recta  $L_2$  que pase por C de modo que  $|OD|=d$ , donde D y O son las intersecciones de  $L_2$  con  $L_4$  y la prolongación de  $L_1$ , respectivamente.

<sup>9</sup> Los triángulos OBA y ABC son isósceles. Entonces, se tienen las siguientes igualdades de ángulos:  $2\text{OBA} + \text{OAB} = \text{OAB} + \text{BAC}$ ,  $\text{OBA} + \text{ABC} + \hat{BC}L_1 = 2\text{BAC} + \text{ABC}$ .

Para encontrar el punto O, Nicomedes (280-210 ac) marcó en una regla dos puntos S y T a la distancia d y alineada con el segmento ST abrió sobre la regla una canal en la cual se desliza el punto C, mientras el punto S corre sobre la recta  $L_4$ . Entonces el punto T traza una curva llamada Concoide (de Nicomedes). El punto O es la intersección de la Concoide con la recta que determina  $L_1$  (ver Figura 16).

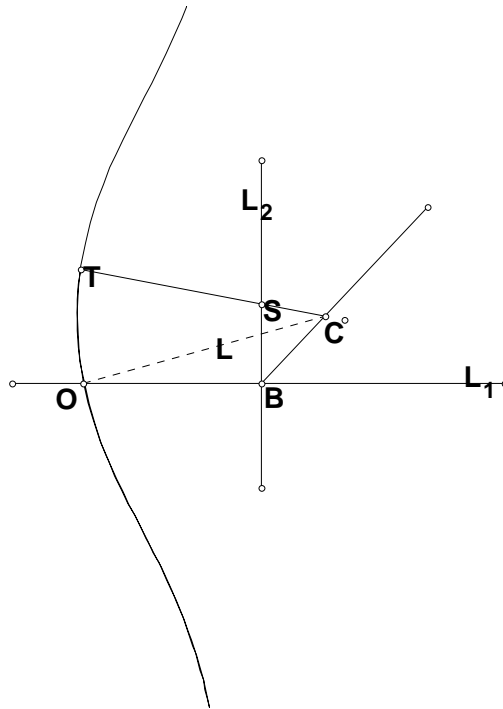


Fig. 16

En 1619, Descartes inventa un trisector que consiste simplemente de 4 barras largas que giran alrededor de un vértice A y de 4 barras más pequeñas de la misma longitud; éstas se unen para formar una estructura como el de la Figura 17. Los puntos A, B, C y D equidistan del vértice O y permiten el giro de las barras pequeñas. Los vértices F y G, corren a lo largo de sus respecti-

vas barras. Para trisectar un ángulo  $\alpha$ , basta colocar los brazos OA y OD sobre sus lados. Cada uno de los ángulos AOB, BOC, COD es un tercio de  $\alpha$ .

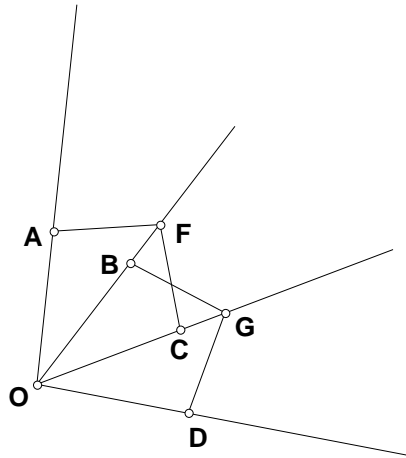


Fig. 17

## 2.6 Conclusión

En las páginas anteriores se ha visto como a lo largo de la historia se han construido una diversidad de instrumentos y mecanismos para trazar curvas o resolver problemas geométricos. El manejo y análisis de este tipo de instrumentos abre caminos interesantes de explorar, en la búsqueda de medios didácticos que le permitan al estudiante fortalecer su pensamiento matemático. En la interacción entre geometría, álgebra e instrumentos se pueden encontrar magníficos problemas, cuyo planteamiento no requiere de grandes conocimientos técnicos previos y su solución permite elaborar métodos propios y recorrer niveles diversos de formalización. Por lo tanto pueden servir para que el estudiante desarrolle un pensamiento crítico y creativo, se entrene en la búsqueda de conexiones entre temas relacionados y mejore su habilidad de comunicación. En los capítulos siguientes se encuentran algunas propuestas en esta dirección.

---

## Referencias

- Euclides (1991). *Elementos*. Introducción: Luis Vega, traducción: M. Luisa Puerta. Madrid: Editorial Gredos.
- Eves, H. 1969. *Estudio de las geometrías*. México: UTEHA.
- Herstein, I.N. 1975. *Topics in Algebra*. XEROX,.
- Lebesgue, H. 1950. *Leçons sur les constructions géométriques*. París: Gauthier-Villars, ..
- Martín, G. 1998. *Geometric constructions*. New York : Springer-Verlag.
- Moise, F.E. y Downs, F.L. 1970. *Geometría moderna*. México: Addison-Wesley Iberoamericana..
-



# Los huesos de Napier

---

Joaquín Delgado<sup>1</sup> y Jerónimo Zamora<sup>2\*</sup>

Departamento de Matemáticas, UAM-I

[jdf@xanum.uam.mx](mailto:jdf@xanum.uam.mx); [zacj@oso.izt.uam.mx](mailto:zacj@oso.izt.uam.mx)

## 3.1 Introducción

Desde la antigüedad, la multiplicación de cantidades ha dado lugar a problemas de algorítmica relacionados con los sistemas de numeración. En particular, el uso de la base decimal (aporte indoarábico) produjo importantes cambios en los métodos aritméticos y representó un avance notable en comparación con otros sistemas de numeración, como el sistema romano o griego.

En occidente el sistema decimal fue introducido por Cardano y Vieta, entre otros. En 1494, Luca Pacioli (también conocido como Luca di Borgo) (1445-1514?, 1509?) publica en Venecia, *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalità*, donde consigna ocho algoritmos de multiplicación (dos de ellos se mencionan más adelante). Estos métodos fueron los antecesores del algoritmo actual de multiplicación y constituyeron un avance notable en la aritmética práctica. Johanes Napier destaca con un método que prefigura la mecanización de la aritmética actual (Blaise Pascal inventó varios años después la primera sumadora mecánica antecedente de las actuales calculadoras electrónicas: *la Pascalina*). El método de Napier se basa en un arreglo ingenioso de las tablas de multiplicar impresas sobre barras, de modo que colocadas adecuadamente permiten obtener con rapidez el resultado de multiplicar dos números de varios dígitos. A tales barras se les conoce como los *Huesos de Napier* en honor a su autor, debido a que habían sido construidas en marfil.

## 3.2 Métodos de multiplicación

Durante mucho tiempo los matemáticos se habían preocupado por la realización de la multiplicación de números muy grandes –operación muy frecuente en los cálculos astronómicos y consecuentemente en la navegación– lo cual consumía una cantidad enorme de esfuerzo y tiempo del calculador. A finales

---

\* Los nombres de los autores aparecen en orden alfabético.

del siglo XVI se tenían diversos métodos para realizar la multiplicación de números grandes. Algunos de los métodos consistían en el uso de la prostaféresis, es decir, en el cambio de la multiplicación por la adición o sustracción. Para simplificar los procedimientos de cálculo (por lo general muy tediosos), se utilizaban tablas que compilaban cálculos básicos. Por ejemplo, un método ya conocido por los babilonios se basaba en la identidad

$$ab = \frac{1}{4}((a + b)^2 - (a - b)^2), \quad (1)$$

la cual se comprueba al desarrollar los cuadrados. Ellos también usaron la expresión

$$ab = [(a + b)^2 - a^2 - b^2] / 2,$$

y compilaron tablas de cuadrados de números para facilitar la multiplicación de dos números. Este método fue usado aún en el siglo XIX; en Francia en 1856 se editaron unas tablas compuestas por Alejandro Cossar tituladas: *Tablas de los cuadrados de números del 1 al 1000 millones, con ayuda de la cual se halla el producto exacto de números mediante un sistema sencillo en extremo y más cómodo que el de logaritmos*. De acuerdo con la obra, el resultado al multiplicar dos números es más exacto que el que se obtiene con los logaritmos. Sin embargo, el ámbito de aplicación de los logaritmos es mucho más amplio, pues permiten hacer multiplicaciones de más de dos factores, así como calcular raíces fraccionarias. Por otro lado, las propiedades funcionales de los logaritmos hicieron posible desarrollos teóricos posteriores, así como un grado de precisión arbitrariamente alto, tan sólo restringido por el cálculo manual y la manipulación de series geométricas y aritméticas. En suma, el concepto de logaritmo tuvo mayor trascendencia que los meros métodos prostaféuticos.

Otro método antiguo de multiplicación fue el *método egipcio*, consistente en dividir entre dos y duplicar; otro método similar fue el *algoritmo ruso*. Ambos algoritmos usan la aritmética binaria.

## El método egipcio

El método más antiguo de multiplicación que se conoce se basa en la duplicación sucesiva y tuvo su origen en Egipto. En el papiro de Ahmes que data del 1850 a.C. se recomienda realizar la multiplicación de la siguiente forma: Si por ejemplo, se desea 41 por 59,

1. Se colocan los números encabezando dos columnas

2. Se repite el primer número de la segunda columna. Se duplica el número de la segunda columna tantas veces como sea necesario, de acuerdo con lo que sigue. En la primera columna, debajo del número inicial se coloca el 1, después el 2, luego el 4 y así sucesivamente, hasta que se llega a un número cuyo doble es mayor que el número inicial.

41	59
1	59
2	118
4	236
8	472
16	944
32	1888

El proceso se detuvo pues el doble de 32 es 64.

3. Se procede a realizar las siguientes sustracciones con los números de la primera columna.

$$41 - 32 = 9, \quad 9 - 8 = 1, \quad 1 - 1 = 0.$$

Es decir, se resta de 41 el mayor número de la columna izquierda, 32.

Al residuo 9, se le resta el mayor número de la columna izquierda que es menor que 9, es decir, 8.

Del mismo modo, al residuo 1, se le resta el 1, terminando aquí el proceso. Obsérvese que

$$41 = 32 + 8 + 1.$$

Otra manera de ver este proceso es “reconstruir” el factor 41 mediante los números de la primera columna, de abajo hacia arriba:

$$41 = 32 + \text{“algo”} \quad \text{que no puede ser 16 porque se pasa, entonces}$$

$$41 = 32 + 8 + \text{“algo”} \quad \text{que no puede ser 4 porque se pasa, entonces}$$

$$41 = 32 + 8 + 1 \quad \text{finalizando la “reconstrucción”}.$$

4. Se suman los números en la segunda columna correspondientes a 1, 8 y 32,

41	59
1	59 *
2	118
4	236
8	472 *
16	944
32	1888 *
	2419

El resultado es 2419.

A continuación daremos una justificación formal del algoritmo egipcio. Sean  $a$  y  $b$ , los números enteros no negativos que se van a multiplicar. En representación binaria

$$a = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + \dots + a_k 2^k, \text{ con } a_i = 0 \text{ ó } 1.$$

Entonces

$$ab = a_0(b) + a_1(2b) + \dots + a_k(2^k b).$$

Los números entre paréntesis forman las duplicaciones sucesivas del número  $b$  que forman la segunda columna en el algoritmo (véase la tabla abajo). En la columna bajo el número  $a$  aparecen las potencias de 2.

$A$	$b$
1	$b$
2	$2b$
$2^2$	$2^2 b$
$\vdots$	$\vdots$
$2^k$	$2^k b$

Si ahora multiplicamos los elementos de la primera columna por los coeficientes correspondientes de la expansión binaria de  $a$  habremos “reconstruido” al número  $a$ , como se muestra en la siguiente tabla

	$a$	$b$
$a_0 \times$	1	$b$
$a_1 \times$	2	$2b$
$a_2 \times$	$2^2$	$2^2 b$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_k \times$	$2^k$	$2^k b$

$$a = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + \dots + a_k 2^k$$

Como los coeficientes  $a_i$  son 0 ó 1, solo aquellos que son iguales a 1 son los que aparecerán explícitamente en dicha suma, esto es equivalente a haber marcado los coeficientes que habrán de sumarse en la última columna:

	$a$	$b$	
1	1	$b$	*
0	2	$2b$	
1	$2^2$	$2^2 b$	*
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
0 ó 1	$2^k$	$2^k b$	* ó sin marcar

$$ab = a_0(2b) + a_1(2^2 b) + \dots + a_k(2^k b)$$

Esto justifica el algoritmo.

### El método ruso

Para multiplicar  $24 \times 18$  se usan las siguientes reglas

1. Se escriben los dos números al principio de dos columnas.



Primera	Segunda
24	18

2. Se duplica el número de la primera columna y se divide entre dos el número de la segunda columna.

24	18
48	9

3. Si el número en la segunda columna es par, se marca todo el renglón

*24	*18
48	9

4. Se continua este proceso de duplicar, dividir entre dos y marcar hasta que el número en la segunda columna sea 1.

*24	*18
48	9
*96	*4
*192	*2
384	1

5. Se suman los números no marcados de la primera columna

*24	*18
48	9
*96	*4
*192	*2
384	1
<hr/>	
432	

Como el algoritmo ruso es tan sólo una modificación del método egipcio, la justificación matemática y se encuentra en la unicidad de la expansión binaria y la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma.

Escrito en italiano, la *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalità* es uno de los primeros libros impresos sobre matemáticas

---

que es considerado una enciclopedia de los conocimientos matemáticos aún en el siglo XV y sirvió de base para el ulterior desarrollo de las Matemáticas en Europa. En él se describen dos métodos populares de multiplicación: el método del tablero y el método de la celosía. A continuación se describe el primero.

### El método del tablero

Comenzaremos con un ejemplo simple. Multipliquemos  $365 \times 2$ .

Escribamos los sumandos de la multiplicación

$365 \times 2 = (300 + 60 + 5) \times 2 = 600 + 120 + 10$  en filas alineadas por la derecha

Tabla 1

	1	0
1	2	0
6	0	0

Sumando por columnas obtenemos el resultado 730.

Veamos un ejemplo más complicado. Multipliquemos 365 por 2001.

Realicemos el siguiente arreglo: en la primera fila se coloca uno de los factores, digamos 2001. Se multiplica  $1 \times 365 = 365$  y se escribe en diagonal en dirección Noreste  $\rightarrow$  Suroeste comenzando por las unidades. Se continúa multiplicando el siguiente dígito del factor 2001, es decir, 0 por 365. El resultado 000 se dispone en la misma manera que antes, excepto que se desplaza un lugar a la izquierda. Ahora se multiplica el tercer dígito de 2001, es decir, 0 por 365. El resultado 000 se dispone en la misma manera que antes, excepto que se desplaza un lugar a la izquierda. Finalmente se multiplica el último dígito de 2001, es decir, 2 por cada dígito de 365. El resultado 6, 12 y 10, se dispone nuevamente en diagonal (siguiendo estrictamente la regla), escribiendo los dígitos correspondientes a las decenas a la izquierda de las unidades como se muestra en la región sombreada

Tabla 2

		2	0	0	1
--	--	---	---	---	---

					5
				6	
			3		
				0	
			0		
		0			
			0		
		0			
	0				
	1	0			
1	2				
6					

7	3	0	3	6	5
---	---	---	---	---	---

Finalmente, para obtener el resultado se suman los números por columnas a partir de la segunda fila. En este ejemplo, el producto es 730365.

Este método de multiplicar es en esencia –salvo algunas variantes– el que utilizamos actualmente. Puede reconocerse si reordenamos la tabla en el modo familiar

		2	0	0	1
	×	3	6	5	
<hr/>					
			3	6	5
		0	0	0	
	0	0	0		
	1	0			
1	2				
6					
<hr/>					
7	3	0	3	6	5



A continuación se justifica por qué funciona este algoritmo en el caso particular

$$\begin{aligned}
 365 \times 2001 &= 365 \times (2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 1) \\
 &= 365 \times 2 \times 10^3 + 365 \times 0 \times 10^2 + 365 \times 0 \times 10^1 + 365 \times 1 \\
 &= (365 \times 2) \times 10^3 + 000 \times 10^2 + 000 \times 10^1 + 365 \times 1 \\
 &= (365 \times 2) \times 10^3 + 00000 + 0000 + 365
 \end{aligned}$$

Observe que los últimos tres sumandos aparecen en la subtabla de la Tabla 2,

				5
			6	
		3		
			0	
		0		
	0			
		0		
	0			
0				

que si se rellenan las diagonales con ceros a la derecha queda:

				5
			6	
		3		0
			0	
		0		0
	0		0	
		0		
	0			
0				

Finalmente  $(365 \times 2)$  se ha calculado en la Tabla 1. El factor  $10^3$  en el sumando  $(365 \times 2) \times 10^3$  del producto  $365 \times 2001$ , indica que debemos insertar la Tabla 1 debajo de la subtabla última, pero desplazando 3 lugares a la izquierda

Tabla 3

					5
				6	
			3		0
				0	
			0		0
		0		0	
			0		
		0			
	0				
	1	0			
1	2	0			
6	0	0			

Observe que las Tablas 2 y 3 difieren tan sólo por ceros a la derecha y no afectan la suma por columnas.

Veamos otro ejemplo: Multiplíquese  $5678 \times 23$ .  
Primero multiplíquese  $5678 \times 3$  como se muestra en la tabla

	5	6	7	8
--	---	---	---	---

			2	4
		2	1	
	1	8		
1	5			

1	7	0	3	4
---	---	---	---	---

Ahora multiplíquese  $5678 \times 2$  siguiendo el mismo método

	5	6	7	8
--	---	---	---	---

			1	6
		1	4	
	1	2		
1	0			

1	1	3	5	6
---	---	---	---	---

El resultado de multiplicar  $5678 \times 23$  se obtiene si sumamos los resultados parciales  $5678 \times 2$  y  $5678 \times 3$ , pero trasladando la segunda un lugar a la izquierda, respecto de la primera

	1	7	0	3	4
1	1	3	5	6	

1	3	0	5	9	4
---	---	---	---	---	---

---

Ambas multiplicaciones se pueden disponer en una misma tabla como sigue

		5	6	7	8
--	--	---	---	---	---

				2	4
			2	1	
		1	8		
	1	5			
			1	6	
		1	4		
	1	2			
1	0				

1	3	0	5	9	4
---	---	---	---	---	---

### El método de la celosía

Como primer ejemplo se pide multiplicar  $2001 \times 365$

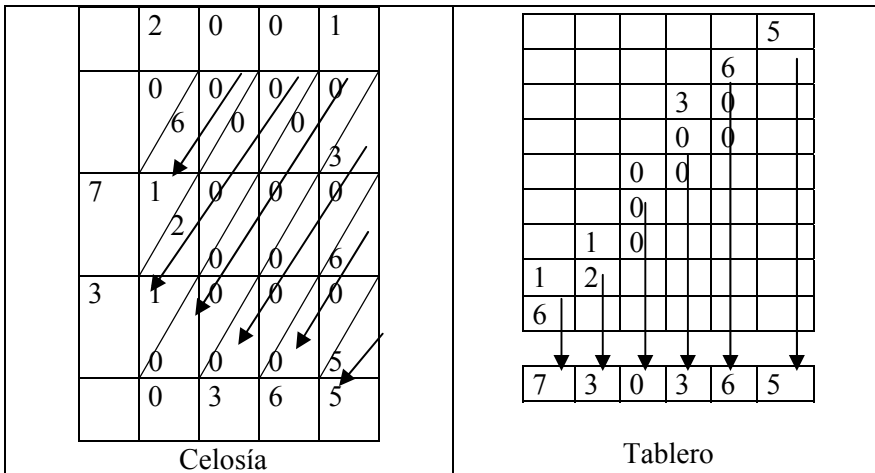
Se construye una tabla con el mismo número de columnas que dígitos del primer factor 2001, es decir 4, y el mismo número de filas que dígitos tiene el segundo factor 365. En este caso, 3. Colocamos encima de la tabla el primer factor y a la derecha de la tabla el segundo factor en forma de columna. Cada celda se divide por una diagonal.

Comenzamos por multiplicar el dígito de la izquierda de 365, es decir 3, por cada uno de los dígitos de 2001, colocando el resultado en la primera fila. Cada resultado parcial se escribe en el triángulo inferior si éste es menor que 10, haciendo uso del triángulo superior para las decenas. Los triángulos vacíos se llenan con cero. El resultado se obtiene sumando los números de la tabla en diagonal en dirección Noreste  $\rightarrow$  Suroeste comenzando por la esquina inferior derecha. Las sumas que se obtienen: 5, 6, 3, 0, se continúan en dirección de las manecillas del reloj para completar con 3,7. El resultado final se lee en la dirección contraria de las manecillas del reloj  $2001 \times 365 = 730365$ .

		2	0	0	1	
	0	0	0	0	0	3
		6	0	0	3	6
	1	0	0	0	0	6
7		2	0	0	6	5
	1	0	0	0	0	5
3		0	0	0	5	
		0	3	6	5	

Si la suma de una diagonal es mayor que nueve, se escribe el número de unidades y las decenas se agregan a la siguiente diagonal.

Este método puede considerarse una deformación geométrica del método del tablero. Decimos “geométrica” porque se compone de una transformación topológica de la tabla que no modifica las sumas. En efecto, en la siguiente figura, la suma por diagonales en la tabla de la izquierda corresponde a la suma por columnas en la tabla de la derecha.



### 3.3 Los huesos de Napier

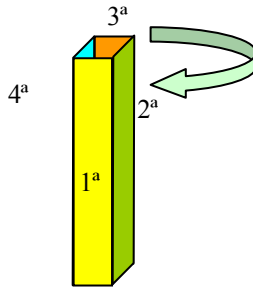
El método de multiplicación desarrollado por Napier consiste en un procedimiento mecánico que fue usado durante mucho tiempo y es conocido como *Huesos de Napier*, el cual puede ser considerado como la primera máquina de calcular. El proceso comienza con una serie de tablas arregladas de tal forma que proporciona un verdadero algoritmo para realizar multiplicaciones de números. Esta invención fue publicada en 1617, después de la muerte de John Napier, bajo el título *Rabdologie, sev numerationis per virgulas libri duo*, Edimburgo. La palabra Rabdología proviene del griego (ραβδος, varilla) y (λογια, colección). En 1667 se hizo una traducción al inglés por W. Leybourn *The Art of Numbering by Speaking Rods: Vulgarly termed Nepeir's Bones*, donde se usa una falsa etimología al no reconocer el uso de Napier de la palabra λογια □Las varas para calcular fueron hechas de marfil, lo cual explica por qué son conocidas como huesos de Napier. El trabajo principal sobre los huesos se encuentra en *Rabdologie*. A continuación se explica cómo se puede reducir la multiplicación a simples adiciones con la ayuda de los huesos de Napier, pero antes se da una descripción de diez huesos.

Si se tienen diez huesos, los cuatro primeros se marcan de la siguiente manera. Obsérvese que hay dieciséis caras. En la parte inferior de los cuadrados de la primera cara (es decir, de la cara que se tiene al frente) se colocan ceros. Esto vale para cuatro de las dieciséis caras.

Si se voltea cada una de las barras de tal manera que la tercera cara quede al frente pero de abajo hacia arriba, se escriben los productos de 9 por 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; es decir, se escriben los números 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81. Esto vale para otras cuatro caras de las dieciséis con lo cual sólo quedan ocho caras para los restantes ocho dígitos (véanse Figuras 1 y 2).

---

Un hueso consiste de una barra oblonga con cada una de las cuatro caras rectangulares marcadas adecuadamente con números. Cada cara de una barra se divide en diez cuadros de igual longitud. En el cuadrado superior se coloca alguno de los dígitos del 1 al 9 (en el ejemplo que se muestra a la derecha se escogió el 3). Los siguientes nueve cuadros se han dividido a la mitad por líneas diagonales y en éstos se colocan los múltiplos del dígito escogido, ocupando la mitad inferior para las unidades y la mitad superior para las decenas. Las caras se numeran en el sentido de las manecillas del reloj como muestra la figura. Así, la primera cara es la de enfrente, la segunda la que aparece al rotar  $90^\circ$ , la tercera la que aparece al rotar  $180^\circ$  y la cuarta al rotar  $270^\circ$ .



3
0 / 3
0 / 6
0 / 9
1 / 2
1 / 5
1 / 8
2 / 1
2 / 4
2 / 7

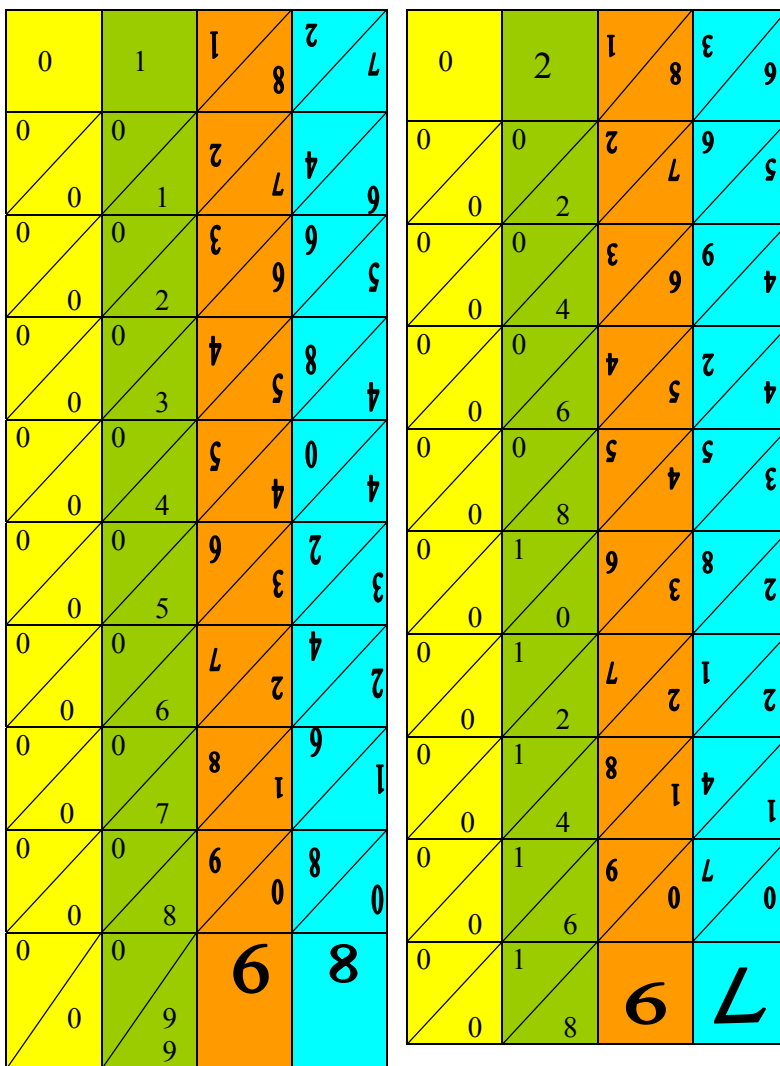


Figura 1. Primera y segunda barras

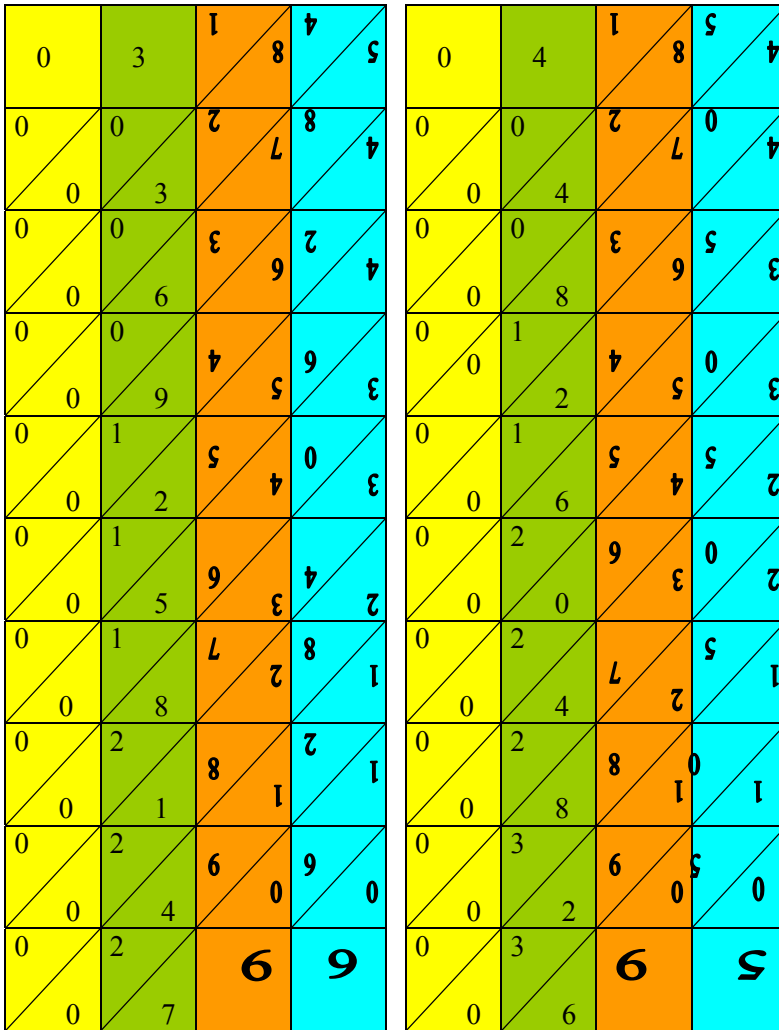


Figura 2. Tercera y cuarta barras



La segunda cara de la primera barra se llena con los múltiplos de 1; es decir, se escriben los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. La cuarta cara se llena con los múltiplos de 8, (8 es el complemento de 1 con respecto a 9) de abajo hacia arriba tal y como se llenó la tercera cara. En la cuarta cara se escriben los dígitos 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72.

Similarmente la segunda y cuarta caras de la segunda barra se llenan con los múltiplos de 2 y 7, respectivamente.

En la segunda y cuarta caras de la tercera barra se colocan los múltiplos de 3 y 6; y en la cuarta barra en las caras segunda y cuarta se colocan los múltiplos de 4 y 5.

Así que en las primeras cuatro barras se tendrán las tablas de multiplicación hasta la del nueve, de los primeros 10 dígitos, 0, 1,...,9. Notemos que se tienen cuatro columnas de ceros y cuatro columnas de múltiplos de 9.

Ahora bien, en la primer cara de las siguientes tres barras (la quinta, sexta y séptima), numerada con el 1, se colocan en columna los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. En la cara opuesta, la tercera, se escriben, de abajo hacia arriba, los correspondientes productos de 8 con los nueve dígitos (es decir, se escriben los números 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72). Véase la Figura 3.

---

1	2	2	3
0	0	4	6
1	2	6	5
0	0	6	9
2	4	5	4
0	0	8	2
3	6	4	4
0	0	0	5
4	8	4	3
0	1	2	8
5	0	3	2
0	1	4	1
6	2	2	2
0	1	6	4
7	4	1	1
0	1	8	7
8	6	0	0
0	1	8	7
9	8	8	7

1	3	2	4
0	0	4	8
1	3	6	4
0	0	6	2
2	6	5	4
0	0	8	6
3	9	4	3
0	1	0	0
4	2	4	3
0	1	2	4
5	5	3	2
0	1	4	8
6	8	2	1
0	2	6	2
7	1	1	1
0	2	8	6
8	4	0	0
0	2	8	6
9	7	8	6

1	4	2	5
0	0	4	0
1	4	6	4
0	0	6	5
2	8	5	3
0	1	8	0
3	2	4	3
0	1	0	5
4	6	4	2
0	2	2	0
5	0	3	2
0	2	4	5
6	4	2	1
0	2	6	0
7	8	1	1
0	3	8	5
8	2	0	0
0	3	8	5
9	6	8	5

Figura 3. Quinta, sexta y séptima barras.

De las caras restantes, en la segunda cara de cada barra se colocan las columnas de múltiplos de 2, 3, 4, respectivamente; en las cuartas caras se colocan las columnas de múltiplos de los complementos 7, 6, 5, estas escritas de abajo hacia arriba.

En este momento se tienen marcadas siete barras con las columnas de 0, 1, 8, 9 repetidas cuatro veces y las columnas de 2, 3, 4, 5, 6, 7 se repiten dos veces.

En las barras octava y novena, las dos primeras caras se encabezan las columnas con el 2 y se ponen sus múltiplos. En la cara tercera se escriben (de

abajo hacia arriba), los múltiplos del complemento de 2, o sea el 7. En las restantes dos caras segundas se colocan los múltiplos de 3 y 4 y en las caras opuestas, los complementos respectivos 6 y 5. Ver Figura 4.

2	3	3	4	5	2	4	3	3	4	5
0	0	6	8	4	0	0	6	5	4	4
2	3	2	2	4	2	4	9	4	4	3
0	0	9	4	4	0	0	2	4	3	3
4	6	4	6	3	6	9	4	0	3	2
0	0	2	4	3	0	1	5	3	3	2
6	6	5	3	3	8	2	8	0	2	2
0	1	8	4	2	1	1	8	4	2	2
8	2	3	2	2	0	5	2	2	1	1
1	1	8	2	1	1	1	1	8	2	1
0	5	1	2	1	2	8	2	2	0	1
1	1	1	8	1	1	2	4	1	5	1
2	8	1	2	1	2	4	1	2	1	1
1	2	4	1	2	1	2	4	1	0	1
4	1	1	2	1	4	8	1	1	1	1
1	2	7	0	6	1	3	7	5	0	0
6	4	0	6	0	9	2	0	0	0	0
1	2	7	6	6	1	3	7	5	0	0
8	7	7	6	6	8	9	7	5	0	0

Figura 4. Octava y novena barras.

En la décima barra se colocan los múltiplos de 3, 4, 5, 6 en la forma usual; es decir, en la primera cara se coloca la columna de 3, en la segunda cara se coloca la columna de 4 y en las caras tercera y cuarta se colocan, de abajo hacia arriba, los complementos respectivos – las columnas de 6 y 5. Ver Figura 5.

3	4	4	5
0	0	8	0
3	4	2	5
0	0	4	3
9	8	6	0
0	1	3	3
1	1	0	5
2	6	3	2
1	2	4	0
5	0	2	2
1	2	8	5
8	4	1	1
2	2	2	0
1	8	1	1
2	3	6	5
4	2	0	0
2	3	6	5
7	6	6	5

Figura 5. Décima barra.

Como ayuda, se considera un hueso con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 para indicar los renglones necesarios. En la Figura 6 se muestra un modelo en madera de los huesos de Napier.

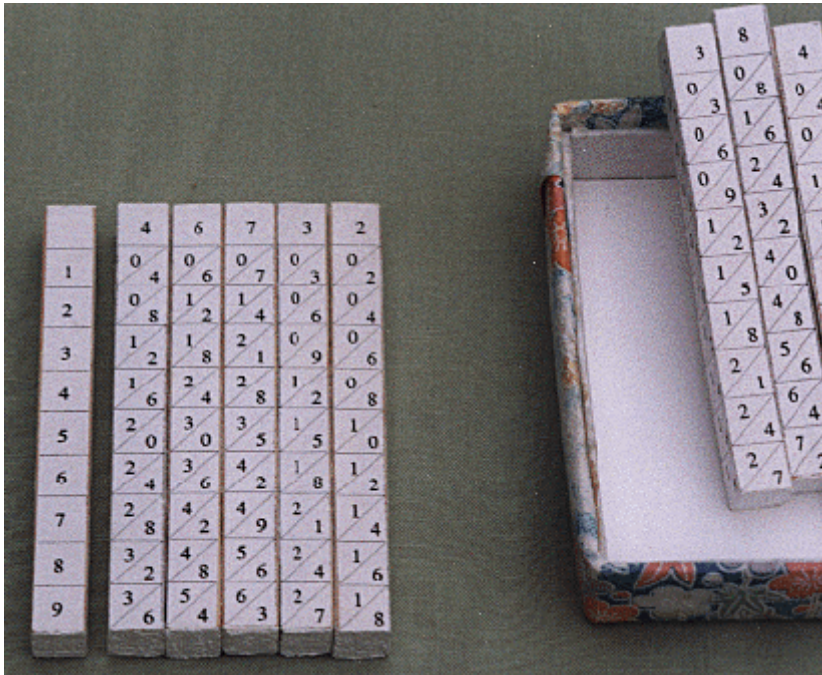


Figura 6. Modelo hecho en madera de los huesos de Napier.

A continuación se dan ejemplos del uso de los huesos de Napier. Tengamos en cuenta que cada hueso contiene cuatro tablas de multiplicación de uno de los números entre 0 y 9.

Para multiplicar 2568 por 7, se colocan cuatro huesos uno al lado del otro con las caras mostrando las columnas respectivas de 2, 5, 6 y 8. El renglón 7 muestra el siguiente arreglo

	2	5	6	8
1	0 2	0 5	0 6	0 8
2	0 4	1 0	1 2	1 6
3	0 6	1 5	1 8	2 4
4	0 8	2 0	2 4	3 2
5	1 0	2 5	3 0	4 0
6	1 2	3 0	3 6	4 8
7	1 4	3 5	4 2	5 6
8	1 6	4 0	4 8	6 4
9	1 8	4 5	5 4	7 2

Como el producto se evalúa diagonalmente el resultado es 17976, el cual se obtuvo de la siguiente manera comenzando por la derecha: 6 se deja tal cual;  $7 = 2 + 5$ ;  $9 = 5 + 4$ ;  $7 = 4 + 3$ ; 1 se deja tal cual (ocasionalmente se debe acarrear algún 1). También se puede explicar como lo indica el siguiente diagrama

$$\begin{array}{r}
 7 \times 2 = 14 \quad (7 \text{ por } 2000) \\
 7 \times 5 = 35 \quad (7 \text{ por } 500) \\
 7 \times 6 = 42 \quad (7 \text{ por } 60) \\
 7 \times 8 = 56 \quad (7 \text{ por } 8) \\
 \hline
 7 \times 2568 = 17976
 \end{array}$$

Ejemplo. Multiplíquese 2001 por 365

	2	0	0	1
1	0 2	0	0	0 1
2	0 4	0	0	0 2
3	0 6	0	0	0 3
4	0 8	0	0	0 4
5	1 0	0	0	0 5
6	1 2	0	0	0 6
7	1 4	0	0	0 7
8	1 6	0	0	0 8
9	1 8	0	0	0 9

Para obtener el resultado, ordenamos los renglones de arriba y sumamos por diagonales, como en el método de la celosía .

### Por qué funcionan los huesos de Napier

El método de construcción de los huesos que hemos descrito aquí se debe al propio Napier. No se conoce la razón por la que escribió los números “al revés” en las columnas 3 y 4, pero esto evita confundir dígitos como el 9 con el 6 y facilita el manejo de los huesos.

La razón de por qué funcionan los huesos debe ser evidente a estas alturas, ya que se basa en el método de la celosía explicado anteriormente.

## Consecuencias pedagógicas

En el XIX Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana celebrado en la ciudad de Durango, presentamos en una conferencia de divulgación para profesores de primaria, un modelo de los huesos de Napier construido con barras de unicel de un metro de largo aproximadamente, numeradas con plumones de colores. La respuesta de los maestros fue positiva, y muchos de ellos dijeron desconocer o no haber escuchado nada acerca de los huesos de Napier. En el Diplomado de Enseñanza impartido por la profesora Cristianne Butto, de la Universidad de las Américas (UDLA) de la Cd. de México, sus alumnos construyeron modelos de los huesos de Napier usando diversos materiales como: palitos de paleta agrupados en bloques de 4 con números pirograbados, paralelepípedos de cartulina con números diseñados con pintura serigráfica y bloques de madera, entre otros. La experiencia docente muestra que los huesos de Napier pueden usarse con éxito en la enseñanza del sistema de numeración decimal y las operaciones de multiplicación, si se permite que el alumno se involucre en la propia construcción y reflexione sobre el por qué de su funcionamiento.

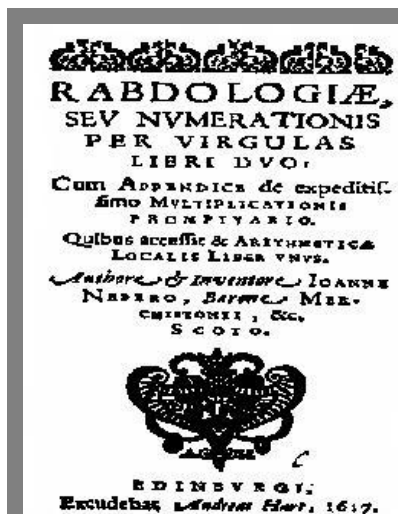


Figura 7. Portada de la edición póstuma de *Rabdologie* de Napier



## **Agradecimientos**

Uno de los autores (J. Delgado) agradece el apoyo recibido por proyecto CONACYT 32167-E.

## **Referencias**

Cajori, Florian 1980. *A History of Mathematics*. Chelsea Publishing Company  
Prieto, Rodríguez Sotero. 1991. *Historia de las Matemáticas*. Toluca: IMC/Ediciones.

Smith, D. E. 1959, *A source book in Mathematics* (125 selections from the classic Writings). N.Y: Dover Publications.

F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson, V. Katz (Eds.). 1994. *Learn from the masters!* The Mathematical Association of America

<http://www-groups.dcs.stnd.ac.uk/~history/HistTopics/>

<http://forum.swarthmore.edu>

<http://es.rice.edu/ES/humsoc/Galileo/Catalog/Files/>

<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history>

---

# El trabuco, máquina de guerra medieval, instrumento de interés

---

**Héctor Covarrubias M.**

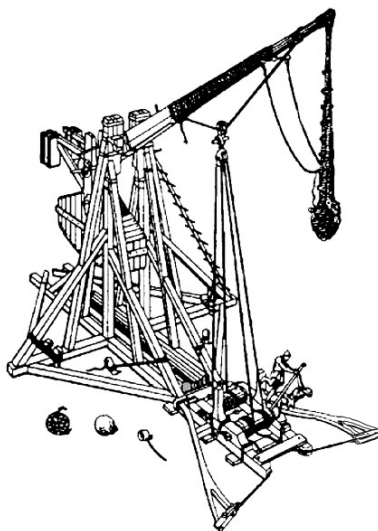
Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico, UNAM.

covarh@aleph.cinstrum.unam.mx

Se presentan aspectos de la mecánica del trabuco, arma medieval que funciona por acción del peso de un lastre para lanzar proyectiles. El principio de conservación de la energía permite hacer una primera aproximación para conocer de qué variables depende su alcance. Se encuentra que es posible diseñar trabucos que transfieren toda la energía potencial inicial al proyectil como energía cinética. Se menciona la manera de obtener las ecuaciones de movimiento por medio de la función lagrangiana y se describe una solución numérica efectuada en computadora que es comparada con el comportamiento de un trabuco que lanza pelotas de beisbol.

## 4.1 Voltereta y trastorno, la gravedad es la responsable

Trabuco proviene de trabucar que es trastornar, o volcar lo de arriba abajo dando vuelta [Real academia, 1941]. Eso es lo que distingue al trabuco de otras máquinas de guerra que arrojan proyectiles. En vez de usar la torsión de cuerdas o la elasticidad de arcos, es el peso de un lastre el que hace girar un brazo en cuyo extremo hay una cuerda que a manera de honda lanza un proyectil. Un trabuco medieval grande podía arrojar un proyectil de 500 kilogramos haciéndolo llegar a 180 metros [Chevedden, 1995], y la fuerza aprovechada era la de gravedad. El trabajo de poner el trabu-



co a punto era hecho por hombres que tiraban de cuerdas o giraban malacates para elevar el lastre.

El trabuco fue muy usado, incluso después de la llegada de las armas de fuego. Dejó de usarse al ser sustituido por cañones grandes. La última vez que se tiene documentado su uso en guerra ocurrió en México. Bernal Díaz del Castillo [Díaz del Castillo, 1960] narra cómo, al no disponer Cortés de pólvora durante el sitio de Tenochtitlan, escuchó a uno de sus hombres, que se decía experimentado en el uso de trabucos, y le mandó construir uno. El

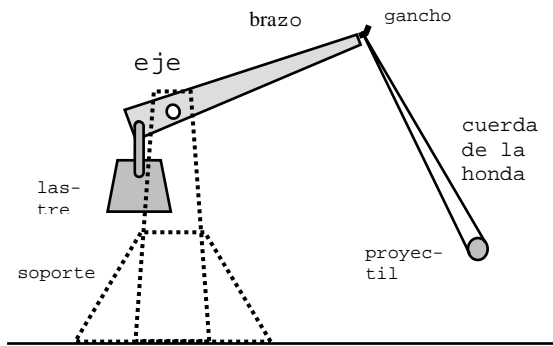


Fig 2. Partes elementales del trabuco

primer proyectil salió disparado hacia arriba y para enojo de Cortés cayó sobre la propia máquina, terminando así la larga vida de un arma que había sido decisiva en muchas batallas.

El trabuco es como una combinación de palanca y honda. El brazo está apoyado en un eje, situado en un punto que lo divide en dos partes de longitudes diferentes. En la parte corta está el lastre de masa grande que al descender hace que se eleve el extremo largo del brazo. En ese extremo, en un gancho, está fijada la cuerda que actúa como honda para lanzar al proyectil.

La Figura 1 es un dibujo de una reconstrucción de un trabuco medieval que lanza proyectiles esféricos de piedra. La Figura 2 muestra esquemáticamente las partes del trabuco.

La Figura 3 es de las posiciones sucesivas del brazo y la cuerda a intervalos iguales de tiempo. Su movimiento es como el de un péndulo doble en el que las posiciones del brazo y cuerda no tienen restricciones.

El movimiento de todo el conjunto es complicado y parecería que no es posible tener idea de algunos valores, como la velocidad de salida del proyectil, sin resolver las ecuaciones que son engorrosas. Sin embargo es posible conocer algunas cosas de manera sencilla.

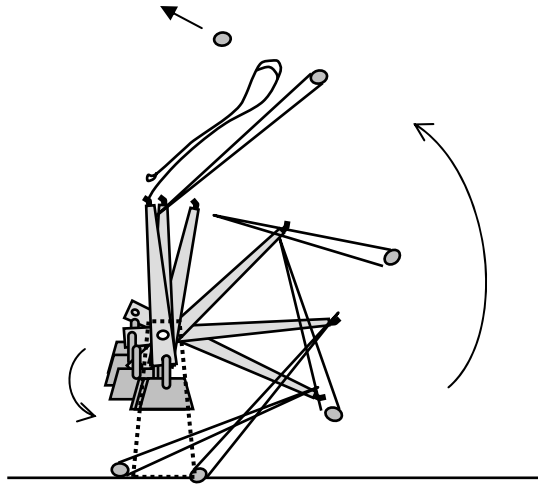


Fig 3. Posiciones sucesivas del trabuco al ser liberado

## 4.2 El principio de conservación de la energía facilita las cosas

Como la fuerza que impulsa todo el movimiento del trabuco es la de gravedad, con algunas suposiciones es posible hacer uso del principio de conservación de la energía. Supondremos unas condiciones que aunque ideales, no son de difícil aproximación: que las fuerzas de fricción son pequeñas para no considerarlas, y que en el momento en el que el proyectil es liberado por la honda, el lastre que pende del extremo corto del brazo está en su posición más baja y además en reposo.

En otras palabras, al final del proceso el trabuco no tiene energía cinética y su energía potencial es mínima. Eso indica que toda la energía potencial que tenía el lastre al iniciarse el movimiento ha sido transferida al proyectil. Eso nos permite calcular de manera simple el valor de la velocidad de salida del proyectil, y si suponemos un cier-

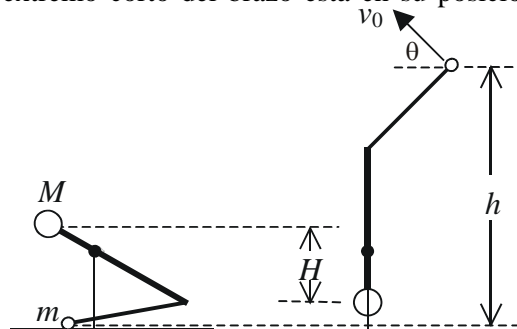


Fig. 4. Masas y cambios en su altura

to valor del ángulo de salida, podemos calcular su alcance.

La Figura 4 muestra al trabuco en dos configuraciones: la primera en reposo, justo antes de ser soltado, y la segunda después de haber girado, en el momento del disparo en el que también está en reposo, excepto por el proyectil, que se mueve con velocidad  $v_0$ .  $M$  representa la masa conjunta del brazo y el lastre, su posición es la del centro de masa de ambos. Como en el momento del inicio todo está en reposo, la energía presente es sólo la potencial de la masa  $M$ . Al final esta masa ha bajado la altura  $H$  y el cambio de energía que ha sufrido es:

$$E_1 = MgH \quad (2.1)$$

En el momento del disparo, según lo supuesto, el cambio en la energía que ha sufrido el proyectil es de un aumento de energías potencial y cinética:

$$E_2 = mgh + \frac{1}{2}mv_0^2, \quad (2.2)$$

por haberse elevado una altura  $h$  y adquirido una velocidad  $v_0$ .

Estas energías,  $E_1$  y  $E_2$ , son de igual magnitud, lo que una masa gana lo obtuvo de la otra:

$$MgH = mgh + \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (2.3)$$

De aquí despejamos el valor de  $v_0$ :

$$v_0 = \sqrt{2g \left( \frac{M}{m} H - h \right)}. \quad (2.4)$$

El proyectil, en su trayectoria parabólica tiene un alcance,  $x_m$ , dado por la expresión:

$$x_m = \frac{v_0^2}{g} \text{sen}2\theta, \quad (2.5)$$

en donde  $\theta$  es el ángulo que forma la velocidad de salida respecto a la horizontal. De la ecuación (4):

$$x_m = 2 \left( HM / m - h \right) \text{sen}2\theta. \quad (2.6)$$


---

### 4.3 El trabuco en la Luna, su tamaño y el alcance

De la ecuación (2.6) vemos que el alcance no depende del valor de  $g$ . Si el trabuco fuera disparado en la Luna su alcance sería el mismo que en la Tierra. Es la gravedad la que lo impulsa y también la que limita el alcance del proyectil. Definimos las razones de alturas y de masas:

$$q = h / H \quad (3.1)$$

$$\mu = M / m \quad (3.2)$$

Al sustituir esos valores en la ecuación del alcance, (2.6), ésta queda:

$$x_m = 2H(\mu - q)\text{sen}2\theta \quad (3.3)$$

El alcance máximo al mismo nivel del que se dispara el proyectil ocurre cuando  $\theta = 45^\circ$ , supondremos ese caso. Si se construyen trabucos de varios tamaños pero conservando las proporciones tanto de longitudes como de masas,  $\mu$  y  $q$  son constantes y la ecuación (3.3) nos muestra que el alcance es proporcional a  $H$ . Como  $H$  depende de la longitud del brazo, vemos que el alcance es proporcional al tamaño del trabuco. Son valores típicos de las razones:  $\mu = 100$  y  $q = 8$ . Como  $q$  es un orden de magnitud menor que  $\mu$ , aproximamos:

$$\mu - q \approx \mu, \quad (3.4)$$

así, por la ecuación (3.3), el alcance a  $45^\circ$ :

$$x_m \approx 2\mu H \quad (3.5)$$

Esta ecuación muestra que el alcance es aproximadamente proporcional a la razón de masas y al tamaño del artefacto, de aquí vemos por qué se llegaron a construir trabucos enormes, con grandes lastres y de brazos de unos 10 metros de longitud, en los que la  $H$  mide unos 2 metros, por lo que con una  $\mu = 80$ , por la ecuación (3.5) el alcance es aproximadamente de 320 metros [Vemming-Hawen, 1998].

---

## 4.4 Máxima transferencia de energía y ecuaciones de movimiento

Lo anterior está basado en la suposición de que toda la energía inicial es transferida al proyectil, cosa que parece una idealización simplificadora. Sin embargo sí es posible escoger valores de longitudes, masas y condiciones iniciales que llevan a esa transferencia. Experimentalmente se logra con un modelo de trabuco haciendo variaciones de los valores por ensayo y error. Pero para comprender mejor el comportamiento del trabuco es necesario plantear ecuaciones de movimiento e intentar encontrar su solución.

Una manera de encontrar las ecuaciones que describen el movimiento de un sistema es la que usa las ecuaciones de Lagrange [Fowler,1992], este método de trabajo está fundamentado en la conservación de la energía. Se define una función, llamada la lagrangiana del sistema, que depende de las energías potencial y cinética

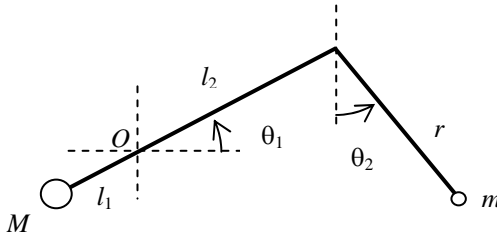


Fig 5. Trabuco libre

según ciertas coordenadas, que en nuestro caso son ángulos. La lagrangiana forma parte de las ecuaciones de Lagrange y a partir de ellas se encuentran las ecuaciones de movimiento buscadas.

Se definió la función lagrangiana de un sistema simple como el ilustrado en la Figura 5, llamado trabuco libre pues se considera que no hay restricciones a los valores de los ángulos que dan las posiciones del brazo y la cuerda. Los movimientos del brazo con lastre y la cuerda de honda con su masa en el extremo son interdependientes, es decir el comportamiento de uno afecta al otro. Es así que las dos ecuaciones obtenidas, (4.1) y (4.2), están acopladas, es decir las variables aparecen en ambas y es necesaria su solución simultánea para conocer el movimiento del sistema.

$$-\ddot{\theta}_1 m l_2 r \sin(\theta_1 - \theta_2) + \ddot{\theta}_2 m r^2 = \dot{\theta}_1^2 m l_2 r \cos(\theta_1 - \theta_2) - m g r \sin \theta_2 \quad (4.1)$$

$$\ddot{\theta}_1 (I + m l_2^2) - \ddot{\theta}_2 m l_2 r \sin(\theta_1 - \theta_2) = -\dot{\theta}_2^2 m l_2 r \cos(\theta_1 - \theta_2) + g (M l_1 - m l_2) \cos \theta_1 \quad (4.2)$$

En ellas  $M$  es la masa conjunta de brazo y lastre,  $m$  es la masa del proyectil,  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $l_1$  es la distancia del eje al centro de masa de brazo con lastre,  $l_2$  es la distancia del eje al gancho,  $r$  es la longitud de la cuerda,  $I$  es el momento de inercia del brazo con lastre,  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son los ángulos que determinan la posición del sistema (ver Figura 5),  $\dot{\theta}_1$  y  $\dot{\theta}_2$  son las velocidades angulares y  $\ddot{\theta}_1$  y  $\ddot{\theta}_2$  son las aceleraciones angulares.

## 4.5 Solución numérica

Estas ecuaciones no tienen una solución sencilla, pero al asignar valores numéricos a las variables es posible tener una descripción muy cercana del movimiento con algún algoritmo de aproximación numérica. Si se usa el método de Euler sólo se trabaja con ecuaciones de primer grado [Mathews, 1992]. La Figura 6 lo ilustra en el caso de una variable, un ángulo cuya segunda derivada o aceleración angular es función de la posición y la velocidad angulares. La velocidad angular se calcula para incrementos de tiempo pequeños como si se tratara de movimiento con aceleración constante, la posición se calcula como si el movimiento fuera de velocidad constante, también en un intervalo pequeño. Los nuevos valores de posición y velocidad son usados para un nuevo cálculo de aceleración repitiendo el ciclo.

En el caso de las ecuaciones (4.1) y (4.2) en el que hay parejas de variables, se trabaja de manera semejante con un ciclo de cálculo igual, pero con un sistema de dos ecuaciones lineales simultáneas, una para cada ángulo.

El instrumento idóneo para trabajar es la computadora. En un programa simulador de trabuco no hay impedimento para recorrer el ciclo de cálculo un número enorme de veces por haber escogido un valor pequeño para los intervalos de tiempo y así generar datos con precisión aceptable.

La Figura 7 es un diagrama tomado de pantalla de computadora de la simulación de las posiciones sucesivas en un caso dado. En el simulador se hacen variaciones de los valores de masas, longitudes y ángulos iniciales y se

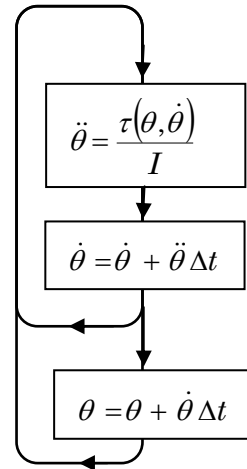


Fig 6. Ciclo de cálculo



observan los resultados. Se puede trabajar como si se tratara de un artefacto real con el que se experimenta y por ensayo y error se encuentran valores que cumplen con la condición de máxima transferencia de energía.

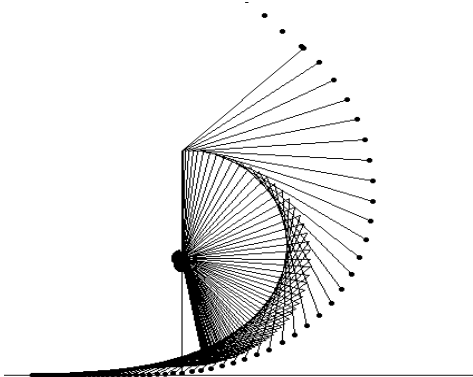


Fig. 7 Diagrama de posiciones sucesivas cada 0.01 seg. generado por el programa de simulación

Los valores hallados son de casos particulares, por ejemplo, dados valores de longitudes y de una masa es posible hallar el valor de la otra masa, pero no se tiene aun una manera de encontrar con seguridad los valores en un caso generalizado. Hace falta mayor análisis para encontrar las relaciones entre las variables al inicio que tengan como consecuencia segura la

transferencia total de energía.

## 4.6 Trabuco para lanzar pelotas

Con la ayuda del programa simulador se diseñó un trabuco hecho de madera (Figura 8) con un brazo  $l_1$  de 0.1 m y un  $l_2$  de 1.2 m capaz de lanzar pelotas de beisbol. En un caso la bola lanzada es de 159 g y la masa del lastre es de 29 kg. El valor de esta masa y el de la longitud de la cuerda, 1.61 m, fueron determinados con el programa de cómputo para lograr la máxima transferencia de energía. La velocidad de salida es de 21 m/s y el alcance de 32 m. Este alcance es menor del calculado con la ecuación (2.5) debido a la fricción del aire sobre la bola.



Fig 8. Trabuco lanzador de pelotas

Pero lo notable es que sí ocurre una transferencia casi total de energía, como se observa en el comportamiento del brazo posteriormente al disparo: el brazo queda casi en reposo. La transferencia no es total pues la velocidad de sa-

lida es menor a la calculada debido a la fricción del aire sobre la bola en la honda.

Al registrar en video al trabuco en acción es posible comparar su movimiento con el simulado. En las Figuras 9 y 10 se comparan las posiciones medidas, indicadas con marcas circulares y las posiciones calculadas mostradas con una línea continua. El desacuerdo en los valores grandes del tiempo es debido a la fricción del aire sobre la bola en la honda que la retrasa respecto a los valores calculados.

Otro efecto notable es el que se observa al comparar el movimiento cuando el brazo es liberado sin la pelota. En ese caso el brazo oscila con gran amplitud, su gran masa, de casi 30 kg, hace que el soporte, de unos 16 kg, llegue a saltar separándose del suelo a menos que sea restringido con cuerdas. En cambio, al moverse con la pelota, el movimiento del brazo es suave al inicio, muy rápido en la parte media de su trayectoria y de nuevo pierde velocidad suavemente hasta quedar detenido en la posición vertical y todo sin jalones ni saltos. Eso se observa como la pendiente de la curva en la Figura 9. Es de llamar la atención cómo la pelota de 160 gramos atada en la cuerda es capaz de gobernar el movimiento del brazo que tiene una masa 180 veces mayor.

Claro que es una interacción mutua entre masas, el peso de la grande es lo que impulsa a la pequeña, la inercia y movimiento de ésta influyen mucho sobre el movimiento de la primera. Este movimiento suave, que también se presenta en un trabuco de guerra aunque no transfiera toda la energía, era una de las ventajas del trabuco sobre las catapultas, pues en estas a cada tiro el golpe de su brazo con un tope las movía, haciendo necesario reorientarlas para no perder la puntería. Por el contrario, con el trabuco que no cambiaba su orientación, era posible hacer incidir proyectiles en sucesión rápida sobre el mismo sitio.

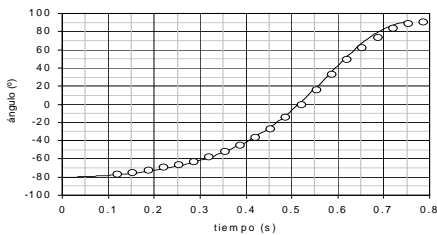


Fig. 9. Gráfica de la posición angular del brazo ( $\theta_1$ ) respecto del tiempo. La incertidumbre en el ángulo es de  $\pm 1^\circ$ .

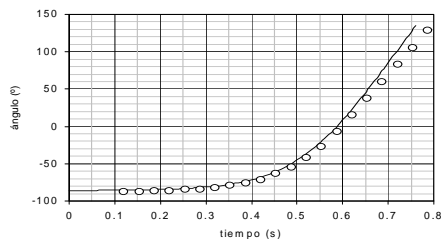


Fig. 10. Gráfica de posición angular de la cuerda ( $\theta_2$ ) respecto del tiempo. La incertidumbre en el ángulo es de  $\pm 1^\circ$ .

## 4.7 Trabucos, grandes, chicos, pesados y ligeros

La publicación de un artículo [Chevedden, 1995] disparó la construcción de trabucos por aficionados y escolares, principalmente en los Estados Unidos aunque los hay también en Europa y Australia (Gray Company). La mayoría de estos constructores trabajan sin usar la mecánica teórica como ayuda, solamente por ensayo y error, en esto se parecen a los constructores medievales. Se han hecho trabucos medianos para lanzar calabazas, grandes para lanzar personas al agua o automóviles compactos a su destrucción, y pequeños que lanzan trozos de queso a lo largo del salón de banquetes de un club de medievalistas.

La transferencia total de energía es sólo de interés para algunos. Esto es porque un trabuco que la logra no tiene el alcance máximo que él mismo puede conseguir y lo que interesa a la mayoría es llegar más lejos.

Es posible hacer una analogía de esto con una colisión elástica de partículas en una dimensión. Si una partícula originalmente en reposo es golpeada por otra igual, después del choque se mueve con una rapidez igual a la que tenía la partícula incidente y ésta última queda en reposo. Se ha transferido toda la energía cinética. En otro caso, si la misma partícula en reposo es ahora golpeada por otra de masa más grande que ella, la rapidez con la que sale es mayor que la de la partícula incidente y ésta no se detiene. La energía adquirida es mayor que en el primer caso pero es sólo una fracción de la energía de la partícula incidente.

En el trabuco también hay una interacción entre masas y se dan casos parecidos a los de las colisiones. Una razón de masas grande causa una gran velocidad de salida del proyectil aunque la masa grande no transfiera toda su energía.

La transferencia total de energía tampoco le hubiera interesado al llamado *Señor de los Tormentos* [Vemming-Hansen, 1998], el ingeniero medieval que dirigía la construcción y operación de las máquinas de guerra, y también las de tortura. Él deseaba causar daño a las fortificaciones enemigas sitiadas y para ello su trabuco debía lanzar proyectiles masivos desde una gran distancia, fuera del alcance de lanzas y flechas. Su trabuco era grande, tosco y pesado.

El trabuco que transfiere toda la energía al proyectil y al mismo tiempo, con la masa de lastre disponible, lo lanza lo más lejos posible, no lo lanza a gran distancia, y él mismo, aunque tenga un lastre grande, tiene un brazo ligero. Comparado con el de guerra se ve como gacela junto a un elefante. La función determina la forma. Este trabuco ligero es inútil como arma y poco atractivo como lanzador de pelotas, sólo llama la atención del estudioso que sabe por qué el artefacto se ha quedado en perfecto reposo después de arrojar una pelota.

---

## **Referencias**

- Chevveden, P. E. *et al.* (1995). "The trebuchet". *Scientific American* (**273**), (1), 58-63.
- Díaz del Castillo, B. (1960). *Historia verdadera de la conquista de la Nueva España*. México: Porrúa.
- Fowles, G. R. (1992). *Analytical Mechanics*. Estados Unidos: Holt Rinehart and Winston.
- Gray Company. Sitio Web: [www.iinet.net.au/~rmine/middel/html](http://www.iinet.net.au/~rmine/middel/html)
- Mathews, J. H. (1992). *Numerical Methods for Mathematics, Science and Engineering*. Estados Unidos: Prentice Hall.
- Real Academia Española. (1941). *Diccionario de la Lengua Española*.
- Vemming Hansen, P. (1998). *Middelalderens mekaniske apparater til krisbrug*. Dinamarca: Middelaldercentret.
-

# Transformaciones geométricas y máquinas articuladas

---

**Francisco Struck Chávez**  
Facultad de Ciencias, UNAM  
[fsc@hp.fciencias.unam.mx](mailto:fsc@hp.fciencias.unam.mx)

## 5.1 Introducción

Una gran cantidad de conceptos matemáticos conocidos en la antigüedad han sido reinterpretados haciendo uso del concepto de función y de las estructuras algebraicas.

Un ejemplo muy ilustrativo y bonito se puede encontrar en cómo la geometría euclidiana clásica y la geometría moderna se estudian usando los conceptos mencionados.

En el programa de Erlagen, Félix Klein define geometría de la siguiente forma:

Una geometría es el estudio de aquellas propiedades de un conjunto  $S$  que permanecen invariantes cuando los elementos de  $S$  se someten a las transformaciones de un cierto grupo de transformaciones,  $\Gamma$ .

Así toda la teoría de congruencia se estudia a través de las isometrías, la teoría de semejanza se reinterpreta como composiciones de isometrías y homotecias. Las transformaciones de Möebius en el plano complejo son resultado de composiciones de inversiones en circunferencias (considerando a las reflexiones en rectas como un caso particular), y así la geometría compleja es el estudio del grupo transformaciones generado por las inversiones.

Mucho tiempo antes de Klein, y aún antes de haberse establecido claramente el concepto de función ya se habían diseñado máquinas que efectuaban las transformaciones geométricas elementales. Un ejemplo de esto son los pantógrafos.

Los pantógrafos son mecanismos muy sencillos y muy conocidos para ‘copiar figuras a escala’. Bastan unas cuantas varillas y unos tornillos para hacer un pantógrafo.

Aunque no sean tan conocidos, se pueden construir mecanismos tan sencillos como los pantógrafos para realizar otras transformaciones geométricas. En este artículo se muestra la forma de construir mecanismos articulados para realizar diversas transformaciones geométricas.

Usando únicamente varillas, articulaciones y rieles se proponen máquinas para trasladar, reflejar y rotar figuras. También analizaremos algunos mecanismos para hacer inversiones en una circunferencia.

## 5.2 Las isometrías

Una isometría es una transformación que preserva distancias. Las isometrías forman un grupo. Si a una figura se le aplica una isometría se obtiene una figura congruente. En el plano existen solamente cuatro tipos de isometrías, tres de las cuales son estudiadas desde el bachillerato: reflexión, traslación, y rotación (Fig. 1).

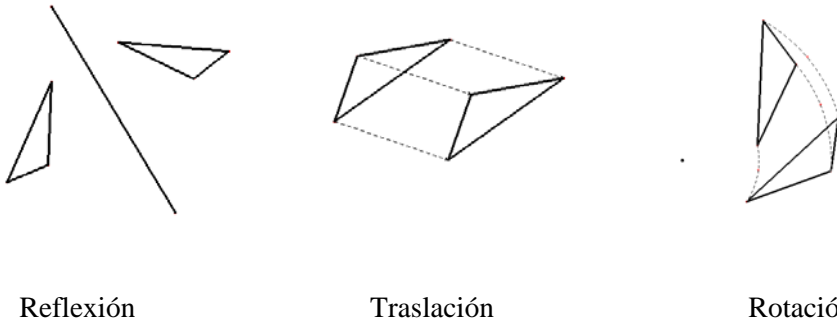


Fig. 1

La cuarta, que se conoce con el nombre de reflexión deslizada o simplemente deslizamiento, es la composición de una reflexión con una traslación en la

dirección de la línea de reflexión (Fig. 2).

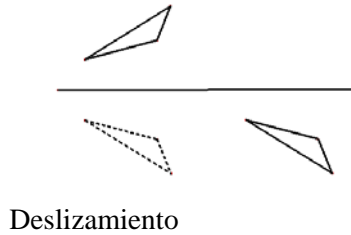


Fig. 2

Agregando esta última se puede demostrar que la composición de dos isometrías es una de estas cuatro y también que dadas dos figuras congruentes, existe una y sólo una isometría que lleva una en la otra.

Otra propiedad interesante de las isometrías es que todas ellas pueden ser generadas a partir de las reflexiones.

- 1) La composición de dos reflexiones en líneas paralelas produce una traslación en dirección ortogonal a las paralelas y con una longitud de traslación del doble de la distancia entre las paralelas (Fig. 3).

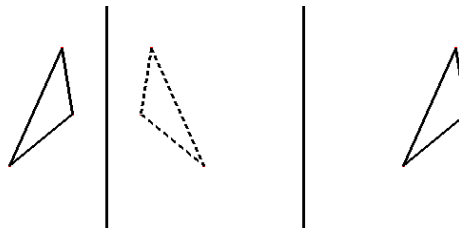


Fig. 3

- 2) La composición de dos reflexiones en líneas concurrentes en un punto  $O$ , produce una rotación con centro en  $O$  y de un ángulo igual al doble del ángulo que forman las líneas (Fig. 4).

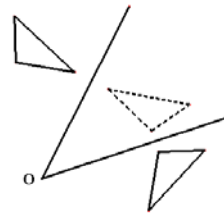


Fig.4

3) Sea  $l$  una línea y  $m$  y  $n$  dos paralelas, ortogonales a  $l$ , la composición de reflexiones en  $l$ ,  $m$  y  $n$  produce un deslizamiento (Fig. 5).

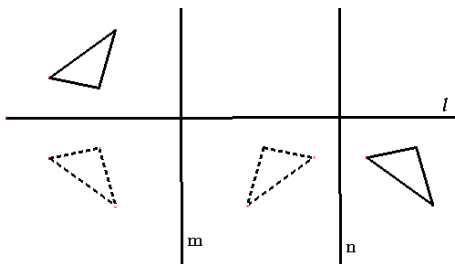


Fig. 5

Los inversos también son ciertos.

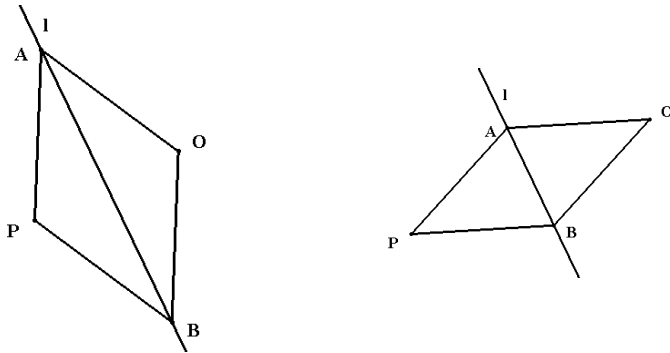
- 1) Toda traslación se puede expresar como la composición de dos reflexiones en líneas paralelas.
- 2) Toda rotación se puede expresar como composición de dos reflexiones en líneas concurrentes.
- 3) Todo deslizamiento se puede expresar como la composición de tres reflexiones en las líneas adecuadas.

Las demostraciones de todo lo que se ha afirmado y una explicación mucho más amplia se pueden encontrar en Martín [1982].

Entrando ya al tema de las máquinas articuladas, lo anteriormente expuesto nos muestra que basta con diseñar una máquina para hacer reflexiones para poder obtener cualquier isometría, usándola a lo más tres veces. En otras palabras, si tenemos una figura, podemos construir otra congruente a ella en cualquier lugar y en cualquier posición. Valiéndonos sólo de una máquina que refleje.

Ahora bien, construir una máquina para reflejar es sumamente sencillo. Fijemos un riel  $l$  en el que corren libremente los puntos A y B y ensamblamos cuatro varillas del mismo tamaño con articulaciones en A, B, O y P como se muestra en la Figura 6. Basta poner un puntero en O y un lápiz en P para tener la máquina.





Inversor

Fig. 6

Al mover O se mueve P de modo que la trayectoria de P es justamente la reflexión de la trayectoria de O respecto a  $l$ . La razón por la que esto ocurre es que los triángulos ABO y ABP son congruentes independientemente de la posición de O.

Para hacer una máquina que traslade (Fig 7) o una que rote (Fig 8) basta hacer dos máquinas que reflejen y 'pegarlas' adecuadamente.

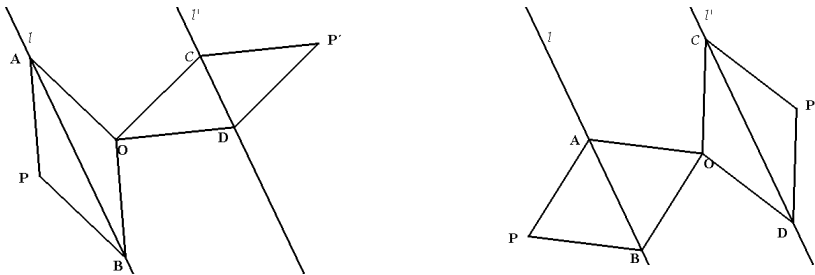


Fig. 7

Para una máquina que haga deslizamientos se requeriría pegar tres reflectores.

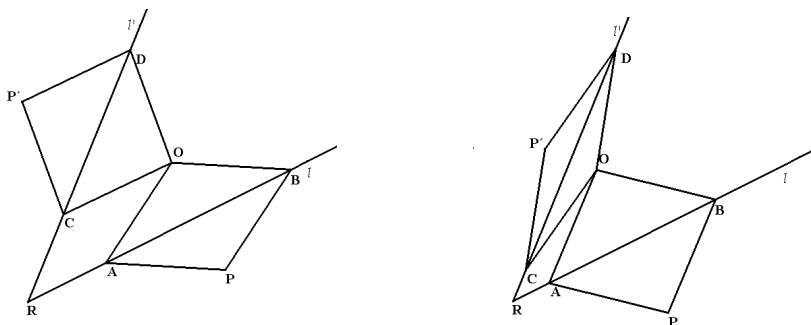


Fig. 8

### Un espacio para reflexionar.

- 1) Recorta dos triángulos congruentes y déjalos caer sobre una hoja. ¿Podrías determinar la isometría que lleva uno en el otro? Recuerda que debe poderse hacer con una sola isometría.
- 2) ¿Qué resulta de componer dos rotaciones con distintos centros? ¿Será siempre una rotación? En este caso encuentra el centro y el ángulo?
- 3) ¿Podrías simular las máquinas descritas utilizando paquetes de simulación tales como Cabri o Sketchpad?
- 4) ¿Qué sucede si en la máquina descrita para reflejar pones las varillas de un lado más largas que las del otro? ¿Cómo es la transformación que obtienes?

## 5.3 Homotecias

Una homotecia es un agrandamiento (o achicamiento) de las figuras. Al aplicarle una homotecia a una figura se obtiene una figura semejante a ella, sin embargo, no cualesquiera dos figuras semejantes son homotéticas. Para que lo sean, además de ser semejantes deben estar en perspectiva desde un punto (Fig. 9).

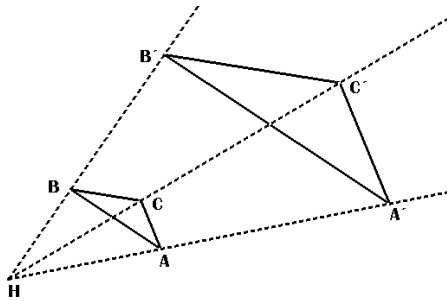


Fig. 9

Los triángulos de la figura anterior son homotéticos, nótese que  $HA/HA' = HB/HB' = HC/HC'$  y por lo tanto también  $AB/A'B' = BC/B'C' = CA/C'A'$ . Las homotecias cambian las distancias, sin embargo preservan los ángulos y las direcciones, es decir la imagen de un segmento es un segmento paralelo al original pero de distinto tamaño.

El punto desde el cual las figuras están en perspectiva se llama centro de la homotecia y la razón de agrandamiento o achicamiento se llama razón de la homotecia. Esta última puede ser positiva o negativa.

Dadas dos figuras semejantes (en cualquier posición) se puede llevar una a la otra componiendo una homotecia con una isometría.

Para ampliar los conocimientos sobre las homotecias se puede consultar la obra de Martin [1982] citado más arriba o para un nivel más elemental el libro de Shively [1972].

Las máquinas para hacer homotecias se llaman pantógrafos. Son quizá las más conocidas y se pueden adquirir en las papelerías.

Constan de seis varillas articuladas de la siguiente forma (Fig. 10).

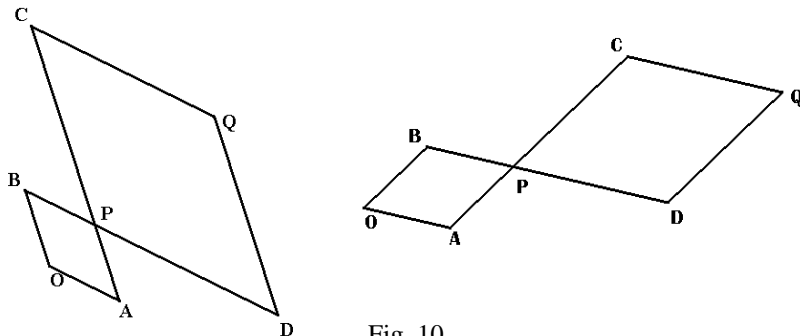


Fig. 10

Los puntos A, B, C, D, O, P, y Q son articulados. De A a C es una sola varilla lo mismo que de B a D. Las longitudes de OA, OB, AP y BP deben ser iguales lo mismo que las de PC, PD, CQ, y DQ.

El largo de las varillas puede varias dependiendo de la razón de homotecia (Fig. 11).

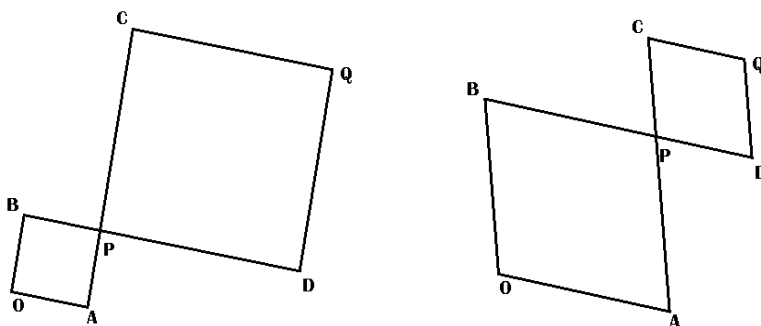


Fig. 11

Para razones positivas se usa el punto O como centro de homotecia. Este punto queda fijo.

Si la razón de homotecia es mayor que 1, se pone el puntero en P y el lápiz en Q. La razón de homotecia es en este caso  $OQ/OP$ , que es lo mismo que  $AC/AP$ . Esta última razón nos da las medidas con las que hay que construir la máquina.

Si la razón es menor que 1, se pone el puntero en Q y el lápiz en P y la razón es la inversa del caso anterior.

Para razones negativas se usa P como centro de homotecia. El puntero y el lápiz se ponen en O y Q y la razón queda determinada por  $PO/PQ = PA/PC$  usando distancias dirigidas para obtener el signo. Si  $OP = PQ$  la homotecia tiene razón  $-1$  y coincide con una rotación de  $180^\circ$  con centro en P.

### Otro espacio para reflexionar.

- 1) ¿La composición de dos homotecias es una homotecia? Si sí ¿en dónde está su centro y cuál es su razón?
- 2) ¿Qué transformación obtienes tomando en el pantógrafo O como punto fijo y colocando el puntero en A y el lápiz en D o en C? Prueba distintas opciones para colocar el punto fijo, el puntero y el lápiz. ¿Cómo se deforman tus figuras?

- 3) Haz un pantógrafo virtual usando un programa de simulación como Cabri o Sketchpad.
- 4) ¿Podrías diseñar una máquina que alargue las figuras en una dirección? (Es decir, que transforme circunferencias en elipses)

## 5.4 Inversión en circunferencias

Sea  $C$  una circunferencia con centro en  $O$  y radio  $r$ . Dado un punto  $P$ , distinto de  $O$ , decimos que  $P'$  es el inverso de  $P$  respecto a la circunferencia  $C$  si

- (i)  $O$ ,  $P$  y  $P'$  son colineales y
- (ii)  $OP \times OP' = r^2$

Analizaremos dos formas de encontrar, usando regla y compás, el inverso de un punto, después de lo cual estaremos en condiciones para diseñar máquinas que inviertan en círculos.

Sea  $P$  un punto dentro del círculo. Trazamos el rayo  $OP$  y una ortogonal  $m$  a éste en  $P$ . Sea  $A$  uno de los puntos de intersección de  $m$  con  $C$ . Trazamos el segmento  $OA$  y una ortogonal a él por  $A$ , esta línea es tangente a  $C$  (Fig. 12).  $P'$  es el punto de intersección de esta tangente con la semirrecta  $OP$ . Para demostrar que  $OP \times OP' = r^2$  basta ver que los triángulos  $OPA$  y  $OAP'$  son semejantes y que  $OA$  es un radio.

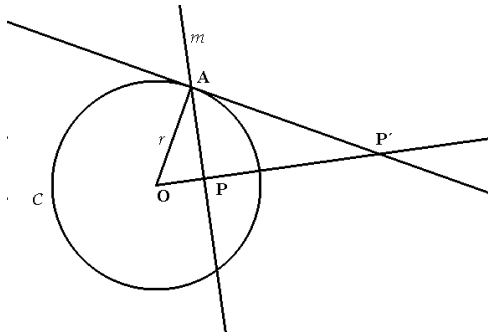


Fig. 12

Si  $P$  está fuera del círculo se traza el segmento  $OP$ , se encuentra el punto medio del segmento y usándolo como centro se traza una circunferencia que pase por  $O$  y  $P$ . Sean  $A$  y  $A'$  los puntos de intersección de esta circunferencia con  $C$  (Fig. 13). Se unen  $A$  y  $A'$  con un segmento y donde éste interseque a

OP tendremos  $P'$ . Para demostrar que efectivamente  $P'$  es el inverso de  $P$ , basta trazar  $OA$  y  $AP'$  y usar las mismas semejanzas que en el caso anterior.

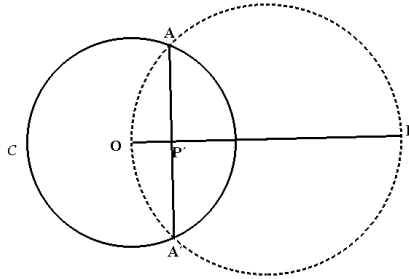


Fig. 13

Otra forma de construir el inverso de un punto es la siguiente: Se traza la semirrecta  $OP$  y una ortogonal a ella por  $O$  sean  $N$  y  $S$  los puntos en los que esta línea interseca a  $C$  (Fig. 14). Trazamos la recta  $NP$  y llamamos  $A$  a su intersección con  $C$ , unimos  $S$  con  $A$ . El punto de intersección de  $SA$  con  $OP$  es  $P'$ . Esta construcción es válida independientemente de si  $P$  está dentro o fuera del círculo. La demostración se hace otra vez por semejanza usando los triángulos  $ONP$  y  $OP'S$ .

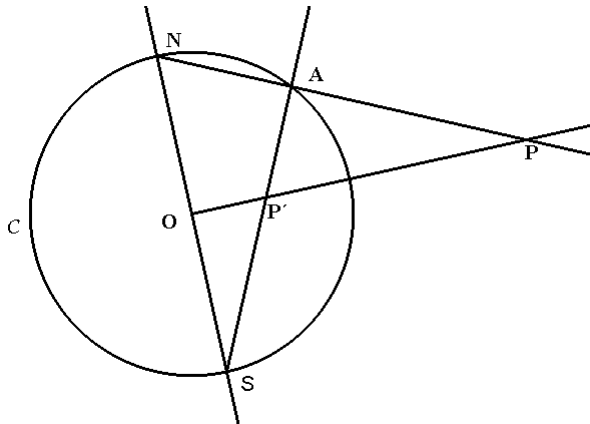


Fig. 14

En cualquier libro de geometría moderna se puede consultar sobre la inversión y sus propiedades. Por ejemplo en Shively [1972] citado previamente o en Eves [1969, tomo I].

Ahora diseñaremos dos inversores basándonos en las construcciones anteriores.

Colocamos el punto  $O$  (el centro de inversión), en el extremo de un riel  $r$ , de modo que éste se pueda mover como una manecilla de reloj con  $O$  fijo. Ponemos dos varillas cuya longitud es el radio de la circunferencia de inversión, como si fueran otras dos manecillas con  $O$  fijo (Fig. 15).

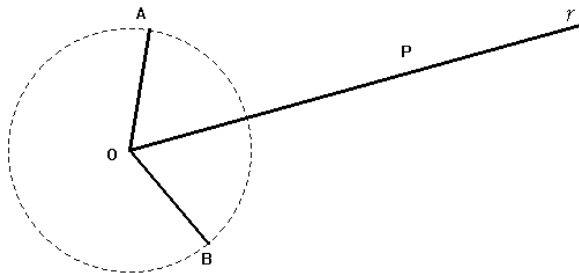
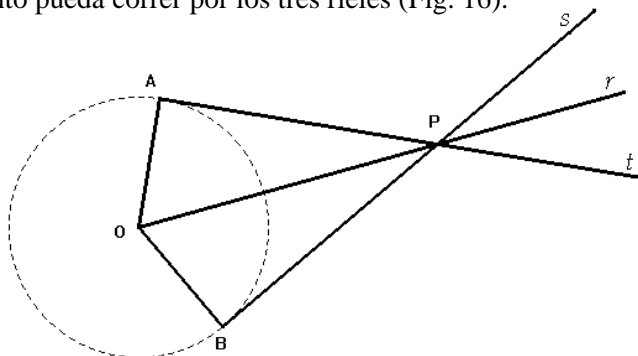


Fig. 15

Las varillas y el riel se deben poder mover independientemente.

En los extremos ( $A$  y  $B$ ) de las varillas ensamblamos dos rieles ortogonales a ellas,  $s$  y  $t$ . Colocamos una articulación uniendo los tres rieles (en el punto  $P$ ) de modo que este punto pueda correr por los tres rieles (Fig. 16).

Fig. 16



Un cuarto riel  $u$ , se hace pasar por A y B. El punto  $P'$  se encuentra en la intersección de los rieles  $r$  y  $u$  (Fig. 17).

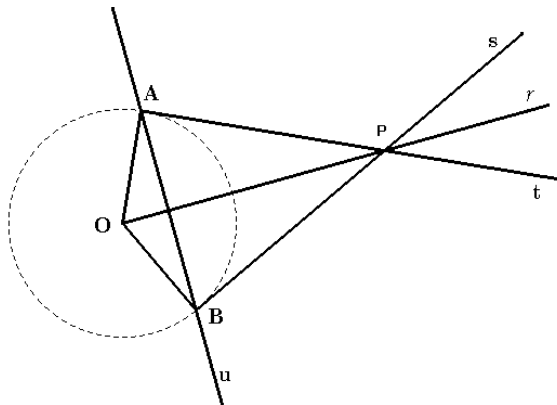


Fig. 17

Si el punto que queremos invertir está fuera de la circunferencia de inversión se coloca el puntero en P y el lápiz en  $P'$ , si el punto está adentro se cambian lápiz y puntero.

Otra forma de construir un inversor es la siguiente: Se ensamblan un riel  $r$  y una varilla formando un ángulo recto. El punto de intersección entre ellas será el centro de inversión (Fig. 18). Sobre la varilla a la misma distancia de O en ambas direcciones se sitúan los puntos N y S. Esta distancia es el radio de la circunferencia de inversión C.

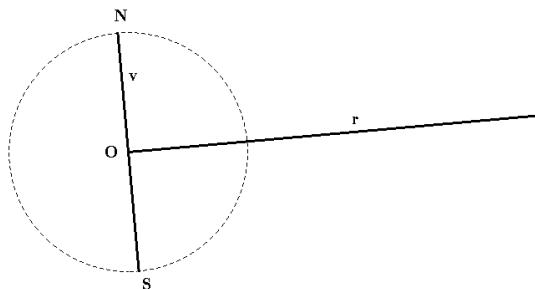


Fig. 18



En N se articula otro riel  $s$  que también se articula con el primero en P. Esta articulación debe correr sobre los dos rieles. Un tercer riel  $t$  que se mueve siempre ortogonal al riel  $s$  se articula al punto S (Fig. 19).

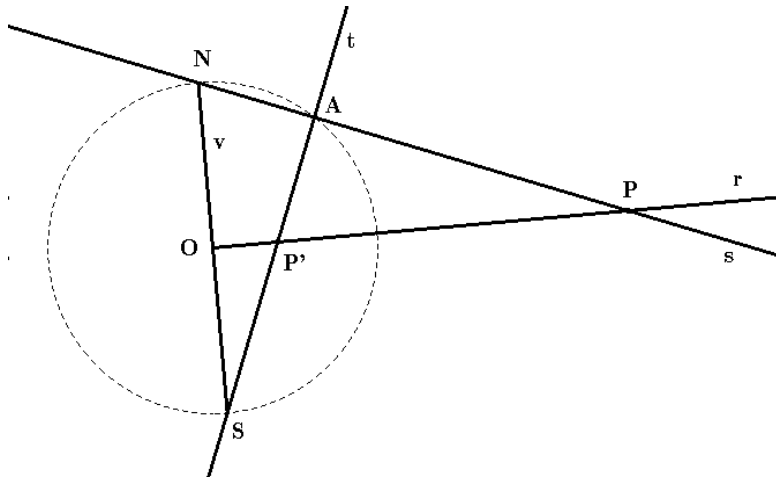


Fig. 19

El punto  $A$  siempre está sobre la circunferencia de inversión, ya que el triángulo  $NAS$  es rectángulo. En la intersección de los rieles  $r$  y  $t$  se encuentra el punto  $P'$  inverso de  $P$  respecto a la circunferencia  $C$ .

La fabricación de estos inversores no es nada fácil pues cada articulación debe ser diseñada con mucho cuidado y hecha con más cuidado aún, porque si no son muy precisas la máquina se atora. Un tercer inversor, el más conocido y probablemente el más antiguo de ellos, fue diseñado por A. Peaucellier (1864).

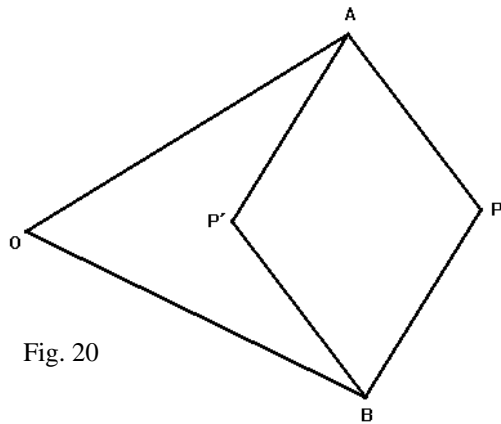


Fig. 20

La celda de Peaucellier se construye de la siguiente forma: A un rombo PAP'B, hecho de varillas articuladas en los cuatro vértices, se le ensamblan otras dos varillas OA y OB. Fijando el punto O como centro de inversión, los puntos P y P' se mueven como inversos respecto a una circunferencia (Fig. 20).

Esta máquina es mucho más sencilla de construir que los otros inversores, pero no es tan claro ver que realmente invierte, pues ni siquiera es obvio cuál es la circunferencia de inversión. Hagamos pues la demostración.

La congruencia de los triángulos OBP con OAP y OBP' con OAP' nos garantiza que O, P y P' son colineales.

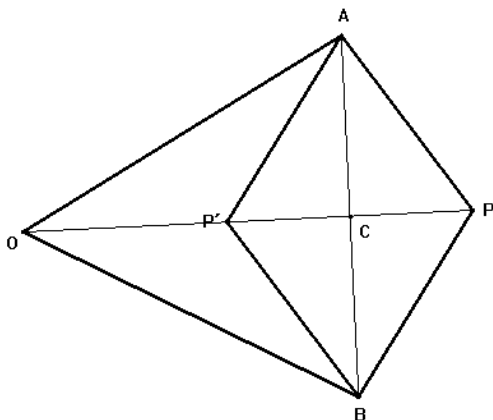


Fig. 21

Agregando líneas auxiliares y llamando C al centro del rombo (Fig. 21) podemos ver que:

$$\begin{aligned} OP \times OP' &= (OC - PC)(OC + PC) = OC^2 - PC^2 \\ &= OC^2 + PC^2 + CA^2 - CA^2 = (OC^2 + CA^2) - (PC^2 + CA^2) \\ &= OA^2 - PA^2 \end{aligned}$$

Esta última cantidad no depende de la posición de P, ya que PA y OA son las longitudes de las varillas.

Usando la propiedad de que el inverso de una circunferencia que pasa por el centro de inversión es una recta, Peaucellier logró uno de los primeros diseños para trazar una recta sin usar regla.

Agregando una varilla más, como se muestra en la siguiente Figura 22, y fijando D de forma que  $OD = DP'$  se fuerza a que  $P'$  transite sobre una circunferencia que pasa por O, y a que P dibuje una recta.

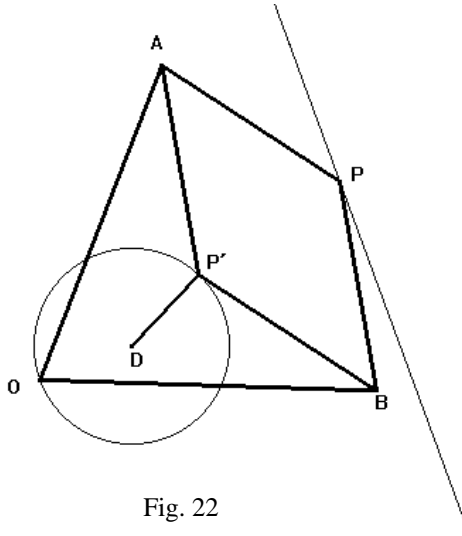


Fig. 22

## Una aclaración necesaria

En forma estricta una máquina articulada se debe hacer usando únicamente varillas y articulaciones, en todas las máquinas que se proponen en este artículo a excepción de los pantógrafos y de la celda de Peaucellier se usan rieles lo cual contraviene la definición de máquina articulada. Sin embargo cada uno de los rieles usados se puede sustituir por una celda de Peaucellier, ya que esta máquina traza rectas usando solamente varillas y articulaciones. Cambiar los rieles por celdas puede hacer que las máquinas se hagan muy difíciles de construir. Tanta varilla y articulación puede dificultar su movimiento, sin embargo teóricamente resulta muy interesante saber que las transformaciones elementales se pueden realizar con mecanismos articulados. Cabe aclarar que si pensamos en máquinas virtuales hechas con Cabri o Sketchpad entonces es posible construirlas dado que las varillas virtuales no chocan y las articulaciones virtuales no tienen fricción.

## Referencias

Martín, G. 1982. *Transformation geometry : An introduction to symmetry*. New York: Springer-Verlag.

Shively, L. S. 1972. *Introducción a la geometría moderna*. México: Ed. CECSA.

Eves, H. 1969. *El estudio de las geometrías*. México: UTEHA.

---

# Pruebas geométricas y máquinas matemáticas: un estudio exploratorio<sup>1</sup>

---

**Maria G. Bartolini Bussi**

Universidad de Modena, Italia

[Bartolini@unimo.it](mailto:Bartolini@unimo.it)

**Resumen.** Se reportan los primeros resultados de un estudio exploratorio sobre la prueba en geometría en el bachillerato (grado 11<sup>2</sup>). El experimento de enseñanza llevado a cabo es parte de un proyecto de investigación en el nivel bachillerato, en el que se introdujeron el razonamiento geométrico y una perspectiva histórica para encuadrar actividades propias de los estudiantes realizadas con una clase especial de artefactos culturales, llamados *máquinas matemáticas*. Aquí se describirá e interpretará un segmento pequeño de un experimento de enseñanza que concierne al cambio del nivel de experiencia mental al nivel de demostración como es definido por Balacheff en su estudio del proceso de prueba. Nuestra investigación no está enmarcada por una extensión del concepto de abstracción reflexiva de Piaget (como en Dubinsky) sino que ha sido desarrollada por medio de la apropiación de conceptos elaborada por la teoría de la actividad (p.e. Vygotsky, Davydov, Leontiev), en donde el papel del maestro, así como la función de la acción orientada por el objeto tienen un significado diferente al del enfoque piagetiano.

## 6.1 Introducción: Presentación breve del proyecto de investigación

El experimento de enseñanza de donde provienen los datos, buscó introducir en la demostración a estudiantes del *grado 11*, en un escenario geométrico. Fue parte de un proyecto de investigación más amplio para el bachillerato, el cual se desarrolló cooperativamente entre maestros del bachillerato e investi-

---

<sup>1</sup> Bartolini, M. (1993). "Geometrical proofs and mathematical machines: An exploratory study". In Ichici Hirabayashi, Nobuhiko Nohda, Keiichi Shigematsu and Fou-Lai Lin (Eds.), *Proceedings of PME XVII*. Tsukuba, Ibaraki, Japan: University of Tsukuba. Traducción al español de Verónica Hoyos, UPN

<sup>2</sup> Corresponde al segundo año del bachillerato en México.

gadores universitarios. Los motivos directores del proyecto pueden ser descritos por las siguientes palabras clave: *historia - geometría - máquinas* (Bartolini, B. & Pergola, por aparecer). Discutiremos brevemente únicamente el tercero, para enmarcar la descripción de una parte crucial del experimento de enseñanza y la interpretación del papel del maestro y la función de la acción orientada por el objeto.

## 6.2 El campo semántico de las máquinas matemáticas

Las máquinas matemáticas caen en la intersección entre el campo de la experiencia mecánica y el campo de la experiencia geométrica. Las máquinas están basadas sobre principios físicos así como también sobre principios geométricos: los primeros se refieren a los materiales, fuentes de energía, la distribución y la regulación de fuerzas actuantes, etc. Mientras que los últimos se refieren al movimiento relativo de cada parte, a la trayectoria de cada punto en movimiento, etc.

La separación de los principios anteriores data del principio de la ciencia moderna (p.e. la discusión de *obstáculos materiales* en *Dos nuevas ciencias* de Galileo), aún cuando sólo fue hasta principios del siglo XIX (1830) cuando Ampère propuso explícitamente la creación de la *cinemática* como *la ciencia del movimiento, independiente de las causas mismas del movimiento*. En las décadas siguientes, la llamada *geometría cinemática* fue desarrollada para excluir de la consideración los procesos de tiempo (p.e. velocidad, aceleración). La mayor parte de las máquinas construidas en nuestro proyecto pueden ser estudiadas dentro de la geometría cinemática: su acción es la de forzar a un punto o una línea o a cualquier figura geométrica, soportada por una adecuada estructura material que la hace visible, a moverse en el espacio o a ser transformada de acuerdo a una ley matemática abstracta (NRSDM, 1992).

Un ejemplo de tales máquinas es el pantógrafo de *Sylvester*: un mecanismo (*articulación*<sup>3</sup>) que consiste de ocho barras articuladas, fijas a un plano de madera por medio de un pivote en el punto O. No importa cual sea la configuración de la articulación, los puntos P' corresponden a los puntos P bajo una rotación alrededor de O del mismo ángulo  $\theta$  (*el invariante de la articulación*). Sylvester mismo (1875) describió este pantógrafo (sic) como una ge-

---

<sup>3</sup> En adelante *articulación* significará el mecanismo compuesto de barras unidas por medio de articulaciones (nota del traductor).

neralización del pantógrafo de Scheiner (1631), ya usado por los pintores del Renacimiento como una herramienta para el dibujo en perspectiva. Posteriormente, los pantógrafos fueron considerados como elementos de la *teoría de las articulaciones* donde las diversas articulaciones se estudiaron como miembros de un sistema teórico. En esta teoría se dieron pruebas más generales, las cuales se podían aplicar al pantógrafo de Sylvester así como a otras articulaciones (Lebesgue, 1950).

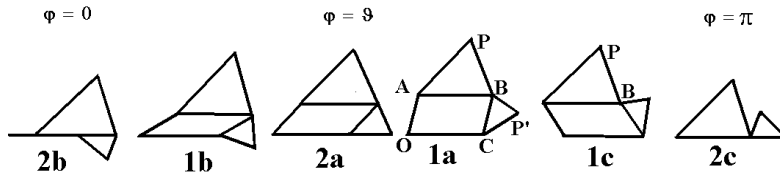


Fig. 1 y 2. Las figuras ilustran configuraciones para los valores crecientes del ángulo  $\varphi = AOC$  de 0 a  $\pi$  ( $\vartheta = PAB$ ).

La historia de los pantógrafos representa la génesis del *conocimiento científico-teórico* contemporáneo (contrastado con el *conocimiento empírico*, el cual hace referencia a fases más antiguas así como al conocimiento común contemporáneo) que está basado en una *interrelación dialéctica entre específico y general, entre concreto y abstracto*. Si el punto de partida para la construcción de un *concepto* es la *abstracción sustancial a partir de lo concreto* (realizada por medio del *análisis de la función de una cierta relación de cosas dentro de un sistema estructurado*), su resultado es una *teoría desarrollada*, en donde las manifestaciones específicas son deducidas y explicadas a partir de fundamentos generales (la llamada *ascensión de lo abstracto a lo concreto, de lo general a lo específico* --Davidof 1972-79 ch.7). en este proceso, también existen *fases experimentales*, en donde los ejemplos particulares son observados de acuerdo a cuestiones que son *formuladas teóricamente*. Toda máquina materializa tanto conocimiento empírico como teórico que puede ser interpretado de diferentes maneras. Que el análisis de una máquina sea empírico o teórico depende de cuales son las cuestiones planteadas; más aún, se tienen análisis teóricos distintos de la misma máquina si se cambia el sistema de referencia (p.e. geometría elemental, teoría de articulaciones). De acuerdo a la anterior discusión, no es posible para el investigador separar este aspecto de la *experiencia humana* sin caer en una perspectiva reduccionista (el uso empírico de un pantógrafo; el estudio de sus configuraciones únicamente en un nivel abstracto): en este sentido, el contexto de las máquinas matemáticas es un ejemplo de *campo semántico* (Boero, 1989).

La anterior interpretación no está dentro de las capacidades del estudiante: ellos tienen experiencias separadas, ya sea geométricas o mecánicas, tanto en el nivel perceptual como en el nivel racional. Una dialéctica posible entre ellos es conocida por el maestro quién está conciente del desarrollo histórico de la geometría como estrictamente enlazada con la mecánica. Sin embargo, para los estudiantes las máquinas son opacas para la geometría (y viceversa) y pueden llegar a ser transparentes, únicamente por medio de una actividad adecuada (Meira, 1991). Los estudiantes no necesariamente recapitulan el proceso histórico de creación o de descubrimiento de un artefacto y sus propiedades, ya que éste ha sido realizado a través de un proceso colectivo complejo que duró centurias y que dependió de un gran número de factores individuales y colectivos de dentro y de fuera de las matemáticas: a causa de su complejidad y de su dependencia de tantos factores, no son un buen candidato para modelar el proceso escolar. La actividad del estudiante podría ser descrita mejor como la apropiación de un artefacto cultural existente (p.e. el pantógrafo) así como de los modos de su estudio (apropiación significa, en el sentido de Leontiev (1964-1976) el proceso que tiene como su resultado final la reproducción individual de propiedades humanas históricamente formadas, capacidades y modos de conducta). El aprendizaje no está basado sobre relaciones particulares inmediatas a la realidad sino más bien sobre la mediación (Vigotsky, 1978) entre individuos y objetos, realizada por medio de los artefactos —ya sean herramientas o sistemas simbólicos— creados por los seres humanos en siglos de desarrollo. *Ninguna experiencia personal individual, no importa que tan rica pueda ser, podría conducir al desarrollo del pensamiento matemático lógico o abstracto y a la formación autónoma de los sistemas conceptuales correspondientes* (Leontiev, 1964-76 p.338).

### 6.3 Algunas implicaciones para la didáctica

La anterior discusión que alude a algunas ideas básicas de la teoría de la actividad, da lugar a dos tesis:

1. La dialéctica entre lo específico y lo general es un motivo básico para la actividad de enseñanza-aprendizaje en los escenarios escolares. La acción orientada por el objeto, como manifestación concreta de una tarea de investigación, es la fuerza directora para el proceso de enseñanza-aprendizaje.
-



2. El maestro es el responsable para la mediación en el salón de clase, para introducir a los estudiantes en los sistemas de artefactos culturales que han sido producidos por generaciones de seres humanos.

En lo que sigue argumentaremos como fueron concebidas estas tesis en la planeación de experimentos de enseñanza y en la activación de procesos en el salón de clase.

## 6.4 Un experimento de enseñanza

Este experimento de enseñanza se llevó a cabo en una clase de 11avo. grado<sup>4</sup> (y se refiere a un detallado estudio de diferentes articulaciones por diferentes grupos de estudiantes. Se realizó una observación de cuatro meses a lo largo del año escolar 1991-92. Se grabaron tanto las clases dadas por el maestro como el trabajo en equipo de grupos pequeños de cinco estudiantes (involucrados en el estudio de un modelo del pantógrafo de Sylvester). No detallaremos la estructura completa del experimento de enseñanza (Bartolini & Pergola, por aparecer), el cual consistió en una plática de introducción a algunas notas históricas sobre las articulaciones y su estudio, dos sesiones de dos horas de trabajo en equipos pequeños – con los cinco grupos distintos de estudiantes—referentes al estudio de cinco articulaciones distintas, y una clase con todos los estudiantes, conducida por el maestro, con respecto al estudio de cada una de las articulaciones.

Brevemente describiremos (en esta sección) e interpretaremos (§5) una parte del trabajo con los grupos pequeños. Este había sido estructurado previamente por medio de una lista escrita de ocho tareas (apéndice 1) que debían ser respondidas por escrito. Un extracto del texto final editado por el grupo observado está en el apéndice 2. Nos referiremos al dibujo (Fig.3) que fue producido por los estudiantes junto con el texto escrito, aún cuando el proceso fue llevado a cabo haciendo énfasis en la articulación sin hacer referencia a ninguno de los puntos codificados.

De la solución a la primera cuestión (una hora completa) resultó una secuencia de las siguientes respuestas parciales: (1) algunas barras son iguales (medida directa); (2) existe un paralelogramo deformable y dos triángulos indeformables; (3) un punto O está fijo; (4) los triángulos son isósceles (observando la configuración de la figura 2a); (5) los triángulos son similares (idem); (6) es equivalente fijar el ángulo PAB o la razón de PB a PB'; (7) las

---

<sup>4</sup> Equivalente a un segundo año de bachillerato en México, aprox.

barras que representan las bases de los triángulos se tienen que cortar y perforar para tener la misma proporción que las barras que representan los lados (detalles en Cavani, 1992).

El proceso de responder la cuarta cuestión resultó en tres distintas fases: (1) conjeturar el invariante; (2) buscar una prueba; (3) escritura de la prueba. La primera fase fue resuelta por medio de actividad conjunta con el maestro. La conjetura fue propuesta por un estudiante, aceptada por el maestro pero rechazada por los otros y aceptada después de verificarla en la articulación.

La segunda fase (una hora completa) fue llevada a cabo sin el maestro. La construcción colectiva consistió en una secuencia de “movimientos”: cada movimiento fue codificado como E (experimental) si estaba basado en experimentos visuales o táctiles, o L (logical) si era deducido de afirmaciones ya aceptadas (éstas a su vez, pudieron ser establecidas experimentalmente -E- o lógicamente -L). (Ver Fig.3 para la codificación de puntos):

0. (E) *conjetura a ser probada*: OP es igual a OP' y los ángulos POP' son iguales para todas las configuraciones de la articulación.

1. (L) *prueba*: si los triángulos OAP y OCP' son congruentes (ya probado) entonces OP es igual a OP'.

2. (E) *problema*: ¿existe una relación entre el movimiento de P y el movimiento de B? La búsqueda se interrumpe.

3. (E, L) *observación*: la longitud de PP' no es siempre la misma. La afirmación es confirmada por medio de la teoría, observando que no es suficiente conocer dos lados para determinar la totalidad del triángulo.

4. (E) *observación*: aún cuando OP sea igual a OP', se tiene que (entonces) la longitud de OP no es constante.

5. (L, (E, L) ) *prueba*: si POP' es constante (conjeturado del movimiento 0) y POP' es isósceles (probado en el movimiento 1) entonces todos los triángulos POP' de entre las infinitas configuraciones son similares.

6. (L) *problema*: existe una razón constante (movimiento 5) entre PP' y OP (=OP'): ¿cuál es la razón?

7. (L) *prueba*: para la configuración de la Fig. 2a se ha probado que los ángulos POP', BCP' y BAP son iguales.

8. (E) *conjetura*: los triángulos PBP' y OAP y OCP' son similares.

9. (L) *prueba*: como los triángulos BCP' y BAP son similares (hipótesis) entonces las proporciones siguientes: CP':AB=BP':BP y como OC=AB, CP':OC=BP':BP.

10. (L, E) *prueba*: si PBP' y OCP' son similares (movimiento 8), la razón de OP y PP' (igual a la razón de OP' y PP') es constante.

11. (L) *prueba*: los triángulos OPP' de la infinidad de configuraciones son similares.
12. (L) *prueba*: si todos los triángulos POP' son similares el ángulo POP' es constante (inverso del movimiento 5).
13. (L) *prueba*: los ángulos P'BP, OCP' y OAP son iguales (basados sobre las propiedades angulares de los polígonos).
14. (L) *prueba*: los triángulos P'BP, OCP' y OAP son similares (ver movimiento 8). (Ver Cavani 1992 para detalles).

## 6.5 Discusión

La discusión está dividida en dos partes que se refieren a: (a) los aspectos de organización (diseñados previamente); (b) los aspectos de activación o funcionamiento (observados en los procesos de la clase).

### 6.5.1 Organización

La primera elección está relacionada con la definición de la tarea en referencia con el objeto físico (la articulación, en realidad dada a los estudiantes y no únicamente evocada). No se definió únicamente un contexto inicial para la actividad del cual partir (como en el cambio de lo específico a lo general, lo que es enfatizado en el marco piagetiano) sino que fue en realidad un polo del par *objeto físico – objeto ideal* (i.e. específico-general) a ser puesto en una interrelación dialéctica, de acuerdo a los elementos mayores del pensamiento teórico ( $\xi_2$ ).

La segunda elección se refiere a la estructura del trabajo del grupo pequeño por medio de las ocho cuestiones. Su meta fue forzar la transformación de la articulación específica en un objeto ideal determinado, y al mismo tiempo, ya sea recordar o estructurar el escenario teórico (geometría elemental, la teoría de las articulaciones) en donde describir su papel general y su función. Ellas fueron diseñadas como herramientas de mediación (Vigotsky, 1978), las cuales inhiben el impulso directo de reaccionar a un estímulo externo dado por la acción del pantógrafo; ellas formaron una base (incompleta) de orientación (Gabay, 1991). Las ocho cuestiones no tienen el mismo status. Por ejemplo, la primera es, en un sentido, transicional, como si también hubiera sido respondida dentro de un escenario empírico (aún si esto no sucedió, como mostramos en lo que sigue): los estudiantes hubieran podido escribir las reglas de construcción, refiriéndose a la conjunción de las ocho barras de longitud dada por medio de bisagras y pivotes (en realidad, algunas descripciones antiguas de

---

máquinas fueron de esta clase y probablemente nosotros podríamos tener descripciones similares si la misma tarea fuese puesta fuera de la escuela a una persona no cultivada). La segunda y la tercera cuestiones forzaron a los estudiantes a reparar en algunas herramientas básicas de la teoría de articulaciones: estas tuvieron sentido únicamente después de la introducción de Lagrange (1787) del concepto de *coordenadas generalizadas de un sistema mecánico*. La cuarta cuestión introdujo el *objeto ideal* en la teoría de la geometría elemental. Las últimas cuatro cuestiones —y principalmente la séptima— tuvo que realizar la ascensión de lo general a lo específico, en la medida en que una rotación de cualquier ángulo dado  $\theta$  estuvo vinculada con las propiedades geométricas de un pantógrafo individual. En pocas palabras, el total de cuestiones fueron diseñadas para realizar la dialéctica entre la articulación específica y una teoría general de sus configuraciones.

La tercera elección se refirió a la aceptación de fases de actividad conjunta entre el maestro y los estudiantes en el grupo pequeño de trabajo. La actividad conjunta entre adultos y gente joven en la resolución de problemas es consistente con el concepto de zona de desarrollo próximo de Vigotsky (1978). No se origina de la necesidad profesional del maestro de limitar el experimento dentro de límites adecuados de tiempo, sino sobre la necesidad cultural de dirigir los esfuerzos de los estudiantes hacia la apropiación de productos de la actividad humana de siglos. Las fases de la actividad conjunta no siempre pueden ser diseñadas, en la medida en que ellas dependen de procesos reales, aún cuando los puntos cruciales pueden ser indicados tentativamente con anticipación.

### 6.5.2 Funcionamiento

En esta sección abordaremos los mismos aspectos pero en orden distinto. Las ocho cuestiones estructuraron procesos en la clase *desde fuera*. Sin embargo ellas son buenos candidatos para que en el proceso de internalización (Vigotsky, 1978) se transformen en elementos cruciales de la metodología de un estudiante individual para el estudio de algunas clases de articulaciones (pero esta hipótesis puede ser verificada únicamente en un estudio a largo plazo, el cual está ahora en progreso).

Algunas fases de *actividad conjunta* fueron observadas. Por ejemplo, en la fase de conjeturas, el maestro enfocó sobre propiedades angulares de la articulación y sugirió considerar ángulos que no estaban visibles (en realidad, las líneas OP y OP' no se refieren al objeto físico sino al objeto ideal). Su intervención fué requerida por los estudiantes quienes habían sugerido un gran número de propiedades geométricas triviales (tales como el perímetro del he-

---

xágono siempre es el mismo) sin realmente entender cual era el significado de esta tarea. Entonces la conjetura fue verbalmente formulada por un estudiante y aceptada por el maestro; sin embargo los otros no confiaron en el profesor y regresaron a la articulación a verificarlo; pusieron la articulación en varias configuraciones y movieron el dedo a lo largo de las líneas PO y OP' para concretar diferentes manifestaciones del ángulo ideal. Sus afirmaciones cambiaron de *imposible* a *verdadero pero sorprendente*.

La última observación nos condujo al tercer aspecto (i.e. la función de la acción orientada por el objeto). Al inicio del trabajo en equipos (pregunta 1), los estudiantes midieron las barras para asegurarse de que algunas de ellas eran exactamente iguales, sin embargo inmediatamente afirmaron que la medida no era relevante (*escribimos como se construyó esto, pero —la persona ficticia— puede hacerlo como quiera*). En realidad, ellos no estaban seguros de que el procedimiento empírico de medir fuera adecuado para el escenario geométrico ideal, en donde se estudian las propiedades de las figuras. Sin embargo los resultados de medir fueron inmediatamente interpretados en un escenario teórico, transformando la articulación (el objeto físico) en una figura esquemática (el objeto ideal). El siguiente proceso se refirió aún al objeto físico, cuando los estudiantes manipularon la articulación por toda una hora. Ellos observaron que la articulación pasaba por infinidad de configuraciones transitorias (las configuraciones “genéricas” (Fig.1) y algunas “especiales” (Fig.2)) y que era posible pasar de la una a la otra por medio de movimientos “pequeños”. Algunas veces el vínculo entre el objeto físico y el objeto ideal no era fácil de manejar. Por ejemplo, después de darse cuenta que los triángulos PAB y P'CB eran iguales, los estudiantes recitaron bien algunos teoremas relacionados con los lados y los ángulos de triángulos semejantes, pero no se dieron cuenta de que la proporcionalidad de los lados PB y BP' podía haber resuelto el problema concreto de describir las longitudes (relativas) de las barras. Una actividad conjunta (corta) con el profesor condujo a los estudiantes a asociar propiedades geométricas a los objetos físicos. De cualquier manera, si estuvo presente un embrión de ascendencia de lo general a lo específico, ascendencia necesaria para completar el movimiento dialéctico entre ambos aspectos. Por ejemplo, durante la primera observación de la articulación, un estudiante habló acerca de que no era necesario conservar el mismo ángulo PAB en la construcción de una nueva articulación: “*si el ángulo es recto, éste (Fig.2a) estará más aplanado*”. Sin embargo, el movimiento de ida y regreso de lo específico a lo general no estuvo siempre interiorizado por los estudiantes: algunas veces el maestro intervino justo para sugerir el cambio (*intenta y verificalo* en la articulación, para una afirmación verbal obtenida por medio de deducción

lógica; *intenta y pruébalo*, para una afirmación verbal obtenida por medio de experimentos). La configuración especial de la Fig.2a jugó un papel doble: en la primera cuestión sugirió la semejanza de los dos triángulos PAB y P'BC. Posteriormente, en el proceso de prueba esto obstruyó la solución: sucedió que la articulación asumió una configuración cercana (no igual) a la especial de la Fig.2a; inmediatamente una estudiante gritó: “*Por favor, muévala, me siento confundida: ya no puedo ver los lados (OP y OP')*”, y ella puso la articulación en una configuración más genérica. Resumiendo, se observó *actividad no verbalizada* (ya sea visual-táctil o visual-imagen) a lo largo de todo el proceso: su volumen es consistente con los resultados de adultos resolviendo problemas, de Tikhomirov (1988, p.90), quien estableció que [la actividad del pensamiento] no consiste únicamente en procesos subordinados a una meta pensada conscientemente sino también en procesos subordinados a una anticipación no verbalizada de resultados futuros, y que en la actividad, el segundo tipo de procesos puede tener una participación más grande que las acciones propiamente intencionadas.

El proceso de construcción de una prueba condujo a una demostración, en el sentido de Balacheff (1988). En realidad el texto escrito no estuvo completo, puesto que faltó el décimo movimiento crucial: fue considerado verbalmente varias veces mientras que los estudiantes estaban editando el texto, pero no fue escrito, como si fuera algo obvio. Más aún, la prueba no estuvo completa, puesto que sólo se refirió al caso genérico de la Fig.1a (el otro caso requiere pequeñas adaptaciones). El problema de variar las configuraciones había sido considerado pero fue rechazado: *¿Tenemos que verificar otros casos? No. Hemos hecho una prueba* (con énfasis). Ellos podían haber recurrido a algo similar al *principio de continuidad* (Poncelet, 1822), pero estaban seguros de que el texto no nada más era *convinciente* sino que también era *verdadero*: la responsabilidad de la verdad fue atribuida al ingrediente teórico del escenario en donde había sido llevado a cabo el proceso, i.e., el sistema de la geometría elemental. Aún si en algunos pasos (p.e. movimientos 5 y 10) se suponía que los estudiantes le daban la misma importancia a informaciones experimentales que a afirmaciones lógicamente derivadas, el proceso en su totalidad fue teórico, a causa de la tensión de los estudiantes hacia una completa justificación de todos los movimientos dentro del sistema de la geometría elemental. Sin embargo, su génesis (y algunos de los segmentos aparecieron incluso ordenados como afirmaciones escritas –cf. la columna de comentarios en el apéndice 2) fue llevada a cabo por medio de cambios de ida y regreso entre lo experimental y el nivel lógico.

---

## 6.6 Comentarios finales

Nuestros resultados hacen surgir dos cuestiones para la investigación didáctica. La relevancia de la actividad no verbalizada ha sido señalada también en los medios ambientes computarizados (Dreyfus, 1991), sin embargo el uso de la computadora permite únicamente el análisis de la interacción entre la actividad verbal-lógica y la actividad visual-imagen. ¿Cuál es, si existe, el papel de la actividad visual-táctil en el pensamiento geométrico avanzado?

Mucha de la investigación didáctica enfatiza la responsabilidad del alumno para aprender en contraste con la enseñanza tradicional. Hemos argumentado (§2) que la apropiación de artefactos culturales está determinada por la mediación del adulto. ¿Cómo se concibe el papel del maestro con respecto a la mediación cultural en el salón de clases?

RECONOCIMIENTOS. Esta investigación fue apoyada por CNR y MURST. El experimento de enseñanza fue diseñado y llevado a cabo por M. Pergola y observado por C. Cavani; P. Boero y A. Mariotti leyeron cuidadosamente y comentaron el borrador de este artículo.

## Apéndice 1

### Las 8 preguntas

1. Represente la articulación con una figura esquemática y describásele a alguien quien tiene que construir uno semejante, con base sólo en su descripción.
  2. ¿Cuántos grados de libertad tiene el punto P?. Dibuje el conjunto R que consiste de todas las posiciones de P durante el movimiento. Elija los parámetros que determinan la posición de P.
  3. ¿Cuántos grados de libertad tiene el punto P?. Dibuje el conjunto R que consiste de todas las posiciones de P durante el movimiento. Elija los parámetros que determinan la posición de P. ¿Puede utilizar los mismos parámetros que usó para P?.
  4. ¿Existen algunas propiedades geométricas que se relacionan con todas las configuraciones de la máquina?. Intente demostrar sus afirmaciones.
  5. ¿Se puede decir que la máquina realiza una correspondencia biunívoca entre R y R ; i.e. cada punto de R tiene un punto correspondiente en R y viceversa?.
-

6. Si P y P son dos puntos trazadores, dibuje dos figuras correspondientes (considerando la correspondencia en 5 entre R y R). ¿Se trazan ambas figuras al mismo tiempo?. ¿Son relevantes las características del movimiento –velocidad, aceleración, etc.?
7. ¿Cuáles son las propiedades comunes de las figuras trazadas en el punto 6?. ¿Las figuras se superponen?. ¿Existe algún movimiento simple que las superpone?, descríbalolo.
8. ¿Este movimiento superpone a R y R , también ?

## Apéndice 2

### Respuesta colectiva a la pregunta 4 (Fig. 3)

Tesis. POP es constante

El ángulo POP es constante ya que los triángulos POP que se obtienen por medio de las deformaciones del mecanismo son semejantes, para cualesquiera posiciones de P y P. cfr. movimiento 12.

En efecto,  $OP=OP$ , porque los triángulos OCP y OAP son congruentes, ya que  $CP=OA$ ,  $CO=AP$  y  $OCP=OAP$  ( $BCO=OAB$  y  $PCB=BAP$ ).

Los triángulos de arriba son semejantes a un tercer triángulo PBP, porque cfr. movimiento 9. Como los triángulos BCP y BAP son semejantes, se sigue que  $BP:BP=CP:CO$  cfr. movimiento 10 Y además el ángulo PBP es igual al ángulo OCP ya que cfr. movimiento 13. (haciendo  $CPB=CBP=\alpha$  y  $CBA=\beta$ ) tenemos  $PBP=360-(2\alpha+\beta)$  y  $OCP=360-(2\alpha+\beta)$ . Esto es cierto porque prolongando la recta BC desde C, el ángulo suplementario a BCP es igual a  $2\alpha$  y el ángulo suplementario a BCD es igual a  $\beta$ , debido a que en un paralelogramo dos ángulos contiguos son siempre suplementarios.

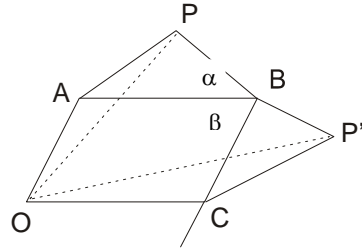


Fig. 3



## **Referencias**

- Balacheff, N. 1988. *Une etude des processus de preuve en mathematique chez des eleves de College*. These, Grenoble.
- Bartolini, Bussi M. & Pergola M. (to appear), “History in the mathematics classroom”, Essen Symposium.
- Boero, P. 1989. “Mathematical literacy for all”, Proc. 13<sup>th</sup>. PME.
- Cavani, C. 1992. *Invarianti, congetture, dimostrazioni...* Unplished thesis, Modena.
- Davydov V.V. (1972-1979). *Gli aspetti della generalizzazione nell'insegnamento*, Giunti Barbera.
- Dreyfus, T. 1991. “On the status of visual reasoning...”. Proc. 15<sup>th</sup>. PME, Vol.1, pp.33-48.
- Dubinsky, E. 1991. “Reflective abstraction...”. In Tall D. (ed.), *Advanced mathematical thinking*, 95-123. Kluwer Academic Publishers.
-

# Exploración sobre el aprendizaje de las transformaciones geométricas en el Bachillerato: coordinación del uso de herramientas cognitivas en la escuela

---

Verónica Hoyos Aguilar<sup>1</sup>

CAEMTIC, Universidad Pedagógica Nacional

[vhoyosa@upn.mx](mailto:vhoyosa@upn.mx)

## 7.1 Introducción

Aquí se presenta un trabajo de exploración acerca del uso de herramientas comunes, como son las computadoras o los pantógrafos, en el aprendizaje de las transformaciones geométricas. La exploración se llevó a cabo en un aula equipada con computadoras y con grandes pantógrafos (*máquinas matemáticas* o mecanismos articulados para el estudio de las transformaciones geométricas básicas), los cuales permiten el trazado y la comparación de figuras geométricas. Las máquinas articuladas en uso o pantógrafos fueron especialmente construidos para el estudio de la reflexión con respecto a un punto o a una recta, la traslación y la homotecia. La computadora y los artefactos mencionados se utilizaron para introducir a un grupo de estudiantes del primer semestre del bachillerato al estudio del tema de las transformaciones geométricas. En este capítulo se describe lo que se realizó en el salón de clase, y se inscribe al estudio exploratorio realizado en una línea de investigación del uso de instrumentos en la enseñanza de las matemáticas. También se presentan las secuencias de trabajo de todas las sesiones que aquí se instrumentaron y los problemas que se aplicaron al término de la exploración. En particular se hace énfasis en los logros de los estudiantes, se comenta su participación en las actividades y en la resolución de los problemas que se les plantearon. Finalmente, en la última parte de este capítulo se abordan algunas de las posibles implicaciones didácticas del estudio exploratorio realizado.

---

<sup>1</sup> La investigación en que se basa el contenido de este capítulo, ha sido desarrollada con apoyo del CONACyT con número de referencia 30430-S.

## 7.2 Uso de instrumentos en la enseñanza de las matemáticas

### ***Acción y mediación: El papel de los materiales concretos en la enseñanza de las matemáticas.***

Las secuencias de trabajo que aquí se presentan, se realizaron desde una perspectiva educativa que privilegia la actividad del estudiante y el uso de medios para la apropiación del conocimiento.

Sabemos que el uso de instrumentos en la enseñanza de las matemáticas no es algo nuevo. Según Szendrei (1996) “*los materiales concretos tienen una larga historia en las clases de matemáticas, aunque no siempre han sido aceptados de buena gana o usados de manera apropiada. De hecho, desaparecieron cuando surgieron los métodos de cálculo escritos y se le asignó poco valor a la comprensión de los algoritmos que estaban siendo enseñados. En la presente centuria, Comenius (1592-1670) y Pestalozzi (1746-1827) comienzan el proceso de reintroducción, ellos, junto con Montessori y muchos otros, proveen nuevos materiales y razones para su uso de tal manera que hoy uno dispone de cientos de instrumentos manipulables. Sin embargo, se sigue discutiendo si las herramientas comunes derivadas de la vida real pudieran ser mejores que los materiales educativos especialmente contruidos, y si de hecho, tales materiales pudieran ser más dañinos que buenos. Se puede decir que en general los materiales educativos no son drogas milagrosas; su uso productivo requiere previsión y planeación*” (Szendrei, 1996, p.411).

En el trabajo que aquí se está presentando se ha hecho énfasis en el uso de herramientas comunes en el salón de clase. Herramientas que tienen la particularidad de que en determinado momento han sido elaboradas para resolver problemas de medición específicos o para comunicar o difundir ideas matemáticas nuevas, incluso revolucionarias en su época. Véase, por ejemplo, los instrumentos descritos por Descartes en *La Géométrie* (1637). Más aún, se recomienda ver en la dirección electrónica de la Universidad de Modena *UniMo*, Italia— <http://www.museo.unimo.it/theatrum/>, la gran cantidad de este tipo de material que la *UniMo* ha producido y compilado.

De hecho, la historia de las matemáticas da cuenta de una interacción dialéctica entre el aumento de comprensión sobre nociones o ideas matemáticas nuevas y la manipulación o elaboración de artefactos que facilitan o hacen factible la comunicación de tales logros. Así por ejemplo, Descartes en *La Géométrie* usa y desarrolla nuevas herramientas algebraicas,

---

y busca explicarlas usando los novedosos artefactos mecánicos que ahí se muestran.

Desde un punto de vista teórico, el papel fundamental de los artefactos culturales como mediación para la acción educativa es reivindicado en gran medida por el enfoque socio-cultural de investigación del aprendizaje desarrollado por Wertsch (ver por ejemplo Wertsch *et al.*, 1995). Una de las bases de este enfoque de investigación consiste en el supuesto de que la acción y la mediación están inherentemente relacionadas. De hecho, *los artefactos culturales* (término equivalente desde este enfoque, al de *herramientas comunes* de Szendrei) proveen un vínculo o puente entre las acciones concretas llevadas a cabo por los individuos y los grupos, por un lado, y los escenarios culturales, institucionales e históricos, por el otro. (Wertsch *et al.*, 1995, pp.19-20).

En el trabajo que aquí se presenta los estudiantes contaron con computadoras, pantógrafos y guías para la realización de todas las actividades. Es mucha la literatura de estudios antecedentes que han incorporado en su realización alguno de los dos artefactos mencionados. Por ejemplo, según los resultados de Mariotti (2002), las computadoras transforman la naturaleza de un problema: *“Podemos vislumbrar que la presencia de nueva tecnología transforma la relación entre problemas y conocimiento y que este cambio ocurrirá en al menos dos aspectos: el tipo de problemas que pueden ser propuestos a los pupilos y los procesos de solución que pueden ser usados. Los recursos disponibles cambian, y consecuentemente los procesos usados para alcanzar un resultado también cambian<sup>2</sup>”* (Mariotti, 2002, p.697). Según Mariotti, muchos investigadores han estudiado los efectos de los medios ambientes computacionales, y especialmente el de la programación, sobre los procesos intelectuales involucrados en la resolución de problemas y en la formación de conceptos, pero la investigación de orientación cognitiva, llevada a cabo por muchos años y principalmente centrada sobre el que aprende, debe estar complementada por la investigación del efecto que las actividades en el medio ambiente computacional pueden tener en la clase de matemáticas como un todo, en *“como las diferentes facetas de la tecnología afectan la cultura del salón de clase* (Mariotti, p.697)”.

---

<sup>2</sup> El texto original de Mariotti está en inglés. Las partes de este texto que aquí aparecen citadas en español, son una traducción libre del autor de este capítulo.

---

En realidad se ha visto que no nada más la computadora tiene un papel de catalítico cultural en el salón de clase, sino también la introducción de “nuevas voces” significativas para el aprendizaje, como lo son las máquinas articuladas para el estudio de las transformaciones. En el capítulo “Pruebas geométricas y máquinas matemáticas” que se incluye en este mismo libro, se documenta una de las posibilidades que ofrece la introducción de estos artefactos para comenzar a tratar con pruebas deductivas en la clase de matemáticas del bachillerato.

De hecho, el estudio exploratorio que aquí estamos presentando intenta contribuir en una línea de investigación sobre *la articulación de las distintas facetas de la tecnología* en el salón de clase. Con el objetivo de indagar como influye en la comprensión del estudiante la manipulación de las herramientas, se elaboraron series de actividades prácticas en cuya resolución participó un grupo de primer año del CCH. Se llevaron a cabo 7 sesiones de trabajo de 2 horas cada una: la primera de ellas fue de introducción general al uso de un software de geometría dinámico (SGD); en las siguientes tres sesiones se trabajó con guiones de la actividad con el SGD, en particular explorando el ‘menú’ de transformaciones y la ‘Ayuda’ del software; en dos de las tres restantes sesiones se usaron los mecanismos articulados o pantógrafos, y finalmente, en la última sesión los estudiantes se enfrentaron a una serie de problemas relacionados con las transformaciones geométricas.

### **7.3 Secuencias de trabajo y comentarios sobre las ejecuciones de los alumnos**

#### ***Primera Sesión: Exploración del software de geometría dinámico (SGD)***

La primera sesión fue de exploración acerca de las posibilidades de construcción geométrica que ofrece un software de geometría dinámico (SGD). A los estudiantes se les entregó una hoja de trabajo, en la cual aparecían varios problemas de construcción geométrica (ver Fig.1) con los cuales se pretendió dar motivo al conocimiento de los comandos y de las posibilidades del SGD. Durante la exploración del software, una de las propiedades más importantes del SGD que interesa que los estudiantes dominen, es el arrastrado directo de las diferentes partes de los objetos geométricos que se han construido para verificar que una propiedad

---

matemática es invariante. Sin embargo, los resultados del arrastre dependen de cuales han sido los objetos iniciales en la construcción. El estudiante debe de aprender que el arrastrado ha de utilizarse para verificar la invariabilidad de la(s) propiedad matemática(s) en juego. Esta es probablemente la propiedad del SGD que lo hace una herramienta valiosa para el aprendizaje de las matemáticas.

**PRIMERAS EXPLORACIONES EN CABRI-II  
CONSTRUCCIONES Y PROPIEDADES  
GEOMÉTRICAS**

Construye un triángulo rectángulo a partir de dos puntos dados (o de un segmento) de tal manera que al arrastrar los tres vértices el triángulo continúe siendo rectángulo. Después de terminar tu construcción, haz un reporte en donde describas la construcción realizada.

Construye un cuadrado a partir de dos puntos dados de tal manera que al terminar tu cuadrado, tú puedas arrastrar los dos vértices iniciales de la construcción y el cuadrado siga siendo un cuadrado. Después de terminar tu construcción, haz un reporte en donde describas la construcción realizada.

Construye un paralelogramo a partir de tres puntos dados de tal manera que al terminar tu paralelogramo, tú puedas arrastrar los tres vértices iniciales de la construcción y el paralelogramo siga siendo un paralelogramo. Después de terminar tu construcción, haz un reporte en donde describas la construcción realizada.

Fig.1. Hoja de trabajo 1: Primeras tareas de construcción geométrica con el SGD

Comentarios: En las repetidas ocasiones en que se ha trabajado con este tipo de tareas se ha visto que es difícil que los estudiantes lleguen a realizarlas sin ayuda del instructor. En realidad, las tareas solicitadas en la hoja de trabajo 1 dan pie para que los estudiantes desplieguen estrategias de construcción intuitivas, las cuales usualmente no van a satisfacer “la prueba del arrastrado”

con el SGD. Esto es, las figuras inicialmente construidas por los estudiantes normalmente van a perder la propiedad a la que se apuntaba, al ser arrastrada cualquiera de las partes de la figura. Finalmente, después de que se ha intentado verificar la validez matemática de las diferentes propuestas de los estudiantes, se observa que las construcciones matemáticamente válidas (como la construcción de perpendiculares utilizando regla y compás) son las que satisfacen los requerimientos explícitos en la hoja de trabajo. Como usualmente se llega a este resultado trabajando de manera colectiva en el salón de clase, esto se verá reflejado en los reportes de la actividad que entregan los estudiantes.

### ***De las sesiones segunda a la cuarta: Exploración del menú de transformaciones geométricas del SGD***

En la segunda sesión se les proporcionó a los estudiantes una guía (ver Fig.2, 3, 4, 5, 6 y 7) para el estudio de las transformaciones geométricas a través de la exploración del menú de transformaciones con el que cuenta el SGD. La guía constó de cuatro partes, todas a resolver por los alumnos salvo la primera, la cual aparece en la guía completamente resuelta. Esto es, la primera parte del guión proporciona a los estudiantes un ejemplo completo de resolución propuesto a los estudiantes. Como se podrá observar, con esta guía se pretende revisar todas las isometrías del plano y la composición de éstas. Dado que esta secuencia de hojas de trabajo está propuesta para ser llevada a cabo con estudiantes del primer año del bachillerato, se puede decir que la composición de transformaciones geométricas proporciona a los estudiantes una de sus primeras experiencias con el tema de composición de funciones desde un contexto geométrico-euclidiano.

---

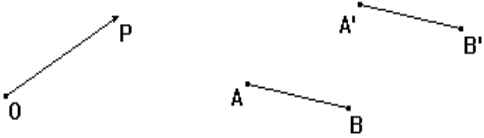
1

**¿Qué son las isometrías?**

**I. Traslación determinada por el vector  $OP$**

- Construye un segmento  $AB$ .  
 Construye el segmento  $A'B'$  el trasladado de  $AB$ , usando el comando 'Traslación' de Cabri (abre el menú Ayuda con F1).  
 Cuales objetos geométricos son necesarios para la construcción?

Cuando seleccionas el comando Traslación, el menú Ayuda te dice: "Construye la imagen de un objeto trasladado de un vector dado. Se indica el objeto y después el vector." Entonces los objetos que debes tener en la pantalla para poder efectuar la traslación son: un vector y un objeto geométrico (Usted debe ya tener el segmento  $AB$ ). Después de haber creado un vector  $OP$  efectúa la traslación requerida.



¿Cuáles objetos geométricos puedes mover/variarrarrastrándolos con el ratón? ¿Porqué?

Fig.2. Página 1 de la guía de transformaciones geométricas usando el SGD.

Comentarios: Recuérdese que toda la primera parte de la guía para el estudio de las transformaciones geométricas usando el SGD –Figuras 2, 3 y 4— aparece resuelta. Los estudiantes sólo tienen que seguir el guión, recreando los movimientos o actividades de construcción que se les solicitan, utilizando para ello el SGD a su disposición.



<p>¿Qué cosa sucede cuando hacemos variar estos objetos geométricos en la pantalla?</p> <p>Si movemos/variamos.....</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- El vector <math>OP</math></li> <li>- <math>O</math> y/o <math>P</math></li> <li>- El segmento <math>AB</math></li> <li>- <math>A</math></li> <li>- <math>B</math></li> </ul>	<p>2/</p> <p>Entonces .....</p> <p>No se mueve nada más</p> <p>El segmento <math>A'B'</math> se mueve permaneciendo paralelo a <math>AB</math>, con la misma longitud, pero variando su distancia de <math>AB</math>. El segmento <math>AA'</math> y <math>BB'</math> permanecen paralelos a <math>OP</math>.</p> <p>El segmento <math>A'B'</math> se mueve conservando su posición recíproca respecto de <math>AB</math> y su longitud.</p> <p>Se mueve <math>A'</math> y el segmento <math>A'B'</math> permanece paralelo a <math>AB</math>, con la misma longitud y la misma distancia. Los segmentos <math>AA'</math> e <math>BB'</math> permanecen paralelos a <math>OP</math>.</p> <p>Se mueve <math>B'</math> y el segmento <math>A'B'</math> permanece paralelo a <math>AB</math>, con la misma longitud y a la misma distancia. Los segmentos <math>AA'</math> y <math>BB'</math> permanecen paralelos a <math>OP</math>.</p>
---	--


Fig.3. Página 2 de la guía de transformaciones geométricas usando el SGD.

Comentarios: Es pertinente hacer notar el papel relevante que tiene el comando de “Ayuda” con que viene provisto el SGD que se uso en las sesiones de trabajo del presente estudio exploratorio. De hecho este comando

proporciona una primera introducción al lenguaje básico formal para hablar de los elementos y las características de cada una de las isometrías planas.

3/

Construye la imagen de otros objetos geométricos (recta, círculo, triángulo) y explora su traslación anotando tus observaciones.  
Circunferencia de centro C.



Puedes mover O, P, C y el radio de la circunferencia de centro C.  
Si movemos O y/o P, la circunferencia de centro C' se mueve manteniendo el mismo radio. CC' permanece paralelo a OP.  
Si movemos C el segmento CC' permanece constante en longitud y la circunferencia imagen se mueve manteniendo constante el radio.  
Si variamos el radio de la circunferencia de partida, el radio de la circunferencia imagen cambia y permanece siempre igual al radio de la primera. El centro permanece fijo.

- Caracteriza el objeto geométrico imagen en una Traslación:  
En la traslación del segmento AB según el vector OP, el segmento imagen A'B':  
Tiene la misma longitud de AB  
Es paralelo a AB  
AA' y BB' son paralelos al vector OP.

En general la imagen A' de un punto A mediante la traslación del vector OP es tal que:  
 $AA' = OP$  y  
 $AA' \parallel OP$ .

Fig. 4. Página 3 de la guía de transformaciones geométricas usando SGD.

Comentarios: Finalmente, con respecto a las ejecuciones de los estudiantes en esta primera parte de la guía, se puede decir que la única dificultad que

encuentran al resolverla o recrearla, es precisamente la de entender que se trata de recrear un ejercicio resuelto utilizando el comando de “Ayuda” del SGD.

4/						
<p>- Da una definición general de traslación.</p> <p>Respuesta: Los elementos que definen una traslación son: un vector OP.</p> <p>La imagen de un punto A mediante una traslación es A' tal que <math>AA' = OP</math> :</p> <p>La traslación conserva la distancia entre los puntos, es decir <math>[AB] = [A'B']</math>, en donde A' y B' son las imágenes de A y B, respectivamente.</p> <p><b>II. Simetría axial de eje a</b></p> <p>- Construye un segmento CD.</p> <p>- Construye el segmento C'D' simétrico de CD, con respecto al eje a, usando el comando 'Simetría axial' de Cabri (abre el menu Ayuda con F1).</p> <p>- Cuales objetos geométricos son necesarios para la construcción?</p> <p>- ¿Cuáles objetos geométricos se pueden mover/hacer variar?¿Porqué?</p> <p>- ¿Qué cosa sucede cuando hacemos variar los siguientes objetos geométricos? Haz una tabla de dos columnas (como la que aparece en la hoja 2) en donde enlistes los diferentes objetos que puedes hacer variar, y el efecto que esto produce en las imágenes bajo la simetría:</p>						
<table border="0"> <tr> <td>- Si movemos...</td> <td>/</td> <td>- Entonces se mueve...</td> </tr> <tr> <td>...</td> <td>/</td> <td>...</td> </tr> </table>	- Si movemos...	/	- Entonces se mueve...	...	/	...
- Si movemos...	/	- Entonces se mueve...				
...	/	...				
<p>- De la misma manera, traza otros objetos (recta, círculo, triángulo), construye la imagen simétrica de ellos, y explora la simetría anotando tus observaciones.</p> <p>- Caracteriza el objeto geométrico imagen en una simetría axial.</p> <p>- Da una definición de simetría axial.</p>						

Fig. 5. Página 4 de la guía de transformaciones geométricas usando SGD.



una isometría, es sobre todo de tipo cualitativo. Por ejemplo, dan la siguiente definición general para simetría central: “Es cuando se crea una figura idéntica a otra en base a un punto”. O para la definición de traslación: “Es el reflejo de todos los puntos de una figura, paralelos según dirección y distancia de un vector determinado”. O, finalmente, para la definición de simetría axial: “Es el reflejo o imagen simétrica de un objeto respecto a una recta o figura con un extremo plano”.

6/
<p>-Compón dos simetrías axiales. ¿El objeto final puede ser obtenido a partir del objeto inicial con una sola transformación ¿con cuál?</p> <p>-Considera las diversas posiciones recíprocas de los ejes:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Ejes perpendiculares</li> <li>• ejes paralelos</li> </ul> <p>ejes incidentales.</p> <p>- De estas observaciones se pueden obtener algunas conclusiones generales acerca de la composición de las diversas isometrías?</p> <p style="padding-left: 20px;">- Componiendo dos traslaciones se obtiene.....</p> <p style="padding-left: 40px;">- Componiendo dos simetrías axiales con ejes paralelos si obtiene.....</p> <p style="padding-left: 40px;">- Componiendo dos simetrías axiales con ejes perpendiculares si obtiene .....</p> <p style="padding-left: 40px;">- Componiendo dos simetrías axiales con ejes incidentales se obtiene.....</p> <p>- ¿Cuáles isometrías son operaciones internas (aquellas que sean tales que su composición de una isometría del mismo tipo)?</p>

Fig.7. Página 6 de la guía de transformaciones geométricas usando el SGD.

Comentarios: En la cuarta y última parte de esta guía (ver parte inferior de la Fig.6 y toda la figura 7) aparece el estudio de la composición de transformaciones, lo cual para los estudiantes del primer semestre del bachillerato constituye de hecho una de las primeras aproximaciones a la composición de funciones desde un contexto geométrico-euclidiano. Es muy probable que los antecedentes intuitivos que aquí logran los estudiantes con respecto a la composición de funciones les sean posteriormente muy útiles al estudiar la composición de funciones en cálculo diferencial. Un ejemplo de respuesta de los estudiantes a la petición de caracterizar una composición de traslaciones es la siguiente: “Con un vector resultante que es la suma de los dos primeros vectores, con los que se construyeron los segmentos B y C”.

### ***Sesiones quinta y sexta: Uso de las máquinas articuladas para el estudio de las transformaciones geométricas***

En las sesiones quinta y sexta del estudio exploratorio que aquí estamos narrando se introdujeron nuevos artefactos –las máquinas articuladas o pantógrafos—con el objetivo de complementar el estudio de las transformaciones geométricas básicas. En efecto, a partir de la guía que se proporcionó a los estudiantes (ver Fig. 8), se puede observar que las acciones que se solicita a los estudiantes que realicen son las inversas, desde un punto de vista cognitivo, a las realizadas con el SGD (para más detalles al respecto, ver Hoyos, 2002). Esto es, en el estudio de las transformaciones con el SGD, al utilizar el estudiante el comando de “Ayuda” del software, tiene la posibilidad de conocer (al menos nominalmente) las propiedades geométricas de la transformación que él ha elegido del menú de transformaciones del SGD. Con las máquinas articuladas el estudiante actúa de manera inversa en el sentido de que tiene en sus manos un mecanismo dotado de una serie de propiedades geométricas, las cuales él tiene que descubrir y enunciar para posteriormente determinar cual es la transformación geométrica que se concreta en el artefacto.

---

**MÁQUINAS MATEMÁTICAS PARA TRANSFORMACIONES****PARTE I.**

- Tú tienes una máquina matemática. Dibuja la imagen de algunos objetos (rectas, círculos, triángulos) utilizando ésta máquina.
- Explora la transformación y descríbela:
- Elabora dibujos que te ayuden en tu descripción y explica qué es lo que sucede con los objetos imagen cuando mueves la máquina en torno de los objetos originales;
- Haz dos dibujos o esquemas de la máquina en dos posiciones distintas. Coloca en los esquemas que realices letras distintas según corresponda.
- ¿Qué transformación es?
- Haz un esquema o dibujo en donde indiques cuales son los elementos básicos de la transformación (p.e. cual es el centro de simetría o punto fijo de la homotecia o eje de simetría, o vector, etc.)

**PARTE II.**

- Cuando manipulas el mecanismo de la máquina obtienes unas figuras. Haz una descripción de este mecanismo (por ejemplo, ¿cuáles son las barras principales para la obtención del dibujo y cuáles no lo son?
- Dí que cosa sucedería si se pudiera modificar la longitud de algunas de las barras, y cual sería de acuerdo con estos cambios la modificación del objeto imagen.

**PARTE III.**

- Ahora se trata de que reproduzcas usando Cabri-II, la máquina matemática de dibujar de tal manera que puedas utilizar tu modelo de la misma manera que funciona la máquina real.
- Describe los pasos relevantes que has realizado para llegar a obtener tu construcción.

Fig.8. Guía de trabajo sobre las transformaciones geométricas usando las máquinas articuladas.

Comentarios: Tal vez lo más interesante a destacar, por parte de las ejecuciones de los estudiantes al manipular los mecanismos articulados, gira en torno de las diferentes estrategias de trabajo que los estudiantes mostraron

en este contexto. De hecho, se pudo observar que los estudiantes encontraron en la medición una herramienta útil para la comprobación de sus afirmaciones. Lo cual en efecto viene a complementar la percepción cualitativa de las propiedades geométricas que antes habían alcanzado mediante la utilización del SGD.

***Última sesión: Resolución de problemas sobre construcciones y demostraciones en geometría***

Con respecto a los problemas que se plantearon a los estudiantes (ver Fig. 9 y 10), es conveniente mencionar que tal vez sea necesario agregar especificaciones que se dieron por sentadas en el contexto de la exploración o que se aclararon en el momento de abordar los problemas. Por ejemplo, en el problema 1 se quiere que al hacer variar la posición de M en el segmento dado, se siga conservando la equilateralidad de los triángulos. Es interesante hacer notar que este problema es uno de los que permitieron establecer grandes diferencias entre la realización de tareas de construcción y las de explicación o demostración. En particular, porque en general los estudiantes acertaron al obtener que la trayectoria que describe I es la de un segmento paralelo al segmento inicial dado (sobre el que esta M), y, sin embargo, ninguno de ellos abordó la explicación de este hecho. Nótese que la explicación o demostración requiere enfocar y explicitar las propiedades básicas de la homotecia, así como complementar los trazos de la construcción realizada.

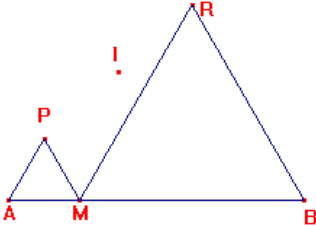
---



1/

**Transformaciones para construir y demostrar**

1. Construir un segmento  $[AB]$  y un punto  $M$  sobre el segmento  $[AB]$ . Construir un triángulo equilátero  $AMP$  y un triángulo equilátero  $MBR$ .



$I$  es el punto medio de  $PR$ .

¿Por dónde se desplaza el punto  $I$  cuando  $M$  se desplaza sobre  $[AB]$ ? Encontrar esta trayectoria y explique porqué esa sería una solución.

2.  $ABC$  es un triángulo cualquiera. Construya un cuadrado  $EFGH$  de tal manera que  $E$  y  $F$  estén sobre el lado  $[BC]$ ,  $G$  sobre el lado  $[AC]$  y  $H$  sobre el lado  $[AB]$ .

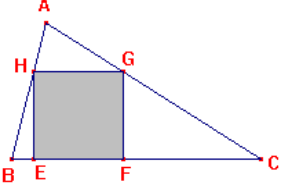
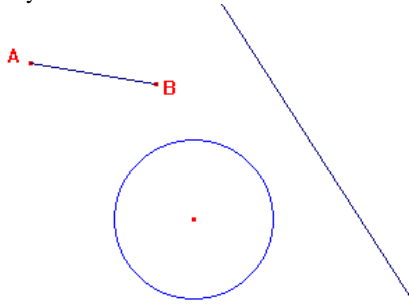


Fig.9. Hoja 1 de la lista de problemas propuestos a los alumnos al término de las sesiones.

2/

3- Se dispone de un círculo, de una recta cualquiera y de un segmento  $[AB]$ .  
 Construya un paralelogramo  $ABCD$  de tal manera que  $C$  esté sobre el círculo y  $D$  sobre la recta.



4- Se dispone de un círculo, de una recta cualquiera y de un punto  $O$ .  
 a) Construir un segmento  $[AB]$  tal que  $O$  sea el punto medio de  $[AB]$ , que  $A$  esté sobre el círculo y que  $B$  esté sobre la recta.  
 b) Estudie el número de soluciones.

5.-Se da un triángulo  $ABC$  en un sistema de coordenadas ortogonal, con:  
 $A(0,0)$  ;  $B(4,0)$  et  $C(0,2)$ .  
 $H$  es el pie de la altura que parte del punto  $A$ .  $I$  y  $J$  son los puntos medios respectivos de los segmentos  $[AB]$  y  $[AC]$ .  
 -Demostrar que el ángulo  $IHJ$  es recto.  
 -Generalizar tomando un triángulo rectángulo con  $A$ ,  $B$  y  $C$  cualesquiera puntos.  
 - Se puede demostrar con geometría analítica o también sin utilizar coordenadas.

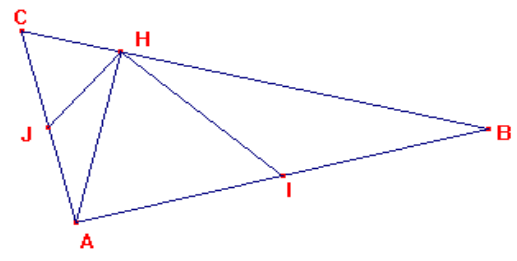


Fig.10. Hoja 2 de los problemas propuestos a los alumnos al término de las sesiones.

Comentarios: Por eventualidades relacionadas con la no institucionalidad del presente estudio exploratorio (no era ya posible que los estudiantes siguieran participando en la exploración pues sus exámenes semestrales estaban en puerta y no se garantizaba que el profesor de la materia fuera a tomar en cuenta su participación en el estudio exploratorio), resultó que sólo en la última sesión de trabajo con los estudiantes se pudo plantear una lista de problemas de construcción y demostración en relación con el tema de las transformaciones geométricas básicas (ver Figs. 9 y 10). Tal vez la observación general más importante que se obtuvo en este contexto fue que los estudiantes estuvieron en posibilidad de abordar y resolver algunos de los problemas de construcción, pero que este no fue el caso en relación a los problemas de demostración. Esto es, ninguna de las peticiones de demostración fueron reconocidas o abordadas por parte de los estudiantes, en contraste con los requerimientos de construcción, algunos de los cuales fueron resueltos por ellos de manera satisfactoria.

## **7.4 Importancia del trabajo de exploración realizado en relación con el currículum escolar del bachillerato**

En este estudio exploratorio se pretendió avanzar en una línea de investigación en didáctica de las matemáticas que fusiona la utilización de nuevas tecnologías (como las computadoras) y la introducción de contextos históricos (como las máquinas articuladas). En particular interesó indagar acerca del potencial del estudio del tema de las transformaciones geométricas básicas para el establecimiento de conexiones por parte de los estudiantes del primer semestre del bachillerato entre los dominios matemáticos de la geometría y la aritmética, y entre la geometría y el álgebra. Tal establecimiento de conexiones es uno de los objetivos del currículum escolar actual en los dos primeros años que son comunes para todos los estudiantes del bachillerato. Como resultado del trabajo realizado por los estudiantes en las situaciones didácticas de nuestro interés (las cuales presentamos a través de las hojas de trabajo que aparecen en la sección 3 de este capítulo) y a juzgar por las respuestas que dieron a las guías de la actividad, se puede decir que se observaron los siguientes logros educativos generales:

---

- Un primer conocimiento de algunas de las propiedades de los vectores.
- Una enunciación matemática de las propiedades y elementos de las transformaciones geométricas básicas como resultado de una enunciación textual de propiedades generales percibidas en los trazos.
- Una introducción al estudio de la composición de funciones desde un contexto geométrico-euclidiano.
- El establecimiento de relaciones aritméticas entre las medidas de los dibujos. Por ejemplo, por medio de la aplicación de la relación aritmética de proporcionalidad que antes se había aprendido en un contexto aritmético.
- Y, finalmente, la posibilidad de resolver problemas de construcción geométricos asociados al tema de estudio.

RECONOCIMIENTOS. En la elaboración de las hojas de trabajo y en su instrumentación en el aula se contó con la valiosa colaboración del Dr. Bernard Capponi del Equipo EIAH de la Universidad Joseph Fourier (Francia) y de la Dra. Federica Oliveiro de la Universidad de Bristol (UK).

---

## Referencias

- Descartes, R. (1637). *La Géométrie*. Translated from the French and Latin by Smith, E. & Latham, M. (1954). New York: Dover.
- Hoyos, V. (2002). “Coordinating Mediation of Activity in the Learning of Geometrical Transformations”. Proceedings of PME-NA XXIV. Athens, Georgia: ERIC/University of Georgia.
- Mariotti, A. (2002). “The Influence of Technological Advances on Students’ Mathematical Learning”. In Lyn D. English (ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*. New Jersey: LEA, Pub.
- Szendrei, J. (1996). Chapter 11: Concrete Materials in the Classroom. In Bishop et al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 411-434). Dordrecht (Netherlands): Kluwer Academic Publishers.
- Wertsch, J., Del Río, P., and Alvarez, A. (1995). Sociocultural studies: History, action, and mediation. In Wertsch, J., Del Río, P., and Alvarez, A. (Eds.), *Sociocultural Studies of Mind* (pp. 1-34). USA: Cambridge University Press.
-

# Ciclos de aprendizaje en matemáticas y retos para jugar

---

**Jorge Barojas Weber**

Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico, UNAM

[jbw40104@servidor.unam.mx](mailto:jbw40104@servidor.unam.mx)

**Nahina Dehesa Degives**

Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV.

[ndehesa@enigma.red.cinvestav.mx](mailto:ndehesa@enigma.red.cinvestav.mx)

## Resumen

En la primera sección discutimos acerca del papel del juego en la exploración y construcción de conceptos matemáticos y su relación con el manejo de distintos tipos de lenguajes (natural, técnico y formal). En la segunda sección, como fundamento que permite conectar el desarrollo de juegos con cambios en el empleo de lenguajes, describimos las nociones de registros de representación y ciclos de aprendizaje. Al final de cada una de estas dos secciones presentamos, respectivamente, un ejemplo ilustrativo de un juego geométrico y de una secuencia de actividades de aprendizaje para un curso introductorio de matemáticas al nivel del bachillerato. La interpretación y desarrollo de tales actividades toma en cuenta los cuatro elementos en cuestión: juegos, lenguajes, registros de representación y ciclo de aprendizaje.

## 8.1 Juegos y matemáticas

Jugar y juego provienen del latín *iocari* y *iocus*; palabras tales como joya, juguete y jugar se derivan de la misma raíz *ioc*. Jugar implica diversión y competencia, para cumplir con propósitos o metas. Además de entretener, los juegos pueden servir para desarrollar habilidades de importancia en la construcción y aplicación de conocimientos, propiciar el espíritu de iniciativa y la creatividad, conseguir precisión y rapidez en el manejo de información, facilitar el establecimiento de relaciones e inferencias, así como desarrollar estrategias para ganar. Sin embargo, al jugar no necesariamente se cumplen pro-

pósitos de enseñanza, como en el caso de la utilización de los llamados materiales didácticos. Ningún tipo de juego tiene necesariamente que premiarnos por haber demostrado dominio de temas conectados con la educación formal, en cualquiera de sus manifestaciones.

Interpretaremos como juego a toda escenificación de una situación en la cual se trabaja un modelo de un contexto de la realidad en donde ocurren eventos que deben satisfacer ciertas reglas, las que definen al juego. Con propósitos didácticos, consideraremos que dicho contexto comprende situaciones problematizadoras, preguntas generadoras y actividades de aprendizaje (Barojas y Pérez, 2001).

Es común pensar que un buen principio para empezar a aprender algo es jugar y al hacerlo, descubrir patrones de comportamiento y regularidades, manejar ciertos lenguajes y formas de pensamiento, así como desarrollar tácticas, estrategias, alianzas... El juego puede ser un medio socializador y de exploración conceptual, en donde los participantes experimentan con entusiasmo la motivación y el compromiso para indagar y ganar en una competencia sana que promueve la superación y la colaboración. También se suelen mejorar destrezas particulares relacionadas con el cuerpo físico como en los deportes, con la capacidad de razonar como en el ajedrez o con el desarrollo de un proyecto de vida en el llamado “juego de los abalorios”, título de la novela de Hermann Hesse (1943).

En términos simplificadores, existen juegos que podríamos denominar de patio y otros de salón o hasta existenciales. Los primeros requieren de habilidades como patear la pelota y meter gol, mientras que los otros implican audacia y elegancia en la manera de ser y pensar, llegando hasta la modulación completa de una forma de vida en una comunidad entera, tal como era el caso de la Castalia en donde vivía el Magister Ludi.

Sin embargo, hay demasiados ejemplos de que aprender es para la mayoría de los alumnos una ominosa tarea disociada del placer de jugar. Por su parte, el maestro pocas veces emprende su tarea docente con una actitud lúdica ni la propicia en sus alumnos al organizarles actividades de aprendizaje, asignarles tareas o enfrentarlos ante exámenes y otras formas de evaluación. De esta manera se desprecian muchas oportunidades para que alumnos y maestros promuevan su creatividad e imaginación proponiendo ideas para desarrollar nuevos juegos y participen en las etapas de su conceptualización, elaboración y aplicación.

---

Por otra parte, en las tareas de descubrimiento e invención tan necesarias en los procesos de investigación y creación, la actitud lúdica es fundamental. De diferentes maneras, quienes trabajan ideas y materiales en ciencias, artes, humanidades y tecnología, juegan y disfrutan cuando manejan sus materiales para generar productos. En el caso de las matemáticas, algunos temas de investigación de importancia han resultado de perseguir respuestas a preguntas relacionadas con juegos, porque éstos abren un espacio creativo para la exploración, el descubrimiento y la invención.

Al introducirse la computadora como elemento de soporte esencial en actividades de entretenimiento y de enseñanza, se han desarrollado juegos basados en problemas matemáticos, como por ejemplo el problema de poblaciones de predadores y presas cuyo comportamiento se describe mediante sistemas de ecuaciones integro-diferenciales acopladas que se resuelven numéricamente. La cantidad de situaciones lúdicas a las que se puede recurrir con la computadora es prácticamente inagotable, para no referirnos a simulaciones cada vez más maravillosas de mundos percibidos o inventados. Estas simulaciones son proyecciones en una pantalla bidimensional y corresponden a situaciones tridimensionales que ocurren en el mundo físico ó se deben a un sorprendente manejo de realidades virtuales en donde todo parece ser posible.

Ciertamente, las matemáticas son mucho más que un juego, el lenguaje de la naturaleza y el sustrato en el cual se expresa la estructura del pensamiento formal. Los frutos del pensamiento postulacional, en forma de descubrimientos, invenciones y soluciones de problemas son una materia prima muy fecunda para inventar juegos en donde se manejan situaciones que involucran objetos, conceptos y procedimientos matemáticos.

Aquí nos interesan las aplicaciones de los juegos en su relación con el manejo de lenguajes y el diseño de actividades de aprendizaje en matemáticas. Además, nos referiremos a juegos que tienen como soporte materiales, dispositivos o instrumentos hechos en papel, cartón, plástico, madera, metal..., no los que pueden simularse en el mundo de las computadoras y los multimedia.

Para ilustrar lo anterior, presentamos un ejemplo de juego en matemáticas, tomado del Proyecto Retos para Jugar (Barojas et al, 1999). Se trata del juego denominado CIRTRAFI porque se refiere a CIRculos - TRAZos - FIGuras. En este juego se establecen correlaciones entre tarjetas que contienen una serie de trazos circulares y las figuras que pueden obtenerse con los mismos (Fig. 1a). CIRTRAFI se puede jugar a un primer nivel en la modalidad de

---



lotería o de memorama. En el primer caso se reparten a los participantes tarjetones que contienen casillas con trazos hechos con circunferencias de dos diámetros diferentes y se muestran las tarjetas de las figuras que resultan cuando se iluminan ciertas regiones de los dibujos que se obtienen con tales trazos (ver Fig. 3(b)). Los participantes en el juego deberán identificar cuando la tarjeta de la figura presentada por quien dirige el juego corresponde a los trazos en alguna de las casillas de su tarjetón; gana el participante que primero completa las casillas de su tarjetón.

En la modalidad de memorama se colocan boca abajo y en desorden tarjetas de parejas trazos – figura y por turnos los jugadores escogen y voltean dos tarjetas; si tales tarjetas forman un par que correlaciona correctamente trazos y figuras, el jugador se lleva el par de tarjetas y vuelve a jugar, en caso contrario cede el turno al siguiente jugador. Como es costumbre en este tipo de juegos, gana el jugador que acumula un mayor número de parejas, una vez que se han agotado todas las tarjetas.

En casos de jugadores con mayor grado de conocimientos pueden plantearse interesantes problemas cuando se procede a cuantificar y establecer conclusiones que implican cadenas de razonamientos, por ejemplo en relación con cálculos de áreas. Si se observan las figuras obtenidas con trazos circulares que se muestran en la Fig. 3(a), calcular las áreas de las figuras sombreadas es un problema que dista de ser trivial, aunque se conozcan los valores de los dos radios con las cuales se obtienen los trazos circulares y las posiciones de los centros correspondientes. Otra actividad interesante es la reproducción de las figuras que se usan en el juego, usando regla y compás, así como la obtención de figuras más complicadas. También puede recurrirse a programas de cómputo que permiten el trazo de figuras geométricas de estructuras complejas y generar patrones bidimensionales que repiten en las direcciones vertical y horizontal la figura principal generada con trazos circulares (Fig. 4). El límite en este tipo de actividades es la imaginación y el tiempo de los participantes.

En todas las modalidades y niveles de juego de CIRTRAFI se promueve un uso de lenguaje natural enriquecido por términos matemáticos tales como círculo, circunferencia, radio, centro, intersección, área, segmento, sector, simetría, rotación... A pesar de que todos los eventos que ocurren durante el juego se comentan, discuten y deciden utilizando el lenguaje natural propio de los jugadores, éstos empiezan a manejar el pensamiento matemático porque los objetos del juego mismo son de naturaleza matemática. Para nada se

---

requiere memorizar definiciones, fórmulas o propiedades. Aparte del interés intrínseco de la interacción social que provoca CIRTRAFI en niños, adolescentes y adultos, este juego ayuda a desarrollar habilidades características del pensamiento matemático tales como establecer correlaciones, hacer abstracciones e inferencias, comparar y decidir, visualizar formas geométricas y describir sus características en términos matemáticos.

En circunstancias como las anteriores, el juego es un vehículo amable y accesible que facilita el paso del lenguaje natural a un lenguaje más técnico que incluye abstracciones propias de una disciplina científica, en este caso de la geometría, para llegar inclusive al manejo de situaciones que requieren del manejo de un lenguaje formal como sería el caso del cálculo de áreas de las figuras sombreadas obtenidas a partir de trazos circulares. Este hecho reviste gran importancia por sus implicaciones en el proceso de aprender y aplicar matemáticas. La siguiente sección considera tales aspectos.

## **8.2 Los lenguajes en el aprendizaje de las matemáticas**

Diferentes actividades de aprendizaje suelen clasificarse y estructurarse de acuerdo con la forma como los conceptos se presentan, representan y utilizan por quien aprende. Por ello Skemp (1980) opina que en relación con las matemáticas: “La meta principal de una presentación lógica es convencer a quienes dudan, mientras que una presentación psicológica busca la comprensión.” ... “La presentación lógica muestra la idea matemática, no la forma matemática de pensar.” Es decir, la presentación lógica consiste en mostrar los productos de los descubrimientos matemáticos, mientras que la presentación psicológica trata de inducir en el aprendiz los procesos involucrados en la comprensión de tales descubrimientos. Por lo mismo, Skemp considera que el aprendizaje de las matemáticas consiste en la formación de estructuras conceptuales, las cuales, en general, se comunican y manejan por medio de símbolos.

Es importante que los aprendices entiendan cómo se presentan los conceptos matemáticos y cómo esos conceptos se registran y utilizan en términos de diferentes tipos de lenguajes. Todo lenguaje, sea éste natural, técnico o formal, es un conjunto de símbolos que siguen ciertas reglas y que tienen como propósito el comunicar mensajes.

---

Entenderemos por registro a todo dispositivo usado para guardar algo. De acuerdo con Duval (1993), el lenguaje natural es el registro más apropiado para iniciar y concluir el proceso de aprender matemáticas. Por ello la enseñanza de esta importante disciplina debe proponer y coordinar actividades de aprendizaje en donde el lenguaje natural expresa diversos registros y es el puente y soporte para construir otros lenguajes, como el técnico y el formal, con sus propios símbolos y reglas de operación.

Es bien conocido que un mismo objeto puede tener diferentes representaciones (palabras, símbolos, fórmulas, modelos, dibujos, esquemas, curvas, gráficas, tablas, códigos...). Cada una de las representaciones proporciona una idea parcial del objeto representado. Las representaciones de los objetos matemáticos adquieren significado y son registradas por el aprendiz de acuerdo con las circunstancias de su uso.

Mediante el empleo de diferentes registros de representación, los aprendices adquieren maestría en interpretar las situaciones matemáticas, utilizando primero su propio lenguaje natural, luego insertando los términos abstractos que componen el lenguaje técnico de la disciplina en cuestión, para pasar al uso del lenguaje formal cuando se manejan situaciones complicadas y luego regresar a su lenguaje natural enriquecido por las tres etapas anteriores. Consideraremos que estas cuatro etapas constituyen un ciclo de aprendizaje (Barojas y Dehesa, 2001).

En función de lo anterior, diremos que el aprendizaje significativo ocurre cuando el aprendiz pasa por ciclos de aprendizaje y logra establecer correspondencias entre distintas representaciones del objeto o situación matemática en cuestión. Esto implica que el aprendiz ha adquirido soltura y seguridad en el empleo de los tres lenguajes (natural, técnico y formal) y maneja diferentes registros de representación. La capacidad de traducir de un lenguaje a otro puede iniciarse mediante actividades lúdicas. Dicha capacidad alcanzará un mayor desarrollo cuando el aprendiz-jugador va más allá del juego y construya conceptos, encuentre y describa propiedades, haga demostraciones y resuelva problemas.

En resumen, un ciclo de aprendizaje en matemáticas consta de las siguientes cuatro etapas, mismas que son usadas de manera gradual e integrada por los estudiantes cuando participan en su propia representación y apropiación del conocimiento:

---

- (1) Descripción de la situación, evento ó fenómeno en lenguaje natural: uso e interpretación de términos y frases según la experiencia y significados que les atribuyen los aprendices en su vida cotidiana.
- (2) Explicación de series de situaciones desde los puntos de vista de los aprendices, pero incluyendo abstracciones que expresan lo que es común en tales situaciones y forman parte del lenguaje técnico característico de una disciplina.
- (3) Uso de registros de representación que integran la estructura de un cierto modelo teórico en donde se describen y explican en lenguaje formal los conceptos y las relaciones conceptuales propias de ese modelo.
- (4) Manejo de cambios de representaciones para describir, predecir y calcular; esto requiere cierto control o maestría de las representaciones involucradas, las cuales luego se interpretan en un lenguaje natural enriquecido.

Para fundamentar el planteamiento anterior, retomemos la consideración Duval (1993) respecto al hecho de que en el aprendizaje de las matemáticas intervienen dos procesos básicos, el de abstracción (A) y el de reconocimiento (R). Asociados a estos procesos del pensamiento y funcionando como elementos que conectan las etapas del ciclo de aprendizaje antes descrito, definimos los niveles  $A_{CL}$ ,  $A_{RE}$ ,  $R_{CN}$  y  $R_{IN}$  (ver Fig. 1, adaptada de Barojas y Dehesa, 2001). La notación correspondiente a los subíndices es la siguiente: (CL) cualitativo, (RE) representacional, (CN) cuantitativo e (IN) interpretativo. A continuación describimos brevemente tales procesos y niveles:

**Abstracción:** proviene de la detección de semejanzas y diferencias en clases de objetos relacionados con nuestras propias experiencias; puede usarse como una referencia general ó servir para atribuir significado a algo. Este proceso permite interpretar relaciones conceptuales con el propósito de utilizar representaciones matemáticas para comprender mejor diferentes fenómenos; sus niveles son:

Cualitativo ( $A_{CL}$ ): se refiere a la abstracción de conceptos en términos cualitativos propios del lenguaje natural que describen situaciones extramatemáticas, mismas que podrían referirse a diferentes puntos de vista del

---

mundo o aún a completos paradigmas científicos, dependiendo de la madurez del aprendiz.

**Representacional** ( $A_{RE}$ ): concierne abstracciones de conceptos expresados en forma matemática; corresponde a representaciones en lenguaje matemático del contenido del nivel  $A_{CL}$  descrito previamente en términos cualitativos.

**Reconocimiento:** es resultado de memorizaciones y reacomodaciones de estructuras conceptuales que sirven para identificar objetos, relaciones ó experiencias; implica el darse cuenta o aceptar propiedades generales relativas a hechos o a conexiones entre ellos. Durante este proceso se construyen modelos matemáticos de diferente grado de complejidad y se aclaran las limitaciones y posibilidades de las situaciones descritas en términos matemáticos. En este caso los niveles asociados son:

**Cuantitativo** ( $R_{CN}$ ): se identifican objetos de naturaleza matemática que se describen usando lenguajes formales y se realizan cambios entre representaciones. Este nivel implica la manipulación del contenido del nivel  $A_{RE}$  apoyados en la estructura y las reglas de operación de las representaciones matemáticas, mismas que se usan para describir, predecir ó calcular.

**Interpretativo** ( $R_{IN}$ ): corresponde al reconocimiento de objetos matemáticos en nuevas situaciones extra-matemáticas en donde se examinan circunstancias de aprendizaje más complejas que las iniciales. Este nivel cierra el ciclo de aprendizaje al interpretar en un lenguaje cotidiano enriquecido lo que se ha logrado en el nivel previo  $R_{CN}$ .

Apoyados en estos dos procesos y sus correspondientes cuatro niveles, planteamos una estrategia de enseñanza que implica que el maestro desempeña dos roles fundamentales, el de modelado y el de instrumentación, mismos que describimos a continuación (ver Fig. 2, también adaptada de Barojas y Dehesa, 2001).

El rol del maestro en el modelado sirve para motivar, desarrollar e ilustrar aplicaciones de conceptos y modelos; se conecta con el proceso de abstracción. Este rol entra en funcionamiento cuando el maestro describe una situación asociada al funcionamiento de cierto sistema o fenómeno y usa como primera versión una explicación en la que emplea el lenguaje natural, para proceder luego a traducirlo e interpretarlo en términos primero del lenguaje técnico y luego del formal (corresponde a los niveles de abstracción  $A_{CL}$  y  $A_{RE}$ ; describe el camino que parte de la etapa 1, pasa por la 2 y llega a la 3; ver Fig. 2).

---

El rol de instrumentación entra en operación cuando el maestro aplica y evalúa la comprensión de los conceptos; se refiere al proceso de reconocimiento. Este rol concierne tareas relacionadas con la identificación, traducción e interpretación de las representaciones matemáticas, las cuales al principio se expresan en el lenguaje formal propio de la disciplina y posteriormente se describen en el de un lenguaje natural enriquecido con la adquisición y aplicación de los conocimientos nuevos que han sido generados mediante el tránsito por las cuatro etapas del ciclo de aprendizaje (corresponde a los niveles de reconocimiento  $R_{CN}$  y  $R_{IN}$ ; parte de la etapa 3, pasa por la 4 y llega nuevamente a la 1; ver Fig. 2).

De acuerdo con la estrategia antes descrita, los niveles antes indicados ( $A_{CL}$ ,  $A_{RE}$ ,  $R_{CN}$  y  $R_{IN}$ ), cumplen las siguientes funciones de naturaleza didáctica:

- explorar: ( $A_{CL} \rightarrow A_{RE}$ ) para promover una búsqueda que pueda conducir al descubrimiento y la invención;
- entrenar: ( $A_{RE} \rightarrow R_{CN}$ ) para desarrollar habilidades de aprendizaje;
- comprender ( $R_{CN} \rightarrow R_{IN}$ ) para mejorar y aplicar el conocimiento ya adquirido; y
- apropiarse ( $R_{IN} \rightarrow A_{CL}$ ) para incorporar y utilizar en términos personales algo recientemente adquirido y aplicarlo satisfactoriamente en situaciones diferentes o más complejas.

De esta manera, la estrategia didáctica que se apoya en el desarrollo de ciclos de aprendizaje permite definir dos tipos de objetivos: el Objetivo 1, que se refiere al proceso de abstracción y va de la exploración al entrenamiento y el Objetivo 2, que está conectado con el proceso de reconocimiento y requiere la aplicación de conceptos matemáticos para pasar de la comprensión a la apropiación de conocimientos.

Conviene mencionar que la noción de ciclo de aprendizaje se ha aplicado al desarrollo de heurísticos útiles en la solución de problemas en física (Barojas y Pérez, 2001) y matemáticas (Barojas y Dehesa, 2004), en sistemas de aprendizaje humano tales como la formación de profesores (Barojas, 2003) y

---

en la construcción del conocimiento organizacional (Barojas y Jiménez, 2003).

Como ejemplo ilustrativo de una aplicación de la inclusión de juegos, del uso de registros de representación y del manejo de lenguajes en el ciclo de aprendizaje antes descritos, proponemos una clasificación de las actividades de aprendizaje contempladas en el curso de Matemáticas I del primer semestre en el Sistema de Bachillerato del Distrito Federal (D.F.). La información correspondiente ha sido tomada directamente de los Programas de Estudio de Matemáticas I, publicados por el Instituto de Educación Media Superior del D.F. En este caso consideramos que los dos primeros niveles del ciclo de aprendizaje, los de abstracción cualitativa y representacional ( $A_{CL}$  y  $A_{RE}$ ), intervienen primordialmente en las aplicaciones de juegos, que en dicho programa sólo ocasionalmente se llega al nivel del reconocimiento cuantitativo ( $R_{CN}$ ) y que es poco probable que se aborde el nivel de reconocimiento interpretativo ( $R_{IN}$ ) que cierra el ciclo de aprendizaje mediante aplicaciones a situaciones extramatemáticas de mayor complejidad respecto de las que inician el ciclo.

En la Tabla 1 presentamos en la primera columna los temas principales de la lista de contenidos del programa de Matemáticas I. Las dos siguientes columnas contienen actividades asociadas a tales contenidos, mismas que hemos distribuido en los niveles correspondientes a  $A_{CL}$ ,  $A_{RE}$  y  $R_{CN}$ . El propósito de estas actividades de aprendizaje es ejercitarse en la exploración de conceptos mediante la manipulación de objetos matemáticos concretos (segunda columna) para pasar posteriormente a actividades conectadas con representaciones simbólicas de los mismos, así como las operaciones y los algoritmos que puedan construirse con ellos (tercera columna). Para apoyar el desarrollo de tales actividades podrán concebirse juegos con tarjetas, fichas y tableros, como en el caso de CIRTRAFI. También podrán utilizarse máquinas articuladas que permitan generalizar construcciones con regla y compás.

La utilización de máquinas articuladas en el contexto antes descrito tiene una triple justificación: (1) implica actividades de exploración y descubrimiento, como en el desarrollo de los juegos del tipo de CIRTRAFI; (2) propicia el manejo de los lenguajes natural, técnico y formal, siguiendo los niveles del ciclo de aprendizaje considerado en este trabajo, y (3) permite desarrollar actividades de aprendizaje asociadas a los niveles  $A_{CL}$ ,  $A_{RE}$ ,  $R_{CN}$  y  $R_{IN}$ , según sea el grado de madurez alcanzado por los estudiantes en relación con

---

el manejo de los registros de representaciones. Todos y cada uno de estos aspectos influyen en el desarrollo del pensamiento matemático.

La importancia del diseño de actividades de aprendizaje referidas a transiciones entre las etapas constitutivas del ciclo de aprendizaje estriba en que si los alumnos participan activamente en ellas, de dicha participación podrán derivarse la construcción y aplicación de conocimientos. Esto significa que, de acuerdo con Jonassen, Peck y Wilson (1999), los alumnos deben involucrarse en actividades que les presenten novedad e interés y de las cuales obtengan aprendizajes, para que después manifiesten lo que han aprendido al ejecutar tales actividades. Nuestra propuesta consiste justamente en desarrollar juegos y construir máquinas para la enseñanza de las matemáticas que sean utilizadas como instrumentos concretos para propiciar dichos aprendizajes.

**Agradecimientos.** Hacemos reconocimiento al trabajo de Silvia Villarreal Bello para preparar las figuras 3 y 4 de CIRTRAFI, a partir de documentos generados por Martha Islas Meza y la conceptualización de dicho juego realizada por Nahina Dehesa.

---



## Referencias

- Barojas, J., Canencia, T. Escalante, L., T. García, E. González y M. Islas. 1999. *Retos para jugar*. Congreso de SOMEDYCIT en León, Guanajuato.
- Barojas, J. y Dehesa, N., 2001. Mathematics for Social Scientists: Learning Cycles and Teaching Strategies. *Industry and Higher Education*. Vol. 15, No. 4, pp. 269 – 277.
- Barojas, J. y R. Pérez. 2001. *Physics and Creativity: Problem Solving and Learning Contexts*. **Industry and Higher Education**. Vol. 15, No. 6, pp.1–9.
- Barojas, J. 2003. *Teacher training as collaborative problem solving*. **Educational Technology and Society**.
- Barojas, J. y E. Jiménez. 2003. *Gestión del conocimiento organizacional en educación*.
- Barojas, J. y N. Dehesa. 2004. *Semiotic representations in problem solving and writing*. (Sometido a publicación).
- Duval, R. 1993. *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée* (Registros de representaciones semióticas y funcionamiento cognitivo del pensamiento), **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, Vol. 5, IREM Strasbourg, Francia.
- Hesse, H. 1943. *Das Glasperlenspiel (EL juego de abalorios)*. Fretz und Wasmuth Verlag, Zúrich, Switzerland. En traducción de Alianza Editorial, Madrid, España (2000).
- Jonassen, D.H., K.L. Peck y B.G. Wilson, B.G., (1999) *Learning with technology: A Constructivist Perspective*. Prentice Hall. Merrill. Estados Unidos.
- Skemp, R. 1980. *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*, Ed. Morata, Madrid, España.
-

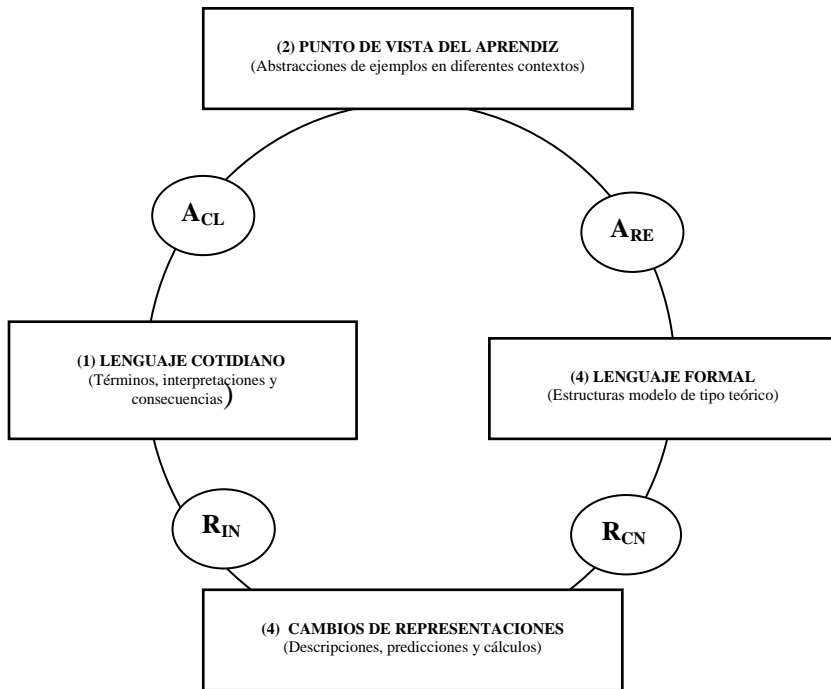


Figura 1. Ciclo de aprendizaje utilizado en la construcción del conocimiento matemático.

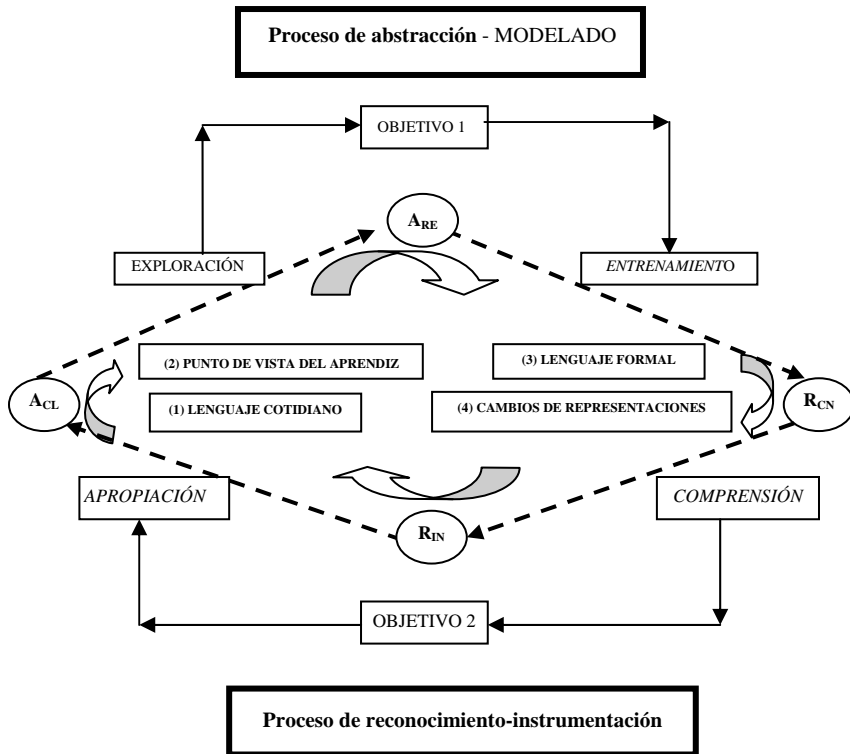


Figura 2. Diagrama de una estrategia didáctica para el desarrollo de conceptos matemáticos.

**Tabla 1.**  
**Actividades de aprendizaje para el curso de Matemáticas I**

<b>TEMAS</b>	<b>ABSTRACCIÓN (A<sub>CL</sub> y A<sub>RE</sub>)</b>	<b>RECONOCIMIENTO(R<sub>CN</sub>)</b>
Lenguajes simbólicos	Opinar, discutir y representar con símbolos.	Verbalizar, escribir e inducir.
Números Naturales	Repasar operaciones y trabajar con propiedades de conmutatividad, asociatividad y distributividad.	Uso de paréntesis. Cálculo de áreas de cuadrados y rectángulos.
Sistemas Antiguos de Numeración	Comparar sistemas como el maya, babilónico, romano y egipcio.	Realizar conversiones entre tales sistemas.
Bases	Leer y escribir en distintas bases.	Manejar sistemas posicionales y algoritmos.
Múltiplos y Divisores	Ejercicios para la obtención de múltiplos y divisores.	Obtención del mínimo común múltiplo y del máximo común divisor.
Primos y Algoritmo de Euclides	Factorización.	Algoritmos de descomposición.
Números Enteros	Operaciones y leyes de signos.	Uso de paréntesis, recta numérica y valor absoluto.
Ecuaciones (Primer acercamiento)	Ecuaciones con enteros.	Tablas de expresiones. Uso de lenguaje algebraico.
Construcciones con Regla y compás	Construcción de perpendiculares, paralelas, mediatrices, puntos medios y bisectrices.	Copiar ángulos. Operaciones con segmentos.
Congruencia	Obtención de criterios de congruencia a partir de construcciones con regla y compás para copiar triángulos y polígonos.	Justificación formal de las construcciones con regla y compás (primer paso hacia la demostración)
Propiedades del triángulo	Clasificación de triángulos. Construcción de mediatrices, bisectrices, alturas y medianas.	Necesidad y lógica de las demostraciones geométricas.
Área	Cálculo de áreas de triángulos.	Construcción de tablas (acercamiento a funciones).
Ángulos	Medidas con transportador. Distinción de ángulos congruentes.	Demostración de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.
Semejanza (primer acercamiento)	Dividir un segmento en cierto número de partes iguales.	Demostración intuitiva.
Introducción a los números naturales	Definición y notación. Construcción con regla y compás.	Fraciones equivalentes. Operaciones con fracciones.
Ecuaciones (segundo acercamiento)	Solución de ecuaciones de primer grado y obtención de tablas.	Plantear y resolver ecuaciones a partir de problemas.

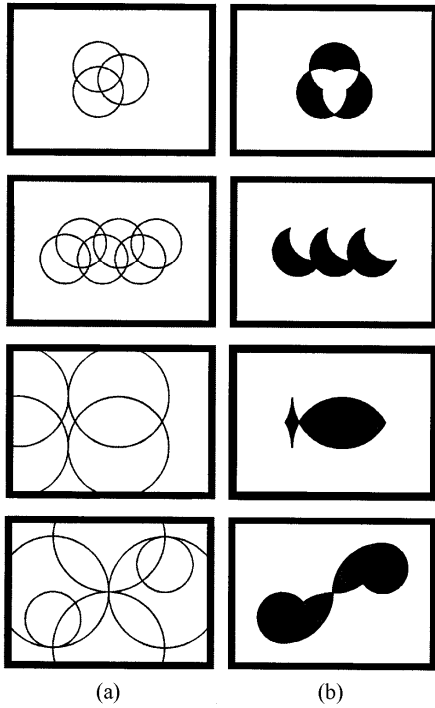


Fig. 3. (a) Trazos circulares.  
 (b) Figuras correspondientes con CIRTRAFI

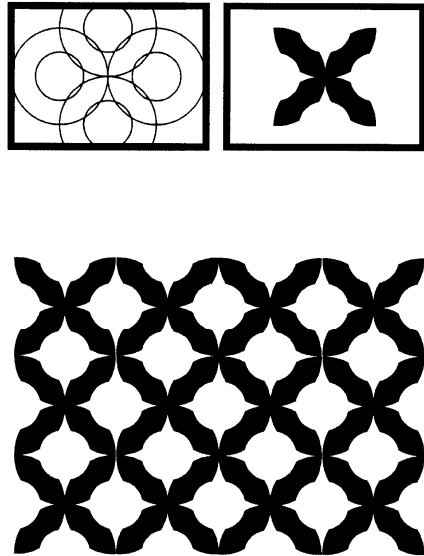


Fig. 4. Ejemplo del diseño de un patrón formado por la reproducción de una figura compleja obtenida mediante trazos circulares

# Instrumentos y matemáticas

Historia, fundamentos y perspectivas históricas

MANUEL FALCONI MAGAÑA

VERÓNICA HOYOS AGUILAR

Compiladores



# Historia de los instrumentos matemáticos. Arte, astronomía y geometría

---

**César Guevara B.**

Facultad de Ciencias, UNAM.

jcgb@hp.fciencias.unam.mx

## 1.1 Resumen

El desarrollo de las matemáticas no se podría entender plenamente si se estudian únicamente sus elementos teóricos y se ignora el uso de los instrumentos y máquinas, que la han apuntalado en la validación y generación de sus múltiples resultados. Los instrumentos matemáticos se han usado en diferentes ámbitos de las ciencias matemáticas e incluso han sido aprovechados para transmitir en forma más gráfica algunos mensajes religiosos.

En las páginas que siguen se hará el análisis de algunos ejemplos en la larga travesía por la que han pasado los instrumentos matemáticos en la historia. Como el objetivo es mostrar la diversidad de sus usos, entonces los ejemplos seleccionados apuntan en direcciones diferentes, y es la razón por la que es posible encontrar algunos saltos temáticos entre las secciones del capítulo.

Se mostrará el contraste entre usarlos como elementos centrales en las pinturas religiosas para transmitir mensajes bíblicos y, por otro lado, el rechazo hacia ellos por parte de influyentes filósofos griegos. Se abordarán las técnicas heurísticas empleadas por Arquímedes en *El Método*, y la ‘sintaxis matemática’ de Ptolomeo se expondrá desde sus características instrumentales; se verá el trazado de cónicas de Descartes y el esbozo de óvalos de los artistas en el renacimiento; finalmente, se mostrarán algunas técnicas instrumentales empleadas en la navegación.

## 1.2 La representación del orden

Una de las preocupaciones fundamentales del hombre desde la antigüedad fue la de tratar de entender y controlar su entorno. La permanente incertidumbre que le provocaba no comprender al universo en sus grandes dimen-

siones, así como en su mínima pequeñez —siéndole ambas inaccesibles— lo impulsaron a tratar de estructurar, numerar, medir y observar en forma sistemática. Para enfrentar tal incertidumbre creó instrumentos que lo auxiliaron para entender las reglas de la naturaleza. Los instrumentos que diseñó a lo largo de la historia son variados y van desde los utilizados en agrimensura, astronomía, geometría, hasta los de uso artístico, entre otros. Todos fueron utilizados para el trabajo en las disciplinas teóricas o directamente para la solución de problemas prácticos.

Antes de abordar los diversos aspectos de los instrumentos matemáticos cabe señalar que su uso no siempre ha sido el mencionado anteriormente. La confianza que el hombre ha depositado en el empleo de los instrumentos para extraer datos de su entorno trascendió incluso a su mundo físico inmediato. Esto es, el apego a sus creencias religiosas así como el uso de instrumentos se dio paralelamente en el tiempo. Como ejemplo de ello empezaremos por abordar la relación entre instrumentos e iconografía cristiana.

En los textos bíblicos se encuentran pasajes que hacen ver a Dios como el creador del mundo a partir de elementos amorfos, donde él dio orden al caos existente del universo, para lo cual necesitó poder medir, pesar y contar.

La idea de un Dios creador del universo a través de un acto de medición se encuentra con frecuencia en las culturas del mediterráneo.

Platón, en el *Timeo*, describe al ‘demiurgo’ como una fuerza creadora que a partir del caos dio vida a lo racional por medio de un acto de medición.



Fig. 1



En el *Libro de la sabiduría*<sup>1</sup> se describe el poder creador de Dios de la siguiente forma: “tu mano poderosa sólo tenía que elegir: como tú creaste el mundo a partir de una materia informe” [*Sabiduría* 11, 17]. En el libro de Isaías, cuando se toca la consolación de Israel y que Dios acudirá con su poder, se encuentra la siguiente pregunta: “¿Quién midió las aguas en el hueco de su mano, con su palmo tomó la medida de los cielos, con un tercio de medida calculó el polvo de la tierra, pesó los montes con la báscula y las colinas con la balanza?” [Isaías 40, 12]. Y en *Proverbios*, cuando la sabiduría se elogia a sí misma y a la vez se personifican los atributos de la sabiduría de Dios, se encuentra lo siguiente: “[...] Cuando estableció los cielos. Allí estaba yo [la sabiduría]; cuando trazó un círculo sobre la faz del abismo, cuando arriba afirmó los cielos [...] cuando señaló los cimientos de la tierra, yo estaba entonces junto a él como arquitecto”<sup>2</sup> [*Proverbios* 8, 27].

Los anteriores pasajes bíblicos fueron razón suficiente para que algunos artistas desde la edad media crearan pinturas e incluso ilustraran la Biblia representando a Dios —en su capacidad de ordenar y medir— utilizando un compás o una balanza con los que daría forma al universo a partir de un caos primigenio<sup>3</sup> (Figura 1). Se recurrió a lo expresivo y alegórico de las imágenes con el afán de llegar a un público más profano y hacerlo entender los pasajes bíblicos de mayor profundidad. Así, en los pasajes anteriores la geometría está simbolizada por un lado en un sentido individual y por otro en uno universal, en tanto que el instrumento transmite el orden y la armonía al mundo.

Paralelamente a la creación de los textos que dieron origen al Antiguo Testamento se desarrollaban otras actividades de carácter científico y técnico que ocuparon la atención de los filósofos y académicos del siglo IV a. C.. Este camino y el cambio de rumbo que experimentó la matemática de una cultura a otra es lo que se expondrá en adelante. El análisis se presentará desde la perspectiva de diversos instrumentos de uso matemático.

---

<sup>1</sup> Libro apócrifo del *Antiguo Testamento*.

<sup>2</sup> Cabe señalar que en el libro de Job [26, 10] se encuentra lo siguiente: “Ha trazado un círculo sobre la superficie de las aguas, en el límite de la luz y las tinieblas”.

<sup>3</sup> Como ejemplos de obras con las características mencionadas tenemos: la denominada *Biblia Moralisée*; la ilustración de Guyart des Moulins en la obra *Historia Scholastica* (1411-12); la pintura de William Blake *Frontispicio para Europa, una profecía* (1793). Aquí Blake se inspiró para su obra en un pasaje del *Paraíso Perdido* de Millon. Aunque sólo se mencionan algunas representaciones, se tiene un registro de aproximadamente 40 obras con estas características.

---

### 1.3 El mundo griego

Desde el siglo VI a. C. el centro de producción matemática se desplazó de Mesopotamia y Egipto al mundo griego. Los griegos jónicos se abrieron paso entre la arraigada mitología para adaptar una cosmovisión basada en un pensamiento racional y empírico, y así dar lugar a un modo de pensamiento más especulativo, del que carecieron las civilizaciones de Oriente Próximo. Así, la matemática ocupó el lugar de una ciencia racional y universal, y la geometría en particular el del centro del conocimiento.

Que se considere que la matemática prehelénica tenía un carácter meramente instrumental y técnico, útil como un medio para resolver de forma empírica problemas concretos, y que por otro lado a la matemática griega se le vea como la verdaderamente racional, no es una apreciación del todo justa. Si bien es cierto que la matemática griega ya no estaba apuntalada sobre las bases del empirismo de los mercaderes de Egipto y Mesopotamia, y que se reconoce que transitó de lo empírico a lo teórico a través de implantar los elementos formales de prueba, demostración, axioma, proposición, entre otros<sup>4</sup>; tampoco se puede descartar la posibilidad de que sí se auxiliaron de instrumentos para el desarrollo de las ideas matemáticas, principalmente en una fase previa a la presentación de los resultados finales (es decir, de la enunciación del teorema y de su demostración).

Más aún, los problemas políticos y militares del mundo greco-romano provocaron la destrucción de las bibliotecas que contenían los escritos originales, consumándose así la pérdida de las posibles fuentes donde se pudieron encontrar las técnicas de investigación empleadas.

Las fuentes de la matemática griega que se consideran de mayor importancia provienen de códices bizantinos escritos entre 500 y 1500 años después que fueron escritos los originales griegos o sus traducciones árabes y latinas. Para el siglo XVIII se podía disponer de obras de Euclides, Apolonio, Arquímedes, Ptolomeo, Diofanto, Teodosio, Nicómaco, Menelao, entre otros.

---

<sup>4</sup> A estas características se puede agregar también las de un sector de los científicos griegos que llevaron a la matemática a ser una disciplina totalmente teórica, donde la investigación de los teoremas se hacía de una forma inmaterial y abstracta, es decir, sin instrumentos, ni mediciones materiales, y se realizaba sólo mediante la intuición de ideas y del proceso lógico-matemático. Como ejemplo de ello se tiene a Proclo [*A commentary*, 52] y su comentario sobre Tales: “Tales, de su viaje por Egipto fue el primero que trajo a Grecia esta teoría [la geometría]; y él mismo encontró muchas cosas y descubrió a los que después de él vinieron, los principios de otras muchas, apuntando en algunos casos a lo más universal, en otros casos a lo más intuitivo”.

---

Las obras mencionadas son tesoros y memorias de la ciencia, dan muestra de lo refinado y detallado que fue la exposición de los temas, pero a la vez dan muy poca información sobre las fuentes y los métodos que usaron los autores para llegar a tales descubrimientos.<sup>5</sup> Y a pesar de que sabemos del rechazo que existió entre los filósofos griegos por el uso de instrumentos, no es adecuado descartar que el uso de ellos sí formó parte de la metodología para estimular el razonamiento creativo.

De manera documentada sabemos que Platón —siendo uno de los hombres de mayor presencia en la cultura griega— asignó a la matemática la cualidad de poder ejercer influencia sobre todo el saber humano, y además tener un lugar fundamental en el desarrollo de las ideas. Así, la geometría quedó vinculada con el modelo teórico de la matemática pura, rechazando de forma elitista la aplicación práctica así como el estudio de las dimensiones geométricas de la realidad física.

Como uno de los fines del estudio de las matemáticas —para Platón— era el de la formación y desarrollo de la inteligencia para la mejor comprensión de los estudios filosóficos<sup>6</sup>, entonces es posible que su influencia fuera uno de los factores para que el trabajo instrumental en la geometría se restringiera sólo al uso de la regla y el compás.

Plutarco, en sus *Vidas paralelas (Vida de Marcelo)* (1980, 252), comenta la indignación de Platón ante el uso de los instrumentos en la geometría:

Platón se indispuso e indignó con ellos [Arquitas de Tarento y Eudoxo de Nidos] porque degradaban y echaban a perder lo más excelente de la geometría al trasladarla de lo incorpóreo e intelectual a lo sensible, para emplearla en los cuerpos que son objeto de oficios toscos y manuales.

Posteriormente, Plutarco comenta en el mismo pasaje que así fue como decayó la mecánica al separarse de la geometría y quedar desdeñada por los filósofos para permanecer relegada sólo al servicio del arte militar. Aunado a lo anterior, Aristóteles consideraba que la física sería el estudio del movimiento, pero sólo de aquél que fuera una consecuencia de las fuerzas de la

---

<sup>5</sup> Cabe señalar que los métodos usados para proponer resultados científicos en ocasiones pueden ser un tanto azarosos o casuales, y desde la perspectiva del rigor matemático se podrían considerar como informales. Para casos como éstos, es frecuente que se opte por presentar el resultado y su demostración, pero no el método, ya que podría dar lugar a críticas.

<sup>6</sup> Platón se interesaba por la preparación de los futuros hombres de estado. Él planteó formas en que se podía estimular el razonamiento y generar hombres más preparados para la discusión, la oratoria o la gramática.

naturaleza, de modo que las cosas movidas de manera artificial caerían fuera del ámbito de la física. En la *Física* [Libro VIII 255a 15-25] Aristóteles expone que el movimiento siempre tendrá una causa que se podrá distinguir.

Las distinciones anteriores [de las causas del movimiento] se pueden hacer también en el caso de las cosas movientes: algunas de ellas pueden producir movimiento contra naturaleza (la palanca, por ejemplo, no es naturalmente capaz de mover lo pesado).

En la cita se encuentra que para Aristóteles el uso de los instrumentos daba lugar a movimientos antinaturales, los cuales no consideraba que formarían parte de lo que estudiaba la física.

Con influencias tan poderosas como las de Platón y Aristóteles, entonces no era común que se difundiera el uso de los métodos instrumentales para la creación de resultados matemáticos o físicos.

Pero a pesar de los obstáculos y del papel secundario que tenían las técnicas instrumentales, éstas se pudieron abrir paso en forma natural debido al auge de las grandes construcciones y a la necesidad de crear grandes máquinas para usos prácticos. Para finales del siglo IV a. C. ya eran conocidas cinco máquinas: la cuña, el tornillo, el cabestrante, la polea y la palanca<sup>7</sup>.

En las dos secciones que siguen se ejemplifica cómo fue el uso de algunos métodos y técnicas instrumentales. Arquímedes y Ptolomeo, autores de *El método* y el *Almagesto* respectivamente, serán la muestra.

## 1.4 Arquímedes

En las épocas de Platón y de Aristóteles el uso práctico de las técnicas instrumentales desarrolladas por los ingenieros alejandrinos tuvo poca ingerencia en las principales áreas de la vida griega. Después de la muerte de Alejandro Magno la producción comercial se elevó significativamente y las actividades artesanales y comerciales crecieron en importancia en la vida política y social. Por estas razones, el trabajo de las artes prácticas se revaloró y desde el siglo II algunos hombres de la élite cultural miraron hacia las discipli-

---

<sup>7</sup> No es casualidad que una obra titulada *Mecánica*, atribuida erróneamente a Aristóteles, se ocupara de presentar una teoría unificadora sobre estos instrumentos.

nas técnicas. Y en este tenor aparecieron personajes como Arquímedes, convencidos del lugar que se debería de dar al uso matemático de las máquinas. El trabajo de Arquímedes es amplio, sus principales obras fueron impresas y traducidas al latín por primera vez entre 1503 y 1588<sup>8</sup>. Estas obras lograron ejercer inmediatamente una importante influencia sobre el pensamiento científico de esa época y de los siglos que le sucedieron.<sup>9</sup>

En lo general el trabajo de Arquímedes se apegó al estándar geométrico de la escuela euclidiana, y se adhirió al tipo de exposición basada en fijar con antelación las hipótesis que se querían postular, previo a la demostración rigurosa. Pero también hay certeza en que no hubo un Arquímedes metodológico y sintético, como fue el caso de Euclides.

A pesar de que los trabajos de Arquímedes tuvieron que enfrentar el prejuicio platónico, en ellos no se descartó ningún procedimiento técnico emanado de la mecánica o de la geometría del mundo real. Libre de compromisos filosóficos aprovechó lo que otros despreciaron: lo infinitesimal, lo mecánico, lo instrumental, así como todo lo que le presentó su entorno real y que lo consideraba como un potencial elemento para su investigación; en esta dirección se tiene que aprovechó los casos de lo irregular, lo tangible y todo lo que pudiera ser construible. Cabe señalar que su adhesión a lo anterior no lo separó en la presentación de sus resultados, del espíritu del rigor euclidiano, como se aprecia en sus obras.

De lo anterior se pueden distinguir tres vertientes en la metodología que empleó Arquímedes para desarrollar su trabajo: la inicial, donde se intuye algún resultado basado en las leyes geométricas; una intermedia, de factibilidad del resultado comprobado a través de instrumentos; y finalmente, la demostración empleando —en algunos casos— el método de exhaustión que proporcionaba la demostración formal de lo que se auguraba en la fase previa —es decir, la de invención.

Pero en sus trabajos sólo se encontraba la exposición de la última etapa, es decir, el enunciado y la demostración, quedando oculto el proceso creativo que daba lugar al enunciado (se presentará ejemplo en pag. 16). Como dijo John Wallis en 1676, “al parecer Arquímedes ocultó adrede las huellas de su investigación como si hubiera sepultado para la posteridad el secreto de su método de investigación”.

---

<sup>8</sup> Existió una fuerte tradición de corte arquimediano durante la Edad Media. Esta se facilitó mediante la circulación de manuscritos que contenían obras o fragmentos de textos de Arquímedes (Clagett, 1964).

<sup>9</sup> Koyrè [*Estudios de historia*, 44] afirma que “son la reanudación y asimilación de la obra de Arquímedes las que sirvieron de base a la revolución científica del siglo XVII”.

Si el método de exhaución —dado por Eudoxo— que empleaba Arquímedes lo obligaba a conocer previamente el resultado de lo que se quería demostrar, entonces carecía de valor heurístico, esto es, dicho método no era apto para poder crear, sino sólo para demostrar aquellos resultados de los que ya se tenía conocimiento previo. Entonces ¿cuál era el método *a priori* que empleó para descubrir los resultados?

Para casos sencillos Arquímedes pudo llegar a los resultados intuitivamente por vía inductiva ¿pero cómo pudo intuir que la superficie de una esfera es cuatro veces un círculo máximo? o ¿que el área de la primera vuelta de la espiral es un tercio del primer círculo? o ¿que el área de un segmento parabólico es cuatro tercios del área del triángulo inscrito con la misma base y altura sobre el eje? o ¿cómo encuentra el centro de gravedad de un segmento de paraboloides?

Desgraciadamente Wallis no pudo conocer el método de investigación que usó Arquímedes (1988) y que nos dejó en una obra titulada *El método relativo a los teoremas mecánicos* (conocida como *El Método*) en la que mediante procedimientos mecánicos no rigurosos —él lo reconoce— dedujo los sorprendentes resultados matemáticos que después demostraba formalmente. Tomando como base un esquema diferente a los métodos alejandrinos, llevó a cabo una excelsa conjunción de mecánica y geometría donde ponía al descubierto cuáles eran los métodos que utilizaba en sus invenciones matemáticas.

*El Método* inicia con la carta de Arquímedes a Eratóstenes donde le reconoce su excelente dominio en materia de filosofía y su aprecio por las cuestiones matemáticas. Por estas cualidades Arquímedes consideró que era adecuado confiarle por escrito su método gracias al cual le sería posible abordar la investigación de ciertas cuestiones matemáticas por medio de la mecánica. Arquímedes le confiesa a Eratóstenes que algunos de sus teoremas primero los concibió a través de métodos mecánicos y, posteriormente, les suministró una demostración geométrica. Es importante señalar que estaba plenamente consciente de que la investigación restringida sólo a lo instrumental no tendría las cualidades de una demostración matemática, y en la carta de introducción a *El Método* Arquímedes escribió: “yo mismo, algunas de las cosas que descubrí primero por la vía mecánica las demostré luego geoméricamente, ya que la investigación hecha por este método no implica una verdadera demostración”. Pero Arquímedes hace patente a Eratóstenes que si bien es cierto que con los instrumentos mecánicos no se llega a una demostración, sí serían un estímulo a la creatividad científica, y le señaló lo siguiente: “como que es más fácil construir la demostración después de haber

---

adquirido por ese método cierto conocimiento de los problemas, que buscarla sin la menor idea al respecto”.

Como ejemplo del uso de los medios mecánicos para proponer teoremas de geometría enseguida se presenta la cuarta proposición de *El método*, que dice lo siguiente:

(Volumen de un segmento de paraboloides)

*Todo segmento de un conoide [paraboloides ABG] rectángulo cortado por un plano perpendicular al eje es una vez y media el cono que tiene la misma base y el mismo eje que el [paraboloides] segmento (véase Fig. 3).*

Pero también se tiene la proposición 21 de su obra *Sobre conoides y esferoides*, donde no usa métodos instrumentales, y escribe lo siguiente:

*El segmento de conoide parabólico producido por un plano perpendicular al eje equivale a tres veces la mitad del cono de la misma base y del mismo eje (véase Fig. 2).*

En el libro *Sobre conoides y esferoides* Arquímedes apoya su demostración en considerar un volumen X igual a  $3/2$  el volumen del cono ABG y enseguida, para demostrarlo por contradicción, señala que si X no es igual al volumen  $\Gamma$  del paraboloides, entonces X es mayor al volumen del paraboloides o menor.

Supone primero que  $\Gamma > X$ , y por un método que resurre a cilindros inscritos y circunscritos (Figura 2), que usará junto con el método de exhaución, llega a que el paraboloides  $\Gamma$  no puede ser mayor que X. Usando un razonamiento análogo demuestra que  $\Gamma$  no puede ser menor que X. Por tanto sólo queda que  $\Gamma = X$ .

Aquí es importante señalar que Arquímedes parte del hecho de suponer que tomará un volumen X igual a  $3/2$  del volumen del cono ABG, y después construye una justificación de que la relación entre X y  $3/2$  el volumen del cono ABG es de igualdad. Pero como ya se mencionó antes ¿cómo se imaginó que lo más conveniente era tomar  $3/2$  del volumen del cono? La respuesta

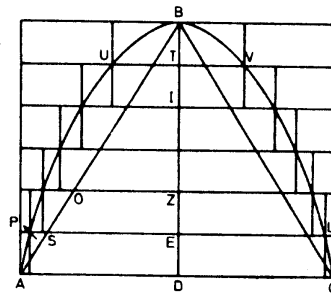


Fig. 2

se encuentra en la proposición cuatro —arriba mencionada— de *El Método*, donde establece que la relación de volúmenes es igual a 3/2.

Arquímedes propone lo siguiente:

Sea el paraboloides BAG (Figura 3) con eje AD, y prolongúese DA hasta T de tal forma que DA = AT, y considérese DT como una palanca con punto medio en A.

Ahora, como las rectas  $\Xi\Sigma$  y BD son dos ordenadas de la parábola, entonces:

$$\frac{DA}{A\Sigma} = \frac{(BD)^2}{(\Xi\Sigma)^2}$$

pero como DA = AT, entonces  $\frac{TA}{A\Sigma} = \frac{(M\Sigma)^2}{(\Sigma\Xi)^2}$

Por otra parte  $\frac{(M\Sigma)^2}{(\Sigma\Xi)^2}$  es igual a la razón del área del círculo de diámetro MN y el área del círculo de diámetro  $\Xi O$ , es decir:

$$\frac{(M\Sigma)^2}{(\Sigma\Xi)^2} = \frac{\text{Área de círculo de diámetro MN}}{\text{Área de círculo de diámetro } \Xi O}$$

Por lo tanto  $\frac{TA}{A\Sigma} = \frac{\text{Área de círculo de diámetro MN}}{\text{Área de círculo de diámetro } \Xi O}$

Después Arquímedes nos propone que el área del círculo de diámetro MN se equilibre con el área del círculo de diámetro  $\Xi O$ , teniendo como punto de equilibrio el punto A de la palanca T $\Sigma$ . Lo hace considerando que el círculo de diámetro  $\Xi O$  se traslada al punto T, el cual será su centro de gravedad (el centro de gravedad del círculo de diámetro MN es  $\Sigma$ ).

Posteriormente Arquímedes enunciaba que del mismo modo se podía demostrar que si se trazaba en el rectángulo EZGB cualquier otra recta paralela a BG, entonces el área del círculo generado del cilindro se equilibraría respecto del punto A con el círculo generado por el paraboloides trasladado a T (de modo que sea su centro de gravedad).

Ahora, llenando el cilindro y el segmento del paraboloides con círculos concéntricos proponía que se podían equilibrar respecto de A, esto es, el cilindro en K y el paraboloides con su centro de gravedad en T.

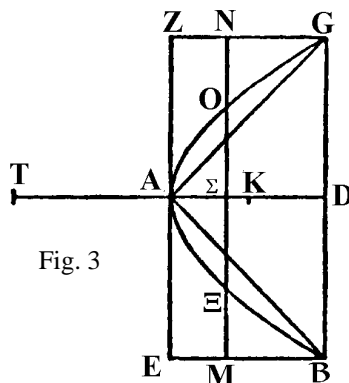


Fig. 3



Por lo tanto como  $TA = 2AK$ ,  
 entonces cilindro = 2 paraboloides;  
 pero cilindro = 3 veces el cono (resultado conocido),  
 entonces 2 paraboloides = 3 conos;  
 finalmente paraboloide =  $3/2$  cono

En la construcción anterior de *El Método* se ve cómo el uso instrumental de la palanca junto con el equilibrio de los círculos generaba la esperada relación de  $3/2$ . Y aunque el instrumento no tenía realidad física ni generaba una demostración para el problema, sí era un vehículo que estimularía el razonamiento y la inventiva. Con esos antecedentes, en *Sobre conoides y esferoides* ya podía presentar la demostración matemática, la que sí cumpliría con las exigencias de la validación matemática.

## 1.4 Ptolomeo el instrumentalista

La contribución de los griegos en el empleo de procesos instrumentales no se limitó a lo geométrico, también dirigieron su atención a la interpretación de los fenómenos observados en el universo. Tales observaciones se generaban en el espíritu de un modelo mecanicista, que atendería a una geometría plana y/o esférica, así como a reglas de movimiento regular. La suma de estas cualidades generó mecanismos útiles para visualizar los movimientos astrales<sup>10</sup>. La presente sección se ocupará de modelos de carácter instrumental, que potencialmente podrían ser máquinas para imitar el desarrollo de algunos fenómenos en el universo.

Uno de los objetivos de la ciencia es que podamos explicar los fenómenos o justificar las apariencias de lo que vemos, y lo hacemos a través de construir teorías que supongan una descripción correcta de los aspectos observables del mundo cercano. Para los griegos era de particular importancia la capacidad que se podía llegar a tener para predecir lo que sería observable en un futuro, aunque en el momento de la predicción no se tuviera ni una sola señal empírica de ello. La mecanización griega requería de un lenguaje técnico extraído de la geometría; para esto los astrónomos griegos crearon todo un

---

<sup>10</sup> Para la recolección de datos los astrónomos desde épocas remotas contaron con instrumentos rudimentarios para la medición y localización de objetos en el cosmos, y en siglos más recientes ya tuvieron instrumentos de observación más sofisticados, tales como las diferentes modalidades de sextantes, cuadrantes, astrolabios, telescopios, etc.

elenco de conceptos que se ocupaban de los objetos intangibles. Este proyecto fue guiado por las características mismas de los objetos observados tanto en su forma como en su movimiento. Un ejemplo de ello se puede apreciar desde la Tierra: el universo se ‘ve’ como una esfera y los cuerpos que en él hay pueden reducirse —para su estudio— a meros puntos geométricos en esa esfera, o a curvas cerradas para el caso de sus trayectorias.

Lo que resultaba controvertido era definir si la ciencia debía también aspirar a la verdad intrínseca sobre aquello que no es observable, con la única finalidad de comprender al mundo; o se debería hacer sólo teorías sobre lo que sí vemos, ya que desde esta perspectiva las teorías no son descripciones del mundo invisible sino que son como una especie de instrumentos empleados para validar las predicciones sobre el mundo observable. Además, cuando los modelos atienden más a las características geométrico-mecánicas —no a las físicas— y no son capaces de proporcionar una curva que represente a la trayectoria del planeta, entonces lo que tenemos es un razonamiento cuyo único compromiso era el tratar de materializar o simplemente corroborar lo que los datos experimentales sí permitían ver; pero esto último es lo mismo que usar un instrumento que pase por un conjunto de puntos, aunque la curva que los una no tenga sentido dentro del modelo —real— propuesto.

Sobre la base de que no se puede dar significado a lo que no se puede ver, un astrónomo griego de corte instrumentalista no daría lugar a un modelo que pudiera describir objetos no observables desde la Tierra —recordemos que una teoría instrumentalista va a salvar las apariencias—. Así, tenemos que el instrumento —o el modelo— le va a auxiliar en algo que ya conoce —aunque sea en lo visual— o que se intuye que existe.

En esa búsqueda por justificar las apariencias, los astrónomos afrontaron el problema de determinar esas trayectorias que seguían los puntos luminosos o su posición en la esfera celeste, fundamentalmente para establecer patrones temporales de las trayectorias, lo que era necesario para diversas actividades de la vida comercial, militar, filosófica o científica. Esas características —de trayectoria y posición— de los objetos en el cosmos permitieron las primeras geometrificaciones, condición considerada como necesaria y fundamental para el desarrollo de la astronomía de predicción.

Pero las primeras geometrificaciones presentaban ciertos riesgos: el principal era dar demasiada factibilidad a un modelo geométrico creado para interpretar algo que sí es real. Es decir, que una construcción geométrica —que pretendiera representar al universo— se prestara a ser considerada como una recreación definitiva de cómo se estructuraba el universo en realidad. Y por otro lado considerar a sus elementos geométricos —de ese modelo definitivo—

---

como leyes generales que gobernarán al mundo. Aunado a estas propiedades dicha geometrización se podría tomar como un modelo cosmológico, que para el caso de un aristotélico quedaba dentro del dominio de la física.

Así, por lo anterior podríamos distinguir dos formas de abordar el trabajo astronómico: a) la astronomía matemática, puramente computacional, que mediante paradigmas geométricos intenta resolver los problemas de posiciones locales<sup>11</sup> y de predicciones correctas que le plantean los movimientos del Sol, la Luna y los planetas; b) la astronomía física, que estima que esta disciplina se debe ocupar de elaborar cosmologías que describan el mundo tal y como de hecho es. Estas dos maneras de hacer astronomía serían simplemente la manifestación de dos programas de investigación distintos: el programa astronómico de Platón dio origen a la primera, mientras que el programa aristotélico produjo la segunda.

Ambas formas de entender la actividad del astrónomo —supuestamente irreconciliables— habrían dado origen en Grecia a dos actitudes opuestas, a dos concepciones filosóficas distintas, acerca del status cognoscitivo de las teorías científicas. Por lo tanto se puede decir que dicha cuestión se reduce a si una teoría es o no un mero aparato conceptual que nos permite organizar nuestra experiencia y efectuar predicciones.

Recapitulando: el sistema instrumentalista se apega a una astronomía matemática que por su misma composición se halla en posibilidades de evolucionar en lo conceptual y estructural, es decir, no se corre el riesgo, como se señaló antes, de tener que dar demasiada factibilidad a una representación. Entonces, el justificar las apariencias de un conjunto de datos reales (y no necesariamente tomados correctamente) a través de una teoría instrumentalista lleva inevitablemente a recurrir a lo que se consideraría como la indeterminación de una teoría. Esto es, no importa el grado de exactitud de la evidencia, sabemos que hay en principio innumerables teorías, incompatibles entre sí pero todas compatibles con esas evidencias. Posiblemente una de esas teorías pueda ser verdadera<sup>12</sup>.

Ahora, si a un modelo por sus cualidades se le reconoce en lo instrumental, entonces se tiene que asumir que de él no se pueden concluir ni verdades ni falsedades categóricas; de él sólo se podrán obtener conclusiones mejores o peores, más o menos útiles para el fin con el que fue creado.

---

<sup>11</sup> Y no trayectorias orbitales completas.

<sup>12</sup> Por ejemplo, si queremos reproducir un óvalo o una elipse, entonces es posible que no exista un solo instrumento o técnica para hacerlo. Tenemos también el caso de la astronomía ptolemaica y sus múltiples posibilidades desarrolladas durante más de mil años.

Los modelos instrumentalistas tienen más grados de libertad para llegar a sus objetivos pues no tienen que comprometerse con la existencia de las entidades postuladas por sus teorías. Una teoría puede utilizar todo tipo de artilugios sin que en ningún momento se les tenga que atribuir realidad física, en el sentido en que sí se le tiene que atribuir a cualquier objeto tangible que nos rodea o a la trayectoria seguida por un planeta, pero no así a los epiciclos o a los círculos deferentes propuestos para los planetas.

Y desde este mismo punto de vista de un discurso instrumentalista se puede plantear la posibilidad de que exista una ‘inducción pesimista’, en la que casi todas las teorías con un cierto número de años pueden ser asumidas como obsoletas en cuanto a la exactitud de sus predicciones de lo observable o medible. Por ejemplo, desde el punto de vista de la física contemporánea, Kepler se equivocó al afirmar que los planetas se mueven en órbitas rigurosamente elípticas. Y si todas las teorías son consideradas como incorrectas, entonces la única deducción razonable es que todas, o casi todas, las teorías actuales serán consideradas erróneas de aquí a unas décadas. De esta manera se sigue que de una teoría instrumental se puede llegar a generar un proceso acumulativo en el alcance y precisión de sus predicciones observables. Así, cada vez se puede lograr un mejor grado de aproximación en la forma en que se justifican las apariencias de algún fenómeno, que a fin de cuentas pareciera ser el cometido final.

De esta forma, las teorías instrumentalistas al igual que una máquina, se pueden adaptar (o actualizar) según las necesidades que se le presentan a través del tiempo, y estas adecuaciones pueden ser tanto de precisión como de incremento de datos. Esto lleva, como consecuencia, a que una teoría desplace a otra, como sucede con las máquinas.

Los que piensan de forma contraria al instrumentalismo atribuyen realidad a las entidades postuladas por la teoría; para ellos éstas no son meros instrumentos de cálculo que permiten efectuar predicciones más o menos acertadas, sino que pretenden explicar a partir de los datos obtenidos del modelo, cómo es exactamente el mundo.

En adelante se presenta como ejemplo de instrumentalismo el trabajo de Ptolomeo en el *Almagesto* y, posteriormente, el cambio de enfoque que presenta en *Hipótesis de los planetas*.

La propuesta ptolemaica en el *Almagesto* dista mucho de ser metodológicamente perfecta, ya que violó algunos supuestos cosmológicos arraigados

---

entre los griegos<sup>13</sup>. Por una parte, se va a distanciar de la opinión general al introducir epiciclos y excéntricas para los planetas<sup>14</sup>, lo que le llevó inevitablemente a romper con el principio cosmológico del movimiento planetario concéntrico alrededor de la Tierra; por otra parte, chocará con la interpretación estricta del principio de orden y uniformidad de los cielos, ya que introducirá modelos e hipótesis diferentes para distintos planetas (Mercurio tendrá una excéntrica móvil como la Luna, el Sol no tiene ecuante, los planetas sí, etc), como si obedecieran distintas leyes<sup>15</sup>; pero, sobre todo, va a utilizar el ecuante sin justificarlo ni física, ni matemáticamente.<sup>16</sup>

Aquí queda de manifiesto cómo el modelo se puede considerar un instrumento al que se le puede quitar y poner según convenga, sin tener un compromiso de inmutabilidad. Se tiene que recordar que el sistema planteado

---

<sup>13</sup> Entre los supuestos y asunciones físicas más arraigados en la ciencia griega se pueden mencionar la esfericidad del cielo y los planetas, la posición geocéntrica e inmóvil de la tierra, así como su tamaño y distancia en comparación con las estrellas fijas. A los anteriores supuestos se les puede agregar otro que podemos considerar como una definición, y que se refiere a que hay dos tipos primarios de movimientos celestes: uno diario de rotación y otro de traslación. Entre los supuestos iniciales no aparece ninguna referencia a movimientos circulares o uniformes. La razón es que Ptolomeo no los considera un supuesto, sino algo más fundamental a medio camino, entre un requisito formal y un principio metodológico que no necesita defensa ni prueba.

<sup>14</sup> Ya lo había hecho con el Sol y la Luna, pero en ambos casos tenía el respaldo de Hiparco y además eran cuerpos especiales que poseían cualidades adicionales a las de los planetas.

<sup>15</sup> Copérnico, en su *De Revolutionibus* (1987, 9), critica esta desarticulación del sistema ptolemaico. La siguiente cita es parte de la dedicatoria al Papa Pablo III: “Tampoco pudieron hallar o calcular [...] la forma del mundo y la simetría exacta de sus partes, sino que les sucedió como si alguien tomase de diversos lugares manos, pies, cabeza y otros miembros auténticamente óptimos pero no representativos de un solo cuerpo, no correspondiéndose entre sí de modo que con ellos se compondría más un monstruo que un hombre”.

<sup>16</sup> Él mismo prevé estas objeciones, porque inmediatamente después del *excursus* metodológico anterior les sale al paso, aunque sin citarlas. Así, afirma que a veces puede ser necesario usar algo que vaya contra la argumentación general (por razones de claridad, simplicidad, etc), pero mantiene que eso no invalida la cuestión si lo que se usa no da lugar a diferencias apreciables en los resultados; igualmente, continúa, a veces puede ser imprescindible suponer que no en todos sitios se da el mismo modo de movimiento o inclinación de los círculos, pero, puesto que las apariencias de los astros cambian, es lícito cambiar el modo de las hipótesis de los círculos, especialmente si se mantienen los movimientos circulares en todos los casos (ya no habla, sin embargo, de los uniformes); por último, concluye en clara referencia al ecuante, que en ciertas ocasiones se puede estar forzado a presuponer sin justificación ni fundamento inmediato en las 'apariencias', una aprehensión o una conjetura alcanzada por ensayo y error, pero mantiene que, si las cosas supuestas sin prueba casan con las apariencias, entonces no pueden ser gratuitas aunque sean difíciles de explicar [*Almagesto* IX, 2].

en el *Almagesto* no proporcionaba las trayectorias de los astros, lo que sí pretendía era dar cuenta de los datos de las tablas de observaciones. Por estas razones el sistema lo podían modificar en su estructura cada vez que algún científico de respeto lo considerara necesario.

Ptolomeo fue un ejemplo en el que convergen las dos corrientes: el instrumentalismo y el realismo. Por un lado el Ptolomeo cosmólogo aristotélico, y por otro el Ptolomeo astrónomo geocéntrico. Así, tenemos a dos pensadores distintos unidos en la misma persona. El Ptolomeo cosmólogo repetía al pie de la letra las visiones del mundo de la antigüedad al discutir su filosofía del universo. Con todo, el Ptolomeo astrónomo niega que la explicación plena de las perturbaciones planetarias esté dentro de las posibilidades humanas. Así, se tiene que la explicación astronómica es virtualmente inconcebible para Ptolomeo. Entonces, desde el punto de vista del *Almagesto*, tenemos a uno de los máximos exponentes de un instrumentalista que no atribuía materialidad ni a las esferas celestes ni a los epiciclos; lo importante para él era ofrecer un modelo matemáticamente exacto, esto es, que permitiera efectuar buenas predicciones sin que le importaran las causas de los movimientos o que su modelo fuera físicamente verdadero. Pero desde la visión de *Las hipótesis de los planetas* se puede atribuir a Ptolomeo, de forma inequívoca, la elaboración del denominado sistema ptolemaico<sup>17</sup>. *Las hipótesis* fueron el elemento de juicio vital acerca de la pretendida polémica entre instrumentalistas y realistas en la antigüedad, y en la que supuestamente Ptolomeo pertenecía al grupo de los primeros.

## 1.6 Del cono al plano

En las dos secciones que siguen se abordará el tema de los instrumentos desde diversos puntos de vista: a) la creación de instrumentos vinculados con la generación de cónicas, así como los intentos y errores de Descartes por trasladar curvas del cono al plano; b) por otro lado, se verá por qué los artistas prefieren usar óvalos en lugar de cónicas.

Como se mencionó anteriormente, el hombre de ciencia siempre ha tratado de imitar lo que ve o lo que intuye que puede existir, esto es, siempre tratará de reproducir los patrones matemáticos de la naturaleza o de materializar

---

<sup>17</sup> En esta obra sí tiene el objetivo de presentar los modelos explícitos de cómo es que los planetas describen sus trayectorias.

los objetos matemáticos que él mismo crea<sup>18</sup>. En este caso no se tratarán de justificar las apariencias como sucedió con los astrónomos o los físicos. Aquí no se requiere de una explicación física y, en ocasiones, ni matemática de la trayectoria de la curva; lo que se necesita es un instrumento que trace la curva según las propiedades cinemáticas y dinámicas que le corresponden, y que además lo pudiera hacer repetidas veces obteniendo siempre la misma precisión en el trazo.

Si fuera necesario iniciar cronológicamente la mención de los instrumentos matemáticos<sup>19</sup>, inevitablemente tendríamos que hacerlo iniciando con la regla y el compás de la geometría de Euclides. Como se sabe, la geometría griega se cimentó en la invariabilidad, homogeneidad, eternidad<sup>20</sup> y finitud del círculo, así como en la infinitud de la recta. De este modo, los criterios de existencia de los objetos geométricos estaban supeditados a su constructibilidad utilizando, exclusivamente regla y compás; por tal razón diversos problemas por todos conocidos (los llamados 'clásicos') no pudieron ser resueltos en esa época (ver capítulo 2 de este libro). Cabe mencionar que el hecho de que la existencia de los objetos matemáticos dependiera de su potencial constructibilidad sólo con regla y compás no implicaba que se tuviera que llegar al acto mismo, es decir, se contemplaba que el uso mental de la regla y compás diera el sustento necesario para los resultados teóricos. La sintaxis euclidiana ya exhibía en las demostraciones el uso intrínseco de los instrumentos; éstos se pueden apreciar cuando se recurre a traslaciones, duplicaciones o rotaciones de ángulos y segmentos, entre otros.

Por otra parte, en la geometría plana, esférica o cónica se tuvo la existencia de modelos teóricos que pudieron ser considerados como instrumentales<sup>21</sup>. Esto es, los modelos teóricos de la geometría se encontraban en capacidad de transformarse para poderse adaptar al significado y funcionamiento de las leyes que gobiernan los objetos que ellos mismos generan. Así, es más fácil superar los obstáculos de la tradición cultural que no aceptaba el uso de

---

<sup>18</sup> Por objetos matemáticos entiéndase a las curvas geométricas que representan mediante una convención que liga elementos matemáticos y forma de representación gráfica, una relación matemática en cada uno de sus puntos y que los conocemos como 'lugares geométricos'.

<sup>19</sup> Como instrumentos matemáticos me referiré sólo a los de trazo o cálculo, mas no a los de contabilidad como pueden ser el caso de tablillas, barras de calendarios, cuentas de barro, ábacos etc.

<sup>20</sup> Para los griegos el círculo fue un instrumento que por sus características fue el conducto para pensar en el movimiento homogéneo y perpetuo, ya que el círculo no tiene principio ni fin y su curvatura no cambia.

<sup>21</sup> Pero no como en el caso arquimediano donde la máquina era la parte heurística de la teoría, aquí el modelo está en capacidad de evolucionar según se lo exijan los avances teóricos.

los instrumentos convencionales. Para este nivel de la geometría poco importaba si el instrumento era real o era una creación de la mente. El proceso de unificación entre la matemática teórica y los métodos mecánicos llegó a tal punto de simbiosis que se transformó en una práctica común, en donde sólo los inexpertos rechazarían las importantes aportaciones explícitas de esta relación.

Sin duda las cónicas son el conjunto de curvas generadas por procesos mecánicos, explícitos o mentales que más fueron estudiadas en la antigüedad griega. Por un lado tenemos a Menecmo con el ortotome, oxitome y el ambliotome, y por el otro a Apolonio con la parábola, elipse e hipérbola. En cuanto a Menecmo sabemos que usó sólo conos rectos y cortes perpendiculares a la recta generatriz. Si el ángulo del vértice del cono es recto, entonces al cortar el cono con un plano perpendicular a la generatriz, a la curva intersección la llamó una parábola. Si el ángulo es agudo, la curva intersección fue llamada elipse. Apolonio usó un cono genérico (oblicuo con directriz circular) y las curvas que extrae son estáticas.

Posteriormente, el problema fue el de representar (o proyectar) en el plano las curvas extraídas del cono. Entre otras formas de abordar el problema se diseñaron máquinas que extrajeran las características matemáticas de las curvas en el cono y, que además trazaran a éstas últimas sobre una superficie plana. A lo anterior se agrega que los puntos de las curvas en el plano tendrían un lugar de referencia, lo que sería el punto fijo del instrumento que las generaba<sup>22</sup>. Entonces, se puede decir que los trazadores de cónicas ya se podían concebir como máquinas-matemáticas en el sentido de que conseguían trazar en el plano objetos con las propiedades geométricas que originalmente sólo tenían en el cono.

Pero los usuarios de este tipo de instrumentos-matemáticos<sup>23</sup> eran conscientes de la imprecisión o discontinuidad que podían tener las curvas generadas por los instrumentos trazadores. Después de Descartes los métodos de la geometría analítica ya estaban mezclados con los de la geometría proyectiva, y aunque el uso de los instrumentos para la creación de resultados matemáticos ya era algo común, aún se reconocía que plasmar las cónicas en el plano en forma real, y no sólo como la tosca representación de una ecuación, implicaba múltiples obstáculos. Esto resultaba evidente para los que reque-

---

<sup>22</sup> Aquí se debe de entender que el lugar de referencia o punto fijo pueden ser los vértices, focos, o la intersección de los ejes en el caso de la elipse.

<sup>23</sup> Para esta sección se considera que los usuarios se ubican entre los siglos XV al XVII.



rían instrumentos que generaran curvas que se emplearían en el diseño arquitectónico, de lentes y en los talleres de orfebres.

Un ejemplo de lo anterior lo tenemos en Descartes cuando necesitó trazar cónicas en el plano, pues el instrumento que requería, además de hacer trazos en papel, los tenía que hacer también como cortes en metal, madera o en cristal. Para ilustrar esta situación lo mejor es presentar un instrumento típico que respondiera a estas necesidades, y que en este caso está relacionado con la óptica.

Descartes requería dirigir un conjunto de rayos de luz paralelos a través de un cristal y que se refractaran en grupos sobre una línea. En el discurso décimo de la *Dióptrica* (1987) Descartes abordó el problema, y en primer lugar esbozó una solución de cómo determinar el índice de refracción de un prisma triangular. Usó un instrumento donde un rayo pasaba por A y L, para después atravesar el prisma, salir por B y finalmente desviarse a I (Figura 4). Aquí es donde Descartes se interesaba por saber cómo se daba la relación que tiene el punto I, situado sobre la placa EFI con respecto a los otros puntos B y P. Después trasladó el problema al plano para tener un manejo más preciso (Figura 5). Con centro en B y radio BP trazó un arco que cortaba a BI en T y a la vez dibujó el arco PN, igual que en PT. Después unió B con N y a la prolongación de IP la corta en H. Con centro en B y radio BH dibujó un arco HO, que corta a BI en O. Así, obtiene que la razón de la línea HI y OI es la medida común de todas las “refracciones que causa la transición del aire al vidrio que examinamos” (ibid, 1987, 163-164)

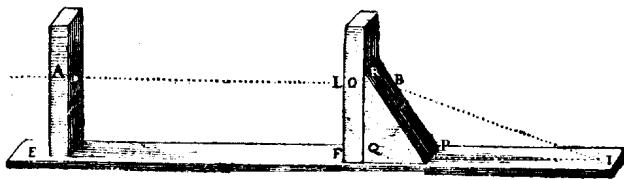


Fig. 4

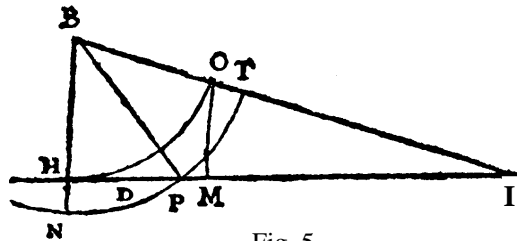


Fig. 5

Aunque Descartes no mencionó que  $OI$  es el seno del ángulo de incidencia, y que  $HI$  es el seno del ángulo de refracción, —y sin justificar la continuidad— afirma que si se toma sobre  $HI$ ,  $MI = OI$  y  $HD = DM$ , entonces  $D$  es el vértice y  $H$  e  $I$  los focos de la lente hiperbólica que se desea construir. En la siguiente cita Descartes comenta que con estos puntos es fácil trazar la hipérbola:

*“Colocando dos estacas en los puntos  $H$  e  $I$  y haciendo que la cuerda que rodea la estaca  $H$  esté atada a la regla de forma tal que no pueda plegarse hacia  $I$  antes que hacia  $D$ ”.*

Después propuso un método en el que usaba un compás con el que se podían generar puntos de una hipérbola, pero el proceso tenía la restricción de que no generaba la curva de un solo trazo (Figura 6),

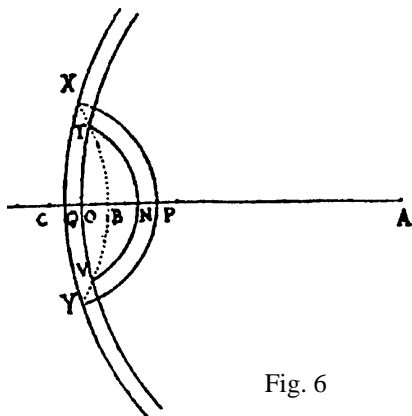


Fig. 6

Descartes propuso un método en el que tomó los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  como puntos de referencia (no lo menciona en la *Dióptrica* pero  $A$  y  $C$  serán los focos y  $B$  uno de los vértices). Tóme-se  $N$  y  $O$  sobre  $AC$ , de manera que  $BN = BO$ , y con  $A$  como centro trázese el arco  $TOV$ . Entonces con  $C$  como centro y con radio  $CN$ , trázese el arco  $VNT$ , que corta el arco  $TOV$  en  $V$  y  $T$ . La hipérbola pasará sobre los puntos de intersección de los arcos. Si se resta a  $OA$  el segmento  $CN$  se obtiene un segmento  $BA-CB$  que sería la distancia entre los vértices de la hipérbola considerando  $A$  y  $C$  como los focos. Lo mismo se puede hacer con otros dos arcos un poco mayores  $XQY$  y  $YPX$  para obtener más puntos de la cónica, como se ve en la curva punteada.

Descartes opinaba que “tal procedimiento puede no ser malo para trazar groseramente algún modelo que representa aproximadamente la figura de los vidrios que deseamos tallar” (Descartes 1987, p. 166). Pero Descartes lo que necesitaba era tener algún instrumento con el cual pudiera generar una hipérbola de un solo trazo,

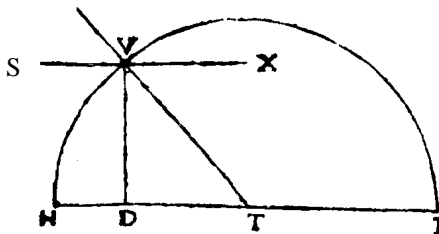
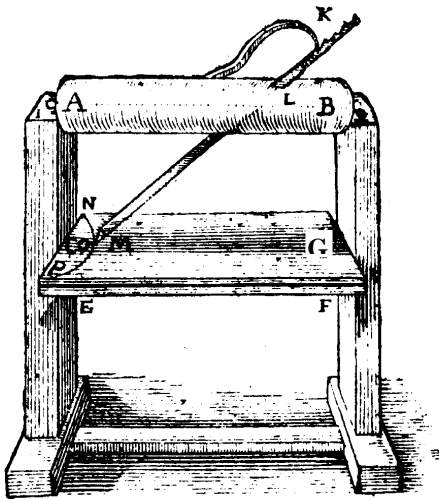


Fig. 7

como sucede en el caso del círculo al ser dibujados por el compás. Para tal propósito señaló que del círculo HVI (Figura 7) se trazará la recta TVS y también la recta VX paralela a HI. Ahora, si imaginamos que la recta TVS gira alrededor del eje HT, entonces la línea TVS describiría la superficie de un cono, y el plano fijo que pasa por VX cortará al cono dando lugar a una hipérbola. Éste es un ejemplo cartesiano de una ‘máquina mental’ de las que se mencionaban anteriormente.

Pero Descartes no lo dejó en un ejercicio intelectual, y se propuso diseñar una máquina cuyo resultado se muestra en la Figura 8.



AB es un rodillo (la línea HI de la Figura 7), GM es una placa paralela al rodillo; KLM es una regla con filo en la punta que atraviesa el rodillo conservando siempre el ángulo, y con la cualidad de poder moverse (por el resorte en K) para estar siempre en contacto con la placa GM. Cuando el rodillo gira la regla siempre estará en contacto con la placa y con el filo trazará (o cortará si es un material delgado) en ella una hipérbola.

Fig. 8

Sin embargo la máquina posee un defecto, y es que la punta de acero M varía de posición según se dirija hacia N o hacia P y el corte no será exactamente igual en todas partes, y como el interés de Descartes en este pasaje de la *Dióptrica* es el tallado de cristales, entonces la máquina de la Fig. 8 no es la más adecuada. Por razones de exactitud en la fabricación de los cristales propuso otra máquina, que pensó podría corregir el defecto en el corte, pero esta máquina ya no es un mecanismo simple dado que involucraba varios módulos.

No fueron pocos los trabajos de Descartes sobre el uso de compases. Conocemos su compás proporcional, con el que encontraba las medias proporcionales para construir ecuaciones algebraicas, y también se conoce el compás para la trisección del ángulo, entre otros (ver capítulo 2 de este libro).

## 1.7 Las curvas y el ornamento

Desde otro punto de vista las inexactitudes antes señaladas serían menos relevantes frente a los ojos de los artistas, arquitectos o artesanos; algunos de ellos esperaban que los instrumentos llegasen a resolver sus problemas por el simple hecho de que su apariencia era la de ser una máquina de precisión. En diversas disciplinas los instrumentos llegaron a ser sólo un auxiliar heurístico, y si bien se aceptaba que no resolvían el problema, al menos daban certidumbre —para soluciones parciales— al que pretendía hacerlo, es decir, quien abordaba el problema tenía más seguridad si se apoyaba en una máquina o en un modelo geométrico que tuviera la capacidad mecánica —como si fuera un instrumento— de poderse adaptar a la variabilidad de las condiciones iniciales del problema.

Pintores, arquitectos y artesanos tenían frecuentemente la necesidad de trazar determinadas figuras que dieran la apariencia de ser una cónica. Y para estos casos, —principalmente los artistas relacionados con la ciencia experimental— se optó por crear o usar un instrumento que les generara exactamente lo que querían. Y los pintores o grabadores crearon métodos geométrico-mecánicos que generaran el trazo que querían ver representado en sus obras, independientemente de si la curva era el lugar geométrico de una cónica.

Este tipo de usuarios de los instrumentos generalmente no consideraban necesaria una demostración o justificación teórica de las propiedades de las curvas que usaban. Aunque se debe señalar que en la mayoría de los casos no tenían la posibilidad de hacerlo —por la carencia de conocimientos matemáticos, pero era algo que tampoco a ellos se les exigía. El fin para el que se hacían los trazos no implicaba que matemáticamente fuera lo que se decía que era, lo que importaba era que pareciera que sí lo era; así mismo, los que pedían el trabajo a los artistas tampoco exigían la exactitud de los trazos desde la visión crítica de un matemático.

Para fines del siglo XV y principios del XVI los artistas mostraron interés y necesidad de trazar curvas elípticas, y estas curvas aparecieron en iglesias, pisos, patios, ornamentos, pinturas, grabados, etc. Las formas circulares que tanto se habían usado desde los griegos ya no eran las únicas en su preferencia. La representación más real de las escenas creadas por un pintor exigía el uso de formas elípticas u ovaladas<sup>24</sup>. Para resolver tal problema contaban con tres formas de hacer el trazo de las curvas —aparentemente— elípticas:

---

<sup>24</sup> La representación en perspectiva que ya se usaba en las obras desde el siglo XV exigía que los círculos pudieran ser representados ya no sólo de manera frontal, se requería que pudieran

- 1) Con los elementos teóricos de la geometría euclidiana y de las cónicas que permitían el trazo de elipses verdaderas.
- 2) Con instrumentos que pudieran trazar elipses verdaderas.
- 3) Con elementos de la geometría euclidiana que permitían trazar aproximaciones de elipses usando 4 arcos de círculo.

Y en cada caso sucedía lo siguiente:

1) Se usaban los elementos de la definición matemática de elipse y algunos teoremas que permitían su construcción a través de cuerdas sujetas a clavos que fungían como los focos. Pero este método es muy impreciso a pesar de que recurre a la definición matemática de elipse, y se debe a que las elipses que traza son muy toscas dado que hay problemas para mantener la tensión del hilo y a que las condiciones de la cuerda cambian con la temperatura y la humedad. Y lo anterior es de señalarse porque se daba el caso que se tuvieran que repetir las mismas elipses en diferentes días de construcción o del diseño de la obra y los resultados no coincidían. Por otro lado se presentaban irregularidades al no poder mantener siempre perpendicular el trazador al plano de la elipse a lo largo de los 360°, y finalmente la inestabilidad de los nudos (en los focos) podía afectar el trazo del constructor o del artista.

El marco teórico que se requería para dar credibilidad a los trazos anteriores es el de los tratados de cónicas, como el de Apolonio, que ya se tenía en su edición veneciana de 1541, el de Werner de 1522 o el de Durero de 1525. Sin embargo no era fácil llevar a la práctica los conocimientos teóricos de estas obras a través de los instrumentos.

2) A principios del siglo XVI ya existían diversos instrumentos para trazar elipses. Uno de los primeros fue el de Leonardo (1510) (parece que él ya estaba usando el de Proclo), aunque también se tiene información de los de Durero y Miguel Ángel. Cabe mencionar que Leonardo también planteó el uso del elipsógrafo (ver Figura 9) para resolver un problema de óptica de Alhazen<sup>25</sup>. Esta técnica de trazado con elipsógrafos es muy precisa, pero tiene el problema de ser poco manejable para superficies mayores, como en el caso de los edificios o de superficies pequeñas, como puede ser un grabado o

---

ser vistos en perspectiva, con lo cual parecían óvalos. Y en la arquitectura también se dio un auge en el uso ornamental de los óvalos, y éstos se podían ver en ventanas, pisos, plafones, barandales, por mencionar algunos.

<sup>25</sup> El problema era poder trazar el camino que sigue un rayo de luz que choca contra un espejo circular. Parte de la solución implicaba construir una elipse.

---

una pintura de bastidor. Para el segundo caso se hubiera necesitaba construir elipsógrafos de dos o tres centímetros de tamaño.

3) La última opción parece que se aleja de la formalidad matemática del caso 1) o de la precisión de los instrumentos del 2), pero aquí lo que se requería era un contorno que pareciera una elipse. En las representaciones artísticas los elementos geométricos generalmente no ocupaban de manera conspicua los principales espacios de la obra —a menos que el motivo fuera algo científico—, es decir, la atención generalmente se centraba en

los individuos, los espacios naturales, los objetos arquitectónicos. Las figuras geométricas (principalmente las curvas, ya que las cuadrículas en los pisos sí eran objeto de interés en la representación) generalmente ocupaban un espacio pequeño en la obra y no estaban inmersos en la problemática asociada con respecto a las proporciones de los objetos, es decir, no se daba el caso de tener que respetar proporciones como sucedió con el cuerpo humano, o la representación proporcional entre objetos colocados a diferentes distancias en la pintura<sup>26</sup>.

Para este punto 3) el uso de los instrumentos sufrió un cambio y lo que convenía era ir a la segura con la regla y compás, que en el fondo era lo mismo que estaban haciendo en 2) cuando usan los elipsógrafos, es decir, si se requería trazar una elipse o algo que pareciera una elipse, los elipsógrafos trazaban una curva con características constantes de un lugar geométrico en cada uno de sus puntos. Con la nueva técnica (que se presenta en la siguiente página) se tendrían óvalos con características de un lugar geométrico pero contruidos uniendo intervalos de cuatro arcos de círculo, con lo cual se obtenía un óvalo con la estabilidad estructural de un círculo pero en 4 secciones. Esto es, como la elipse tiene continuas variaciones en su curvatura, entonces a los artistas y arquitectos se les complicaba poder medir perímetros,

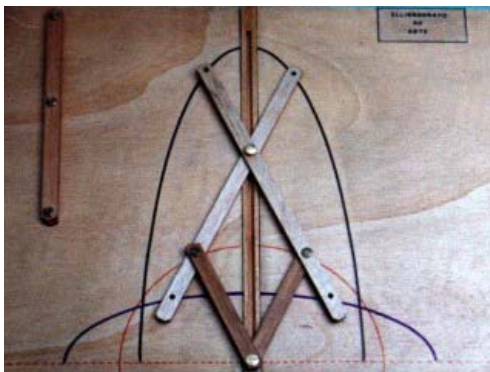


Fig. 9

Del museo de la Universidad de Modena

<sup>26</sup> A partir del siglo XV fueron de gran interés el estudio de las teorías de la perspectiva, de las proporciones del cuerpo humano y otras que pretendían la fiel representación de lo que ve el ojo (ver Alberti 1997).

molduras, áreas, volúmenes, ya que sus soluciones sólo eran aproximadas y no eran obtenidas por medios analíticos. Y reproducir múltiples veces una misma elipse no era fácil, así como tampoco lo era el cálculo de materiales.

Cuando se usan sectores de círculos entonces es más sencillo reproducir los ángulos, lúnulas, áreas, perímetros, bisecar ángulos, construir perpendiculares, tangentes y, en general, todo el amplio repertorio de propiedades del círculo que ya se conocían gracias al tratado de Euclides<sup>27</sup>, y por esta razón los libros más importantes de arquitectura incluían una introducción a la geometría euclidiana.

Para el trazo de los óvalos a través de sectores de círculos se desarrollaron varias técnicas. Se tienen los casos de Sebastiano Serlio, de Joan de Arphe o de Vignola, por nombrar algunos.

En el caso de Joan de Arphe su contribución más relevante aparece en su obra *De varia commensuracion para la escultura y arquitectura*, y en el de Sebastiano Serlio en su libro *Cinco libros de arquitectura*. Ambos autores presentan métodos para el trazo de óvalos que resultan semejantes. Serlio propuso cuatro métodos y de Arphe tres. En ambos casos trabajaron con cuatro arcos de círculos. En la Figura 10 (a, b, c) se pueden apreciar tres métodos que ambos usaron.

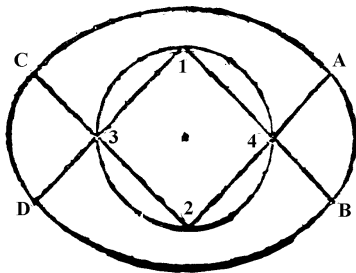


Fig. 10 a. Sea un círculo dividido en 4, en los puntos 1, 2, 3 y 4. Se pone la regla en 1 y en 4 y se prolonga hasta B, y se hace lo mismo para obtener A, C y D. Ahora se fija el compás en 2 y se traza el arco CA, después se fija en 4 y se traza el arco AB, así se trazan los arcos para formar el óvalo. Nótese que la distancia 4A puede elegirse a conveniencia.

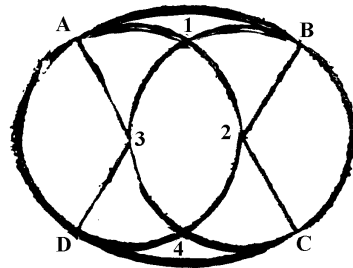


Fig. 10 b. Trácese 2 círculos iguales, donde cada uno pase por el centro del otro. Con la regla una 3 y 4 y en esa dirección trace 3A, después una 1 y 3 y trace 3D, y lo mismo para B y C. Después fije el compás en 4 y trace el arco AB, lo mismo para el arco DC con lo que finalmente se forma el óvalo.

<sup>27</sup> Ver los *Elementos*, libros 3 y 4

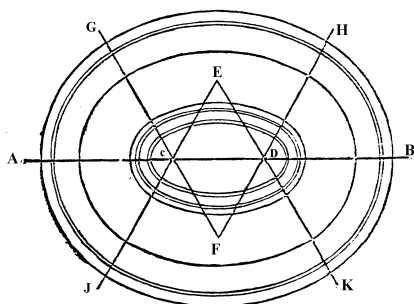


Fig. 10 c. Se presenta un método semejante al de 10 a., pero lo importante es que aquí se pretende enseñar a diseñar molduras ornamentales. Nótese que con arcos de círculos se puede llegar a un paralelismo entre óvalos que difícilmente se lograría con el método de la cuerda clavada en los focos.

En las dos obras se pueden encontrar ejemplos del uso práctico de los óvalos; por ejemplo Serlio muestra el diseño de piezas de alfarería y orfebrería.

Aquí sólo se muestran dos autores, pero existían más técnicas para el trazo de óvalos, como las de Vignola, Bianchi, Langley, Kitao, Mott. En un artículo de Paul. L. Rosen (2001) se encuentra un estudio comparativo de los diferentes métodos para trazar óvalos, y el autor llega a la conclusión de que los óvalos de Vignola son los que más se acercan a la verdadera elipse

Al igual que Descartes, Joan de Arphe es consciente de que sus trazos y técnicas encierran una inexactitud. Vale la pena mencionar que reconoce honestamente que para el artista no importa tanto la exactitud, contrario a lo que sería el caso para el matemático. En su exposición sobre la cuadratura del círculo advierte que el método no es exacto, y tampoco lo son los procedimientos para la división del diámetro en siete partes. Advierte que el error es un poco mayor a una milésima del diámetro, pero inapreciable para las dimensiones pequeñas utilizadas por los plateros o escultores de retablos.

En su libro *De varia commensuration* dice: "Y si alguna gracia se debe a mi estudio y trabajo, no quiero que sea mas que recibido con el ánimo que le ofrezco a la unidad de los artífices de mi profesión". Este es el fin propuesto por Arphe en su libro, y por ello no incluye las demostraciones geométricas de "Arquímedes, Euclides, Theon, y otros", contentándose con exponer de modo claro los resultados, tanto gráficos como escritos, y principalmente la enseñanza del uso del compás para la construcción de las curvas requeridas para el ornamento.

En el caso de Durero (1979) tenemos que en el prefacio a sus *Instituciones de Geometría* advierte: "Ya que la geometría es la base correcta para toda pintura, he decidido enseñar sus rudimentos y principios a todos los jóvenes aficionados al arte [...]. Pero el libro va destinado a ser de utilidad práctica y no un tratado sobre matemáticas puras". La presente cita justifica por qué es



que Durero, cuando muestra cómo trazar las elipses, no lo hace pensando en la exactitud matemática; sucede que para los fines prácticos de la obra le bastaba con obtener algo que pareciera una elipse.

Para el ojo del inexperto todas las técnicas presentadas en esta sección tendrían aprobación *a priori*, y esto era porque al ver los instrumentos o las técnicas geométricas que se emplearían, quedaría impresionado por lo elaboradas que eran. Aunque el instrumento (que podía ser virtual) ante sus ojos no resolviera totalmente el problema, pensaría que lo podría hacer. Así, tenemos el caso del astrario de Giovanni Dondi, en el que los instrumentos o las técnicas muchas veces maravillan no por lo que hacen, sino por lo que creemos que pueden llegar a hacer.

## 1.8 Los cielos la tierra y el tiempo

El hombre en forma natural tiende a dominar su territorio y como consecuencia cada vez ocupa regiones más extensas. Su instinto es el de la conquista y control de las zonas que lo rodean, y para poder sentir seguro su entorno se ha visto en la necesidad de desarrollar los elementos necesarios para entender, ordenar y medir parcialmente aquello que lo rodea. Por ello le es importante conocer en todo momento sus colindancias geográficas, y así poderlas plasmar en un mapa, ya sea por razones comerciales, bélicas o de navegación. Se tienen registros de mapas desde el año 2200 a. C., y es el caso de una estatua que representaba a Gudea (señor de la ciudad sumeria de Lagash) sosteniendo un plano a escala del templo de Ningirsu, junto con una regla y un instrumento para escribir.

Esta última sección tiene la finalidad de mostrar algunas técnicas geométricas empleadas en la navegación. En este tema los instrumentos podrían ser muchos y muy sofisticados, pero nos centraremos principalmente en el uso de las cartas de navegación y el compás ordinario.

Antes del uso generalizado de la aguja náutica (lo cual ocurre aproximadamente en el

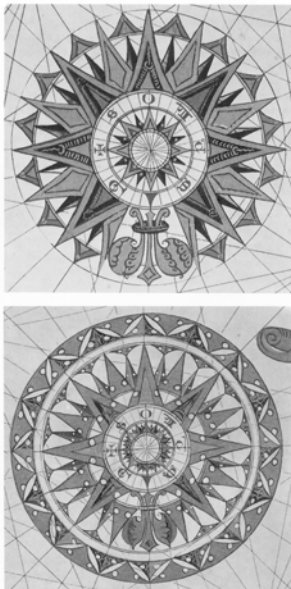


Figura tomada de [Sellés 1994]

siglo XII), los marinos estaban capacitados para navegar entre los distintos puertos, principalmente en la zona mediterránea. En dicha región los vientos dominantes eran generalmente estables, su variación principal era del noroeste al nordeste según la región y la estación del año. Estas condiciones del viento favorecían principalmente los viajes hacia el sur y al este, el problema para estos casos era el regreso, para lo que se tenía que recurrir a la navegación costera y poder así salvar el inconveniente de los vientos en contra. Por estas razones la navegación antigua se practicaba con mayor frecuencia entre el final de la primavera y los principios de otoño ya que en estos meses la nubosidad y la violencia de los vientos era menor. En dichos meses los navegantes se orientaban principalmente a través de la posición del Sol durante el día, y por la noche lo hacían mediante las estrellas de la bóveda celeste.

Los antiguos navegantes —aun con el uso del firmamento como guía—, no recurrían con frecuencia a las técnicas de la geometría para ubicarse; conocían bien los movimientos celestes y así podían determinar las latitudes de diferentes puntos mediante observaciones astronómicas. Pero como se mencionó antes, su conocimiento de los vientos era importante. Es a Atimóstenes en el siglo III a.C. a quien se le atribuye haber formado una rosa de los vientos de doce divisiones (aunque la más empleada fuera la de 8).

En las épocas del año (a principios de Siglo XII) en que las costas, así como la posición de las estrellas y del Sol eran imperceptibles, ya se contaba con la aguja náutica, y aunque aún era un instrumento rudimentario ya se empleaba ocasionalmente.

Para 1269 se reconoce la utilidad del magnetismo y sus ventajas navegacionales ya eran algo tangibles. Pierre de Mericourt, conocido como Pedro el Peregrino, escribió la *Epistola de magnete*; éste es un tratado para la construcción de instrumentos magnéticos destinados a la orientación. Mericourt explicó el magnetismo por medio de esferas concéntricas, es decir, estableció una analogía entre la esfera de los cielos y una esfera que él construyó; el caso es que creó una piedra imán de forma esférica donde se establece que sus polos magnéticos son análogos a los polos de la esfera celeste. A esta piedra se le llamó *Terrella* y se pensaba que si se montaba adecuadamente sobre un eje, ésta giraría por sus cualidades a la par que las estrellas. Pero el modelo que se usaba en la práctica de la navegación consistía en pegar una rosa de los vientos directamente encima de la aguja con la superficie dividida en cuadrantes.

En la segunda mitad del siglo XIII la navegación ‘magnética’ ya era más aceptada. Esta clase de travesías se apoyaban también en libros de rutas y en

---

cartas de navegación y era muy importante contar con el conocimiento matemático para saber en todo momento el curso que seguía la nave, así como las desviaciones que se sufrían debido a la dirección de los vientos. Esto último era lo que más inquietaba a los navegantes, pero con las mejoras a la aguja náutica aumentó la certidumbre y con ella el tráfico marítimo, el cual ahora sí se podía hacer en las épocas del año en que las condiciones meteorológicas dificultaban la orientación a través de observar los astros o el Sol.

Los libros de rutas o *cartas portulano* que se usaron en los siglos XIII y XIV reúnen la información de las distancias y direcciones entre los principales puertos, puntos costeros de interés o, simplemente, lugares de referencia para las cartas. Las *cartas portulano* tienen la característica de estar cruzadas por lo que parecen ser haces de rectas (Figura 11) que aparentemente muestran desorden, pero que en la realidad son las uniones de las rutas constantes antes mencionadas.

**Configuración de la construcción de una carta portulano.** Como se ve, la red de líneas que recorre la carta está formada por una circunferencia y 16 puntos nodales sobre ella y a su vez sobre una cuadrícula. Para una carta mediterránea se usaban dos círculos. Cabe señalar que las líneas del cuadrículado no tienen que ver con los meridianos y los paralelos terrestres; pero sí se tiene que considerar que las líneas verticales corresponden a la dirección del norte magnético y no del norte geográfico.

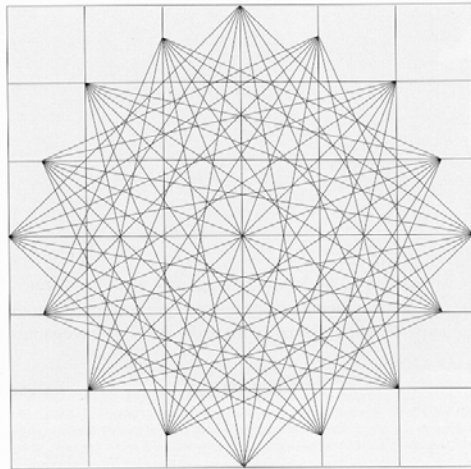


Fig. 11, tomada de [Sellés 1994]

Pero estas cartas tenían sentido siempre que se usara la aguja náutica, ya que sólo con ella se podía seguir el rumbo marcado. Aquí cabe señalar que aún hay controversia sobre el papel que jugó la aguja náutica para el diseño de las cartas. La opinión más generalizada es que se hizo una recopilación de la experiencia acumulada por los navegantes, y todo parece indicar que se pudo llegar más o menos a un acoplamiento de las direcciones de la aguja

náutica, del diseño de la rosa de los vientos y, finalmente, de las rutas ya conocidas por los navegantes<sup>28</sup>.

Navegar usando el compás y las cartas portulano se volvió algo sistemático y de una dificultad manejable. En la carta se localizaban los dos puntos (ver Figura 12): el de salida A y el de arribo B. Si al unirlos la recta coincidía con una de la carta entonces se tenía el rumbo y la distancia a seguir; en caso de no darse la coincidencia se tomaría una de rumbo paralelo<sup>29</sup> a las existentes en los haces de la carta.

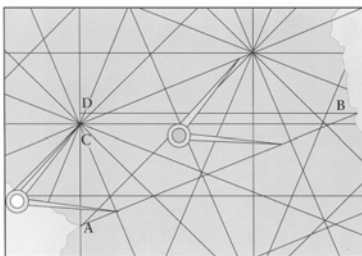


Fig. 12, tomada de [Sellés 1994]

Pero a pesar de que se tuviera la ruta angular y la distancia del recorrido, los vientos no necesariamente llevarían al barco exactamente por la ruta marcada, lo que podía suceder era que el barco cruzara una y otra vez la ruta marcada describiendo así una línea quebrada. Entonces, los navegantes necesitaban saber en todo momento cuánto es lo que se habían desviado de la ruta y, al mismo tiempo, cuánto se habían acercado al destino para que posteriormente virasen el ángulo adecuado rumbo al destino trazado. La solución al problema le exigía poder resolver triángulos rectángulos. En la obra de Ramon Llull, escrita a finales del siglo XIII, se encuentra una de las formas en que se podía

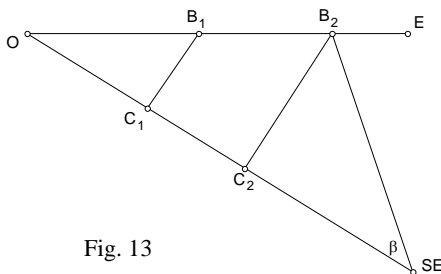


Fig. 13

<sup>28</sup> En las ilustraciones de las cartas portulano se ve una estricta simetría, pero al estudiar las que se conservan se detecta una inclinación generalizada del eje este-oeste del Mediterráneo de aproximadamente 8°, esta asimetría puede ser la consecuencia de la declinación magnética detectada en aquella época.

<sup>29</sup> Se tiene que considerar que para esta época se usaban rosas de los vientos de hasta 32 direcciones, por lo que no era tan difícil encontrar una recta casi paralela de entre los haces.

atacar el problema desde el punto de vista geométrico. El rumbo que el timonel del barco desea seguir es de O al SE (ver Figura 13), pero la dirección del viento lo arrastra en dirección a E. Ahora, se divide el curso que sigue la dirección E en segmentos  $OB_1, OB_2, \dots$  de 100 millas cada uno, y desde los puntos  $B_1, B_2, \dots$  se trazan perpendiculares a la línea del rumbo SE que se cortan en  $C_1, C_2, \dots$ . Así, si se avanzó 100 millas hacia el este recorriendo el tramo  $OB_1$ , se ha avanzado  $OC_1$ , en la dirección de SE, habiéndose separado de este rumbo en la línea recta de distancia  $B_1C_1$ , y la misma relación se puede establecer entre  $B_2$  y  $C_2$ ; entonces, cuando el barco se encuentra en  $B_2$ , y si los vientos le permiten virar hacia SE, entonces, sería necesario conocer el ángulo  $\beta$ , para lo cual va a necesitar la magnitud de  $B_2 C_2$ . Para obtener los ángulos y los segmentos antes mencionados sería necesario tener conocimientos de aritmética y trigonometría, lo cual no era algo común entre los navegantes, para estos casos se contaba con una tabla de datos llamada *toleta de marteloio*<sup>30</sup>.

Pero la efectividad de los cálculos dependía en gran medida de la manera en que se hubieran tomado los tiempos de recorrido, y de los instrumentos utilizados para el cálculo del tiempo.

Aún en el siglo XVII el tiempo se medía básicamente observando el movimiento de los astros en sus esferas correspondientes. Para este modelo de predicción, el Sol tenía un papel fundamental, ya que de él dependía la medida de las trayectorias de los planetas, así como las primeras formas primitivas que dieron lugar a instrumentos para medir el tiempo y dar forma a los primeros calendarios. Los movimientos de la salida y la puesta del Sol, así como los correspondientes a las estrellas, fueron la base fundamental de la medición del tiempo hasta que surge el reloj mecánico. La comprensión de los principios matemáticos intrínsecos al movimiento de los astros fueron la base necesaria e imprescindible para entender el principio de los primeros relojes de Sol así como de los astrolabios. Como los instrumentos para el cálculo del tiempo dependían de la posición de los astros, el diseño contemplaba determinar la hora durante el día con relojes de Sol, y para la noche se diseñó el nocturnlabio, instrumento cuyo funcionamiento dependía de la localización de la estrella polar.

Uno de los fenómenos variables que se utilizaron para la medición astronómica del tiempo fue la altura del Sol o de una determinada estrella sobre el horizonte. Pero para calcular la hora a través de la observación de arcos del recorrido del Sol o de una estrella, se necesitó del uso de complejas técnicas trigonométricas que no eran muy conocidas en el occidente latino, pero aún

---

<sup>30</sup> Para más precisiones del ejemplo anterior véase [Sellés 1994]

---

conociendo estas herramientas matemáticas los cálculos resultaban complicados. Por dicha razón se tuvieron que desarrollar soluciones alternativas.

Así, el astrolabio llega a ser el instrumento más depurado para obtener la hora. El principio fundamental del instrumento es el de una proyección estereográfica de la esfera celeste sobre el plano que cruza el ecuador. Así, resulta que la esfera celeste y el globo terrestre se pueden trasladar sistemáticamente a una superficie plana. Aunque no se tienen registros plenos de la existencia de los astrolabios entre los griegos, Ptolomeo escribió una obra donde muestra los principios matemáticos de la proyección estereográfica, y que nos ha llegado bajo el nombre de *Planisphaerium*. Y es a Teón de Alejandría a quien se le debe el registro más antiguo sobre la construcción y el uso del astrolabio, el mismo que posteriormente sería conocido por los árabes. Es necesario señalar que a pesar de los múltiples tratados sobre el uso del astrolabio que se escribieron durante la Edad Media, esto no significó que sus usuarios estuvieran familiarizados con los principios matemáticos de la proyección estereográfica. quienes recurrían al astrolabio en su mayoría se limitaban a ejecutar una serie de instrucciones como sucede en el presente con el uso de algunas máquinas.

Pero cientos de años antes de la aparición del astrolabio el instrumento predominante para determinar la hora durante el día fue el reloj de Sol. El reloj se formaba con un gnomon que proyectaba la sombra sobre una superficie que tenía marcadas las líneas horarias. El uso de la sombra durante el día parece ser la forma más natural y lógica de medir el tiempo, pero matemáticamente es de las más difíciles de controlar, y se debe a que la posición de las líneas horarias varían considerablemente de una estación a otra durante el año: sucede que durante el verano las líneas están más separadas que en la primavera o en el otoño, pero pasa que en el invierno están más juntas. Por estas razones la hora está marcada por la punta de la sombra del gnomon y no por la recta total descrita por la sombra.

La construcción de las líneas horarias donde el gnomon proyecta la sombra fue un tema para los mejores matemáticos griegos. Afortunadamente sobrevive la obra ptolemaica titulada *Analema*, donde describe en detalle las características matemáticas de las citadas líneas, esto es, las líneas de la escala de la declinación diaria del Sol trazadas en un globo terrestre artificial. Es en este sentido que la analema está estrechamente relacionada (en su metodo-

---

logía) con las proyecciones estereográficas y ortogonales<sup>31</sup> usadas para resolver los problemas de la esfera.

**Reconocimientos:** Agradezco las valiosas opiniones de Rafael Martínez, Antonieta Fregoso y Juan Ojeda.

---

<sup>31</sup> La proyección ortogonal se empleó también para determinar la hora; se basa en proyectar la esfera ortogonalmente sobre el plano del meridiano. En el Medioevo se usaba esta clase de proyección a través de un instrumento llamado *organum Ptolemei*.

---

## Referencias

- Alberti, Leon B. (1997). *De la pintura*. Colección Mathema. México: UNAM. Estudio preliminar y traducción: J. Rafael Martínez E.
- Aristóteles (1998). *Física*. Madrid: Editorial Gredos. Traducción: Guillermo R. de Echandía. Vol. 203.
- Arphe, Joan de (1979). *De varia commensuracion para la escultura y arquitectura*. Valencia: Albatros Ediciones.
- Arquímedes (1980). *On conoids and spheroids*. Great Books. Encyclopaedia Britannica. Vol. 11.
- Arquímedes (1988). *El método*. México: Alianza Editorial Mexicana.
- Clagett, Marshall. (1964). *Archimedes in the Middle Ages*. Madison: University of Wisconsin Press.
- Copérnico, Nicolás (1987). *Sobre las revoluciones*. Madrid: Tecnos.
- Descartes, René (1987). *La dióptrica*. Madrid: Editorial Alfaguara.
- Durero, Alberto. (1979). *Instituciones de geometría*. México: UNAM.
- Euclides (1991). *Elementos*. Introducción: Luis Vega, traducción: M. Luisa Puerta. Madrid: Editorial Gredos.
- Koyrè, Alexandre (1985). *Estudios de historia del pensamiento científico*. México: Siglo XXI Editores.
- Plutarco (1980). *The lives of the noble grecians and Romans. Marcellus*. Great Books. Encyclopaedia Britannica. Vol. 14.
- Platón (1980). *Timaes*. Great Books. Encyclopaedia Britannica. Vol. 7.
- Proclus (1992). *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*. Traducción e introducción de Glenn R. Morrow. Princeton: Princeton University Press.
- Ptolomeo, Claudio (1987). *Hipótesis de los planetas*. Madrid: Alianza Editorial.
- Ptolomeo, Claudio (1998). *Ptolemy's Almagest*. Traducción de: G. J. Toomer. Princeton: Princeton University Press.
- Ptolomeo, Claudio (1992). *Analemma*. Editado por: Rocco Sinisgalli. Florencia: Edizioni Cadmo.
- Ptolomeo, Claudio (1992). *Il planisfero*. Editado por: Rocco Sinisgalli. Florencia: Edizioni Cadmo.
- Rosen, Paul (2001). "On Serlio's constructions of ovals". *The Mathematical Intelligencer*. 23 1:58-69.
- Sellés, Manuel (1994). *Instrumentos de navegación. Del Mediterraneo al Pacífico*. Madrid: Ed. Lunwarg Editores.
- Serlio, Sebastiano (1982). *The five books of architecture*. New York: Dover Publications.
-



# Geometría, álgebra y máquinas

---

**Manuel Falconi Magaña**

Facultad de Ciencias, UNAM

falconi@servidor.unam.mx

## 2.1 Introducción

Estas notas fueron presentadas en una plática que dio el autor en el Foro "Matemáticas, máquinas para hacer matemáticas" que se desarrolló en la Facultad de Ciencias de la UNAM en septiembre de 2001. El propósito de la plática era mostrar como los problemas de construcción con regla y compás, son parte de una serie de tópicos interesantes de la matemática que no requieren un alto nivel teórico para ser entendidos y que han sido determinantes en el avance de la matemática, por lo que su estudio además de enriquecer la cultura matemática del alumno nos permite aprender aspectos teóricos de las diversas ramas de la matemática que se vieron fortalecidas por las investigaciones realizadas alrededor de ellos.

Posteriormente, en el mes de noviembre se impartió un taller con el objetivo de demostrar la imposibilidad de la trisección de un ángulo y la duplicación del cubo. El material cubierto sirvió para ilustrar importantes aspectos estructurales de la matemática como son su unidad y cohesión interna basada en la demostración matemática de las conjeturas, y para mostrar aspectos metodológicos como el uso de las generalizaciones y analogías para descubrir nuevos hechos y facilitar la comprensión de la matemática.

La problemática abordada es muy rica y permite tratar temas del álgebra de polinomios, gráficas de curvas, intersección de curvas, números y divisibilidad, entre otros. El contenido de este trabajo cubre primeramente la teoría básica relacionada con la imposibilidad de la trisección de ciertos ángulos y la duplicación de un cubo. En la segunda parte se describen algunos de los intentos de la matemática griega para resolver estos problemas, los cuales generaron el desarrollo de interesantes instrumentos que son parte de los orígenes de los mecanismos articulados.

## 2.2 Algunos problemas de construcción

En los problemas de construcción propuestos por Euclides<sup>1</sup> sólo se permite el uso de una regla no graduada y un compás. En principio, el compás sólo sirve para trazar círculos con un centro dado y que pasen por un punto conocido. Con el fin de facilitar la lectura de estas notas introducimos la siguiente notación. El símbolo  $AB$  denota el segmento cuyos extremos son los puntos  $A$  y  $B$ . La longitud del segmento  $AB$  se denota por  $|AB|$ . Para identificar a la recta que pasa por los puntos  $A$  y  $B$  utilizamos el símbolo  $\Downarrow AB$ . El rayo que inicia en el punto  $A$  y pasa por el punto  $B$  se identifica con  $\Uparrow AB$ . La recta o el rayo que pasa por los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ , con el punto  $C$  entre  $A$  y  $B$ , se denota por  $\Downarrow ACB$  o  $\Uparrow ACB$ , respectivamente. El triángulo con vértices  $A$ ,  $B$  y  $C$  se denota por  $\Delta ABC$  y el ángulo formado por  $A$ ,  $B$  y  $C$  con vértice  $B$  es  $ABC$ . Si no hay peligro de confusión se utilizará la misma notación para identificar a un ángulo y a su medida. Finalmente, el círculo con centro en el punto  $A$  y que pasa por el punto  $B$  se denota por  $S(A, B)$  y  $S(A, |BC|)$  es el círculo centrado en  $A$  y de radio  $|BC|$ .

Buena parte de la importantísima obra *Elementos* de Euclides, se dedica a resolver problemas de construcción con regla y compás. Entre ellos elegiremos algunos que son adecuados para ilustrar los métodos utilizados y para mostrar puntos interesantes de la matemática. En lo que sigue para referirnos al libro I o II de los elementos de Euclides, diremos simplemente libro I o libro II.

Iniciemos con uno de los problemas básicos de construcción.

**Proposición 2.1.** *Por el punto  $A$ , construir la recta perpendicular a la recta  $\Downarrow AB$ .*

*Construcción:* Una construcción sencilla es la siguiente: Con centro en el punto  $A$ , trazamos un círculo que intersecta a la recta  $\Downarrow AB$  en los puntos  $C$  y  $D$ . Ahora trazamos los círculos  $S(C, D)$  y  $S(D, C)$ , los cuales se intersectan en el punto  $E$ . La recta  $\Downarrow AE$  es perpendicular a la recta  $\Downarrow AB$ . (Ver Figura 1).

---

<sup>1</sup> Euclides (c. 430-360 BCE.), matemático griego, su obra principal, *Elementos* de geometría, es un tratado de matemáticas en 13 volúmenes sobre materias tales como geometría plana, proporciones en general, propiedades de los números, magnitudes inconmensurables y geometría del espacio.

---

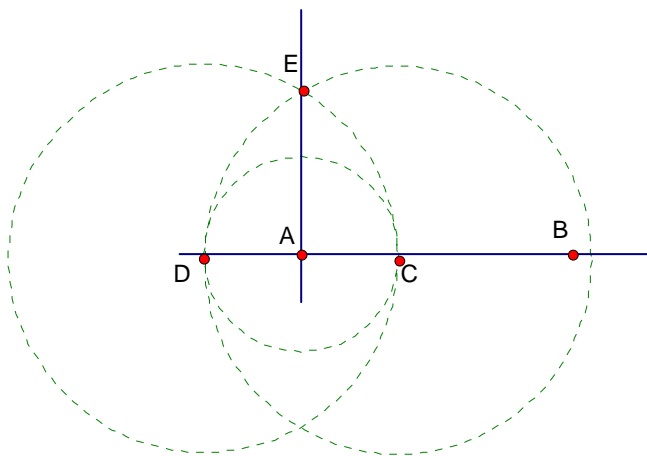


Fig. 1

Para demostrar que  $\uparrow AE$  es perpendicular a  $\uparrow AB$ , notemos que  $|DA| = |AC|$ , por ser radios del círculo  $S(A, C)$  y  $|CE| = |DE|$  ya que son iguales al radio  $|DC|$  del círculo  $S(C, D)$ . Por lo tanto los triángulos  $\triangle DAE$  y  $\triangle ACE$  son congruentes y entonces los ángulos  $DAE$  y  $EAC$  son iguales y como su suma es  $180^\circ$ . Se concluye que cada uno de ellos es de  $90^\circ$ .

La construcción anterior se puede utilizar para construir una recta perpendicular a la recta  $\uparrow AB$  que pase por un punto  $C$  fuera de  $\uparrow AB$ . Con esta construcción se puede trazar la paralela a una recta dada  $\uparrow AB$  que pase por un punto  $C$ . En efecto, se traza la perpendicular  $\uparrow CD$  a  $\uparrow AB$ . La perpendicular a  $\uparrow CD$  por el punto  $C$  es paralela a  $\uparrow AB$ . La demostración se obtiene directamente del llamado *Quinto Postulado (de las Paralelas)*, que Euclides enunció de esta manera: *Si una recta al incidir sobre dos rectas hace que la suma de los ángulos interiores del mismo sea menor que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en que están los (ángulos) menores que dos rectos.*

También es cierto que si sabemos trazar la paralela a una recta por un punto dado, entonces se puede trazar la perpendicular por ese punto. Sin embargo es conveniente dar una construcción independiente.

**Proposición 2.2.** *Construir una recta paralela a la recta  $L$ , que pase por un punto  $C$ .*

*Construcción:* Sean  $A$  y  $B$  dos puntos de la recta  $L$ . Se traza un círculo con centro en  $C$  que intersecte a  $\uparrow AB$  en  $D$ . Con centro en  $D$  se traza el círculo que pasa por  $C$  e intersecta a  $\uparrow AB$ , en el punto  $E$ . Finalmente se traza el círculo  $S(E,D)$ . Los círculos  $S(E,D)$  y  $S(D,C)$  se intersectan en  $F$ . Las rectas  $L$  y  $\uparrow CF$  son paralelas (ver Figura 2).

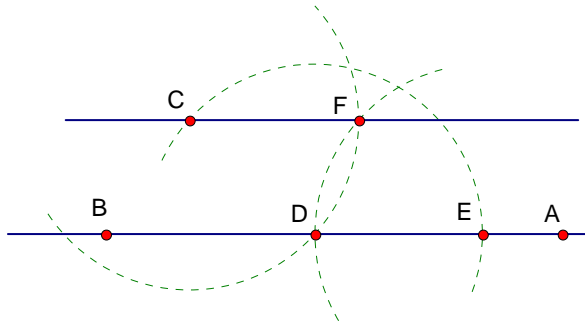


Fig. 2

La demostración es simple. Basta notar que  $|CD| = |DE| = |EF| = |FC|$ .

Una demostración muy sencilla de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo suman  $180^\circ$ , se basa en la construcción de una recta paralela a uno de los lados del triángulo. Consideremos el triángulo  $\triangle ABC$  y por el punto  $C$  tracemos la paralela  $L$  a la recta  $\uparrow AB$ . En la Figura 3, el ángulo  $\alpha$  es igual al ángulo  $CAB$  y el ángulo  $\beta$  es igual al ángulo  $ABC$ . Entonces  $180^\circ = \alpha + ACB + \beta = CAB + ACB + ABC$ .

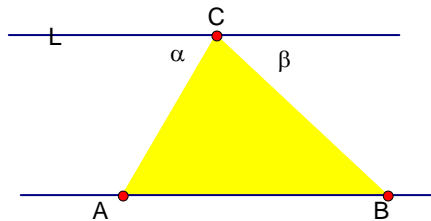


Fig. 3

Una demostración más elaborada se obtiene a través de una reducción. Como un triángulo rectángulo es la mitad de un rectángulo, la suma de sus ángulos interiores es  $180^\circ$ . Así el resultado se obtiene del hecho de que un triángulo cualquiera es la unión de dos triángulos rectángulos que no se traslapan.

Los tres problemas de construcción tal vez más importantes en la historia de la matemática son la trisección de un ángulo, la duplicación de un cubo y la cuadratura de un círculo. El primero consiste en dividir un ángulo dado en tres ángulos iguales utilizando sólo la regla y el compás. Resulta sorprendente la dificultad de este problema si lo comparamos con la bisección de un ángulo que aparece como la novena proposición del libro I.

La duplicación del cubo y la cuadratura del círculo son problemas del mismo tipo. En ambos se pide construir una figura o un sólido que tenga el área o volumen de otro dado. Específicamente en la cuadratura del círculo se requiere construir un cuadrado cuya área sea igual a la de un círculo dado y en la duplicación del cubo se trata de construir un cubo cuyo volumen sea el doble de otro dado. En los *Elementos* de Euclides aparecen varios problemas de cuadraturas; por ejemplo, en el libro I la proposición 42 pide construir un paralelogramo que tenga área igual a la de un triángulo y un ángulo congruente a un ángulo dado. La proposición 14 del libro II se refiere a la cuadratura de un polígono dado.

La construcción de polígonos regulares está muy relacionada con el problema de dividir un ángulo en partes iguales. Claramente, la construcción de polígonos se reduce a dividir el ángulo de  $360^\circ$  en partes iguales. Ahora daremos algunos métodos para construir polígonos regulares.

La Proposición 1 del libro I pide construir un triángulo equilátero que tenga un segmento dado  $AB$  como uno de sus lados. Para construirlo notemos que dos vértices son los puntos  $A$  y  $B$ ; el tercer vértice es cualquiera de los dos puntos de intersección de los círculos  $S(A,B)$  y  $S(B,A)$ . Un poco más complicada es la construcción de un triángulo equilátero inscrito en un círculo dado  $S(A,B)$ . Para construirlo se traza el círculo  $S(B,A)$  que intersecta a  $S(A,B)$  en los puntos  $C$  y  $D$ . Ahora se traza el círculo  $S(C,D)$  que intersecta a  $S(A,B)$  en el punto  $E$ . El triángulo cuyos vértices son  $C$ ,  $D$  y  $E$ , es obviamente equilátero (ver Figura 4(a)).

---

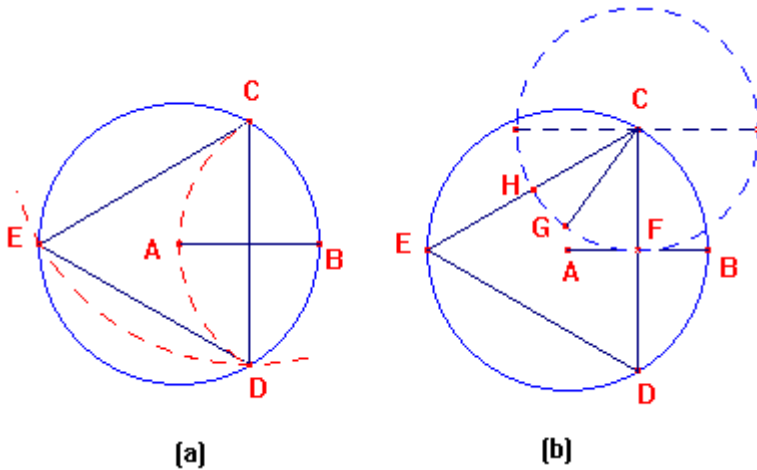


Fig. 4

La construcción del triángulo equilátero en particular resuelve la trisección del ángulo de  $180^\circ$  o del ángulo de  $360^\circ$ . En general, la construcción de un polígono regular de  $n$  lados se reduce a construir un ángulo de  $(360/n)^\circ$ .

La construcción del cuadrado es muy simple. La construcción del pentágono es equivalente a la del decágono. El pentágono se obtiene uniendo alternadamente los vértices del decágono.

**Proposición 2.3.** *Construir un decágono inscrito en el círculo  $S(A,B)$ .*

*Construcción:* La perpendicular al segmento  $AB$  por el punto  $A$  corta al círculo  $S(A,B)$  en el punto  $C$ . Sea  $D$  el punto medio del segmento  $AC$ . El círculo  $S(D, |DB|)$  intersecta al rayo  $\hat{C}A$  en el punto  $E$ . Ahora trazamos el círculo  $S(A,E)$  que corta al segmento  $AB$  en el punto  $F$ . El círculo  $S(B, |AF|)$  intersecta a  $S(A,B)$  en los puntos  $G$  y  $H$ . El ángulo  $BAG$  mide  $36^\circ$  y  $GAH$  mide  $72^\circ$  (ver Figura 5).

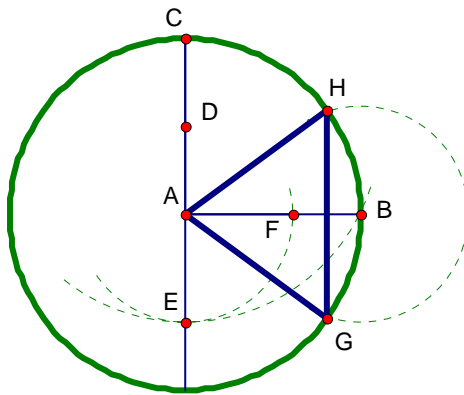


Fig. 5

Para la demostración, supongamos que el segmento  $GB$  es tangente al círculo  $S_c$  que pasa por los puntos  $A$ ,  $F$  y  $G$ . En este caso, el ángulo  $BAG$  es igual a  $FGB$ ; por otra parte,  $FAG + FGA + 180^\circ - BFG = 180^\circ$ , por lo tanto  $BFG = FAG + FGA = BAG + FGA$  y entonces  $BFG = FGA + FGB$ ; como el triángulo  $\triangle BAG$  es isósceles, se tiene la igualdad  $ABG = AGB$ , pero  $AGB = FGA + FGB$  y  $ABG = FBG$ , se concluye que  $BFG = FBG$ ; es decir el triángulo  $\triangle GBF$  es isósceles. Así,  $GF = AF$  y el triángulo  $\triangle AGF$  es isósceles y en particular  $FAG = AGF$ , lo cual implica que  $BFG = 2FGB$  y como  $2BFG + FGB = 180^\circ$ , se tiene que  $BAG = 36^\circ$ .

La demostración de que el segmento  $BG$  es tangente al círculo  $S_c$ , descansa en la Proposición 37 del libro III que afirma que la recta  $\uparrow BG$  es tangente al círculo que pasa por los puntos  $A, F, G$  si  $B$  es un punto fuera del círculo con la propiedad de que  $|BF||BA| = |BG|^2$ . Demostremos ahora la última igualdad.

Por el Teorema de Pitágoras  $|AB|^2 = |BD|^2 - |AD|^2 = |DE|^2 - |AD|^2$ . Sustituyendo  $|AB| = |AF| + |FB|$  en la igualdad anterior se obtiene  $|AB|(|AF| + |FB|) = |DE|^2 - |AD|^2 = (|DE| + |AD|)(|DE| - |AD|) = |EC||AF| = (|AF| + |AB|)|AF|$ .

De donde  $|AB||FB| = |AF|^2 = |BG|^2$ .

La construcción del pentadecágono regular se obtiene con la construcción conjunta del triángulo equilátero y del decágono. En la Figura 4(b) construimos sobre el segmento  $CF$ , el ángulo  $GCF$  de  $36^\circ$  (Proposición 2.3). Entonces el ángulo  $HCG$  mide  $24^\circ$  ya que  $ECD$  mide  $60^\circ$ . En general, si podemos construir los ángulos con medidas  $x$ ,  $y$ , tales que  $x > y$  y  $z = x - y$  divide a 360, entonces se puede construir el ángulo  $z$ . Hasta fines del siglo XVIII los únicos polígonos regulares construibles eran los de 3,4,5,15 lados, junto con los que se obtienen por medio de la bisección. En 1796 Gauss<sup>2</sup> construyó el heptadecágono y posteriormente enunció que "*Un polígono regular de  $n$  lados es construible si y solo si el máximo factor impar de  $n$  es 1 o un producto de números primos de Fermat distintos*". Este resultado fue demostrado por L. Wantzel<sup>3</sup> en 1837. El problema de saber cuales son los polígonos regulares construibles se redujo a conocer cuales son los números primos de Fermat. Un número primo de la forma  $2^{2^n} + 1$  se llama número primo de Fermat<sup>4</sup>. Actualmente los únicos números primos de Fermat que se conocen son 3, 5, 17, 257 y 65537 que corresponden a  $n = 0, 1, 2, 3, 4$ , respectivamente y no se sabe si el conjunto de primos de Fermat es finito o no.

Si revisamos las construcciones que hemos realizado, notamos que todo se reduce a trazar puntos nuevos con regla y compás partiendo de un conjunto de puntos previamente determinado. Para hacer un trazo con una recta requerimos al menos un punto y para hacer un círculo se necesita un punto para el centro y otro punto por el cual pasa, o bien un punto central y un radio; este radio necesariamente se especifica por medio de un segmento definido por dos puntos. Por ejemplo, en la Figura 5 se inicia con los puntos  $A$  y  $B$ , a partir de los cuales se van construyendo los puntos  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $G$  y  $H$ ; la información deseada está contenida en los puntos  $A$ ,  $B$ ,  $H$  y  $G$ . De este modo para saber cuales son los problemas de construcción que se pueden resolver, debemos saber cuales son los puntos que podemos construir.

---

<sup>2</sup> C. F. Gauss (1777, 1855) como resultado de sus investigaciones sobre ecuaciones ciclotómicas, él obtuvo condiciones para la constructibilidad con regla y compás de los polígonos regulares. Tenía 18 años de edad cuando encontró que el heptadecágono es construible.

<sup>3</sup> P. L. Wantzel (1814-1848) famoso por sus trabajos sobre la resolución de ecuaciones por medio de radicales, también dio la primera demostración de la imposibilidad de duplicar el cubo y trisectar el ángulo con regla y compás.

<sup>4</sup> Pierre de Fermat (1601-1665), conjeturó que los números de la forma  $2^{2^n} + 1$  eran primos. En 1732, L. Euler encontró que 641 divide a  $2^{2^5} + 1$ .



## 2.3 Números construibles con regla y compás

En esta sección se dará una caracterización de los puntos del plano que se pueden construir con regla y compás si se inicia con un par de puntos. Esta caracterización nos servirá para demostrar la imposibilidad de la trisección de un ángulo y de la duplicación del cubo.

En el plano elegimos una pareja de puntos que denotamos con  $(0,0)$  y  $(1,0)$  o con  $O$  y  $e_1$ , respectivamente. La distancia entre esos puntos la identificamos con la unidad. Una recta es *construible* si pasa por dos puntos construibles. Un círculo es *construible* si su centro es un punto construible y pasa por un punto construible. Identificamos con el eje de las abscisas a la recta  $Oe_1$  y con el eje de las ordenadas a la recta perpendicular a  $Oe_1$  que pasa por el punto  $O$ . Un punto es *construible* si (i) es  $O$  o  $e_1$ , o (ii) es la intersección de dos rectas construibles, o (iii) es la intersección de una recta y un círculo construibles, o (iv) es la intersección de dos círculos construibles.

Un número es *construible* si es la abscisa de un punto construible. Denotemos con  $\mathbf{Q}$  al conjunto de los números racionales y con  $\mathbf{QQ}$  el conjunto de todos los números construibles.

Si ya hemos construido hasta los puntos  $(0,0)$ ,  $(1,0), \dots, (n,0)$ , con  $n > 0$ , el punto  $(n+1,0)$  es la intersección de  $\mathbf{S}((n,0), (n-1,0))$  con la recta  $\uparrow Oe_1$ . En forma análoga se demuestra que todos los puntos de la forma  $(n,0)$  con  $n < 0$  son construibles. Es decir, los números enteros  $\mathbf{Z}$  son construibles. Con mayor generalidad, los racionales los construimos de la manera siguiente: Dado el racional  $a/b$ , construimos los puntos  $A=(a,0)$  y  $B=(0,b)$ . Se traza la recta paralela a  $\uparrow AB$  por el punto  $e_2=(0,1)$ , que intersecciona a  $\uparrow Oe_1$  en un punto  $X=(x,0)$ . Los triángulos  $\Delta OAB$  y  $\Delta OXe_2$  son semejantes. Por lo tanto  $x=a/b$ . El círculo  $\mathbf{S}(O, (1,1))$  intersecciona a  $\uparrow Oe_1$  en el punto  $(\sqrt{2}, 0)$ , por lo tanto  $\sqrt{2}$  es construible. Estas observaciones demuestran la siguiente proposición

**Proposición 2.4.** *El conjunto  $\mathbf{Q}$  es un subconjunto propio de  $\mathbf{QQ}$ .*

En la Proposición 2.5 se demuestra que el conjunto  $\mathbf{QQ}$  tiene una rica estructura algebraica.

**Proposición 2.5.** *El conjunto  $\mathbf{QQ}$  tiene las siguientes propiedades:*

1. Si  $a, b \in \mathbf{QQ}$ , entonces  $a \pm b \in \mathbf{QQ}$ ,
  2. Si  $a, b, c \in \mathbf{QQ}$  y  $c \neq 0$ , entonces  $ab \in \mathbf{QQ}$  y  $a/c \in \mathbf{QQ}$ ,
  3. Si  $a \in \mathbf{QQ}$  y  $a \geq 0$ , entonces  $\sqrt{a} \in \mathbf{QQ}$ .
-

*Demostración:* Sólo daremos la idea general, ya que los detalles son simples y se dejan al lector (ver Figura 6). Supongamos que  $a$  y  $b$  son números no negativos, que pertenecen a  $\mathbf{QQ}$ . Se construye el punto  $(b,a)$  (Fig. 6(a)). El círculo  $\mathbb{S}((b,0),(b,a))$  intersecta a  $\uparrow\downarrow Oe_1$  en dos puntos. El punto a la derecha de  $(b,0)$  es  $(a+b,0)$  y el de la izquierda es  $(b-a,0)$ . Así,  $b-a$  y  $a+b$  son construibles. En la Figura 6(b), la recta por  $(0,b)$  paralela a la recta  $\uparrow\downarrow e_2(a,0)$  intersecta a  $\uparrow\downarrow Oe_1$  en el punto  $(ab,0)$ . Análogamente, la recta por  $e_2$  paralela a  $\uparrow\downarrow(0,b)(a,0)$  intersecta a  $\uparrow\downarrow Oe_1$  en el punto  $(a/b,0)$ .

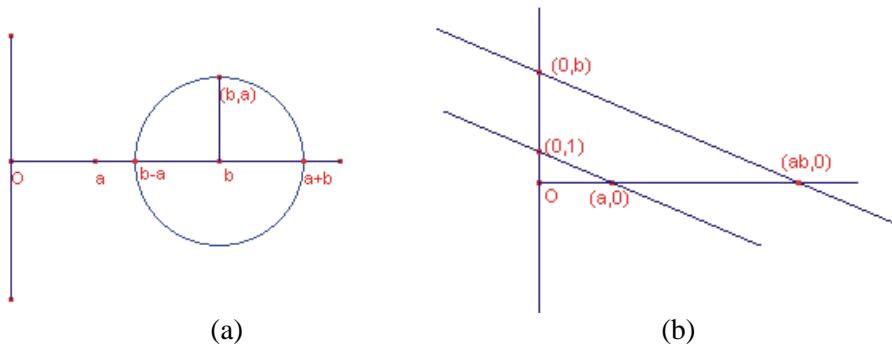


Fig. 6

Una cuestión muy importante es saber que tan grande es el conjunto  $\mathbf{QQ}$ . Si  $\mathbf{QQ}$  es el conjunto  $\mathbf{R}$  de los números reales, entonces la trisección del ángulo, la duplicación del cubo, la cuadratura del círculo, etc. serían posibles con sólo regla y compás. En este caso podríamos por ejemplo, construir  $\pi$  y entonces el círculo se podría cuadrar ya que dada su área  $a$ , su radio  $\sqrt{a/\pi}$  sería construible; o bien se podría construir el  $\text{Cos}(\alpha/3)$  de cualquier ángulo  $\alpha$  y entonces sería posible trisectarlo, ya que el triángulo rectángulo con uno de sus lados igual a  $\text{Cos}(\alpha/3)$  e hipotenusa igual 1 sería construible.

Una vez que se han construido los números racionales, la forma de obtener nuevos números consiste en:

- i) Interseccionar dos rectas que pasan cada una por dos puntos con coordenadas racionales, o
- ii) Interseccionar una recta que pasa por dos puntos con coordenadas racionales con un círculo con centro en un punto con coordenadas racionales y que pasa por un punto con coordenadas racionales, o
- iii) Interseccionar dos círculos con centros que tengan coordenadas racionales y que pasen por un punto con coordenadas racionales cada uno.

Finalmente,

iv) Los nuevos números son las abscisas de los puntos de intersección. Es fácil demostrar que en el caso (i), el punto de intersección tiene coordenadas racionales; por lo tanto ningún nuevo número se obtiene en este caso. Sin embargo, en los casos (ii) y (iii) los puntos de intersección tienen coordenadas de la forma  $q + p\sqrt{a}$ , con  $p, q, a \in \mathbf{Q}$ . De este modo se obtienen nuevos números cuando  $\sqrt{a} \notin \mathbf{Q}$ . Por ejemplo,  $q + p\sqrt{3}$  es un número construible no racional. De hecho,  $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$  contiene al conjunto  $\{q + p\sqrt{a} \mid q, p, a \in \mathbf{Q}\}$ . Es útil introducir la siguiente definición.

**Definición 2.1.** *Sea  $B$  un conjunto de números reales que contiene al cero. Si  $a \in B$  y  $\sqrt{a} \notin B$ , al conjunto  $\{q + p\sqrt{a} \mid q, p \in B\}$  se le llama extensión cuadrática de  $B$  y la denotaremos por  $B(\sqrt{a})$ .*

Los elementos de los conjuntos  $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$ , donde  $a \in \mathbf{Q}$  son construibles y cada conjunto  $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$  tiene las propiedades enunciadas en la Proposición 2.2. Esto se obtiene de las ecuaciones siguientes,

$$\begin{aligned} (b + c\sqrt{a})(\alpha + \beta\sqrt{a}) &= (b\alpha + a\beta c) + (c\alpha + b\beta)\sqrt{a}, \\ (b + c\sqrt{a})^{-1} &= \frac{1}{b^2 - c^2a}(b - c\sqrt{a}), \\ (b + c\sqrt{a}) + (\alpha + \beta\sqrt{a}) &= (b + \alpha) + (c + \beta)\sqrt{a}. \end{aligned} \tag{0.1}$$

Entonces podemos repetir el proceso (i)–(iv), utilizando una extensión cuadrática  $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$  en lugar de  $\mathbf{Q}$  y en forma análoga, se obtendrán nuevos puntos construibles de la forma  $\alpha + \beta\sqrt{\gamma}$ , con  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{Q}(\sqrt{a})$  y  $\sqrt{\gamma} \notin \mathbf{Q}(\sqrt{a})$ . Es decir, puntos construibles que pertenecen a una extensión cuadrática  $\mathbf{Q}(\sqrt{a})(\sqrt{\gamma})$  de  $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$ . La extensión cuadrática  $\mathbf{Q}(\sqrt{a})(\sqrt{\gamma})$

generalmente se denota por  $\mathbf{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{\gamma})$  y decimos que es una extensión iterada de  $\mathbf{Q}$ . De este modo se demuestra que los puntos de cualquier extensión iterada  $\mathbf{Q}(\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_n}) = \mathbf{Q}(\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_{n-1}})(\sqrt{a_n})$  son números construibles. Por otra parte, como cada punto construible  $P$  se obtiene como el punto  $P_n$  de una sucesión de puntos  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , donde cada punto  $P_i$  es  $(0,0)$ , o  $(1,0)$ , o se pudo obtener como:

Intersección de dos rectas, cada una de las cuales pasa por puntos  $P_j, P_k$  con  $j, k < i$ , o

Como intersección de una recta que pasa por puntos  $P_j, P_k$  con  $j, k < i$ , y un círculo con centro en un punto  $P_l$  y que pasa por  $P_m$  con  $l, m < i$ , o

De la intersección de dos círculos, cada uno de los cuales tiene centro en un punto  $P_l$  y que pasa por  $P_m$  con  $l, m < i$ .

El punto  $P_1$  se obtiene con el proceso anterior empezando con  $(0,0)$  y  $(1,0)$  y por lo tanto sus coordenadas están en una extensión iterada  $E_1$  de  $\mathbf{Q}$ . Del mismo modo, el punto  $P_2$  se obtiene de una sucesión que inicia en  $(0,0)$  y  $(1,0)$  y termina en  $P_1$  y por lo tanto tiene coordenadas en  $E_1$  o en una extensión cuadrática de  $E_1$ , y así sucesivamente. De este modo podemos enunciar el siguiente teorema.

**Teorema 2.1.** *Todo número construible pertenece a una extensión iterada de los números racionales.*

Esta es una caracterización muy útil para demostrar la imposibilidad de muchos problemas de construcción con regla y compás.

### 3.4 La imposibilidad de la trisección de un ángulo y la duplicación del cubo

Un cubo cuya arista mide  $2^{1/3}l$  tiene el doble del volumen de un cubo cuya arista es  $l$ . Por lo tanto construir un cubo con el doble de volumen de un dado es equivalente a construir el número  $2^{1/3}$ . Observemos que  $2^{1/3}$  es raíz de la ecuación

$$x^3 - 2 = 0. \quad (4.1)$$

El ángulo  $\pi/3$  es construible, ya que es igual a un ángulo interior del triángulo equilátero. Si este ángulo fuera trisectable entonces se podría construir el número  $\pi/9$  y por lo tanto sería construible el número  $\cos \pi/9$ . An-

tes de demostrar que  $\cos \pi/9$  no es construible, se verá que  $2 \cos \pi/9$  es raíz de la ecuación

$$x^3 - 3x - 1 = 0. \quad (4.2)$$

En efecto, sea  $y = \pi/9$ , entonces utilizando las identidades trigonométricas

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta, \quad (4.3)$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha, \quad (4.4)$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \cos 3y &= 1/2 \quad \cos 3y = \cos y \cos 2y - \operatorname{sen} y \operatorname{sen} 2y \\ &= \cos y (\cos^2 y - \operatorname{sen}^2 y) - \operatorname{sen} y (2 \operatorname{sen} y \cos y). \end{aligned}$$

Substituyendo en esta expresión  $\operatorname{sen}^2 y$  por  $1 - \cos^2 y$ , resulta que

$1/2 = \cos^3 y - \cos y + \cos^3 y - 2 \cos y + 2 \cos^3 y = 4 \cos^3 y - 3 \cos y$ . O equivalentemente,  $8 \cos^3 y - 6 \cos y - 1 = 0$ . Esto significa que  $x = 2 \cos y$  es raíz de (4.2).

La imposibilidad de resolver los dos problemas planteados se reduce a demostrar que las ecuaciones (4.1) y (4.2) no tienen soluciones construibles; o dicho de otra manera, las raíces de los polinomios correspondientes no pertenecen a ninguna extensión iterada de los números racionales (ver Teorema 3.1). Esto se demuestra en la siguiente proposición.

**Proposición 2.5** *Las ecuaciones (4.1) y (4.2) no tienen raíces en ninguna extensión iterada de  $\mathbf{Q}$ .*

*Demostración:* Evidentemente la ecuación (4.1) no tiene raíces racionales. Supongamos que  $a/b$ , con  $a$  y  $b$  primos relativos, es una raíz racional de (4.2). Al substituir en la ecuación y después de simplificar se obtiene  $a^3 = b(3ab + b^2)$ ; lo cual es imposible ya que  $a$  y  $b$  no tienen factores comunes. Así queda demostrado que (4.2) no tiene raíces racionales.

Consideremos la ecuación (4.1) y supongamos que la raíz  $\sqrt[3]{2}$  pertenece a la extensión iterada  $F = \mathbf{Q}(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \dots, \sqrt{a_n})$  y no pertenece a  $E = \mathbf{Q}(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \dots, \sqrt{a_{n-1}})$ . Entonces  $\sqrt[3]{2} = a + b\sqrt{q}$ , con  $a, b, q$  en  $E$ . Si substituímos en (4.1) encontramos que

$$\sqrt{q} = \frac{2 - a^3 - 3ab^2q}{3a^2b + b^3q};$$

Note que la parte derecha de esta igualdad pertenece a E. Esto es una contradicción ya que  $\sqrt{q}$  no está en E. Se concluye que  $\sqrt[3]{2}$  no pertenece a ninguna extensión iterada de  $\mathbf{Q}$ .

Como en el caso anterior, supongamos que  $x = a + b\sqrt{q}$  es una raíz de (4.2) que pertenece a F y no está en E. Nuevamente se llega a una contradicción, ya que de la substitución en (4.2) se llega a la igualdad

$$\sqrt{q} = \frac{1 + 3a(1 - b^2q) - a^3}{3b(3a^2 - 1) + b^3q},$$

cuya parte derecha es un elemento de E, pero  $\sqrt{q}$  no está en E.

El argumento de la demostración anterior se puede generalizar de la forma siguiente. Sea  $y$  la tercera parte de un ángulo  $\theta$ ; es decir  $\theta = 3y$ . Si  $\alpha = \cos \theta$ , entonces  $x = \cos y$  satisface la ecuación

$$4x^3 - 3x = \alpha. \quad (4.5)$$

Con la notación utilizada en la demostración de la Proposición 2.5, tomemos  $x = a + b\sqrt{q}$ , una raíz de (4.5). Como antes se obtiene

$$\sqrt{q} = \frac{\alpha - a^3 - 3ab^2q}{3a^2b + b^3q}. \quad (4.6)$$

De esta igualdad se concluye el siguiente teorema.

**Teorema 2.1.** *Sea  $\alpha = \cos \theta$ . El ángulo  $\theta$  no se puede trisectar si  $\alpha \in \mathbf{Q}$  y la ecuación (4.5) no tiene raíz racional.*

El procedimiento utilizado para analizar la trisección de un ángulo y la duplicación del cubo, se puede usar para tratar el problema de la construcción de un polígono regular de  $n$  lados, o equivalentemente, de la construcción de  $\cos y$  con  $y = 2\pi/n$ . Sea  $x = \cos y$ . De la igualdad  $\cos ny = 1$  y con la ayuda de la identidades trigonométricas (4.3) y (4.4), se demuestra que  $x$  es solución de una ecuación polinomial

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x = 1, \quad (4.7)$$

con coeficientes  $a_i \in \mathbf{Z}$ ,  $i=1, \dots, n$ . Para demostrar que  $x$  no se puede construir, debemos probar que la ecuación (4.7) no tiene raíces en ninguna extensión iterada de  $\mathbf{Q}$ . Esto se reduce a demostrar que no tiene raíces racionales, ya que en este caso  $x$  no puede pertenecer a ninguna extensión iterada de  $\mathbf{Q}$  debido a que si  $x = a + b\sqrt{q}$  entonces  $\sqrt{q} = R(a, b, q)$ , donde  $R$  es una función racional.

Veamos ahora una demostración de que el heptágono regular no se puede construir. Después de algunas manipulaciones algebraicas<sup>5</sup> -basadas en las identidades (4.2) y (4.3)-, se observa que  $x = \cos 2\pi/7$  satisface la ecuación

$$h(x) = 64x^7 - 112x^5 - 56x^3 - 7x - 1 = 0.$$

Note que si  $h(x)$  reducible entonces  $h(x+1)$  es reducible. En efecto,  $h(x) = r(x)s(x) \Rightarrow h(x+1) = r(x+1)s(x+1)$ . Consecuentemente, para saber que el polinomio  $h(x)$  no tiene raíces racionales, basta demostrar que  $h(x+1)$  es irreducible sobre  $\mathbf{Q}$ . Para esto se utilizará el *Criterio de Eisenstein* que se enuncia a continuación.

**Teorema 2.2<sup>6</sup>** *Sea  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  un polinomio con coeficientes enteros. Supongamos que existe un primo  $p$  tal que  $p$  divide a  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ ,  $p$  no divide a  $a_n$  y  $p^2$  no divide a  $a_0$ . Entonces  $f(x)$  es irreducible sobre los racionales*

El polinomio  $h(x+1)$  es

$$64x^7 + 448x^6 + 1232x^5 + 1680x^4 + 1064x^3 + 56x^2 - 287x - 112.$$

Se verifica fácilmente que satisface las condiciones del Teorema 2.2 con  $p=7$  y por lo tanto es irreducible.

### 3.5 Algunas notas históricas

Aunque los griegos no pudieron demostrar la imposibilidad de la solución de los problemas mencionados, sus esfuerzos por resolverlos los llevaron a encontrar algunas construcciones alternativas. Por ejemplo, observaron que la

---

<sup>5</sup> Las simplificaciones se realizaron con a ayuda de Mathematica.

<sup>6</sup> El lector interesado puede ver la demostración en (Herstein, 1975).







Análogamente,

$$|HZ|^2 = |DZ||ZA| + |HA|^2.$$

Recordando que  $|EH| = |HZ|$  y que  $|GH| = |HA|$ , se llega a  $|DE||GE| = |DZ||ZA|$ . O equivalentemente,

$$\frac{|DZ|}{|DE|} = \frac{|GE|}{|AZ|}. \quad (5.4)$$

Por semejanza de triángulos se obtienen las igualdades  $\frac{|DZ|}{|DE|} = \frac{|AZ|}{|AB|} = \frac{|GB|}{|GE|}$  y entonces por (5.4)

$$\frac{|GB|}{|GE|} = \frac{|GE|}{|AZ|} = \frac{|AZ|}{|AB|}. \quad (5.5)$$

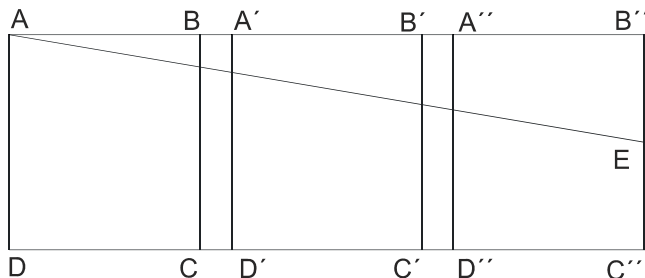
Con esto se demuestra que  $|GE|$  y  $|AZ|$  son las medias proporcionales de  $|BG|$  y  $|AB|$ .

Entre los muchos instrumentos que se diseñaron para construir las medias proporcionales se encuentra el muy famoso *Mesolabio* de Eratóstenes<sup>8</sup>. Este aparato consiste de tres rectángulos iguales  $ABCD$ ,  $A'B'C'D'$  y  $A''B''C''D''$ , de los cuales el primero se puede deslizar sobre el segundo y este sobre el tercero. Un hilo tensado mediante un peso que cuelga de uno de sus extremos, une el punto  $A$  con el punto  $E$  e intersecta a las diagonales  $A'C'$  y  $A''C''$  en  $F$  y  $G$ , respectivamente. Los rectángulos se acomodan de modo que el segmento  $BC$  pase por  $F$  y el segmento  $B'C'$  pase por  $G$ . Las magnitudes  $|FC|$  y  $|GC'|$  son las medias proporcionales de  $|DA|$  y

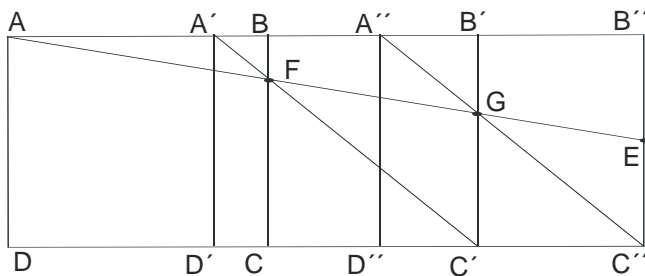
---

<sup>8</sup> Eratóstenes de Cyrene (276 ac, 194 ac) matemático y filósofo popularmente conocido por su famosa criba de números primos y por haber medido con gran exactitud la circunferencia de la tierra.

$|C''E|$ . En la Figura 10 se muestra la posición original del mesolabio y la posición final después de localizar los puntos  $F$  y  $G$ .



(a)



(b)

Fig. 10

El rectángulo de Platón es otro instrumento que sirve para construir las medias proporcionales de dos magnitudes  $|OA|$  y  $|OB|$ . Este aparato es una escuadra de lados  $L_1$  y  $L_2$  a la que se le ha agregado un tercer brazo que corre ortogonalmente a uno de sus lados (digamos, al lado  $L_2$ ). Para construir las medias proporcionales se dibujan perpendicularmente a partir del origen  $O$  del plano cartesiano, los segmentos  $OA$  y  $OB$ . La escuadra y el lado corredizo se mueven hasta lograr que el lado  $L_1$  pase por el punto  $A$  y que el vértice del ángulo recto entre  $L_1$  y  $L_2$  coincida con el semirrayo  $\hat{B}O$  en un punto  $C$  y simultáneamente, que el lado corredizo pase por  $B$  y que el vértice del ángulo recto que forma con  $L_2$  coincida con el semirrayo  $\hat{A}O$  en un punto  $D$ . Las magnitudes  $|OC|$  y  $|OD|$  son las medias proporcionales de  $|OA|$  y  $|OB|$ . (Ver Figura 11).





Cuando el segmento  $FA$  gira alrededor del punto fijo  $F$ , el punto  $A$  describe un círculo que pasa por  $C$ . Este movimiento de giro hace que la escuadra  $H$  rote alrededor de  $C$ . Al mismo tiempo, la escuadra  $G$  se mueve manteniendo su vértice  $R$  sobre la recta  $L$ . Los puntos  $A$  y  $P$  se mueven a lo largo de los brazos de ambas escuadras. El punto  $P$  describe la cisoide de Diocles. En la Figura 13 se muestra un segmento de esta curva.

En el cuadro de abajo se muestra un modelo de esta máquina tal y como se exhibe en el museo universitario de historia natural e instrumentos científicos de la Universidad de Modena, Italia.

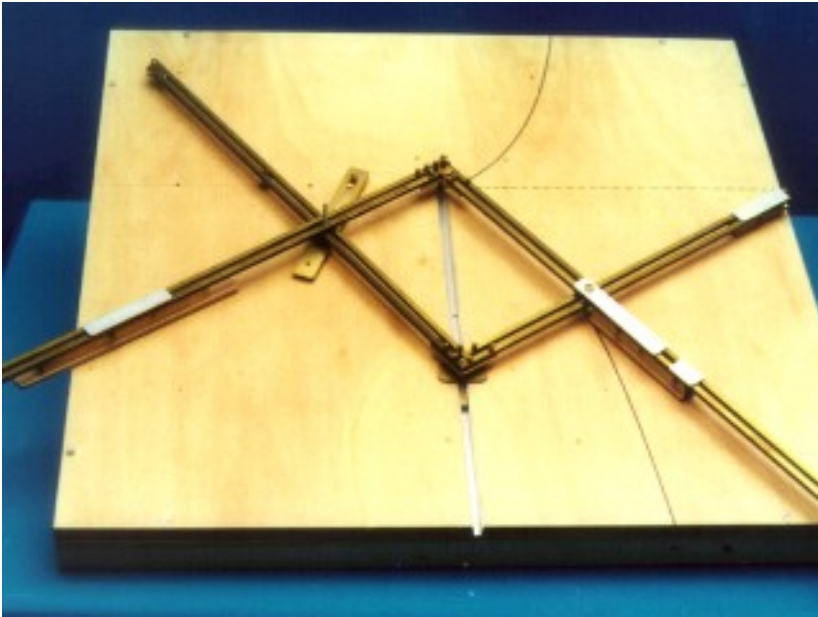


Fig. 14

Sabemos pues, que no todo ángulo se puede trisectar. Sin embargo, existe un método muy sencillo para triplicar cualquier ángulo. Tomemos el ángulo formado por los semirrayos  $L_1$  y  $L_2$ , que se intersectan en el punto  $O$  (ver Figura 15). Con centro en un punto  $A$  de  $L_2$  se traza un círculo que pasa por  $O$  e intersecta a  $L_1$  en el punto  $B$ . Ahora, el círculo con centro en  $B$  y

---

que pasa por A, corta a  $L_2$  en el punto C. Sea  $L_3$  el semirrayo  $\hat{BC}$ ; es fácil demostrar que el ángulo  $L_1L_3$  es el triple del ángulo  $L_1L_2$ <sup>9</sup>. Notemos que en esta construcción se tiene que  $OBD$  es un ángulo recto, siendo D el punto donde el círculo  $\mathcal{S}(A, |OA|)$  corta a  $L_2$ .

Supóngase ahora que para trisectar el ángulo  $L_1L_3$ , se invierte el proceso anterior. Se toma un punto C sobre el semirrayo  $L_3$  y el problema consiste en determinar el punto O sobre la prolongación del semirrayo  $L_1$  de modo que  $(\hat{OC})L_1$  sea un tercio de  $L_1L_3$ . Observe que las propiedades que determinan al punto O son:

- i. D está sobre el semirrayo  $L_4$  que pasa por el vértice B de  $L_1L_3$  y es perpendicular a  $L_1$ .
- ii. La distancia  $|OD|$  es igual a  $2|CB|$ .

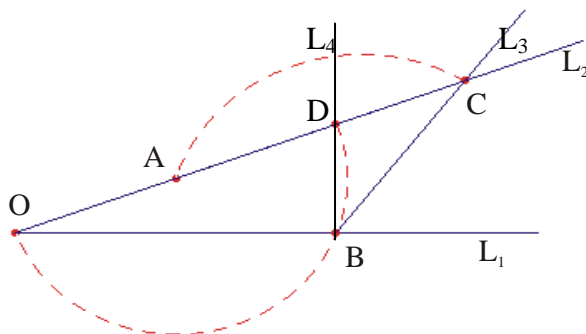


Fig. 15

Estos puntos conforman un caso particular de un problema conocido como problema de Pappus: dados un ángulo recto  $L_1L_4$ , una longitud  $d$  y un punto C, construir una recta  $L_2$  que pase por C de modo que  $|OD|=d$ , donde D y O son las intersecciones de  $L_2$  con  $L_4$  y la prolongación de  $L_1$ , respectivamente.

<sup>9</sup> Los triángulos OBA y ABC son isósceles. Entonces, se tienen las siguientes igualdades de ángulos:  $2\text{OBA} + \text{OAB} = \text{OAB} + \text{BAC}$ ,  $\text{OBA} + \text{ABC} + \hat{BC}L_1 = 2\text{BAC} + \text{ABC}$ .

Para encontrar el punto  $O$ , Nicomedes (280-210 ac) marcó en una regla dos puntos  $S$  y  $T$  a la distancia  $d$  y alineada con el segmento  $ST$  abrió sobre la regla una canal en la cual se desliza el punto  $C$ , mientras el punto  $S$  corre sobre la recta  $L_4$ . Entonces el punto  $T$  traza una curva llamada Concoide (de Nicomedes). El punto  $O$  es la intersección de la Concoide con la recta que determina  $L_1$  (ver Figura 16).

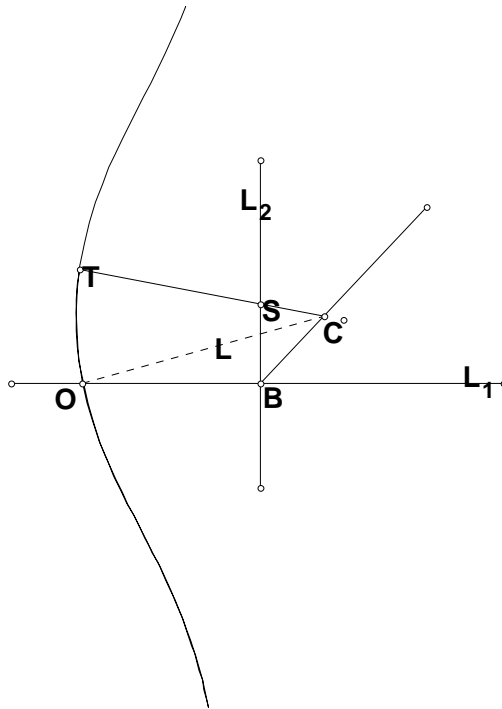


Fig. 16

En 1619, Descartes inventa un trisector que consiste simplemente de 4 barras largas que giran alrededor de un vértice  $A$  y de 4 barras más pequeñas de la misma longitud; éstas se unen para formar una estructura como el de la Figura 17. Los puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  equidistan del vértice  $O$  y permiten el giro de las barras pequeñas. Los vértices  $F$  y  $G$ , corren a lo largo de sus respecti-



vas barras. Para trisectar un ángulo  $\alpha$ , basta colocar los brazos OA y OD sobre sus lados. Cada uno de los ángulos AOB, BOC, COD es un tercio de  $\alpha$ .

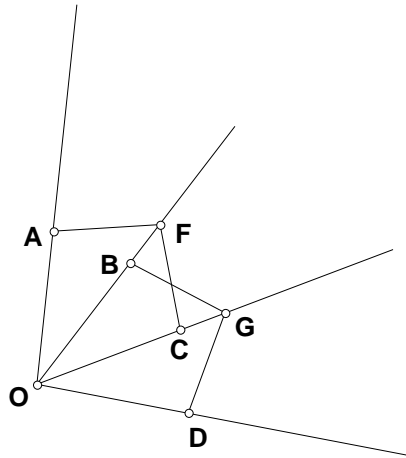


Fig. 17

## 2.6 Conclusión

En las páginas anteriores se ha visto como a lo largo de la historia se han construido una diversidad de instrumentos y mecanismos para trazar curvas o resolver problemas geométricos. El manejo y análisis de este tipo de instrumentos abre caminos interesantes de explorar, en la búsqueda de medios didácticos que le permitan al estudiante fortalecer su pensamiento matemático. En la interacción entre geometría, álgebra e instrumentos se pueden encontrar magníficos problemas, cuyo planteamiento no requiere de grandes conocimientos técnicos previos y su solución permite elaborar métodos propios y recorrer niveles diversos de formalización. Por lo tanto pueden servir para que el estudiante desarrolle un pensamiento crítico y creativo, se entrene en la búsqueda de conexiones entre temas relacionados y mejore su habilidad de comunicación. En los capítulos siguientes se encuentran algunas propuestas en esta dirección.

---

## Referencias

- Euclides (1991). *Elementos*. Introducción: Luis Vega, traducción: M. Luisa Puerta. Madrid: Editorial Gredos.
- Eves, H. 1969. *Estudio de las geometrías*. México: UTEHA.
- Herstein, I.N. 1975. *Topics in Algebra*. XEROX,.
- Lebesgue, H. 1950. *Leçons sur les constructions géométriques*. París: Gauthier-Villars, ..
- Martín, G. 1998. *Geometric constructions*. New York : Springer-Verlag.
- Moise, F.E. y Downs, F.L. 1970. *Geometría moderna*. México: Addison-Wesley Iberoamericana..
-

# Los huesos de Napier

---

Joaquín Delgado<sup>1</sup> y Jerónimo Zamora<sup>2\*</sup>

Departamento de Matemáticas, UAM-I

[1:jdf@xanum.uam.mx](mailto:jdf@xanum.uam.mx); [2:zacj@oso.izt.uam.mx](mailto:zacj@oso.izt.uam.mx)

## 3.1 Introducción

Desde la antigüedad, la multiplicación de cantidades ha dado lugar a problemas de algorítmica relacionados con los sistemas de numeración. En particular, el uso de la base decimal (aporte indoarábico) produjo importantes cambios en los métodos aritméticos y representó un avance notable en comparación con otros sistemas de numeración, como el sistema romano o griego.

En occidente el sistema decimal fue introducido por Cardano y Vieta, entre otros. En 1494, Luca Pacioli (también conocido como Luca di Borgo) (1445-1514?, 1509?) publica en Venecia, *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalità*, donde consigna ocho algoritmos de multiplicación (dos de ellos se mencionan más adelante). Estos métodos fueron los antecesores del algoritmo actual de multiplicación y constituyeron un avance notable en la aritmética práctica. Johanes Napier destaca con un método que prefigura la mecanización de la aritmética actual (Blaise Pascal inventó varios años después la primera sumadora mecánica antecedente de las actuales calculadoras electrónicas: *la Pascalina*). El método de Napier se basa en un arreglo ingenioso de las tablas de multiplicar impresas sobre barras, de modo que colocadas adecuadamente permiten obtener con rapidez el resultado de multiplicar dos números de varios dígitos. A tales barras se les conoce como los *Huesos de Napier* en honor a su autor, debido a que habían sido construidas en marfil.

## 3.2 Métodos de multiplicación

Durante mucho tiempo los matemáticos se habían preocupado por la realización de la multiplicación de números muy grandes –operación muy frecuente en los cálculos astronómicos y consecuentemente en la navegación– lo cual consumía una cantidad enorme de esfuerzo y tiempo del calculador. A finales

---

\* Los nombres de los autores aparecen en orden alfabético.

del siglo XVI se tenían diversos métodos para realizar la multiplicación de números grandes. Algunos de los métodos consistían en el uso de la prostaféresis, es decir, en el cambio de la multiplicación por la adición o sustracción. Para simplificar los procedimientos de cálculo (por lo general muy tediosos), se utilizaban tablas que compilaban cálculos básicos. Por ejemplo, un método ya conocido por los babilonios se basaba en la identidad

$$ab = \frac{1}{4}((a + b)^2 - (a - b)^2), \quad (1)$$

la cual se comprueba al desarrollar los cuadrados. Ellos también usaron la expresión

$$ab = [(a + b)^2 - a^2 - b^2] / 2,$$

y compilaron tablas de cuadrados de números para facilitar la multiplicación de dos números. Este método fue usado aún en el siglo XIX; en Francia en 1856 se editaron unas tablas compuestas por Alejandro Cossar tituladas: *Tablas de los cuadrados de números del 1 al 1000 millones, con ayuda de la cual se halla el producto exacto de números mediante un sistema sencillo en extremo y más cómodo que el de logaritmos*. De acuerdo con la obra, el resultado al multiplicar dos números es más exacto que el que se obtiene con los logaritmos. Sin embargo, el ámbito de aplicación de los logaritmos es mucho más amplio, pues permiten hacer multiplicaciones de más de dos factores, así como calcular raíces fraccionarias. Por otro lado, las propiedades funcionales de los logaritmos hicieron posible desarrollos teóricos posteriores, así como un grado de precisión arbitrariamente alto, tan sólo restringido por el cálculo manual y la manipulación de series geométricas y aritméticas. En suma, el concepto de logaritmo tuvo mayor trascendencia que los meros métodos prostaféuticos.

Otro método antiguo de multiplicación fue el *método egipcio*, consistente en dividir entre dos y duplicar; otro método similar fue el *algoritmo ruso*. Ambos algoritmos usan la aritmética binaria.

## El método egipcio

El método más antiguo de multiplicación que se conoce se basa en la duplicación sucesiva y tuvo su origen en Egipto. En el papiro de Ahmes que data del 1850 a.C. se recomienda realizar la multiplicación de la siguiente forma: Si por ejemplo, se desea 41 por 59,

1. Se colocan los números encabezando dos columnas

2. Se repite el primer número de la segunda columna. Se duplica el número de la segunda columna tantas veces como sea necesario, de acuerdo con lo que sigue. En la primera columna, debajo del número inicial se coloca el 1, después el 2, luego el 4 y así sucesivamente, hasta que se llega a un número cuyo doble es mayor que el número inicial.

41	59
1	59
2	118
4	236
8	472
16	944
32	1888

El proceso se detuvo pues el doble de 32 es 64.

3. Se procede a realizar las siguientes sustracciones con los números de la primera columna.

$$41 - 32 = 9, \quad 9 - 8 = 1, \quad 1 - 1 = 0.$$

Es decir, se resta de 41 el mayor número de la columna izquierda, 32.

Al residuo 9, se le resta el mayor número de la columna izquierda que es menor que 9, es decir, 8.

Del mismo modo, al residuo 1, se le resta el 1, terminando aquí el proceso. Obsérvese que

$$41 = 32 + 8 + 1.$$

Otra manera de ver este proceso es “reconstruir” el factor 41 mediante los números de la primera columna, de abajo hacia arriba:

$$41 = 32 + \text{“algo”} \quad \text{que no puede ser 16 porque se pasa, entonces}$$

$$41 = 32 + 8 + \text{“algo”} \quad \text{que no puede ser 4 porque se pasa, entonces}$$

$$41 = 32 + 8 + 1 \quad \text{finalizando la “reconstrucción”}.$$

4. Se suman los números en la segunda columna correspondientes a 1, 8 y 32,

41	59
1	59 *
2	118
4	236
8	472 *
16	944
32	1888 *
	2419

El resultado es 2419.

A continuación daremos una justificación formal del algoritmo egipcio. Sean  $a$  y  $b$ , los números enteros no negativos que se van a multiplicar. En representación binaria

$$a = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + \dots + a_k 2^k, \text{ con } a_i = 0 \text{ ó } 1.$$

Entonces

$$ab = a_0(b) + a_1(2b) + \dots + a_k(2^k b).$$

Los números entre paréntesis forman las duplicaciones sucesivas del número  $b$  que forman la segunda columna en el algoritmo (véase la tabla abajo). En la columna bajo el número  $a$  aparecen las potencias de 2.

$A$	$b$
1	$b$
2	$2b$
$2^2$	$2^2 b$
$\vdots$	$\vdots$
$2^k$	$2^k b$

Si ahora multiplicamos los elementos de la primera columna por los coeficientes correspondientes de la expansión binaria de  $a$  habremos “reconstruido” al número  $a$ , como se muestra en la siguiente tabla

	$a$	$b$
$a_0 \times$	1	$b$
$a_1 \times$	2	$2b$
$a_2 \times$	$2^2$	$2^2 b$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_k \times$	$2^k$	$2^k b$

$$a = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + \dots + a_k 2^k$$

Como los coeficientes  $a_i$  son 0 ó 1, solo aquellos que son iguales a 1 son los que aparecerán explícitamente en dicha suma, esto es equivalente a haber marcado los coeficientes que habrán de sumarse en la última columna:

	$a$	$b$	
1	1	$b$	*
0	2	$2b$	
1	$2^2$	$2^2 b$	*
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
0 ó 1	$2^k$	$2^k b$	* ó sin marcar

$$ab = a_0(2b) + a_1(2^2 b) + \dots + a_k(2^k b)$$

Esto justifica el algoritmo.

### El método ruso

Para multiplicar  $24 \times 18$  se usan las siguientes reglas

1. Se escriben los dos números al principio de dos columnas.



Primera	Segunda
24	18

2. Se duplica el número de la primera columna y se divide entre dos el número de la segunda columna.

24	18
48	9

3. Si el número en la segunda columna es par, se marca todo el renglón

*24	*18
48	9

4. Se continua este proceso de duplicar, dividir entre dos y marcar hasta que el número en la segunda columna sea 1.

*24	*18
48	9
*96	*4
*192	*2
384	1

5. Se suman los números no marcados de la primera columna

*24	*18
48	9
*96	*4
*192	*2
384	1
<hr/>	
432	

Como el algoritmo ruso es tan sólo una modificación del método egipcio, la justificación matemática y se encuentra en la unicidad de la expansión binaria y la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma.

Escrito en italiano, la *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalità* es uno de los primeros libros impresos sobre matemáticas

---



que es considerado una enciclopedia de los conocimientos matemáticos aún en el siglo XV y sirvió de base para el ulterior desarrollo de las Matemáticas en Europa. En él se describen dos métodos populares de multiplicación: el método del tablero y el método de la celosía. A continuación se describe el primero.

### El método del tablero

Comenzaremos con un ejemplo simple. Multipliquemos  $365 \times 2$ .

Escribamos los sumandos de la multiplicación

$365 \times 2 = (300 + 60 + 5) \times 2 = 600 + 120 + 10$  en filas alineadas por la derecha

Tabla 1

	1	0
1	2	0
6	0	0

Sumando por columnas obtenemos el resultado 730.

Veamos un ejemplo más complicado. Multipliquemos 365 por 2001.

Realicemos el siguiente arreglo: en la primera fila se coloca uno de los factores, digamos 2001. Se multiplica  $1 \times 365 = 365$  y se escribe en diagonal en dirección Noreste  $\rightarrow$  Suroeste comenzando por las unidades. Se continúa multiplicando el siguiente dígito del factor 2001, es decir, 0 por 365. El resultado 000 se dispone en la misma manera que antes, excepto que se desplaza un lugar a la izquierda. Ahora se multiplica el tercer dígito de 2001, es decir, 0 por 365. El resultado 000 se dispone en la misma manera que antes, excepto que se desplaza un lugar a la izquierda. Finalmente se multiplica el último dígito de 2001, es decir, 2 por cada dígito de 365. El resultado 6, 12 y 10, se dispone nuevamente en diagonal (siguiendo estrictamente la regla), escribiendo los dígitos correspondientes a las decenas a la izquierda de las unidades como se muestra en la región sombreada

Tabla 2

		2	0	0	1
--	--	---	---	---	---

					5
				6	
			3		
				0	
			0		
		0			
			0		
		0			
	0				
	1	0			
1	2				
6					

7	3	0	3	6	5
---	---	---	---	---	---

Finalmente, para obtener el resultado se suman los números por columnas a partir de la segunda fila. En este ejemplo, el producto es 730365.

Este método de multiplicar es en esencia –salvo algunas variantes– el que utilizamos actualmente. Puede reconocerse si reordenamos la tabla en el modo familiar

		2	0	0	1
	×	3	6	5	
<hr/>					
			3	6	5
		0	0	0	
	0	0	0		
	1	0			
1	2				
6					
<hr/>					
7	3	0	3	6	5

A continuación se justifica por qué funciona este algoritmo en el caso particular

$$\begin{aligned}
 365 \times 2001 &= 365 \times (2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 1) \\
 &= 365 \times 2 \times 10^3 + 365 \times 0 \times 10^2 + 365 \times 0 \times 10^1 + 365 \times 1 \\
 &= (365 \times 2) \times 10^3 + 000 \times 10^2 + 000 \times 10^1 + 365 \times 1 \\
 &= (365 \times 2) \times 10^3 + 00000 + 0000 + 365
 \end{aligned}$$

Observe que los últimos tres sumandos aparecen en la subtabla de la Tabla 2,

				5
			6	
		3		
			0	
		0		
	0			
		0		
	0			
0				

que si se rellenan las diagonales con ceros a la derecha queda:

				5
			6	
		3		0
			0	
		0		0
	0		0	
		0		
	0			
0				

Finalmente  $(365 \times 2)$  se ha calculado en la Tabla 1. El factor  $10^3$  en el sumando  $(365 \times 2) \times 10^3$  del producto  $365 \times 2001$ , indica que debemos insertar la Tabla 1 debajo de la subtabla última, pero desplazando 3 lugares a la izquierda

Tabla 3

					5
				6	
			3		0
				0	
			0		0
		0		0	
			0		
		0			
	0				
	1	0			
1	2	0			
6	0	0			

Observe que las Tablas 2 y 3 difieren tan sólo por ceros a la derecha y no afectan la suma por columnas.

Veamos otro ejemplo: Multiplíquese  $5678 \times 23$ .  
Primero multiplíquese  $5678 \times 3$  como se muestra en la tabla

	5	6	7	8
--	---	---	---	---

			2	4
		2	1	
	1	8		
1	5			

1	7	0	3	4
---	---	---	---	---

Ahora multiplíquese  $5678 \times 2$  siguiendo el mismo método

	5	6	7	8
--	---	---	---	---

			1	6
		1	4	
	1	2		
1	0			

1	1	3	5	6
---	---	---	---	---

El resultado de multiplicar  $5678 \times 23$  se obtiene si sumamos los resultados parciales  $5678 \times 2$  y  $5678 \times 3$ , pero trasladando la segunda un lugar a la izquierda, respecto de la primera

	1	7	0	3	4
1	1	3	5	6	

1	3	0	5	9	4
---	---	---	---	---	---

---

Ambas multiplicaciones se pueden disponer en una misma tabla como sigue

		5	6	7	8
--	--	---	---	---	---

				2	4
			2	1	
		1	8		
	1	5			
			1	6	
		1	4		
	1	2			
1	0				

1	3	0	5	9	4
---	---	---	---	---	---

### El método de la celosía

Como primer ejemplo se pide multiplicar  $2001 \times 365$

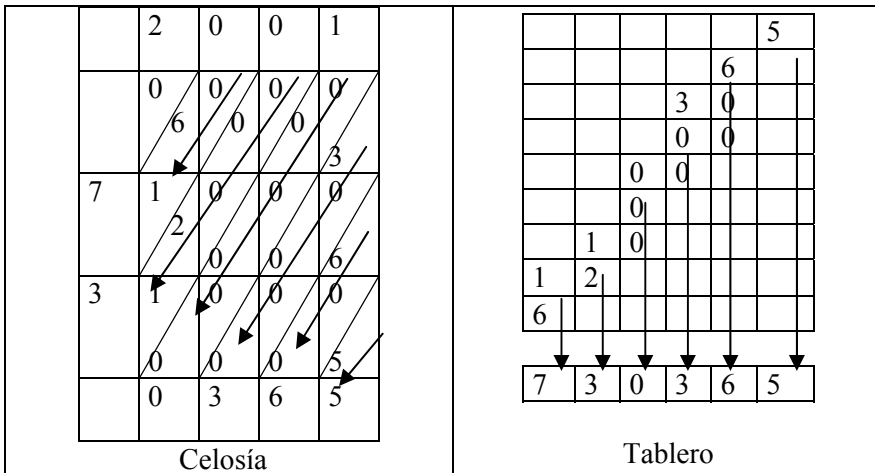
Se construye una tabla con el mismo número de columnas que dígitos del primer factor 2001, es decir 4, y el mismo número de filas que dígitos tiene el segundo factor 365. En este caso, 3. Colocamos encima de la tabla el primer factor y a la derecha de la tabla el segundo factor en forma de columna. Cada celda se divide por una diagonal.

Comenzamos por multiplicar el dígito de la izquierda de 365, es decir 3, por cada uno de los dígitos de 2001, colocando el resultado en la primera fila. Cada resultado parcial se escribe en el triángulo inferior si éste es menor que 10, haciendo uso del triángulo superior para las decenas. Los triángulos vacíos se llenan con cero. El resultado se obtiene sumando los números de la tabla en diagonal en dirección Noreste  $\rightarrow$  Suroeste comenzando por la esquina inferior derecha. Las sumas que se obtienen: 5, 6, 3, 0, se continúan en dirección de las manecillas del reloj para completar con 3,7. El resultado final se lee en la dirección contraria de las manecillas del reloj  $2001 \times 365 = 730365$ .

		2	0	0	1	
	0	0	0	0	0	3
		6	0	0	3	6
	1	0	0	0	0	6
7		2	0	0	6	5
	1	0	0	0	0	5
3		0	0	0	5	
		0	3	6	5	

Si la suma de una diagonal es mayor que nueve, se escribe el número de unidades y las decenas se agregan a la siguiente diagonal.

Este método puede considerarse una deformación geométrica del método del tablero. Decimos “geométrica” porque se compone de una transformación topológica de la tabla que no modifica las sumas. En efecto, en la siguiente figura, la suma por diagonales en la tabla de la izquierda corresponde a la suma por columnas en la tabla de la derecha.



### 3.3 Los huesos de Napier

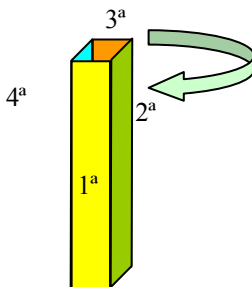
El método de multiplicación desarrollado por Napier consiste en un procedimiento mecánico que fue usado durante mucho tiempo y es conocido como *Huesos de Napier*, el cual puede ser considerado como la primera máquina de calcular. El proceso comienza con una serie de tablas arregladas de tal forma que proporciona un verdadero algoritmo para realizar multiplicaciones de números. Esta invención fue publicada en 1617, después de la muerte de John Napier, bajo el título *Rabdologie, sev numerationis per virgulas libri duo*, Edimburgo. La palabra Rabdología proviene del griego (ραβδος, varilla) y (λογια, colección). En 1667 se hizo una traducción al inglés por W. Leybourn *The Art of Numbering by Speaking Rods: Vulgarly termed Nepeir's Bones*, donde se usa una falsa etimología al no reconocer el uso de Napier de la palabra λογια □Las varas para calcular fueron hechas de marfil, lo cual explica por qué son conocidas como huesos de Napier. El trabajo principal sobre los huesos se encuentra en *Rabdologie*. A continuación se explica cómo se puede reducir la multiplicación a simples adiciones con la ayuda de los huesos de Napier, pero antes se da una descripción de diez huesos.

Si se tienen diez huesos, los cuatro primeros se marcan de la siguiente manera. Obsérvese que hay dieciséis caras. En la parte inferior de los cuadrados de la primera cara (es decir, de la cara que se tiene al frente) se colocan ceros. Esto vale para cuatro de las dieciséis caras.

Si se voltea cada una de las barras de tal manera que la tercera cara quede al frente pero de abajo hacia arriba, se escriben los productos de 9 por 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; es decir, se escriben los números 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81. Esto vale para otras cuatro caras de las dieciséis con lo cual sólo quedan ocho caras para los restantes ocho dígitos (véanse Figuras 1 y 2).

---

Un hueso consiste de una barra oblonga con cada una de las cuatro caras rectangulares marcadas adecuadamente con números. Cada cara de una barra se divide en diez cuadros de igual longitud. En el cuadrado superior se coloca alguno de los dígitos del 1 al 9 (en el ejemplo que se muestra a la derecha se escogió el 3). Los siguientes nueve cuadros se han dividido a la mitad por líneas diagonales y en éstos se colocan los múltiplos del dígito escogido, ocupando la mitad inferior para las unidades y la mitad superior para las decenas. Las caras se numeran en el sentido de las manecillas del reloj como muestra la figura. Así, la primera cara es la de enfrente, la segunda la que aparece al rotar  $90^\circ$ , la tercera la que aparece al rotar  $180^\circ$  y la cuarta al rotar  $270^\circ$ .



3
0 / 3
0 / 6
0 / 9
1 / 2
1 / 5
1 / 8
2 / 1
2 / 4
2 / 7



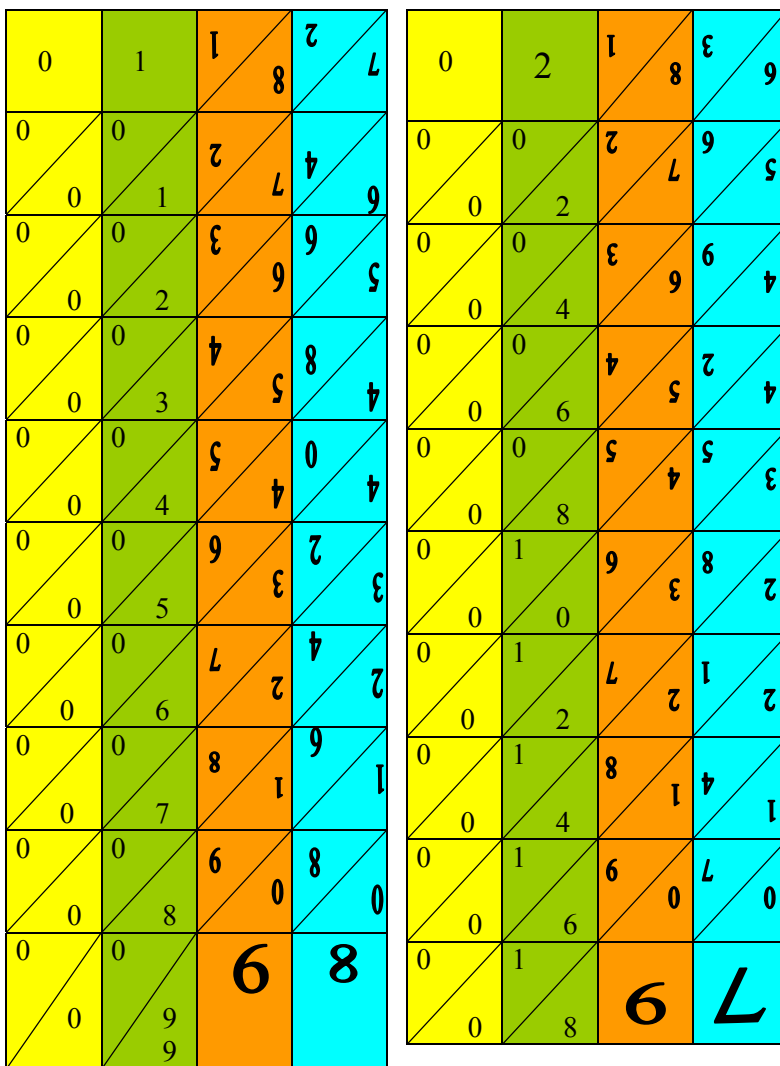


Figura 1. Primera y segunda barras

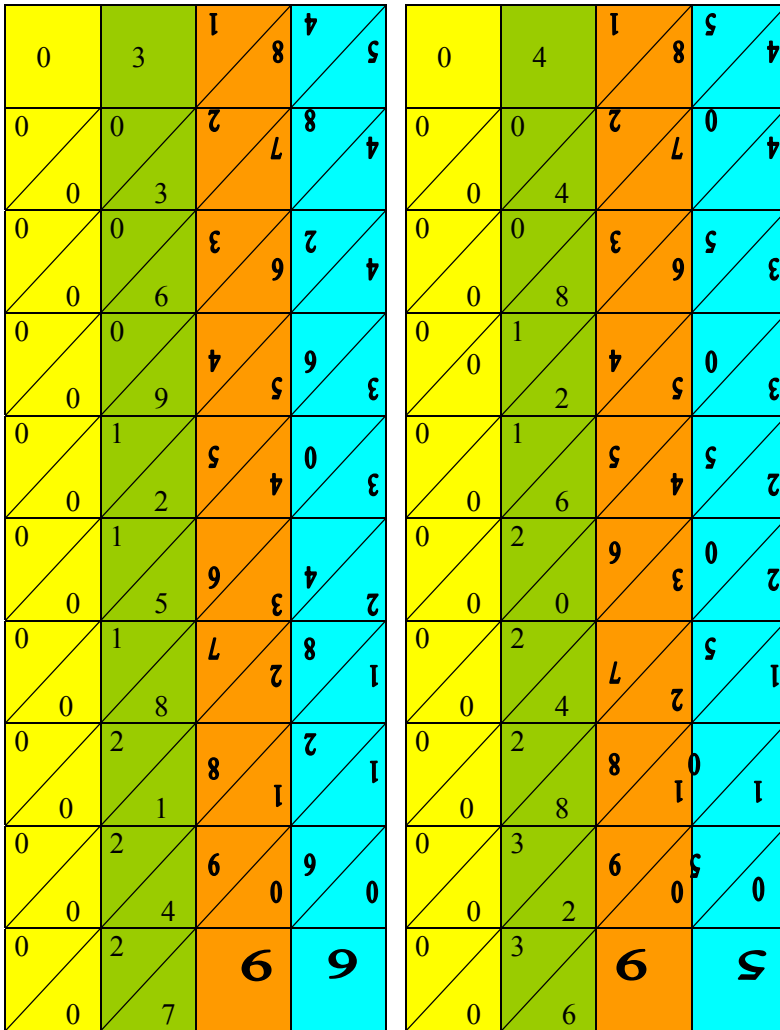


Figura 2. Tercera y cuarta barras

La segunda cara de la primera barra se llena con los múltiplos de 1; es decir, se escriben los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. La cuarta cara se llena con los múltiplos de 8, (8 es el complemento de 1 con respecto a 9) de abajo hacia arriba tal y como se llenó la tercera cara. En la cuarta cara se escriben los dígitos 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72.

Similarmente la segunda y cuarta caras de la segunda barra se llenan con los múltiplos de 2 y 7, respectivamente.

En la segunda y cuarta caras de la tercera barra se colocan los múltiplos de 3 y 6; y en la cuarta barra en las caras segunda y cuarta se colocan los múltiplos de 4 y 5.

Así que en las primeras cuatro barras se tendrán las tablas de multiplicación hasta la del nueve, de los primeros 10 dígitos, 0, 1,...,9. Notemos que se tienen cuatro columnas de ceros y cuatro columnas de múltiplos de 9.

Ahora bien, en la primer cara de las siguientes tres barras (la quinta, sexta y séptima), numerada con el 1, se colocan en columna los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. En la cara opuesta, la tercera, se escriben, de abajo hacia arriba, los correspondientes productos de 8 con los nueve dígitos (es decir, se escriben los números 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72). Véase la Figura 3.

---

1	2	2	3
0	0	4	6
1	2	6	5
0	0	6	9
2	4	5	4
0	0	8	2
3	6	4	4
0	0	0	5
4	8	4	3
0	1	2	8
5	0	3	2
0	1	4	1
6	2	2	2
0	1	6	4
7	4	1	1
0	1	8	7
8	6	0	0
0	1	8	7
9	8	8	7

1	3	2	4
0	0	4	8
1	3	6	4
0	0	6	2
2	6	5	4
0	0	8	6
3	9	4	3
0	1	0	0
4	2	4	3
0	1	2	4
5	5	3	2
0	1	4	8
6	8	2	1
0	2	6	2
7	1	1	1
0	2	8	6
8	4	0	0
0	2	8	6
9	7	8	6

1	4	2	5
0	0	4	0
1	4	6	4
0	0	6	5
2	8	5	3
0	1	8	0
3	2	4	3
0	1	0	5
4	6	4	2
0	2	2	0
5	0	3	2
0	2	4	5
6	4	2	1
0	2	6	0
7	8	1	1
0	3	8	5
8	2	0	0
0	3	8	5
9	6	8	5

Figura 3. Quinta, sexta y séptima barras.

De las caras restantes, en la segunda cara de cada barra se colocan las columnas de múltiplos de 2, 3, 4, respectivamente; en las cuartas caras se colocan las columnas de múltiplos de los complementos 7, 6, 5, estas escritas de abajo hacia arriba.

En este momento se tienen marcadas siete barras con las columnas de 0, 1, 8, 9 repetidas cuatro veces y las columnas de 2, 3, 4, 5, 6, 7 se repiten dos veces.

En las barras octava y novena, las dos primeras caras se encabezan las columnas con el 2 y se ponen sus múltiplos. En la cara tercera se escriben (de

abajo hacia arriba), los múltiplos del complemento de 2, o sea el 7. En las restantes dos caras segundas se colocan los múltiplos de 3 y 4 y en las caras opuestas, los complementos respectivos 6 y 5. Ver Figura 4.

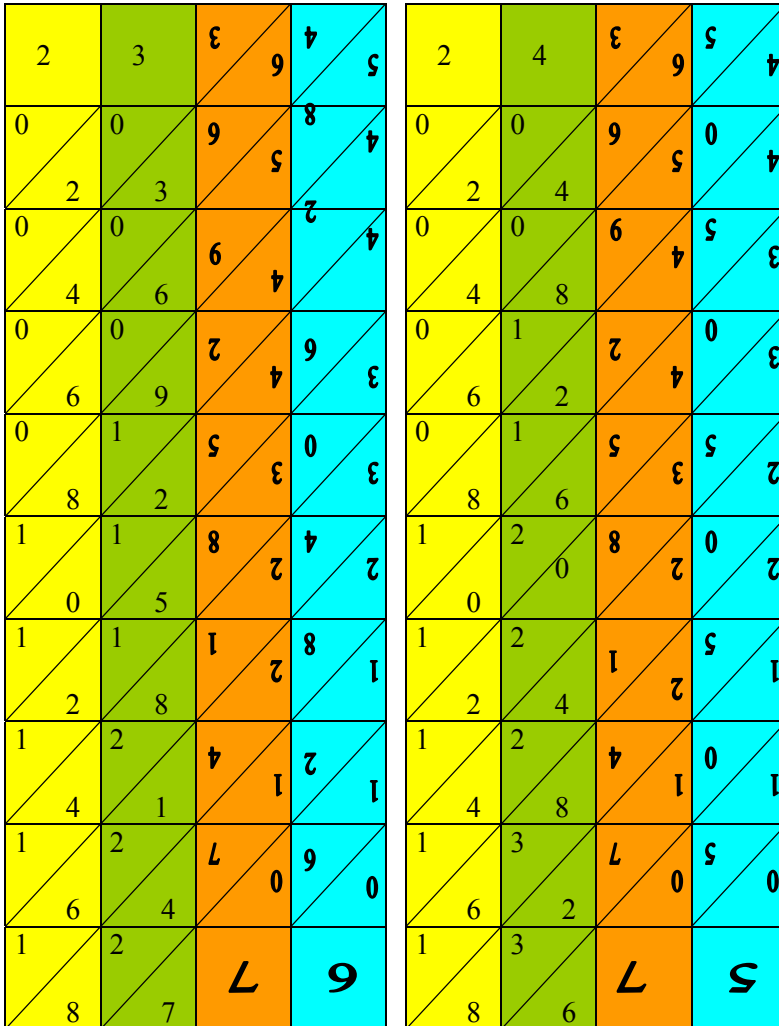


Figura 4. Octava y novena barras.

En la décima barra se colocan los múltiplos de 3, 4, 5, 6 en la forma usual; es decir, en la primera cara se coloca la columna de 3, en la segunda cara se coloca la columna de 4 y en las caras tercera y cuarta se colocan, de abajo hacia arriba, los complementos respectivos – las columnas de 6 y 5. Ver Figura 5.

3	4	4	5
0	0	8	0
3	4	2	5
0	0	4	3
9	8	6	0
0	1	3	3
1	1	0	5
2	6	3	2
1	2	4	0
5	0	2	2
1	2	8	5
8	4	1	1
2	2	2	0
1	8	1	1
2	3	6	5
4	2	0	0
2	3	6	5
7	6	6	5

Figura 5. Décima barra.

Como ayuda, se considera un hueso con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 para indicar los renglones necesarios. En la Figura 6 se muestra un modelo en madera de los huesos de Napier.

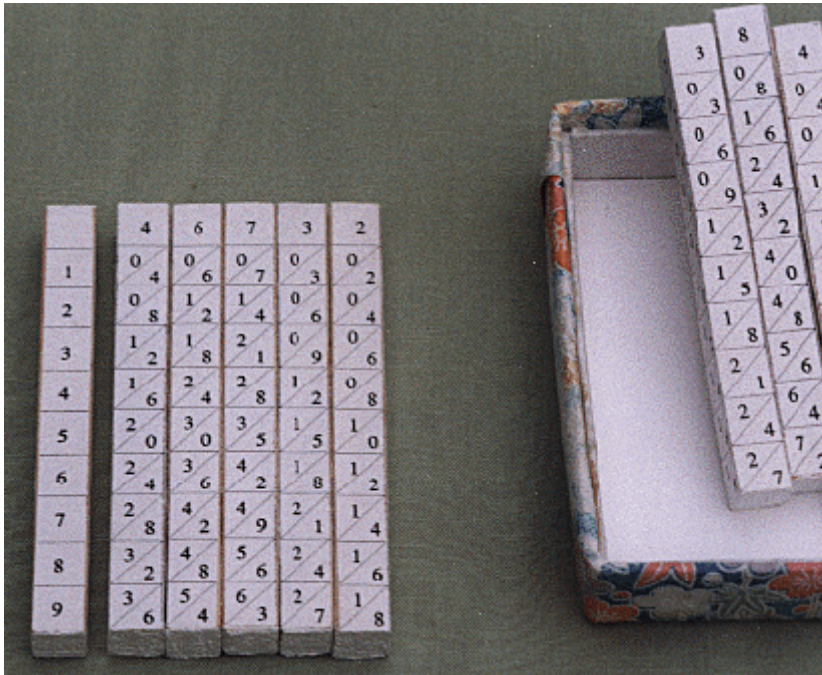


Figura 6. Modelo hecho en madera de los huesos de Napier.

A continuación se dan ejemplos del uso de los huesos de Napier. Tengamos en cuenta que cada hueso contiene cuatro tablas de multiplicación de uno de los números entre 0 y 9.

Para multiplicar 2568 por 7, se colocan cuatro huesos uno al lado del otro con las caras mostrando las columnas respectivas de 2, 5, 6 y 8. El renglón 7 muestra el siguiente arreglo

	2	5	6	8
1	0 2	0 5	0 6	0 8
2	0 4	1 0	1 2	1 6
3	0 6	1 5	1 8	2 4
4	0 8	2 0	2 4	3 2
5	1 0	2 5	3 0	4 0
6	1 2	3 0	3 6	4 8
7	1 4	3 5	4 2	5 6
8	1 6	4 0	4 8	6 4
9	1 8	4 5	5 4	7 2

Como el producto se evalúa diagonalmente el resultado es 17976, el cual se obtuvo de la siguiente manera comenzando por la derecha: 6 se deja tal cual;  $7 = 2 + 5$ ;  $9 = 5 + 4$ ;  $7 = 4 + 3$ ; 1 se deja tal cual (ocasionalmente se debe acarrear algún 1). También se puede explicar como lo indica el siguiente diagrama

$$\begin{array}{r}
 7 \times 2 = 14 \quad (7 \text{ por } 2000) \\
 7 \times 5 = 35 \quad (7 \text{ por } 500) \\
 7 \times 6 = 42 \quad (7 \text{ por } 60) \\
 7 \times 8 = 56 \quad (7 \text{ por } 8) \\
 \hline
 7 \times 2568 = 17976
 \end{array}$$



Ejemplo. Multiplíquese 2001 por 365

	2	0	0	1
1	0			0
	2	0	0	1
2	0			0
	4	0	0	2
3	0			0
	6	0	0	3
4	0			0
	8	0	0	4
5	1			0
	0	0	0	5
6	1			0
	2	0	0	6
7	1			0
	4	0	0	7
8	1			0
	6	0	0	8
9	1			0
	8	0	0	9

Para obtener el resultado, ordenamos los renglones de arriba y sumamos por diagonales, como en el método de la celosía .

**Por qué funcionan los huesos de Napier**

El método de construcción de los huesos que hemos descrito aquí se debe al propio Napier. No se conoce la razón por la que escribió los números “al revés” en las columnas 3 y 4, pero esto evita confundir dígitos como el 9 con el 6 y facilita el manejo de los huesos.

La razón de por qué funcionan los huesos debe ser evidente a estas alturas, ya que se basa en el método de la celosía explicado anteriormente.

## Consecuencias pedagógicas

En el XIX Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana celebrado en la ciudad de Durango, presentamos en una conferencia de divulgación para profesores de primaria, un modelo de los huesos de Napier construido con barras de unicel de un metro de largo aproximadamente, numeradas con plumones de colores. La respuesta de los maestros fue positiva, y muchos de ellos dijeron desconocer o no haber escuchado nada acerca de los huesos de Napier. En el Diplomado de Enseñanza impartido por la profesora Cristianne Butto, de la Universidad de las Américas (UDLA) de la Cd. de México, sus alumnos construyeron modelos de los huesos de Napier usando diversos materiales como: palitos de paleta agrupados en bloques de 4 con números pirograbados, paralelepípedos de cartulina con números diseñados con pintura serigráfica y bloques de madera, entre otros. La experiencia docente muestra que los huesos de Napier pueden usarse con éxito en la enseñanza del sistema de numeración decimal y las operaciones de multiplicación, si se permite que el alumno se involucre en la propia construcción y reflexione sobre el por qué de su funcionamiento.

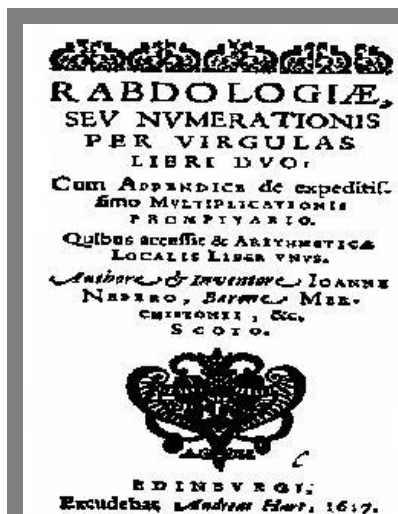


Figura 7. Portada de la edición póstuma de *Rabdologie* de Napier

## **Agradecimientos**

Uno de los autores (J. Delgado) agradece el apoyo recibido por proyecto CONACYT 32167-E.

## **Referencias**

Cajori, Florian 1980. *A History of Mathematics*. Chelsea Publishing Company  
Prieto, Rodríguez Sotero. 1991. *Historia de las Matemáticas*. Toluca: IMC/Ediciones.

Smith, D. E. 1959, *A source book in Mathematics* (125 selections from the classic Writings). N.Y: Dover Publications.

F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson, V. Katz (Eds.). 1994. *Learn from the masters!* The Mathematical Association of America

<http://www-groups.dcs.stnd.ac.uk/~history/HistTopics/>

<http://forum.swarthmore.edu>

<http://es.rice.edu/ES/humsoc/Galileo/Catalog/Files/>

<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history>

---

# El trabuco, máquina de guerra medieval, instrumento de interés

---

**Héctor Covarrubias M.**

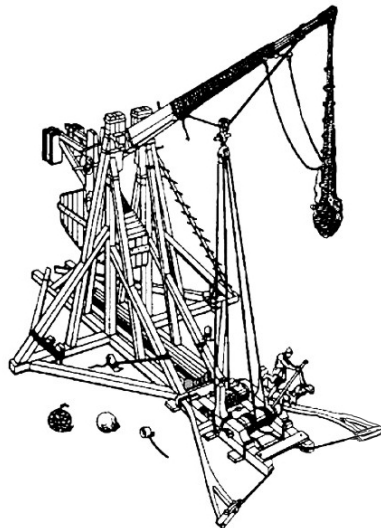
Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico, UNAM.

covarh@aleph.cinstrum.unam.mx

Se presentan aspectos de la mecánica del trabuco, arma medieval que funciona por acción del peso de un lastre para lanzar proyectiles. El principio de conservación de la energía permite hacer una primera aproximación para conocer de qué variables depende su alcance. Se encuentra que es posible diseñar trabucos que transfieren toda la energía potencial inicial al proyectil como energía cinética. Se menciona la manera de obtener las ecuaciones de movimiento por medio de la función lagrangiana y se describe una solución numérica efectuada en computadora que es comparada con el comportamiento de un trabuco que lanza pelotas de beisbol.

## 4.1 Voltereta y trastorno, la gravedad es la responsable

Trabuco proviene de trabucar que es trastornar, o volcar lo de arriba abajo dando vuelta [Real academia, 1941]. Eso es lo que distingue al trabuco de otras máquinas de guerra que arrojan proyectiles. En vez de usar la torsión de cuerdas o la elasticidad de arcos, es el peso de un lastre el que hace girar un brazo en cuyo extremo hay una cuerda que a manera de honda lanza un proyectil. Un trabuco medieval grande podía arrojar un proyectil de 500 kilogramos haciéndolo llegar a 180 metros [Chevedden, 1995], y la fuerza aprovechada era la de gravedad. El trabajo de poner el trabu-



co a punto era hecho por hombres que tiraban de cuerdas o giraban malacates para elevar el lastre.

El trabuco fue muy usado, incluso después de la llegada de las armas de fuego. Dejó de usarse al ser sustituido por cañones grandes. La última vez que se tiene documentado su uso en guerra ocurrió en México. Bernal Díaz del Castillo [Díaz del Castillo, 1960] narra cómo, al no disponer Cortés de pólvora durante el sitio de Tenochtitlan, escuchó a uno de sus hombres, que se decía experimentado en el uso de trabucos, y le mandó construir uno. El

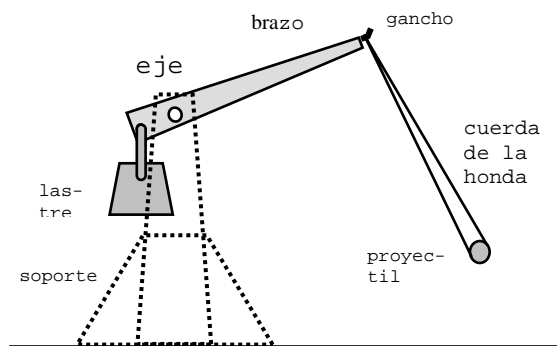


Fig 2. Partes elementales del trabuco

primer proyectil salió disparado hacia arriba y para enojo de Cortés cayó sobre la propia máquina, terminando así la larga vida de un arma que había sido decisiva en muchas batallas.

El trabuco es como una combinación de palanca y honda. El brazo está apoyado en un eje, situado en un punto que lo divide en dos partes de longitudes diferentes. En la parte corta está el lastre de masa grande que al descender hace que se eleve el extremo largo del brazo. En ese extremo, en un gancho, está fijada la cuerda que actúa como honda para lanzar al proyectil.

La Figura 1 es un dibujo de una reconstrucción de un trabuco medieval que lanza proyectiles esféricos de piedra. La Figura 2 muestra esquemáticamente las partes del trabuco.

La Figura 3 es de las posiciones sucesivas del brazo y la cuerda a intervalos iguales de tiempo. Su movimiento es como el de un péndulo doble en el que las posiciones del brazo y cuerda no tienen restricciones.

El movimiento de todo el conjunto es complicado y parecería que no es posible tener idea de algunos valores, como la velocidad de salida del proyectil, sin resolver las ecuaciones que son engorrosas. Sin embargo es posible conocer algunas cosas de manera sencilla.

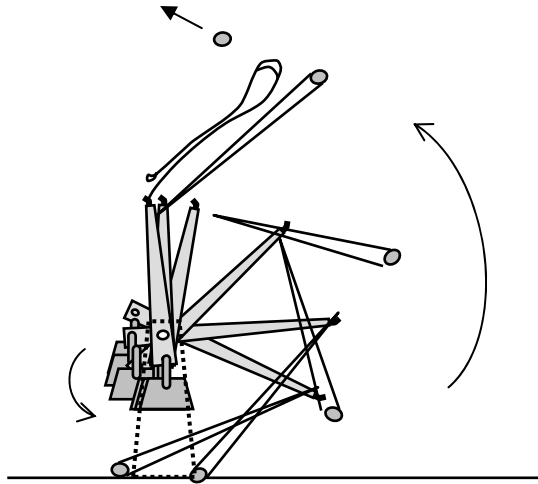


Fig 3. Posiciones sucesivas del trabuco al ser liberado

## 4.2 El principio de conservación de la energía facilita las cosas

Como la fuerza que impulsa todo el movimiento del trabuco es la de gravedad, con algunas suposiciones es posible hacer uso del principio de conservación de la energía. Supondremos unas condiciones que aunque ideales, no son de difícil aproximación: que las fuerzas de fricción son pequeñas para no considerarlas, y que en el momento en el que el proyectil es liberado por la honda, el lastre que pende del extremo corto del brazo está en su posición más baja y además en reposo.

En otras palabras, al final del proceso el trabuco no tiene energía cinética y su energía potencial es mínima. Eso indica que toda la energía potencial que tenía el lastre al iniciarse el movimiento ha sido transferida al proyectil. Eso nos permite calcular de manera simple el valor de la velocidad de salida del proyectil, y si suponemos un cier-

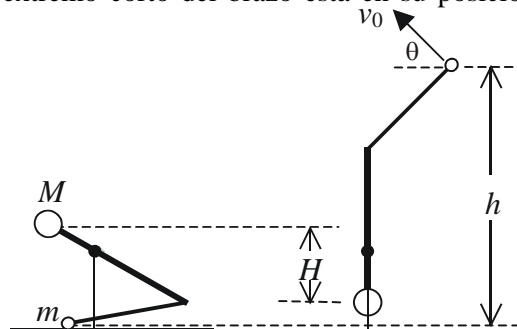


Fig. 4. Masas y cambios en su altura

to valor del ángulo de salida, podemos calcular su alcance.

La Figura 4 muestra al trabuco en dos configuraciones: la primera en reposo, justo antes de ser soltado, y la segunda después de haber girado, en el momento del disparo en el que también está en reposo, excepto por el proyectil, que se mueve con velocidad  $v_0$ .  $M$  representa la masa conjunta del brazo y el lastre, su posición es la del centro de masa de ambos. Como en el momento del inicio todo está en reposo, la energía presente es sólo la potencial de la masa  $M$ . Al final esta masa ha bajado la altura  $H$  y el cambio de energía que ha sufrido es:

$$E_1 = MgH \quad (2.1)$$

En el momento del disparo, según lo supuesto, el cambio en la energía que ha sufrido el proyectil es de un aumento de energías potencial y cinética:

$$E_2 = mgh + \frac{1}{2}mv_0^2, \quad (2.2)$$

por haberse elevado una altura  $h$  y adquirido una velocidad  $v_0$ .

Estas energías,  $E_1$  y  $E_2$ , son de igual magnitud, lo que una masa gana lo obtuvo de la otra:

$$MgH = mgh + \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (2.3)$$

De aquí despejamos el valor de  $v_0$ :

$$v_0 = \sqrt{2g \left( \frac{M}{m}H - h \right)}. \quad (2.4)$$

El proyectil, en su trayectoria parabólica tiene un alcance,  $x_m$ , dado por la expresión:

$$x_m = \frac{v_0^2}{g} \text{sen}2\theta, \quad (2.5)$$

en donde  $\theta$  es el ángulo que forma la velocidad de salida respecto a la horizontal. De la ecuación (4):

$$x_m = 2 \left( HM / m - h \right) \text{sen}2\theta. \quad (2.6)$$


---

### 4.3 El trabuco en la Luna, su tamaño y el alcance

De la ecuación (2.6) vemos que el alcance no depende del valor de  $g$ . Si el trabuco fuera disparado en la Luna su alcance sería el mismo que en la Tierra. Es la gravedad la que lo impulsa y también la que limita el alcance del proyectil. Definimos las razones de alturas y de masas:

$$q = h / H \quad (3.1)$$

$$\mu = M / m \quad (3.2)$$

Al sustituir esos valores en la ecuación del alcance, (2.6), ésta queda:

$$x_m = 2H(\mu - q)\text{sen}2\theta \quad (3.3)$$

El alcance máximo al mismo nivel del que se dispara el proyectil ocurre cuando  $\theta = 45^\circ$ , supondremos ese caso. Si se construyen trabucos de varios tamaños pero conservando las proporciones tanto de longitudes como de masas,  $\mu$  y  $q$  son constantes y la ecuación (3.3) nos muestra que el alcance es proporcional a  $H$ . Como  $H$  depende de la longitud del brazo, vemos que el alcance es proporcional al tamaño del trabuco. Son valores típicos de las razones:  $\mu = 100$  y  $q = 8$ . Como  $q$  es un orden de magnitud menor que  $\mu$ , aproximamos:

$$\mu - q \approx \mu, \quad (3.4)$$

así, por la ecuación (3.3), el alcance a  $45^\circ$ :

$$x_m \approx 2\mu H \quad (3.5)$$

Esta ecuación muestra que el alcance es aproximadamente proporcional a la razón de masas y al tamaño del artefacto, de aquí vemos por qué se llegaron a construir trabucos enormes, con grandes lastres y de brazos de unos 10 metros de longitud, en los que la  $H$  mide unos 2 metros, por lo que con una  $\mu = 80$ , por la ecuación (3.5) el alcance es aproximadamente de 320 metros [Vemming-Hawen, 1998].

---



## 4.4 Máxima transferencia de energía y ecuaciones de movimiento

Lo anterior está basado en la suposición de que toda la energía inicial es transferida al proyectil, cosa que parece una idealización simplificadora. Sin embargo sí es posible escoger valores de longitudes, masas y condiciones iniciales que llevan a esa transferencia. Experimentalmente se logra con un modelo de trábucos haciendo variaciones de los valores por ensayo y error. Pero para comprender mejor el comportamiento del trábucos es necesario plantear ecuaciones de movimiento e intentar encontrar su solución.

Una manera de encontrar las ecuaciones que describen el movimiento de un sistema es la que usa las ecuaciones de Lagrange [Fowler,1992], este método de trabajo está fundamentado en la conservación de la energía. Se define una función, llamada la lagrangiana del sistema, que depende de las energías potencial y cinética

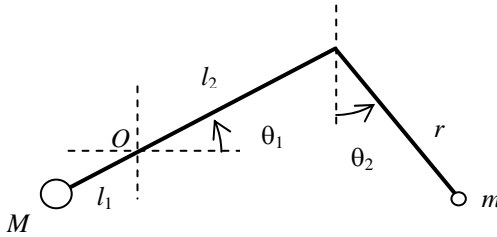


Fig 5. Trábucos libre

según ciertas coordenadas, que en nuestro caso son ángulos. La lagrangiana forma parte de las ecuaciones de Lagrange y a partir de ellas se encuentran las ecuaciones de movimiento buscadas.

Se definió la función lagrangiana de un sistema simple como el ilustrado en la Figura 5, llamado trábucos libre pues se considera que no hay restricciones a los valores de los ángulos que dan las posiciones del brazo y la cuerda. Los movimientos del brazo con lastre y la cuerda de honda con su masa en el extremo son interdependientes, es decir el comportamiento de uno afecta al otro. Es así que las dos ecuaciones obtenidas, (4.1) y (4.2), están acopladas, es decir las variables aparecen en ambas y es necesaria su solución simultánea para conocer el movimiento del sistema.

$$-\ddot{\theta}_1 m l_2 r \sin(\theta_1 - \theta_2) + \ddot{\theta}_2 m r^2 = \dot{\theta}_1^2 m l_2 r \cos(\theta_1 - \theta_2) - m g r \sin \theta_2 \quad (4.1)$$

$$\ddot{\theta}_1 (I + m l_2^2) - \ddot{\theta}_2 m l_2 r \sin(\theta_1 - \theta_2) = -\dot{\theta}_2^2 m l_2 r \cos(\theta_1 - \theta_2) + g (M l_1 - m l_2) \cos \theta_1 \quad (4.2)$$

En ellas  $M$  es la masa conjunta de brazo y lastre,  $m$  es la masa del proyectil,  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $l_1$  es la distancia del eje al centro de masa de brazo con lastre,  $l_2$  es la distancia del eje al gancho,  $r$  es la longitud de la cuerda,  $I$  es el momento de inercia del brazo con lastre,  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son los ángulos que determinan la posición del sistema (ver Figura 5),  $\dot{\theta}_1$  y  $\dot{\theta}_2$  son las velocidades angulares y  $\ddot{\theta}_1$  y  $\ddot{\theta}_2$  son las aceleraciones angulares.

## 4.5 Solución numérica

Estas ecuaciones no tienen una solución sencilla, pero al asignar valores numéricos a las variables es posible tener una descripción muy cercana del movimiento con algún algoritmo de aproximación numérica. Si se usa el método de Euler sólo se trabaja con ecuaciones de primer grado [Mathews, 1992]. La Figura 6 lo ilustra en el caso de una variable, un ángulo cuya segunda derivada o aceleración angular es función de la posición y la velocidad angulares. La velocidad angular se calcula para incrementos de tiempo pequeños como si se tratara de movimiento con aceleración constante, la posición se calcula como si el movimiento fuera de velocidad constante, también en un intervalo pequeño. Los nuevos valores de posición y velocidad son usados para un nuevo cálculo de aceleración repitiendo el ciclo.

En el caso de las ecuaciones (4.1) y (4.2) en el que hay parejas de variables, se trabaja de manera semejante con un ciclo de cálculo igual, pero con un sistema de dos ecuaciones lineales simultáneas, una para cada ángulo.

El instrumento idóneo para trabajar es la computadora. En un programa simulador de trabuco no hay impedimento para recorrer el ciclo de cálculo un número enorme de veces por haber escogido un valor pequeño para los intervalos de tiempo y así generar datos con precisión aceptable.

La Figura 7 es un diagrama tomado de pantalla de computadora de la simulación de las posiciones sucesivas en un caso dado. En el simulador se hacen variaciones de los valores de masas, longitudes y ángulos iniciales y se

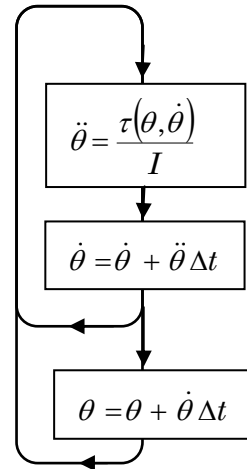


Fig 6. Ciclo de cálculo

observan los resultados. Se puede trabajar como si se tratara de un artefacto real con el que se experimenta y por ensayo y error se encuentran valores que cumplen con la condición de máxima transferencia de energía.

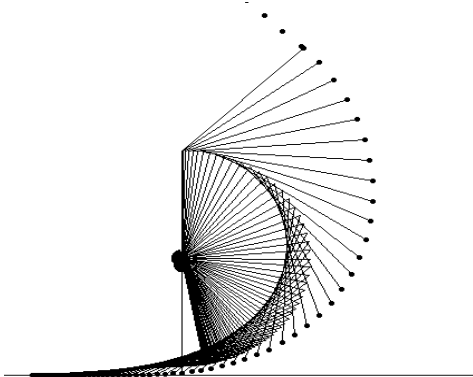


Fig. 7 Diagrama de posiciones sucesivas cada 0.01 seg. generado por el programa de simulación

Los valores hallados son de casos particulares, por ejemplo, dados valores de longitudes y de una masa es posible hallar el valor de la otra masa, pero no se tiene aun una manera de encontrar con seguridad los valores en un caso generalizado. Hace falta mayor análisis para encontrar las relaciones entre las variables al inicio que tengan como consecuencia segura la

transferencia total de energía.

## 4.6 Trabuco para lanzar pelotas

Con la ayuda del programa simulador se diseñó un trabuco hecho de madera (Figura 8) con un brazo  $l_1$  de 0.1 m y un  $l_2$  de 1.2 m capaz de lanzar pelotas de beisbol. En un caso la bola lanzada es de 159 g y la masa del lastre es de 29 kg. El valor de esta masa y el de la longitud de la cuerda, 1.61 m, fueron determinados con el programa de cómputo para lograr la máxima transferencia de energía. La velocidad de salida es de 21 m/s y el alcance de 32 m. Este alcance es menor del calculado con la ecuación (2.5) debido a la fricción del aire sobre la bola.



Fig 8. Trabuco lanzador de pelotas

Pero lo notable es que sí ocurre una transferencia casi total de energía, como se observa en el comportamiento del brazo posteriormente al disparo: el brazo queda casi en reposo. La transferencia no es total pues la velocidad de sa-

lida es menor a la calculada debido a la fricción del aire sobre la bola en la honda.

Al registrar en video al trabuco en acción es posible comparar su movimiento con el simulado. En las Figuras 9 y 10 se comparan las posiciones medidas, indicadas con marcas circulares y las posiciones calculadas mostradas con una línea continua. El desacuerdo en los valores grandes del tiempo es debido a la fricción del aire sobre la bola en la honda que la retrasa respecto a los valores calculados.

Otro efecto notable es el que se observa al comparar el movimiento cuando el brazo es liberado sin la pelota. En ese caso el brazo oscila con gran amplitud, su gran masa, de casi 30 kg, hace que el soporte, de unos 16 kg, llegue a saltar separándose del suelo a menos que sea restringido con cuerdas. En cambio, al moverse con la pelota, el movimiento del brazo es suave al inicio, muy rápido en la parte media de su trayectoria y de nuevo pierde velocidad suavemente hasta quedar detenido en la posición vertical y todo sin jalones ni saltos. Eso se observa como la pendiente de la curva en la Figura 9. Es de llamar la atención cómo la pelota de 160 gramos atada en la cuerda es capaz de gobernar el movimiento del brazo que tiene una masa 180 veces mayor.

Claro que es una interacción mutua entre masas, el peso de la grande es lo que impulsa a la pequeña, la inercia y movimiento de ésta influyen mucho sobre el movimiento de la primera. Este movimiento suave, que también se presenta en un trabuco de guerra aunque no transfiera toda la energía, era una de las ventajas del trabuco sobre las catapultas, pues en estas a cada tiro el golpe de su brazo con un tope las movía, haciendo necesario reorientarlas para no perder la puntería. Por el contrario, con el trabuco que no cambiaba su orientación, era posible hacer incidir proyectiles en sucesión rápida sobre el mismo sitio.

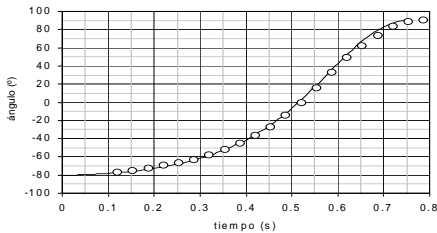


Fig. 9. Gráfica de la posición angular del brazo ( $\theta_1$ ) respecto del tiempo. La incertidumbre en el ángulo es de  $\pm 1^\circ$ .

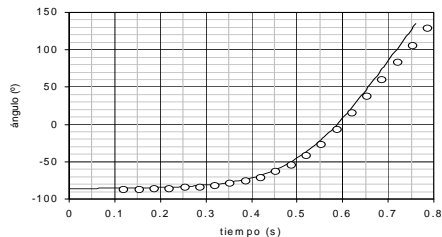


Fig. 10. Gráfica de posición angular de la cuerda ( $\theta_2$ ) respecto del tiempo. La incertidumbre en el ángulo es de  $\pm 1^\circ$ .

## 4.7 Trabucos, grandes, chicos, pesados y ligeros

La publicación de un artículo [Chevedden, 1995] disparó la construcción de trabucos por aficionados y escolares, principalmente en los Estados Unidos aunque los hay también en Europa y Australia (Gray Company). La mayoría de estos constructores trabajan sin usar la mecánica teórica como ayuda, solamente por ensayo y error, en esto se parecen a los constructores medievales. Se han hecho trabucos medianos para lanzar calabazas, grandes para lanzar personas al agua o automóviles compactos a su destrucción, y pequeños que lanzan trozos de queso a lo largo del salón de banquetes de un club de medievalistas.

La transferencia total de energía es sólo de interés para algunos. Esto es porque un trabuco que la logra no tiene el alcance máximo que él mismo puede conseguir y lo que interesa a la mayoría es llegar más lejos.

Es posible hacer una analogía de esto con una colisión elástica de partículas en una dimensión. Si una partícula originalmente en reposo es golpeada por otra igual, después del choque se mueve con una rapidez igual a la que tenía la partícula incidente y ésta última queda en reposo. Se ha transferido toda la energía cinética. En otro caso, si la misma partícula en reposo es ahora golpeada por otra de masa más grande que ella, la rapidez con la que sale es mayor que la de la partícula incidente y ésta no se detiene. La energía adquirida es mayor que en el primer caso pero es sólo una fracción de la energía de la partícula incidente.

En el trabuco también hay una interacción entre masas y se dan casos parecidos a los de las colisiones. Una razón de masas grande causa una gran velocidad de salida del proyectil aunque la masa grande no transfiera toda su energía.

La transferencia total de energía tampoco le hubiera interesado al llamado *Señor de los Tormentos* [Vemming-Hansen, 1998], el ingeniero medieval que dirigía la construcción y operación de las máquinas de guerra, y también las de tortura. Él deseaba causar daño a las fortificaciones enemigas sitiadas y para ello su trabuco debía lanzar proyectiles masivos desde una gran distancia, fuera del alcance de lanzas y flechas. Su trabuco era grande, tosco y pesado.

El trabuco que transfiere toda la energía al proyectil y al mismo tiempo, con la masa de lastre disponible, lo lanza lo más lejos posible, no lo lanza a gran distancia, y él mismo, aunque tenga un lastre grande, tiene un brazo ligero. Comparado con el de guerra se ve como gacela junto a un elefante. La función determina la forma. Este trabuco ligero es inútil como arma y poco atractivo como lanzador de pelotas, sólo llama la atención del estudioso que sabe por qué el artefacto se ha quedado en perfecto reposo después de arrojar una pelota.

---

## **Referencias**

- Chevveden, P. E. *et al.* (1995). "The trebuchet". *Scientific American* (**273**), (1), 58-63.
- Díaz del Castillo, B. (1960). *Historia verdadera de la conquista de la Nueva España*. México: Porrúa.
- Fowles, G. R. (1992). *Analytical Mechanics*. Estados Unidos: Holt Rinehart and Winston.
- Gray Company. Sitio Web: [www.iinet.net.au/~rmine/middel/html](http://www.iinet.net.au/~rmine/middel/html)
- Mathews, J. H. (1992). *Numerical Methods for Mathematics, Science and Engineering*. Estados Unidos: Prentice Hall.
- Real Academia Española. (1941). *Diccionario de la Lengua Española*.
- Vemming Hansen, P. (1998). *Middelalderens mekaniske apparater til krisbrug*. Dinamarca: Middelaldercentret.
-

# Transformaciones geométricas y máquinas articuladas

---

**Francisco Struck Chávez**  
Facultad de Ciencias, UNAM  
[fsc@hp.fciencias.unam.mx](mailto:fsc@hp.fciencias.unam.mx)

## 5.1 Introducción

Una gran cantidad de conceptos matemáticos conocidos en la antigüedad han sido reinterpretados haciendo uso del concepto de función y de las estructuras algebraicas.

Un ejemplo muy ilustrativo y bonito se puede encontrar en cómo la geometría euclidiana clásica y la geometría moderna se estudian usando los conceptos mencionados.

En el programa de Erlagen, Félix Klein define geometría de la siguiente forma:

Una geometría es el estudio de aquellas propiedades de un conjunto  $S$  que permanecen invariantes cuando los elementos de  $S$  se someten a las transformaciones de un cierto grupo de transformaciones,  $\Gamma$ .

Así toda la teoría de congruencia se estudia a través de las isometrías, la teoría de semejanza se reinterpreta como composiciones de isometrías y homotecias. Las transformaciones de Möebius en el plano complejo son resultado de composiciones de inversiones en circunferencias (considerando a las reflexiones en rectas como un caso particular), y así la geometría compleja es el estudio del grupo transformaciones generado por las inversiones.

Mucho tiempo antes de Klein, y aún antes de haberse establecido claramente el concepto de función ya se habían diseñado máquinas que efectuaban las transformaciones geométricas elementales. Un ejemplo de esto son los pantógrafos.

Los pantógrafos son mecanismos muy sencillos y muy conocidos para ‘copiar figuras a escala’. Bastan unas cuantas varillas y unos tornillos para hacer un pantógrafo.

Aunque no sean tan conocidos, se pueden construir mecanismos tan sencillos como los pantógrafos para realizar otras transformaciones geométricas. En este artículo se muestra la forma de construir mecanismos articulados para realizar diversas transformaciones geométricas.

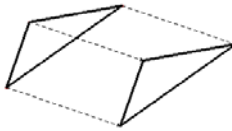
Usando únicamente varillas, articulaciones y rieles se proponen máquinas para trasladar, reflejar y rotar figuras. También analizaremos algunos mecanismos para hacer inversiones en una circunferencia.

## 5.2 Las isometrías

Una isometría es una transformación que preserva distancias. Las isometrías forman un grupo. Si a una figura se le aplica una isometría se obtiene una figura congruente. En el plano existen solamente cuatro tipos de isometrías, tres de las cuales son estudiadas desde el bachillerato: reflexión, traslación, y rotación (Fig. 1).



Reflexión



Traslación



Rotación

Fig. 1

La cuarta, que se conoce con el nombre de reflexión deslizada o simplemente deslizamiento, es la composición de una reflexión con una traslación en la



dirección de la línea de reflexión (Fig. 2).

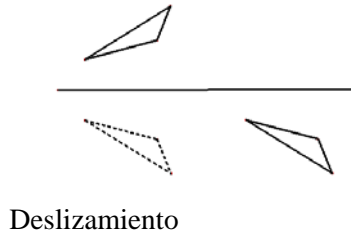


Fig. 2

Agregando esta última se puede demostrar que la composición de dos isometrías es una de estas cuatro y también que dadas dos figuras congruentes, existe una y sólo una isometría que lleva una en la otra.

Otra propiedad interesante de las isometrías es que todas ellas pueden ser generadas a partir de las reflexiones.

- 1) La composición de dos reflexiones en líneas paralelas produce una traslación en dirección ortogonal a las paralelas y con una longitud de traslación del doble de la distancia entre las paralelas (Fig. 3).

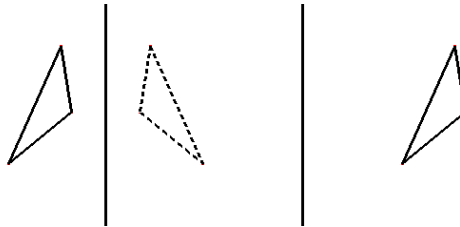


Fig. 3

- 2) La composición de dos reflexiones en líneas concurrentes en un punto  $O$ , produce una rotación con centro en  $O$  y de un ángulo igual al doble del ángulo que forman las líneas (Fig. 4).

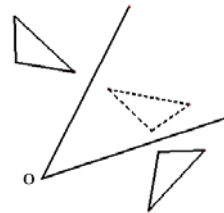


Fig.4

3) Sea  $l$  una línea y  $m$  y  $n$  dos paralelas, ortogonales a  $l$ , la composición de reflexiones en  $l$ ,  $m$  y  $n$  produce un deslizamiento (Fig. 5).

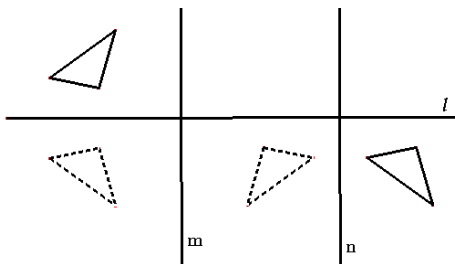


Fig. 5

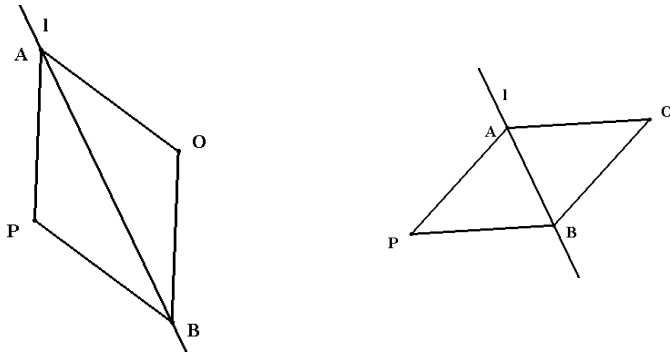
Los inversos también son ciertos.

- 1) Toda traslación se puede expresar como la composición de dos reflexiones en líneas paralelas.
- 2) Toda rotación se puede expresar como composición de dos reflexiones en líneas concurrentes.
- 3) Todo deslizamiento se puede expresar como la composición de tres reflexiones en las líneas adecuadas.

Las demostraciones de todo lo que se ha afirmado y una explicación mucho más amplia se pueden encontrar en Martín [1982].

Entrando ya al tema de las máquinas articuladas, lo anteriormente expuesto nos muestra que basta con diseñar una máquina para hacer reflexiones para poder obtener cualquier isometría, usándola a lo más tres veces. En otras palabras, si tenemos una figura, podemos construir otra congruente a ella en cualquier lugar y en cualquier posición. Valiéndonos sólo de una máquina que refleje.

Ahora bien, construir una máquina para reflejar es sumamente sencillo. Fijemos un riel  $l$  en el que corren libremente los puntos A y B y ensamblamos cuatro varillas del mismo tamaño con articulaciones en A, B, O y P como se muestra en la Figura 6. Basta poner un puntero en O y un lápiz en P para tener la máquina.



Inversor

Fig. 6

Al mover O se mueve P de modo que la trayectoria de P es justamente la reflexión de la trayectoria de O respecto a  $l$ . La razón por la que esto ocurre es que los triángulos ABO y ABP son congruentes independientemente de la posición de O.

Para hacer una máquina que traslade (Fig 7) o una que rote (Fig 8) basta hacer dos máquinas que reflejen y ‘pegarlas’ adecuadamente.

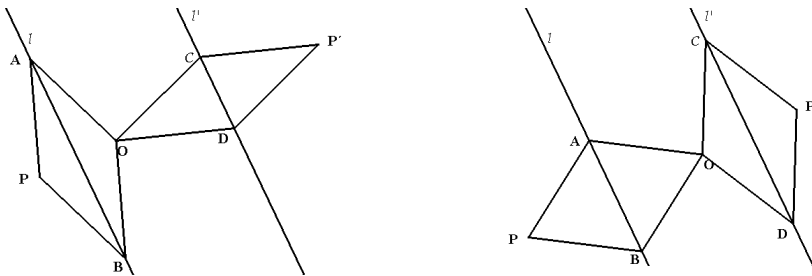


Fig. 7

Para una máquina que haga deslizamientos se requeriría pegar tres reflectores.

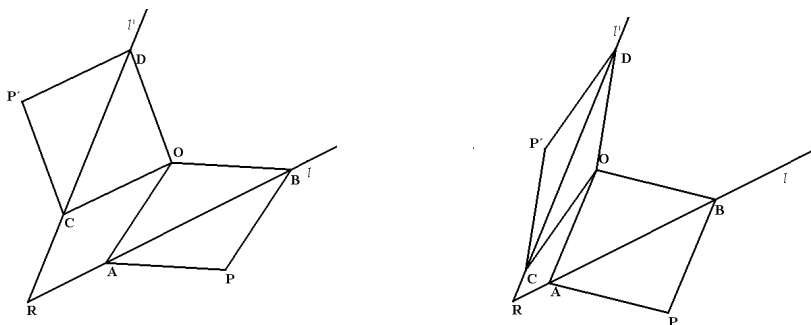


Fig. 8

### Un espacio para reflexionar.

- 1) Recorta dos triángulos congruentes y déjalos caer sobre una hoja. ¿Podrías determinar la isometría que lleva uno en el otro? Recuerda que debe poderse hacer con una sola isometría.
- 2) ¿Qué resulta de componer dos rotaciones con distintos centros? ¿Será siempre una rotación? En este caso encuentra el centro y el ángulo?
- 3) ¿Podrías simular las máquinas descritas utilizando paquetes de simulación tales como Cabri o Sketchpad?
- 4) ¿Qué sucede si en la máquina descrita para reflejar pones las varillas de un lado más largas que las del otro? ¿Cómo es la transformación que obtienes?

## 5.3 Homotecias

Una homotecia es un agrandamiento (o achicamiento) de las figuras. Al aplicarle una homotecia a una figura se obtiene una figura semejante a ella, sin embargo, no cualesquiera dos figuras semejantes son homotéticas. Para que lo sean, además de ser semejantes deben estar en perspectiva desde un punto (Fig. 9).

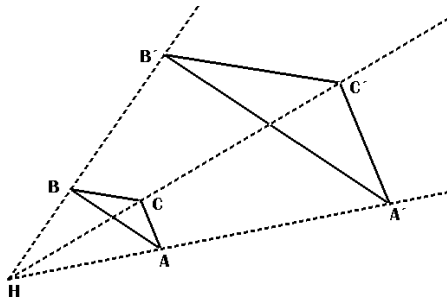


Fig. 9

Los triángulos de la figura anterior son homotéticos, nótese que  $HA/HA' = HB/HB' = HC/HC'$  y por lo tanto también  $AB/A'B' = BC/B'C' = CA/C'A'$ . Las homotecias cambian las distancias, sin embargo preservan los ángulos y las direcciones, es decir la imagen de un segmento es un segmento paralelo al original pero de distinto tamaño.

El punto desde el cual las figuras están en perspectiva se llama centro de la homotecia y la razón de agrandamiento o achicamiento se llama razón de la homotecia. Esta última puede ser positiva o negativa.

Dadas dos figuras semejantes (en cualquier posición) se puede llevar una a la otra componiendo una homotecia con una isometría.

Para ampliar los conocimientos sobre las homotecias se puede consultar la obra de Martin [1982] citado más arriba o para un nivel más elemental el libro de Shively [1972].

Las máquinas para hacer homotecias se llaman pantógrafos. Son quizá las más conocidas y se pueden adquirir en las papelerías.

Constan de seis varillas articuladas de la siguiente forma (Fig. 10).

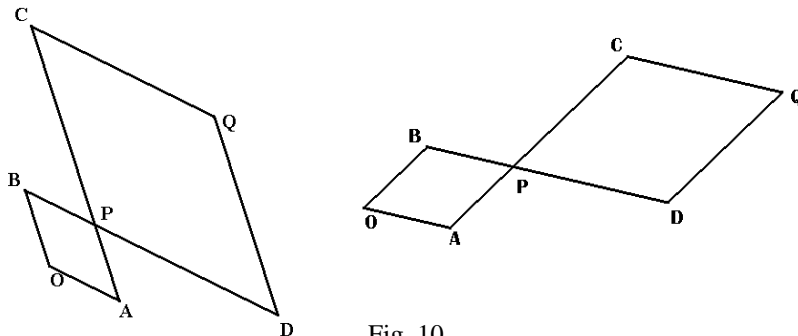


Fig. 10

Los puntos A, B, C, D, O, P, y Q son articulados. De A a C es una sola varilla lo mismo que de B a D. Las longitudes de OA, OB, AP y BP deben ser iguales lo mismo que las de PC, PD, CQ, y DQ.

El largo de las varillas puede varias dependiendo de la razón de homotecia (Fig. 11).

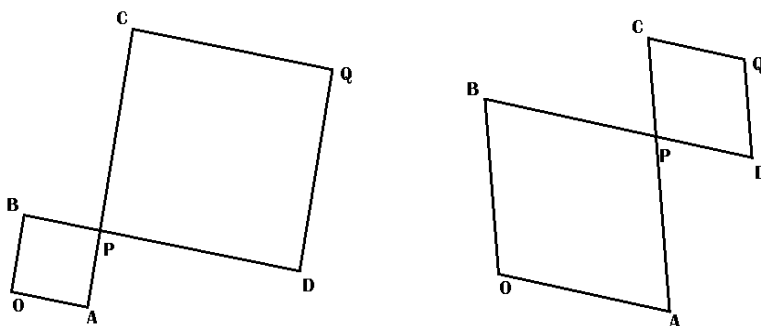


Fig. 11

Para razones positivas se usa el punto O como centro de homotecia. Este punto queda fijo.

Si la razón de homotecia es mayor que 1, se pone el puntero en P y el lápiz en Q. La razón de homotecia es en este caso  $OQ/OP$ , que es lo mismo que  $AC/AP$ . Esta última razón nos da las medidas con las que hay que construir la máquina.

Si la razón es menor que 1, se pone el puntero en Q y el lápiz en P y la razón es la inversa del caso anterior.

Para razones negativas se usa P como centro de homotecia. El puntero y el lápiz se ponen en O y Q y la razón queda determinada por  $PO/PQ = PA/PC$  usando distancias dirigidas para obtener el signo. Si  $OP = PQ$  la homotecia tiene razón  $-1$  y coincide con una rotación de  $180^\circ$  con centro en P.

### Otro espacio para reflexionar.

- 1) ¿La composición de dos homotecias es una homotecia? Si sí ¿en dónde está su centro y cuál es su razón?
- 2) ¿Qué transformación obtienes tomando en el pantógrafo O como punto fijo y colocando el puntero en A y el lápiz en D o en C? Prueba distintas opciones para colocar el punto fijo, el puntero y el lápiz. ¿Cómo se deforman tus figuras?

- 3) Haz un pantógrafo virtual usando un programa de simulación como Cabri o Sketchpad.
- 4) ¿Podrías diseñar una máquina que alargue las figuras en una dirección? (Es decir, que transforme circunferencias en elipses)

## 5.4 Inversión en circunferencias

Sea  $C$  una circunferencia con centro en  $O$  y radio  $r$ . Dado un punto  $P$ , distinto de  $O$ , decimos que  $P'$  es el inverso de  $P$  respecto a la circunferencia  $C$  si

- (i)  $O$ ,  $P$  y  $P'$  son colineales y
- (ii)  $OP \times OP' = r^2$

Analizaremos dos formas de encontrar, usando regla y compás, el inverso de un punto, después de lo cual estaremos en condiciones para diseñar máquinas que inviertan en círculos.

Sea  $P$  un punto dentro del círculo. Trazamos el rayo  $OP$  y una ortogonal  $m$  a éste en  $P$ . Sea  $A$  uno de los puntos de intersección de  $m$  con  $C$ . Trazamos el segmento  $OA$  y una ortogonal a él por  $A$ , esta línea es tangente a  $C$  (Fig. 12).  $P'$  es el punto de intersección de esta tangente con la semirrecta  $OP$ . Para demostrar que  $OP \times OP' = r^2$  basta ver que los triángulos  $OPA$  y  $OAP'$  son semejantes y que  $OA$  es un radio.

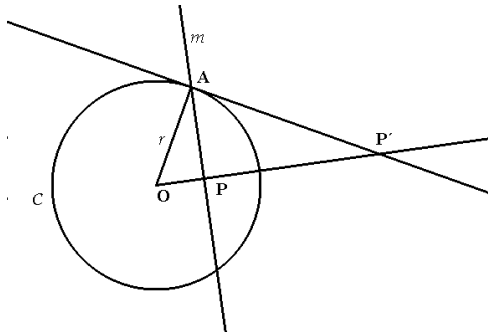


Fig. 12

Si  $P$  está fuera del círculo se traza el segmento  $OP$ , se encuentra el punto medio del segmento y usándolo como centro se traza una circunferencia que pase por  $O$  y  $P$ . Sean  $A$  y  $A'$  los puntos de intersección de esta circunferencia con  $C$  (Fig. 13). Se unen  $A$  y  $A'$  con un segmento y donde éste interseque a

OP tendremos  $P'$ . Para demostrar que efectivamente  $P'$  es el inverso de  $P$ , basta trazar  $OA$  y  $AP'$  y usar las mismas semejanzas que en el caso anterior.

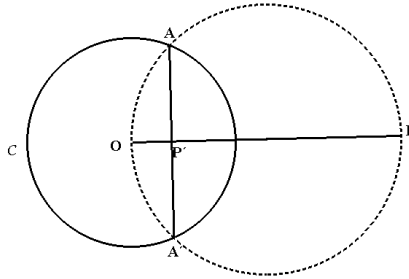


Fig. 13

Otra forma de construir el inverso de un punto es la siguiente: Se traza la semirrecta  $OP$  y una ortogonal a ella por  $O$  sean  $N$  y  $S$  los puntos en los que esta línea interseca a  $C$  (Fig. 14). Trazamos la recta  $NP$  y llamamos  $A$  a su intersección con  $C$ , unimos  $S$  con  $A$ . El punto de intersección de  $SA$  con  $OP$  es  $P'$ . Esta construcción es válida independientemente de si  $P$  está dentro o fuera del círculo. La demostración se hace otra vez por semejanza usando los triángulos  $ONP$  y  $OP'S$ .

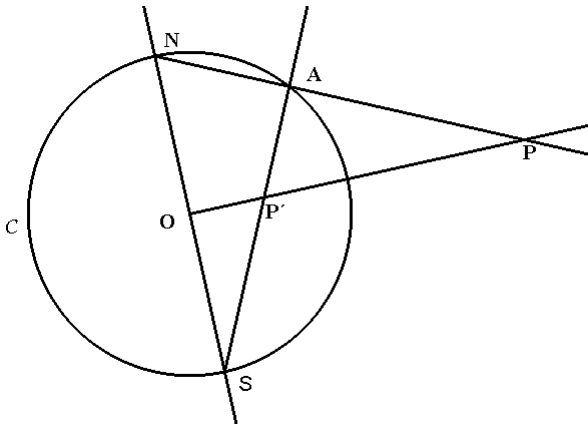


Fig. 14



En cualquier libro de geometría moderna se puede consultar sobre la inversión y sus propiedades. Por ejemplo en Shively [1972] citado previamente o en Eves [1969, tomo I].

Ahora diseñaremos dos inversores basándonos en las construcciones anteriores.

Colocamos el punto  $O$  (el centro de inversión), en el extremo de un riel  $r$ , de modo que éste se pueda mover como una manecilla de reloj con  $O$  fijo. Ponemos dos varillas cuya longitud es el radio de la circunferencia de inversión, como si fueran otras dos manecillas con  $O$  fijo (Fig. 15).

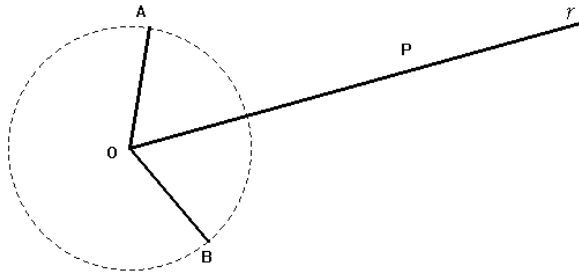
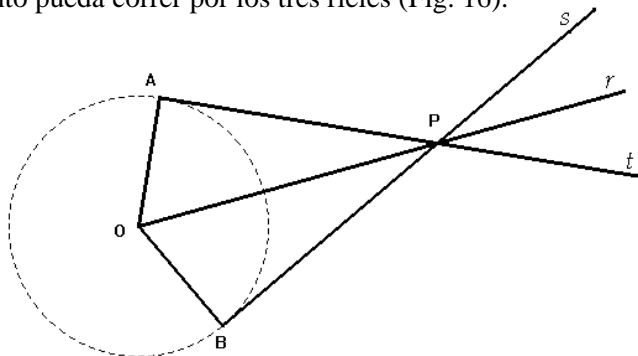


Fig. 15

Las varillas y el riel se deben poder mover independientemente.

En los extremos ( $A$  y  $B$ ) de las varillas ensamblamos dos rieles ortogonales a ellas,  $s$  y  $t$ . Colocamos una articulación uniendo los tres rieles (en el punto  $P$ ) de modo que este punto pueda correr por los tres rieles (Fig. 16).

Fig. 16



Un cuarto riel  $u$ , se hace pasar por A y B. El punto  $P'$  se encuentra en la intersección de los rieles  $r$  y  $u$  (Fig. 17).

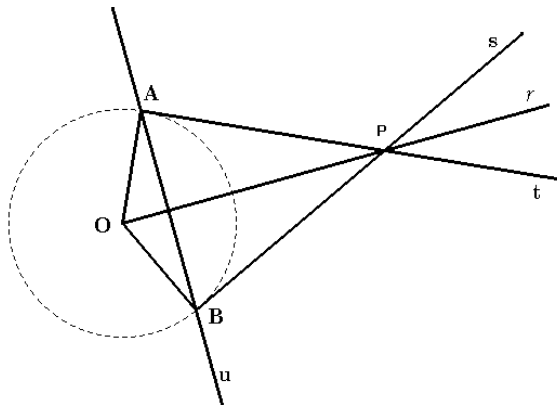


Fig. 17

Si el punto que queremos invertir está fuera de la circunferencia de inversión se coloca el puntero en P y el lápiz en  $P'$ , si el punto está adentro se cambian lápiz y puntero.

Otra forma de construir un inversor es la siguiente: Se ensamblan un riel  $r$  y una varilla formando un ángulo recto. El punto de intersección entre ellas será el centro de inversión (Fig. 18). Sobre la varilla a la misma distancia de O en ambas direcciones se sitúan los puntos N y S. Esta distancia es el radio de la circunferencia de inversión C.

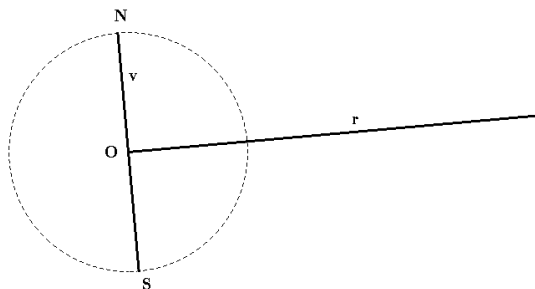


Fig. 18

En N se articula otro riel  $s$  que también se articula con el primero en P. Esta articulación debe correr sobre los dos rieles. Un tercer riel  $t$  que se mueve siempre ortogonal al riel  $s$  se articula al punto S (Fig. 19).

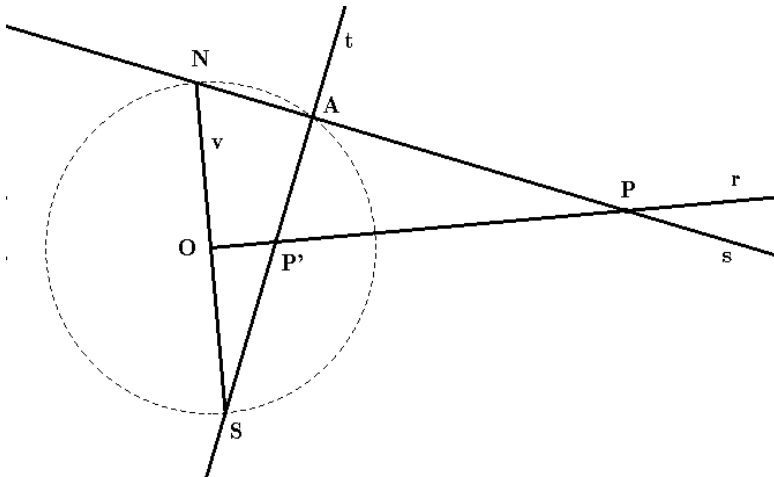


Fig. 19

El punto A siempre está sobre la circunferencia de inversión, ya que el triángulo NAS es rectángulo. En la intersección de los rieles  $r$  y  $t$  se encuentra el punto P' inverso de P respecto a la circunferencia C.

La fabricación de estos inversores no es nada fácil pues cada articulación debe ser diseñada con mucho cuidado y hecha con más cuidado aún, porque si no son muy precisas la máquina se atora. Un tercer inversor, el más conocido y probablemente el más antiguo de ellos, fue diseñado por A. Peaucellier (1864).

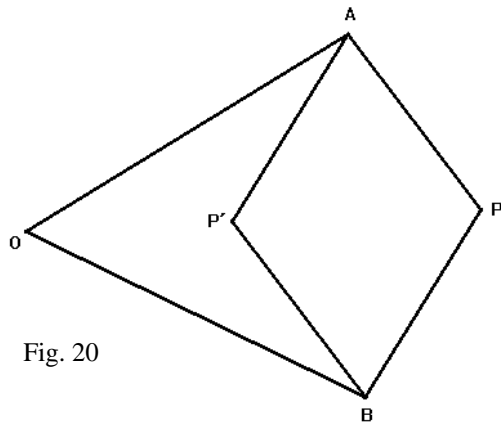


Fig. 20

La celda de Peaucellier se construye de la siguiente forma: A un rombo PAP'B, hecho de varillas articuladas en los cuatro vértices, se le ensamblan otras dos varillas OA y OB. Fijando el punto O como centro de inversión, los puntos P y P' se mueven como inversos respecto a una circunferencia (Fig. 20).

Esta máquina es mucho más sencilla de construir que los otros inversores, pero no es tan claro ver que realmente invierte, pues ni siquiera es obvio cuál es la circunferencia de inversión. Hagamos pues la demostración.

La congruencia de los triángulos OBP con OAP y OBP' con OAP' nos garantiza que O, P y P' son colineales.

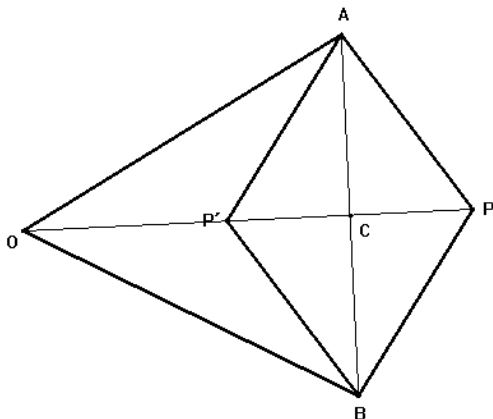


Fig. 21

Agregando líneas auxiliares y llamando C al centro del rombo (Fig. 21) podemos ver que:

$$\begin{aligned} OP \times OP' &= (OC - PC)(OC + PC) = OC^2 - PC^2 \\ &= OC^2 + PC^2 + CA^2 - CA^2 = (OC^2 + CA^2) - (PC^2 + CA^2) \\ &= OA^2 - PA^2 \end{aligned}$$

Esta última cantidad no depende de la posición de P, ya que PA y OA son las longitudes de las varillas.

Usando la propiedad de que el inverso de una circunferencia que pasa por el centro de inversión es una recta, Peaucellier logró uno de los primeros diseños para trazar una recta sin usar regla.

Agregando una varilla más, como se muestra en la siguiente Figura 22, y fijando D de forma que  $OD = DP'$  se fuerza a que  $P'$  transite sobre una circunferencia que pasa por O, y a que P dibuje una recta.

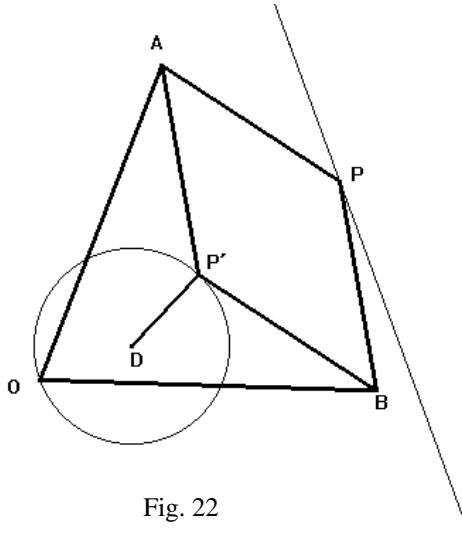


Fig. 22

## Una aclaración necesaria

En forma estricta una máquina articulada se debe hacer usando únicamente varillas y articulaciones, en todas las máquinas que se proponen en este artículo a excepción de los pantógrafos y de la celda de Peaucellier se usan rieles lo cual contraviene la definición de máquina articulada. Sin embargo cada uno de los rieles usados se puede sustituir por una celda de Peaucellier, ya que esta máquina traza rectas usando solamente varillas y articulaciones. Cambiar los rieles por celdas puede hacer que las máquinas se hagan muy difíciles de construir. Tanta varilla y articulación puede dificultar su movimiento, sin embargo teóricamente resulta muy interesante saber que las transformaciones elementales se pueden realizar con mecanismos articulados. Cabe aclarar que si pensamos en máquinas virtuales hechas con Cabri o Sketchpad entonces es posible construirlas dado que las varillas virtuales no chocan y las articulaciones virtuales no tienen fricción.

## Referencias

Martín, G. 1982. *Transformation geometry : An introduction to symmetry*. New York: Springer-Verlag.

Shively, L. S. 1972. *Introducción a la geometría moderna*. México: Ed. CECSA.

Eves, H. 1969. *El estudio de las geometrías*. México: UTEHA.

---

# Pruebas geométricas y máquinas matemáticas: un estudio exploratorio<sup>1</sup>

---

**Maria G. Bartolini Bussi**

Universidad de Modena, Italia

[Bartolini@unimo.it](mailto:Bartolini@unimo.it)

**Resumen.** Se reportan los primeros resultados de un estudio exploratorio sobre la prueba en geometría en el bachillerato (grado 11<sup>2</sup>). El experimento de enseñanza llevado a cabo es parte de un proyecto de investigación en el nivel bachillerato, en el que se introdujeron el razonamiento geométrico y una perspectiva histórica para encuadrar actividades propias de los estudiantes realizadas con una clase especial de artefactos culturales, llamados *máquinas matemáticas*. Aquí se describirá e interpretará un segmento pequeño de un experimento de enseñanza que concierne al cambio del nivel de experiencia mental al nivel de demostración como es definido por Balacheff en su estudio del proceso de prueba. Nuestra investigación no está enmarcada por una extensión del concepto de abstracción reflexiva de Piaget (como en Dubinsky) sino que ha sido desarrollada por medio de la apropiación de conceptos elaborada por la teoría de la actividad (p.e. Vygotsky, Davydov, Leontiev), en donde el papel del maestro, así como la función de la acción orientada por el objeto tienen un significado diferente al del enfoque piagetiano.

## 6.1 Introducción: Presentación breve del proyecto de investigación

El experimento de enseñanza de donde provienen los datos, buscó introducir en la demostración a estudiantes del *grado 11*, en un escenario geométrico. Fue parte de un proyecto de investigación más amplio para el bachillerato, el cual se desarrolló cooperativamente entre maestros del bachillerato e investi-

---

<sup>1</sup> Bartolini, M. (1993). "Geometrical proofs and mathematical machines: An exploratory study". In Ichici Hirabayashi, Nobuhiko Nohda, Keiichi Shigematsu and Fou-Lai Lin (Eds.), *Proceedings of PME XVII*. Tsukuba, Ibaraki, Japan: University of Tsukuba. Traducción al español de Verónica Hoyos, UPN

<sup>2</sup> Corresponde al segundo año del bachillerato en México.

gadores universitarios. Los motivos directores del proyecto pueden ser descritos por las siguientes palabras clave: *historia - geometría - máquinas* (Bartolini, B. & Pergola, por aparecer). Discutiremos brevemente únicamente el tercero, para enmarcar la descripción de una parte crucial del experimento de enseñanza y la interpretación del papel del maestro y la función de la acción orientada por el objeto.

## 6.2 El campo semántico de las máquinas matemáticas

Las máquinas matemáticas caen en la intersección entre el campo de la experiencia mecánica y el campo de la experiencia geométrica. Las máquinas están basadas sobre principios físicos así como también sobre principios geométricos: los primeros se refieren a los materiales, fuentes de energía, la distribución y la regulación de fuerzas actuantes, etc. Mientras que los últimos se refieren al movimiento relativo de cada parte, a la trayectoria de cada punto en movimiento, etc.

La separación de los principios anteriores data del principio de la ciencia moderna (p.e. la discusión de *obstáculos materiales* en *Dos nuevas ciencias* de Galileo), aún cuando sólo fue hasta principios del siglo XIX (1830) cuando Ampère propuso explícitamente la creación de la *cinemática* como *la ciencia del movimiento, independiente de las causas mismas del movimiento*. En las décadas siguientes, la llamada *geometría cinemática* fue desarrollada para excluir de la consideración los procesos de tiempo (p.e. velocidad, aceleración). La mayor parte de las máquinas construidas en nuestro proyecto pueden ser estudiadas dentro de la geometría cinemática: su acción es la de forzar a un punto o una línea o a cualquier figura geométrica, soportada por una adecuada estructura material que la hace visible, a moverse en el espacio o a ser transformada de acuerdo a una ley matemática abstracta (NRSDM, 1992).

Un ejemplo de tales máquinas es el pantógrafo de *Sylvester*: un mecanismo (*articulación*<sup>3</sup>) que consiste de ocho barras articuladas, fijas a un plano de madera por medio de un pivote en el punto O. No importa cual sea la configuración de la articulación, los puntos P' corresponden a los puntos P bajo una rotación alrededor de O del mismo ángulo  $\theta$  (*el invariante de la articulación*). Sylvester mismo (1875) describió este pantógrafo (sic) como una ge-

---

<sup>3</sup> En adelante *articulación* significará el mecanismo compuesto de barras unidas por medio de articulaciones (nota del traductor).



neralización del pantógrafo de Scheiner (1631), ya usado por los pintores del Renacimiento como una herramienta para el dibujo en perspectiva. Posteriormente, los pantógrafos fueron considerados como elementos de la *teoría de las articulaciones* donde las diversas articulaciones se estudiaron como miembros de un sistema teórico. En esta teoría se dieron pruebas más generales, las cuales se podían aplicar al pantógrafo de Sylvester así como a otras articulaciones (Lebesgue, 1950).

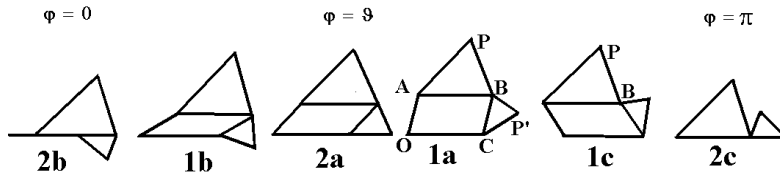


Fig. 1 y 2. Las figuras ilustran configuraciones para los valores crecientes del ángulo  $\varphi = AOC$  de 0 a  $\pi$  ( $\vartheta = PAB$ ).

La historia de los pantógrafos representa la génesis del *conocimiento científico-teórico* contemporáneo (contrastado con el *conocimiento empírico*, el cual hace referencia a fases más antiguas así como al conocimiento común contemporáneo) que está basado en una *interrelación dialéctica entre específico y general, entre concreto y abstracto*. Si el punto de partida para la construcción de un *concepto* es la *abstracción sustancial a partir de lo concreto* (realizada por medio del *análisis de la función de una cierta relación de cosas dentro de un sistema estructurado*), su resultado es una *teoría desarrollada*, en donde las manifestaciones específicas son deducidas y explicadas a partir de fundamentos generales (la llamada *ascensión de lo abstracto a lo concreto, de lo general a lo específico* --Davidof 1972-79 ch.7). en este proceso, también existen *fases experimentales*, en donde los ejemplos particulares son observados de acuerdo a cuestiones que son *formuladas teóricamente*. Toda máquina materializa tanto conocimiento empírico como teórico que puede ser interpretado de diferentes maneras. Que el análisis de una máquina sea empírico o teórico depende de cuales son las cuestiones planteadas; más aún, se tienen análisis teóricos distintos de la misma máquina si se cambia el sistema de referencia (p.e. geometría elemental, teoría de articulaciones). De acuerdo a la anterior discusión, no es posible para el investigador separar este aspecto de la *experiencia humana* sin caer en una perspectiva reduccionista (el uso empírico de un pantógrafo; el estudio de sus configuraciones únicamente en un nivel abstracto): en este sentido, el contexto de las máquinas matemáticas es un ejemplo de *campo semántico* (Boero, 1989).

La anterior interpretación no está dentro de las capacidades del estudiante: ellos tienen experiencias separadas, ya sea geométricas o mecánicas, tanto en el nivel perceptual como en el nivel racional. Una dialéctica posible entre ellos es conocida por el maestro quién está conciente del desarrollo histórico de la geometría como estrictamente enlazada con la mecánica. Sin embargo, para los estudiantes las máquinas son opacas para la geometría (y viceversa) y pueden llegar a ser transparentes, únicamente por medio de una actividad adecuada (Meira, 1991). Los estudiantes no necesariamente recapitulan el proceso histórico de creación o de descubrimiento de un artefacto y sus propiedades, ya que éste ha sido realizado a través de un proceso colectivo complejo que duró centurias y que dependió de un gran número de factores individuales y colectivos de dentro y de fuera de las matemáticas: a causa de su complejidad y de su dependencia de tantos factores, no son un buen candidato para modelar el proceso escolar. La actividad del estudiante podría ser descrita mejor como la apropiación de un artefacto cultural existente (p.e. el pantógrafo) así como de los modos de su estudio (apropiación significa, en el sentido de Leontiev (1964-1976) el proceso que tiene como su resultado final la reproducción individual de propiedades humanas históricamente formadas, capacidades y modos de conducta). El aprendizaje no está basado sobre relaciones particulares inmediatas a la realidad sino más bien sobre la mediación (Vigotsky, 1978) entre individuos y objetos, realizada por medio de los artefactos —ya sean herramientas o sistemas simbólicos— creados por los seres humanos en siglos de desarrollo. *Ninguna experiencia personal individual, no importa que tan rica pueda ser, podría conducir al desarrollo del pensamiento matemático lógico o abstracto y a la formación autónoma de los sistemas conceptuales correspondientes* (Leontiev, 1964-76 p.338).

### 6.3 Algunas implicaciones para la didáctica

La anterior discusión que alude a algunas ideas básicas de la teoría de la actividad, da lugar a dos tesis:

1. La dialéctica entre lo específico y lo general es un motivo básico para la actividad de enseñanza-aprendizaje en los escenarios escolares. La acción orientada por el objeto, como manifestación concreta de una tarea de investigación, es la fuerza directora para el proceso de enseñanza-aprendizaje.
-

2. El maestro es el responsable para la mediación en el salón de clase, para introducir a los estudiantes en los sistemas de artefactos culturales que han sido producidos por generaciones de seres humanos.

En lo que sigue argumentaremos como fueron concebidas estas tesis en la planeación de experimentos de enseñanza y en la activación de procesos en el salón de clase.

## 6.4 Un experimento de enseñanza

Este experimento de enseñanza se llevó a cabo en una clase de 11avo. grado<sup>4</sup> (y se refiere a un detallado estudio de diferentes articulaciones por diferentes grupos de estudiantes. Se realizó una observación de cuatro meses a lo largo del año escolar 1991-92. Se grabaron tanto las clases dadas por el maestro como el trabajo en equipo de grupos pequeños de cinco estudiantes (involucrados en el estudio de un modelo del pantógrafo de Sylvester). No detallaremos la estructura completa del experimento de enseñanza (Bartolini & Pergola, por aparecer), el cual consistió en una plática de introducción a algunas notas históricas sobre las articulaciones y su estudio, dos sesiones de dos horas de trabajo en equipos pequeños – con los cinco grupos distintos de estudiantes—referentes al estudio de cinco articulaciones distintas, y una clase con todos los estudiantes, conducida por el maestro, con respecto al estudio de cada una de las articulaciones.

Brevemente describiremos (en esta sección) e interpretaremos (§5) una parte del trabajo con los grupos pequeños. Este había sido estructurado previamente por medio de una lista escrita de ocho tareas (apéndice 1) que debían ser respondidas por escrito. Un extracto del texto final editado por el grupo observado está en el apéndice 2. Nos referiremos al dibujo (Fig.3) que fue producido por los estudiantes junto con el texto escrito, aún cuando el proceso fue llevado a cabo haciendo énfasis en la articulación sin hacer referencia a ninguno de los puntos codificados.

De la solución a la primera cuestión (una hora completa) resultó una secuencia de las siguientes respuestas parciales: (1) algunas barras son iguales (medida directa); (2) existe un paralelogramo deformable y dos triángulos indeformables; (3) un punto O está fijo; (4) los triángulos son isósceles (observando la configuración de la figura 2a); (5) los triángulos son similares (idem); (6) es equivalente fijar el ángulo PAB o la razón de PB a PB'; (7) las

---

<sup>4</sup> Equivalente a un segundo año de bachillerato en México, aprox.

barras que representan las bases de los triángulos se tienen que cortar y perforar para tener la misma proporción que las barras que representan los lados (detalles en Cavani, 1992).

El proceso de responder la cuarta cuestión resultó en tres distintas fases: (1) conjeturar el invariante; (2) buscar una prueba; (3) escritura de la prueba. La primera fase fue resuelta por medio de actividad conjunta con el maestro. La conjetura fue propuesta por un estudiante, aceptada por el maestro pero rechazada por los otros y aceptada después de verificarla en la articulación.

La segunda fase (una hora completa) fue llevada a cabo sin el maestro. La construcción colectiva consistió en una secuencia de “movimientos”: cada movimiento fue codificado como E (experimental) si estaba basado en experimentos visuales o táctiles, o L (logical) si era deducido de afirmaciones ya aceptadas (éstas a su vez, pudieron ser establecidas experimentalmente -E- o lógicamente -L). (Ver Fig.3 para la codificación de puntos):

0. (E) *conjetura a ser probada*: OP es igual a OP' y los ángulos POP' son iguales para todas las configuraciones de la articulación.

1. (L) *prueba*: si los triángulos OAP y OCP' son congruentes (ya probado) entonces OP es igual a OP'.

2. (E) *problema*: ¿existe una relación entre el movimiento de P y el movimiento de B? La búsqueda se interrumpe.

3. (E, L) *observación*: la longitud de PP' no es siempre la misma. La afirmación es confirmada por medio de la teoría, observando que no es suficiente conocer dos lados para determinar la totalidad del triángulo.

4. (E) *observación*: aún cuando OP sea igual a OP', se tiene que (entonces) la longitud de OP no es constante.

5. (L, (E, L) ) *prueba*: si POP' es constante (conjeturado del movimiento 0) y POP' es isósceles (probado en el movimiento 1) entonces todos los triángulos POP' de entre las infinitas configuraciones son similares.

6. (L) *problema*: existe una razón constante (movimiento 5) entre PP' y OP (=OP'): ¿cuál es la razón?

7. (L) *prueba*: para la configuración de la Fig. 2a se ha probado que los ángulos POP', BCP' y BAP son iguales.

8. (E) *conjetura*: los triángulos PBP' y OAP y OCP' son similares.

9. (L) *prueba*: como los triángulos BCP' y BAP son similares (hipótesis) entonces las proporciones siguientes: CP':AB=BP':BP y como OC=AB, CP':OC=BP':BP.

10. (L, E) *prueba*: si PBP' y OCP' son similares (movimiento 8), la razón de OP y PP' (igual a la razón de OP' y PP') es constante.

11. (L) *prueba*: los triángulos OPP' de la infinidad de configuraciones son similares.
12. (L) *prueba*: si todos los triángulos POP' son similares el ángulo POP' es constante (inverso del movimiento 5).
13. (L) *prueba*: los ángulos P'BP, OCP' y OAP son iguales (basados sobre las propiedades angulares de los polígonos).
14. (L) *prueba*: los triángulos P'BP, OCP' y OAP son similares (ver movimiento 8). (Ver Cavani 1992 para detalles).

## 6.5 Discusión

La discusión está dividida en dos partes que se refieren a: (a) los aspectos de organización (diseñados previamente); (b) los aspectos de activación o funcionamiento (observados en los procesos de la clase).

### 6.5.1 Organización

La primera elección está relacionada con la definición de la tarea en referencia con el objeto físico (la articulación, en realidad dada a los estudiantes y no únicamente evocada). No se definió únicamente un contexto inicial para la actividad del cual partir (como en el cambio de lo específico a lo general, lo que es enfatizado en el marco piagetiano) sino que fue en realidad un polo del par *objeto físico – objeto ideal* (i.e. específico-general) a ser puesto en una interrelación dialéctica, de acuerdo a los elementos mayores del pensamiento teórico ( $\xi_2$ ).

La segunda elección se refiere a la estructura del trabajo del grupo pequeño por medio de las ocho cuestiones. Su meta fue forzar la transformación de la articulación específica en un objeto ideal determinado, y al mismo tiempo, ya sea recordar o estructurar el escenario teórico (geometría elemental, la teoría de las articulaciones) en donde describir su papel general y su función. Ellas fueron diseñadas como herramientas de mediación (Vigotsky, 1978), las cuales inhiben el impulso directo de reaccionar a un estímulo externo dado por la acción del pantógrafo; ellas formaron una base (incompleta) de orientación (Gabay, 1991). Las ocho cuestiones no tienen el mismo status. Por ejemplo, la primera es, en un sentido, transicional, como si también hubiera sido respondida dentro de un escenario empírico (aún si esto no sucedió, como mostramos en lo que sigue): los estudiantes hubieran podido escribir las reglas de construcción, refiriéndose a la conjunción de las ocho barras de longitud dada por medio de bisagras y pivotes (en realidad, algunas descripciones antiguas de

---

máquinas fueron de esta clase y probablemente nosotros podríamos tener descripciones similares si la misma tarea fuese puesta fuera de la escuela a una persona no cultivada). La segunda y la tercera cuestiones forzaron a los estudiantes a reparar en algunas herramientas básicas de la teoría de articulaciones: estas tuvieron sentido únicamente después de la introducción de Lagrange (1787) del concepto de *coordenadas generalizadas de un sistema mecánico*. La cuarta cuestión introdujo el *objeto ideal* en la teoría de la geometría elemental. Las últimas cuatro cuestiones —y principalmente la séptima— tuvo que realizar la ascensión de lo general a lo específico, en la medida en que una rotación de cualquier ángulo dado  $\theta$  estuvo vinculada con las propiedades geométricas de un pantógrafo individual. En pocas palabras, el total de cuestiones fueron diseñadas para realizar la dialéctica entre la articulación específica y una teoría general de sus configuraciones.

La tercera elección se refirió a la aceptación de fases de actividad conjunta entre el maestro y los estudiantes en el grupo pequeño de trabajo. La actividad conjunta entre adultos y gente joven en la resolución de problemas es consistente con el concepto de zona de desarrollo próximo de Vigotsky (1978). No se origina de la necesidad profesional del maestro de limitar el experimento dentro de límites adecuados de tiempo, sino sobre la necesidad cultural de dirigir los esfuerzos de los estudiantes hacia la apropiación de productos de la actividad humana de siglos. Las fases de la actividad conjunta no siempre pueden ser diseñadas, en la medida en que ellas dependen de procesos reales, aún cuando los puntos cruciales pueden ser indicados tentativamente con anticipación.

### 6.5.2 *Funcionamiento*

En esta sección abordaremos los mismos aspectos pero en orden distinto. Las ocho cuestiones estructuraron procesos en la clase *desde fuera*. Sin embargo ellas son buenos candidatos para que en el proceso de internalización (Vigotsky, 1978) se transformen en elementos cruciales de la metodología de un estudiante individual para el estudio de algunas clases de articulaciones (pero esta hipótesis puede ser verificada únicamente en un estudio a largo plazo, el cual está ahora en progreso).

Algunas fases de *actividad conjunta* fueron observadas. Por ejemplo, en la fase de conjeturas, el maestro enfocó sobre propiedades angulares de la articulación y sugirió considerar ángulos que no estaban visibles (en realidad, las líneas OP y OP' no se refieren al objeto físico sino al objeto ideal). Su intervención fué requerida por los estudiantes quienes habían sugerido un gran número de propiedades geométricas triviales (tales como el perímetro del he-

---

xágono siempre es el mismo) sin realmente entender cual era el significado de esta tarea. Entonces la conjetura fue verbalmente formulada por un estudiante y aceptada por el maestro; sin embargo los otros no confiaron en el profesor y regresaron a la articulación a verificarlo; pusieron la articulación en varias configuraciones y movieron el dedo a lo largo de las líneas PO y OP' para concretar diferentes manifestaciones del ángulo ideal. Sus afirmaciones cambiaron de *imposible* a *verdadero pero sorprendente*.

La última observación nos condujo al tercer aspecto (i.e. la función de la acción orientada por el objeto). Al inicio del trabajo en equipos (pregunta 1), los estudiantes midieron las barras para asegurarse de que algunas de ellas eran exactamente iguales, sin embargo inmediatamente afirmaron que la medida no era relevante (*escribimos como se construyó esto, pero —la persona ficticia— puede hacerlo como quiera*). En realidad, ellos no estaban seguros de que el procedimiento empírico de medir fuera adecuado para el escenario geométrico ideal, en donde se estudian las propiedades de las figuras. Sin embargo los resultados de medir fueron inmediatamente interpretados en un escenario teórico, transformando la articulación (el objeto físico) en una figura esquemática (el objeto ideal). El siguiente proceso se refirió aún al objeto físico, cuando los estudiantes manipularon la articulación por toda una hora. Ellos observaron que la articulación pasaba por infinidad de configuraciones transitorias (las configuraciones “genéricas” (Fig.1) y algunas “especiales” (Fig.2)) y que era posible pasar de la una a la otra por medio de movimientos “pequeños”. Algunas veces el vínculo entre el objeto físico y el objeto ideal no era fácil de manejar. Por ejemplo, después de darse cuenta que los triángulos PAB y P'CB eran iguales, los estudiantes recitaron bien algunos teoremas relacionados con los lados y los ángulos de triángulos semejantes, pero no se dieron cuenta de que la proporcionalidad de los lados PB y BP' podía haber resuelto el problema concreto de describir las longitudes (relativas) de las barras. Una actividad conjunta (corta) con el profesor condujo a los estudiantes a asociar propiedades geométricas a los objetos físicos. De cualquier manera, si estuvo presente un embrión de ascendencia de lo general a lo específico, ascendencia necesaria para completar el movimiento dialéctico entre ambos aspectos. Por ejemplo, durante la primera observación de la articulación, un estudiante habló acerca de que no era necesario conservar el mismo ángulo PAB en la construcción de una nueva articulación: “*si el ángulo es recto, éste (Fig.2a) estará más aplanado*”. Sin embargo, el movimiento de ida y regreso de lo específico a lo general no estuvo siempre interiorizado por los estudiantes: algunas veces el maestro intervino justo para sugerir el cambio (*intenta y verificalo* en la articulación, para una afirmación verbal obtenida por medio de deducción

---

lógica; *intenta y pruébalo*, para una afirmación verbal obtenida por medio de experimentos). La configuración especial de la Fig.2a jugó un papel doble: en la primera cuestión sugirió la semejanza de los dos triángulos PAB y P'BC. Posteriormente, en el proceso de prueba esto obstruyó la solución: sucedió que la articulación asumió una configuración cercana (no igual) a la especial de la Fig.2a; inmediatamente una estudiante gritó: “*Por favor, muévala, me siento confundida: ya no puedo ver los lados (OP y OP')*”, y ella puso la articulación en una configuración más genérica. Resumiendo, se observó *actividad no verbalizada* (ya sea visual-táctil o visual-imagen) a lo largo de todo el proceso: su volumen es consistente con los resultados de adultos resolviendo problemas, de Tikhomirov (1988, p.90), quien estableció que [la actividad del pensamiento] no consiste únicamente en procesos subordinados a una meta pensada conscientemente sino también en procesos subordinados a una anticipación no verbalizada de resultados futuros, y que en la actividad, el segundo tipo de procesos puede tener una participación más grande que las acciones propiamente intencionadas.

El proceso de construcción de una prueba condujo a una demostración, en el sentido de Balacheff (1988). En realidad el texto escrito no estuvo completo, puesto que faltó el décimo movimiento crucial: fue considerado verbalmente varias veces mientras que los estudiantes estaban editando el texto, pero no fue escrito, como si fuera algo obvio. Más aún, la prueba no estuvo completa, puesto que sólo se refirió al caso genérico de la Fig.1a (el otro caso requiere pequeñas adaptaciones). El problema de variar las configuraciones había sido considerado pero fue rechazado: *¿Tenemos que verificar otros casos? No. Hemos hecho una prueba* (con énfasis). Ellos podían haber recurrido a algo similar al *principio de continuidad* (Poncelet, 1822), pero estaban seguros de que el texto no nada más era *convinciente* sino que también era *verdadero*: la responsabilidad de la verdad fue atribuida al ingrediente teórico del escenario en donde había sido llevado a cabo el proceso, i.e., el sistema de la geometría elemental. Aún si en algunos pasos (p.e. movimientos 5 y 10) se suponía que los estudiantes le daban la misma importancia a informaciones experimentales que a afirmaciones lógicamente derivadas, el proceso en su totalidad fue teórico, a causa de la tensión de los estudiantes hacia una completa justificación de todos los movimientos dentro del sistema de la geometría elemental. Sin embargo, su génesis (y algunos de los segmentos aparecieron incluso ordenados como afirmaciones escritas –cf. la columna de comentarios en el apéndice 2) fue llevada a cabo por medio de cambios de ida y regreso entre lo experimental y el nivel lógico.

---



## 6.6 Comentarios finales

Nuestros resultados hacen surgir dos cuestiones para la investigación didáctica. La relevancia de la actividad no verbalizada ha sido señalada también en los medios ambientes computarizados (Dreyfus, 1991), sin embargo el uso de la computadora permite únicamente el análisis de la interacción entre la actividad verbal-lógica y la actividad visual-imagen. ¿Cuál es, si existe, el papel de la actividad visual-táctil en el pensamiento geométrico avanzado?

Mucha de la investigación didáctica enfatiza la responsabilidad del alumno para aprender en contraste con la enseñanza tradicional. Hemos argumentado (§2) que la apropiación de artefactos culturales está determinada por la mediación del adulto. ¿Cómo se concibe el papel del maestro con respecto a la mediación cultural en el salón de clases?

RECONOCIMIENTOS. Esta investigación fue apoyada por CNR y MURST. El experimento de enseñanza fue diseñado y llevado a cabo por M. Pergola y observado por C. Cavani; P. Boero y A. Mariotti leyeron cuidadosamente y comentaron el borrador de este artículo.

## Apéndice 1

### Las 8 preguntas

1. Represente la articulación con una figura esquemática y describásele a alguien quien tiene que construir uno semejante, con base sólo en su descripción.
  2. ¿Cuántos grados de libertad tiene el punto P?. Dibuje el conjunto R que consiste de todas las posiciones de P durante el movimiento. Elija los parámetros que determinan la posición de P.
  3. ¿Cuántos grados de libertad tiene el punto P?. Dibuje el conjunto R que consiste de todas las posiciones de P durante el movimiento. Elija los parámetros que determinan la posición de P. ¿Puede utilizar los mismos parámetros que usó para P?.
  4. ¿Existen algunas propiedades geométricas que se relacionan con todas las configuraciones de la máquina?. Intente demostrar sus afirmaciones.
  5. ¿Se puede decir que la máquina realiza una correspondencia biunívoca entre R y R ; i.e. cada punto de R tiene un punto correspondiente en R y viceversa?.
-

6. Si P y P son dos puntos trazadores, dibuje dos figuras correspondientes (considerando la correspondencia en 5 entre R y R). ¿Se trazan ambas figuras al mismo tiempo?. ¿Son relevantes las características del movimiento –velocidad, aceleración, etc.?
7. ¿Cuáles son las propiedades comunes de las figuras trazadas en el punto 6?. ¿Las figuras se superponen?. ¿Existe algún movimiento simple que las superpone?, descríbalolo.
8. ¿Este movimiento superpone a R y R , también ?

## Apéndice 2

### Respuesta colectiva a la pregunta 4 (Fig. 3)

Tesis. POP es constante

El ángulo POP es constante ya que los triángulos POP que se obtienen por medio de las deformaciones del mecanismo son semejantes, para cualesquiera posiciones de P y P. cfr. movimiento 12.

En efecto,  $OP=OP$ , porque los triángulos OCP y OAP son congruentes, ya que  $CP=OA$ ,  $CO=AP$  y  $OCP=OAP$  ( $BCO=OAB$  y  $PCB=BAP$ ).

Los triángulos de arriba son semejantes a un tercer triángulo PBP, porque cfr. movimiento 9. Como los triángulos BCP y BAP son semejantes, se sigue que  $BP:BP=CP:CO$  cfr. movimiento 10 Y además el ángulo PBP es igual al ángulo OCP ya que cfr. movimiento 13. (haciendo  $CPB=CBP=\alpha$  y  $CBA=\beta$ ) tenemos  $PBP=360-(2\alpha+\beta)$  y  $OCP=360-(2\alpha+\beta)$ . Esto es cierto porque prolongando la recta BC desde C, el ángulo suplementario a BCP es igual a  $2\alpha$  y el ángulo suplementario a BCD es igual a  $\beta$ , debido a que en un paralelogramo dos ángulos contiguos son siempre suplementarios.

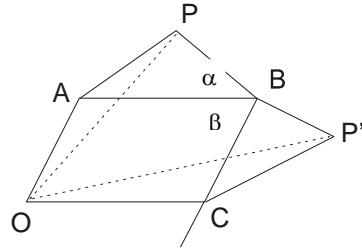


Fig. 3

## **Referencias**

- Balacheff, N. 1988. *Une etude des processus de preuve en mathematique chez des eleves de College*. These, Grenoble.
- Bartolini, Bussi M. & Pergola M. (to appear), "History in the mathematics classroom", Essen Symposium.
- Boero, P. 1989. "Mathematical literacy for all", Proc. 13<sup>th</sup>. PME.
- Cavani, C. 1992. *Invarianti, congetture, dimostrazioni...* Unplished thesis, Modena.
- Davydov V.V. (1972-1979). *Gli aspetti della generalizzazione nell'insegnamento*, Giunti Barbera.
- Dreyfus, T. 1991. "On the status of visual reasoning...". Proc. 15<sup>th</sup>. PME, Vol.1, pp.33-48.
- Dubinsky, E. 1991. "Reflective abstraction...". In Tall D. (ed.), *Advanced mathematical thinking*, 95-123. Kluwer Academic Publishers.
-

# Exploración sobre el aprendizaje de las transformaciones geométricas en el Bachillerato: coordinación del uso de herramientas cognitivas en la escuela

---

Verónica Hoyos Aguilar<sup>1</sup>

CAEMTIC, Universidad Pedagógica Nacional

[vhoyosa@upn.mx](mailto:vhoyosa@upn.mx)

## 7.1 Introducción

Aquí se presenta un trabajo de exploración acerca del uso de herramientas comunes, como son las computadoras o los pantógrafos, en el aprendizaje de las transformaciones geométricas. La exploración se llevó a cabo en un aula equipada con computadoras y con grandes pantógrafos (*máquinas matemáticas* o mecanismos articulados para el estudio de las transformaciones geométricas básicas), los cuales permiten el trazado y la comparación de figuras geométricas. Las máquinas articuladas en uso o pantógrafos fueron especialmente construidos para el estudio de la reflexión con respecto a un punto o a una recta, la traslación y la homotecia. La computadora y los artefactos mencionados se utilizaron para introducir a un grupo de estudiantes del primer semestre del bachillerato al estudio del tema de las transformaciones geométricas. En este capítulo se describe lo que se realizó en el salón de clase, y se inscribe al estudio exploratorio realizado en una línea de investigación del uso de instrumentos en la enseñanza de las matemáticas. También se presentan las secuencias de trabajo de todas las sesiones que aquí se instrumentaron y los problemas que se aplicaron al término de la exploración. En particular se hace énfasis en los logros de los estudiantes, se comenta su participación en las actividades y en la resolución de los problemas que se les plantearon. Finalmente, en la última parte de este capítulo se abordan algunas de las posibles implicaciones didácticas del estudio exploratorio realizado.

---

<sup>1</sup> La investigación en que se basa el contenido de este capítulo, ha sido desarrollada con apoyo del CONACyT con número de referencia 30430-S.

## 7.2 Uso de instrumentos en la enseñanza de las matemáticas

### *Acción y mediación: El papel de los materiales concretos en la enseñanza de las matemáticas.*

Las secuencias de trabajo que aquí se presentan, se realizaron desde una perspectiva educativa que privilegia la actividad del estudiante y el uso de medios para la apropiación del conocimiento.

Sabemos que el uso de instrumentos en la enseñanza de las matemáticas no es algo nuevo. Según Szendrei (1996) “*los materiales concretos tienen una larga historia en las clases de matemáticas, aunque no siempre han sido aceptados de buena gana o usados de manera apropiada. De hecho, desaparecieron cuando surgieron los métodos de cálculo escritos y se le asignó poco valor a la comprensión de los algoritmos que estaban siendo enseñados. En la presente centuria, Comenius (1592-1670) y Pestalozzi (1746-1827) comienzan el proceso de reintroducción, ellos, junto con Montessori y muchos otros, proveen nuevos materiales y razones para su uso de tal manera que hoy uno dispone de cientos de instrumentos manipulables. Sin embargo, se sigue discutiendo si las herramientas comunes derivadas de la vida real pudieran ser mejores que los materiales educativos especialmente contruidos, y si de hecho, tales materiales pudieran ser más dañinos que buenos. Se puede decir que en general los materiales educativos no son drogas milagrosas; su uso productivo requiere previsión y planeación*” (Szendrei, 1996, p.411).

En el trabajo que aquí se está presentando se ha hecho énfasis en el uso de herramientas comunes en el salón de clase. Herramientas que tienen la particularidad de que en determinado momento han sido elaboradas para resolver problemas de medición específicos o para comunicar o difundir ideas matemáticas nuevas, incluso revolucionarias en su época. Véase, por ejemplo, los instrumentos descritos por Descartes en *La Géométrie* (1637). Más aún, se recomienda ver en la dirección electrónica de la Universidad de Modena *UniMo*, Italia— <http://www.museo.unimo.it/theatrum/>, la gran cantidad de este tipo de material que la *UniMo* ha producido y compilado.

De hecho, la historia de las matemáticas da cuenta de una interacción dialéctica entre el aumento de comprensión sobre nociones o ideas matemáticas nuevas y la manipulación o elaboración de artefactos que facilitan o hacen factible la comunicación de tales logros. Así por ejemplo, Descartes en *La Géométrie* usa y desarrolla nuevas herramientas algebraicas,

---

y busca explicarlas usando los novedosos artefactos mecánicos que ahí se muestran.

Desde un punto de vista teórico, el papel fundamental de los artefactos culturales como mediación para la acción educativa es reivindicado en gran medida por el enfoque socio-cultural de investigación del aprendizaje desarrollado por Wertsch (ver por ejemplo Wertsch *et al.*, 1995). Una de las bases de este enfoque de investigación consiste en el supuesto de que la acción y la mediación están inherentemente relacionadas. De hecho, *los artefactos culturales* (término equivalente desde este enfoque, al de *herramientas comunes* de Szendrei) proveen un vínculo o puente entre las acciones concretas llevadas a cabo por los individuos y los grupos, por un lado, y los escenarios culturales, institucionales e históricos, por el otro. (Wertsch *et al.*, 1995, pp.19-20).

En el trabajo que aquí se presenta los estudiantes contaron con computadoras, pantógrafos y guías para la realización de todas las actividades. Es mucha la literatura de estudios antecedentes que han incorporado en su realización alguno de los dos artefactos mencionados. Por ejemplo, según los resultados de Mariotti (2002), las computadoras transforman la naturaleza de un problema: *“Podemos vislumbrar que la presencia de nueva tecnología transforma la relación entre problemas y conocimiento y que este cambio ocurrirá en al menos dos aspectos: el tipo de problemas que pueden ser propuestos a los pupilos y los procesos de solución que pueden ser usados. Los recursos disponibles cambian, y consecuentemente los procesos usados para alcanzar un resultado también cambian<sup>2</sup>”* (Mariotti, 2002, p.697). Según Mariotti, muchos investigadores han estudiado los efectos de los medios ambientes computacionales, y especialmente el de la programación, sobre los procesos intelectuales involucrados en la resolución de problemas y en la formación de conceptos, pero la investigación de orientación cognitiva, llevada a cabo por muchos años y principalmente centrada sobre el que aprende, debe estar complementada por la investigación del efecto que las actividades en el medio ambiente computacional pueden tener en la clase de matemáticas como un todo, en *“como las diferentes facetas de la tecnología afectan la cultura del salón de clase* (Mariotti, p.697)”.

---

<sup>2</sup> El texto original de Mariotti está en inglés. Las partes de este texto que aquí aparecen citadas en español, son una traducción libre del autor de este capítulo.

---

En realidad se ha visto que no nada más la computadora tiene un papel de catalítico cultural en el salón de clase, sino también la introducción de “nuevas voces” significativas para el aprendizaje, como lo son las máquinas articuladas para el estudio de las transformaciones. En el capítulo “Pruebas geométricas y máquinas matemáticas” que se incluye en este mismo libro, se documenta una de las posibilidades que ofrece la introducción de estos artefactos para comenzar a tratar con pruebas deductivas en la clase de matemáticas del bachillerato.

De hecho, el estudio exploratorio que aquí estamos presentando intenta contribuir en una línea de investigación sobre *la articulación de las distintas facetas de la tecnología* en el salón de clase. Con el objetivo de indagar como influye en la comprensión del estudiante la manipulación de las herramientas, se elaboraron series de actividades prácticas en cuya resolución participó un grupo de primer año del CCH. Se llevaron a cabo 7 sesiones de trabajo de 2 horas cada una: la primera de ellas fue de introducción general al uso de un software de geometría dinámico (SGD); en las siguientes tres sesiones se trabajó con guiones de la actividad con el SGD, en particular explorando el ‘menú’ de transformaciones y la ‘Ayuda’ del software; en dos de las tres restantes sesiones se usaron los mecanismos articulados o pantógrafos, y finalmente, en la última sesión los estudiantes se enfrentaron a una serie de problemas relacionados con las transformaciones geométricas.

### **7.3 Secuencias de trabajo y comentarios sobre las ejecuciones de los alumnos**

#### ***Primera Sesión: Exploración del software de geometría dinámico (SGD)***

La primera sesión fue de exploración acerca de las posibilidades de construcción geométrica que ofrece un software de geometría dinámico (SGD). A los estudiantes se les entregó una hoja de trabajo, en la cual aparecían varios problemas de construcción geométrica (ver Fig.1) con los cuales se pretendió dar motivo al conocimiento de los comandos y de las posibilidades del SGD. Durante la exploración del software, una de las propiedades más importantes del SGD que interesa que los estudiantes dominen, es el arrastrado directo de las diferentes partes de los objetos geométricos que se han construido para verificar que una propiedad

---

matemática es invariante. Sin embargo, los resultados del arrastre dependen de cuales han sido los objetos iniciales en la construcción. El estudiante debe de aprender que el arrastrado ha de utilizarse para verificar la invariabilidad de la(s) propiedad matemática(s) en juego. Esta es probablemente la propiedad del SGD que lo hace una herramienta valiosa para el aprendizaje de las matemáticas.

**PRIMERAS EXPLORACIONES EN CABRI-II  
CONSTRUCCIONES Y PROPIEDADES  
GEOMÉTRICAS**

Construye un triángulo rectángulo a partir de dos puntos dados (o de un segmento) de tal manera que al arrastrar los tres vértices el triángulo continúe siendo rectángulo. Después de terminar tu construcción, haz un reporte en donde describas la construcción realizada.

Construye un cuadrado a partir de dos puntos dados de tal manera que al terminar tu cuadrado, tú puedas arrastrar los dos vértices iniciales de la construcción y el cuadrado siga siendo un cuadrado. Después de terminar tu construcción, haz un reporte en donde describas la construcción realizada.

Construye un paralelogramo a partir de tres puntos dados de tal manera que al terminar tu paralelogramo, tú puedas arrastrar los tres vértices iniciales de la construcción y el paralelogramo siga siendo un paralelogramo. Después de terminar tu construcción, haz un reporte en donde describas la construcción realizada.

Fig.1. Hoja de trabajo 1: Primeras tareas de construcción geométrica con el SGD

Comentarios: En las repetidas ocasiones en que se ha trabajado con este tipo de tareas se ha visto que es difícil que los estudiantes lleguen a realizarlas sin ayuda del instructor. En realidad, las tareas solicitadas en la hoja de trabajo 1 dan pie para que los estudiantes desplieguen estrategias de construcción intuitivas, las cuales usualmente no van a satisfacer “la prueba del arrastrado”



con el SGD. Esto es, las figuras inicialmente construidas por los estudiantes normalmente van a perder la propiedad a la que se apuntaba, al ser arrastrada cualquiera de las partes de la figura. Finalmente, después de que se ha intentado verificar la validez matemática de las diferentes propuestas de los estudiantes, se observa que las construcciones matemáticamente válidas (como la construcción de perpendiculares utilizando regla y compás) son las que satisfacen los requerimientos explícitos en la hoja de trabajo. Como usualmente se llega a este resultado trabajando de manera colectiva en el salón de clase, esto se verá reflejado en los reportes de la actividad que entregan los estudiantes.

### ***De las sesiones segunda a la cuarta: Exploración del menú de transformaciones geométricas del SGD***

En la segunda sesión se les proporcionó a los estudiantes una guía (ver Fig.2, 3, 4, 5, 6 y 7) para el estudio de las transformaciones geométricas a través de la exploración del menú de transformaciones con el que cuenta el SGD. La guía constó de cuatro partes, todas a resolver por los alumnos salvo la primera, la cual aparece en la guía completamente resuelta. Esto es, la primera parte del guión proporciona a los estudiantes un ejemplo completo de resolución propuesto a los estudiantes. Como se podrá observar, con esta guía se pretende revisar todas las isometrías del plano y la composición de éstas. Dado que esta secuencia de hojas de trabajo está propuesta para ser llevada a cabo con estudiantes del primer año del bachillerato, se puede decir que la composición de transformaciones geométricas proporciona a los estudiantes una de sus primeras experiencias con el tema de composición de funciones desde un contexto geométrico-euclidiano.

---

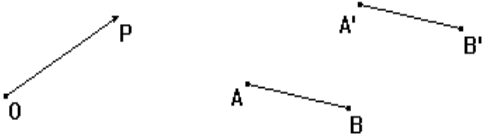
1

**¿Qué son las isometrías?**

**I. Traslación determinada por el vector  $OP$**

- Construye un segmento  $AB$ .  
 Construye el segmento  $A'B'$  el trasladado de  $AB$ , usando el comando 'Traslación' de Cabri (abre el menú Ayuda con F1).  
 Cuales objetos geométricos son necesarios para la construcción?

Cuando seleccionas el comando Traslación, el menú Ayuda te dice: "Construye la imagen de un objeto trasladado de un vector dado. Se indica el objeto y después el vector." Entonces los objetos que debes tener en la pantalla para poder efectuar la traslación son: un vector y un objeto geométrico (Usted debe ya tener el segmento  $AB$ ). Después de haber creado un vector  $OP$  efectúa la traslación requerida.



¿Cuáles objetos geométricos puedes mover/variarrarrastrándolos con el ratón? ¿Porqué?

Fig.2. Página 1 de la guía de transformaciones geométricas usando el SGD.

Comentarios: Recuérdese que toda la primera parte de la guía para el estudio de las transformaciones geométricas usando el SGD –Figuras 2, 3 y 4— aparece resuelta. Los estudiantes sólo tienen que seguir el guión, recreando los movimientos o actividades de construcción que se les solicitan, utilizando para ello el SGD a su disposición.

<p>¿Qué cosa sucede cuando hacemos variar estos objetos geométricos en la pantalla?</p> <p>Si movemos/variamos.....</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- El vector <math>OP</math></li> <li>- <math>O</math> y/o <math>P</math></li> <li>- El segmento <math>AB</math></li> <li>- <math>A</math></li> <li>- <math>B</math></li> </ul>	<p>2/</p> <p>Entonces .....</p> <p>No se mueve nada más</p> <p>El segmento <math>A'B'</math> se mueve permaneciendo paralelo a <math>AB</math>, con la misma longitud, pero variando su distancia de <math>AB</math>. El segmento <math>AA'</math> y <math>BB'</math> permanecen paralelos a <math>OP</math>.</p> <p>El segmento <math>A'B'</math> se mueve conservando su posición recíproca respecto de <math>AB</math> y su longitud.</p> <p>Se mueve <math>A'</math> y el segmento <math>A'B'</math> permanece paralelo a <math>AB</math>, con la misma longitud y la misma distancia. Los segmentos <math>AA'</math> e <math>BB'</math> permanecen paralelos a <math>OP</math>.</p> <p>Se mueve <math>B'</math> y el segmento <math>A'B'</math> permanece paralelo a <math>AB</math>, con la misma longitud y a la misma distancia. Los segmentos <math>AA'</math> y <math>BB'</math> permanecen paralelos a <math>OP</math>.</p>
---	--


Fig.3. Página 2 de la guía de transformaciones geométricas usando el SGD.

Comentarios: Es pertinente hacer notar el papel relevante que tiene el comando de “Ayuda” con que viene provisto el SGD que se uso en las sesiones de trabajo del presente estudio exploratorio. De hecho este comando

proporciona una primera introducción al lenguaje básico formal para hablar de los elementos y las características de cada una de las isometrías planas.

3/

Construye la imagen de otros objetos geométricos (recta, círculo, triángulo) y explora su traslación anotando tus observaciones.  
Circunferencia de centro C.



Puedes mover O, P, C y el radio de la circunferencia de centro C.  
Si movemos O y/o P, la circunferencia de centro C' se mueve manteniendo el mismo radio. CC' permanece paralelo a OP.  
Si movemos C el segmento CC' permanece constante en longitud y la circunferencia imagen se mueve manteniendo constante el radio.  
Si variamos el radio de la circunferencia de partida, el radio de la circunferencia imagen cambia y permanece siempre igual al radio de la primera. El centro permanece fijo.

- Caracteriza el objeto geométrico imagen en una Traslación:  
En la traslación del segmento AB según el vector OP, el segmento imagen A'B':  
Tiene la misma longitud de AB  
Es paralelo a AB  
AA' y BB' son paralelos al vector OP.

En general la imagen A' de un punto A mediante la traslación del vector OP es tal que:  
 $AA' = OP$  y  
 $AA' \parallel OP$ .

Fig. 4. Página 3 de la guía de transformaciones geométricas usando SGD.

Comentarios: Finalmente, con respecto a las ejecuciones de los estudiantes en esta primera parte de la guía, se puede decir que la única dificultad que

encuentran al resolverla o recrearla, es precisamente la de entender que se trata de recrear un ejercicio resuelto utilizando el comando de “Ayuda” del SGD.

4/						
<p>- Da una definición general de traslación.</p> <p>Respuesta: Los elementos que definen una traslación son: un vector OP.</p> <p>La imagen de un punto A mediante una traslación es A' tal que <math>AA' = OP</math> :</p> <p>La traslación conserva la distancia entre los puntos, es decir <math>[AB] = [A'B']</math>, en donde A' y B' son las imágenes de A y B, respectivamente.</p> <p><b>II. Simetría axial de eje a</b></p> <p>- Construye un segmento CD.</p> <p>- Construye el segmento C'D' simétrico de CD, con respecto al eje a, usando el comando 'Simetría axial' de Cabri (abre el menu Ayuda con F1).</p> <p>- Cuales objetos geométricos son necesarios para la construcción?</p> <p>- ¿Cuáles objetos geométricos se pueden mover/hacer variar?¿Porqué?</p> <p>- ¿Qué cosa sucede cuando hacemos variar los siguientes objetos geométricos? Haz una tabla de dos columnas (como la que aparece en la hoja 2) en donde enlistes los diferentes objetos que puedes hacer variar, y el efecto que esto produce en las imágenes bajo la simetría:</p>						
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 50%; border-right: 1px solid black;">- Si movemos...</td> <td style="width: 10%; text-align: center;">/</td> <td style="width: 40%;">- Entonces se mueve...</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">...</td> <td style="text-align: center;">/</td> <td>...</td> </tr> </table>	- Si movemos...	/	- Entonces se mueve...	...	/	...
- Si movemos...	/	- Entonces se mueve...				
...	/	...				
<p>- De la misma manera, traza otros objetos (recta, círculo, triángulo), construye la imagen simétrica de ellos, y explora la simetría anotando tus observaciones.</p> <p>- Caracteriza el objeto geométrico imagen en una simetría axial.</p> <p>- Da una definición de simetría axial.</p>						

Fig. 5. Página 4 de la guía de transformaciones geométricas usando SGD.



una isometría, es sobre todo de tipo cualitativo. Por ejemplo, dan la siguiente definición general para simetría central: “Es cuando se crea una figura idéntica a otra en base a un punto”. O para la definición de traslación: “Es el reflejo de todos los puntos de una figura, paralelos según dirección y distancia de un vector determinado”. O, finalmente, para la definición de simetría axial: “Es el reflejo o imagen simétrica de un objeto respecto a una recta o figura con un extremo plano”.

6/
<p>-Compón dos simetrías axiales. ¿El objeto final puede ser obtenido a partir del objeto inicial con una sola transformación ¿con cuál?</p> <p>-Considera las diversas posiciones recíprocas de los ejes:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Ejes perpendiculares</li> <li>• ejes paralelos</li> </ul> <p>ejes incidentales.</p> <p>- De estas observaciones se pueden obtener algunas conclusiones generales acerca de la composición de las diversas isometrías?</p> <p style="padding-left: 20px;">- Componiendo dos traslaciones se obtiene.....</p> <p style="padding-left: 40px;">- Componiendo dos simetrías axiales con ejes paralelos si obtiene.....</p> <p style="padding-left: 40px;">- Componiendo dos simetrías axiales con ejes perpendiculares si obtiene .....</p> <p style="padding-left: 40px;">- Componiendo dos simetrías axiales con ejes incidentales se obtiene.....</p> <p>- ¿Cuáles isometrías son operaciones internas (aquellas que sean tales que su composición de una isometría del mismo tipo)?</p>

Fig.7. Página 6 de la guía de transformaciones geométricas usando el SGD.

Comentarios: En la cuarta y última parte de esta guía (ver parte inferior de la Fig.6 y toda la figura 7) aparece el estudio de la composición de transformaciones, lo cual para los estudiantes del primer semestre del bachillerato constituye de hecho una de las primeras aproximaciones a la composición de funciones desde un contexto geométrico-euclidiano. Es muy probable que los antecedentes intuitivos que aquí logran los estudiantes con respecto a la composición de funciones les sean posteriormente muy útiles al estudiar la composición de funciones en cálculo diferencial. Un ejemplo de respuesta de los estudiantes a la petición de caracterizar una composición de traslaciones es la siguiente: “Con un vector resultante que es la suma de los dos primeros vectores, con los que se construyeron los segmentos B y C”.

### ***Sesiones quinta y sexta: Uso de las máquinas articuladas para el estudio de las transformaciones geométricas***

En las sesiones quinta y sexta del estudio exploratorio que aquí estamos narrando se introdujeron nuevos artefactos –las máquinas articuladas o pantógrafos—con el objetivo de complementar el estudio de las transformaciones geométricas básicas. En efecto, a partir de la guía que se proporcionó a los estudiantes (ver Fig. 8), se puede observar que las acciones que se solicita a los estudiantes que realicen son las inversas, desde un punto de vista cognitivo, a las realizadas con el SGD (para más detalles al respecto, ver Hoyos, 2002). Esto es, en el estudio de las transformaciones con el SGD, al utilizar el estudiante el comando de “Ayuda” del software, tiene la posibilidad de conocer (al menos nominalmente) las propiedades geométricas de la transformación que él ha elegido del menú de transformaciones del SGD. Con las máquinas articuladas el estudiante actúa de manera inversa en el sentido de que tiene en sus manos un mecanismo dotado de una serie de propiedades geométricas, las cuales él tiene que descubrir y enunciar para posteriormente determinar cual es la transformación geométrica que se concreta en el artefacto.

---



**MÁQUINAS MATEMÁTICAS PARA TRANSFORMACIONES****PARTE I.**

- Tú tienes una máquina matemática. Dibuja la imagen de algunos objetos (rectas, círculos, triángulos) utilizando ésta máquina.
- Explora la transformación y descríbela:
- Elabora dibujos que te ayuden en tu descripción y explica qué es lo que sucede con los objetos imagen cuando mueves la máquina en torno de los objetos originales;
- Haz dos dibujos o esquemas de la máquina en dos posiciones distintas. Coloca en los esquemas que realices letras distintas según corresponda.
- ¿Qué transformación es?
- Haz un esquema o dibujo en donde indiques cuales son los elementos básicos de la transformación (p.e. cual es el centro de simetría o punto fijo de la homotecia o eje de simetría, o vector, etc.)

**PARTE II.**

- Cuando manipulas el mecanismo de la máquina obtienes unas figuras. Haz una descripción de este mecanismo (por ejemplo, ¿cuáles son las barras principales para la obtención del dibujo y cuáles no lo son?
- Dí que cosa sucedería si se pudiera modificar la longitud de algunas de las barras, y cual sería de acuerdo con estos cambios la modificación del objeto imagen.

**PARTE III.**

- Ahora se trata de que reproduzcas usando Cabri-II, la máquina matemática de dibujar de tal manera que puedas utilizar tu modelo de la misma manera que funciona la máquina real.
- Describe los pasos relevantes que has realizado para llegar a obtener tu construcción.

Fig.8. Guía de trabajo sobre las transformaciones geométricas usando las máquinas articuladas.

Comentarios: Tal vez lo más interesante a destacar, por parte de las ejecuciones de los estudiantes al manipular los mecanismos articulados, gira en torno de las diferentes estrategias de trabajo que los estudiantes mostraron

en este contexto. De hecho, se pudo observar que los estudiantes encontraron en la medición una herramienta útil para la comprobación de sus afirmaciones. Lo cual en efecto viene a complementar la percepción cualitativa de las propiedades geométricas que antes habían alcanzado mediante la utilización del SGD.

***Última sesión: Resolución de problemas sobre construcciones y demostraciones en geometría***

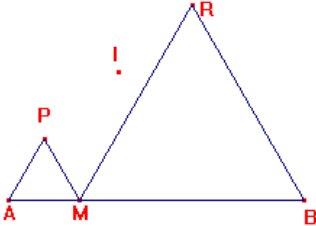
Con respecto a los problemas que se plantearon a los estudiantes (ver Fig. 9 y 10), es conveniente mencionar que tal vez sea necesario agregar especificaciones que se dieron por sentadas en el contexto de la exploración o que se aclararon en el momento de abordar los problemas. Por ejemplo, en el problema 1 se quiere que al hacer variar la posición de  $M$  en el segmento dado, se siga conservando la equilateralidad de los triángulos. Es interesante hacer notar que este problema es uno de los que permitieron establecer grandes diferencias entre la realización de tareas de construcción y las de explicación o demostración. En particular, porque en general los estudiantes acertaron al obtener que la trayectoria que describe  $I$  es la de un segmento paralelo al segmento inicial dado (sobre el que está  $M$ ), y, sin embargo, ninguno de ellos abordó la explicación de este hecho. Nótese que la explicación o demostración requiere enfocar y explicitar las propiedades básicas de la homotecia, así como complementar los trazos de la construcción realizada.

---

1/

**Transformaciones para construir y demostrar**

1. Construir un segmento  $[AB]$  y un punto  $M$  sobre el segmento  $[AB]$ . Construir un triángulo equilátero  $AMP$  y un triángulo equilátero  $MBR$ .



$I$  es el punto medio de  $PR$ .

¿Por dónde se desplaza el punto  $I$  cuando  $M$  se desplaza sobre  $[AB]$ ? Encontrar esta trayectoria y explique porqué esa sería una solución.

2.  $ABC$  es un triángulo cualquiera. Construya un cuadrado  $EFGH$  de tal manera que  $E$  y  $F$  estén sobre el lado  $[BC]$ ,  $G$  sobre el lado  $[AC]$  y  $H$  sobre el lado  $[AB]$ .

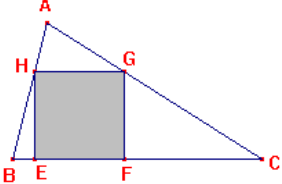
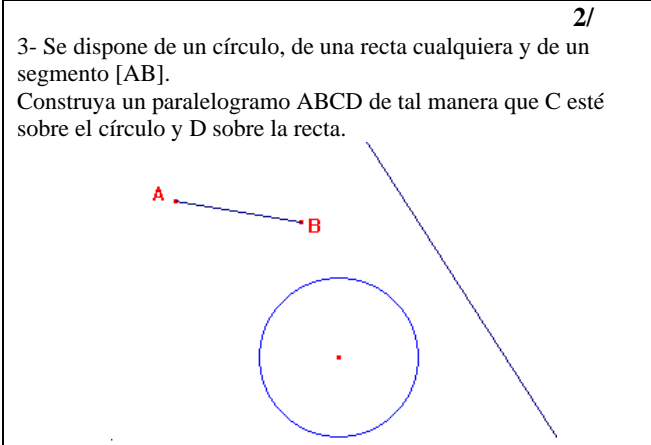


Fig.9. Hoja 1 de la lista de problemas propuestos a los alumnos al término de las sesiones.

2/

3- Se dispone de un círculo, de una recta cualquiera y de un segmento  $[AB]$ .  
 Construya un paralelogramo  $ABCD$  de tal manera que  $C$  esté sobre el círculo y  $D$  sobre la recta.



4- Se dispone de un círculo, de una recta cualquiera y de un punto  $O$ .  
 a) Construir un segmento  $[AB]$  tal que  $O$  sea el punto medio de  $[AB]$ , que  $A$  esté sobre el círculo y que  $B$  esté sobre la recta.  
 b) Estudie el número de soluciones.

5.-Se da un triángulo  $ABC$  en un sistema de coordenadas ortogonal, con:  
 $A(0,0)$  ;  $B(4,0)$  et  $C(0,2)$ .  
 $H$  es el pie de la altura que parte del punto  $A$ .  $I$  y  $J$  son los puntos medios respectivos de los segmentos  $[AB]$  y  $[AC]$ .  
 -Demostrar que el ángulo  $IHJ$  es recto.  
 -Generalizar tomando un triángulo rectángulo con  $A$ ,  $B$  y  $C$  cualesquiera puntos.  
 - Se puede demostrar con geometría analítica o también sin utilizar coordenadas.

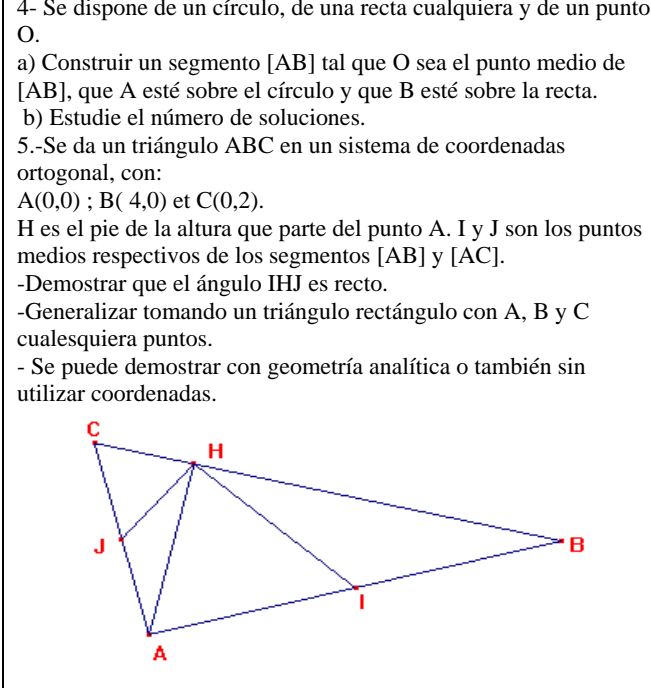


Fig.10. Hoja 2 de los problemas propuestos a los alumnos al término de las sesiones.

Comentarios: Por eventualidades relacionadas con la no institucionalidad del presente estudio exploratorio (no era ya posible que los estudiantes siguieran participando en la exploración pues sus exámenes semestrales estaban en puerta y no se garantizaba que el profesor de la materia fuera a tomar en cuenta su participación en el estudio exploratorio), resultó que sólo en la última sesión de trabajo con los estudiantes se pudo plantear una lista de problemas de construcción y demostración en relación con el tema de las transformaciones geométricas básicas (ver Figs. 9 y 10). Tal vez la observación general más importante que se obtuvo en este contexto fue que los estudiantes estuvieron en posibilidad de abordar y resolver algunos de los problemas de construcción, pero que este no fue el caso en relación a los problemas de demostración. Esto es, ninguna de las peticiones de demostración fueron reconocidas o abordadas por parte de los estudiantes, en contraste con los requerimientos de construcción, algunos de los cuales fueron resueltos por ellos de manera satisfactoria.

## **7.4 Importancia del trabajo de exploración realizado en relación con el currículum escolar del bachillerato**

En este estudio exploratorio se pretendió avanzar en una línea de investigación en didáctica de las matemáticas que fusiona la utilización de nuevas tecnologías (como las computadoras) y la introducción de contextos históricos (como las máquinas articuladas). En particular interesó indagar acerca del potencial del estudio del tema de las transformaciones geométricas básicas para el establecimiento de conexiones por parte de los estudiantes del primer semestre del bachillerato entre los dominios matemáticos de la geometría y la aritmética, y entre la geometría y el álgebra. Tal establecimiento de conexiones es uno de los objetivos del currículum escolar actual en los dos primeros años que son comunes para todos los estudiantes del bachillerato. Como resultado del trabajo realizado por los estudiantes en las situaciones didácticas de nuestro interés (las cuales presentamos a través de las hojas de trabajo que aparecen en la sección 3 de este capítulo) y a juzgar por las respuestas que dieron a las guías de la actividad, se puede decir que se observaron los siguientes logros educativos generales:

---

- Un primer conocimiento de algunas de las propiedades de los vectores.
- Una enunciación matemática de las propiedades y elementos de las transformaciones geométricas básicas como resultado de una enunciación textual de propiedades generales percibidas en los trazos.
- Una introducción al estudio de la composición de funciones desde un contexto geométrico-euclidiano.
- El establecimiento de relaciones aritméticas entre las medidas de los dibujos. Por ejemplo, por medio de la aplicación de la relación aritmética de proporcionalidad que antes se había aprendido en un contexto aritmético.
- Y, finalmente, la posibilidad de resolver problemas de construcción geométricos asociados al tema de estudio.

RECONOCIMIENTOS. En la elaboración de las hojas de trabajo y en su instrumentación en el aula se contó con la valiosa colaboración del Dr. Bernard Capponi del Equipo EIAH de la Universidad Joseph Fourier (Francia) y de la Dra. Federica Oliveiro de la Universidad de Bristol (UK).

---

## Referencias

- Descartes, R. (1637). *La Géométrie*. Translated from the French and Latin by Smith, E. & Latham, M. (1954). New York: Dover.
- Hoyos, V. (2002). “Coordinating Mediation of Activity in the Learning of Geometrical Transformations”. Proceedings of PME-NA XXIV. Athens, Georgia: ERIC/University of Georgia.
- Mariotti, A. (2002). “The Influence of Technological Advances on Students’ Mathematical Learning”. In Lyn D. English (ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*. New Jersey: LEA, Pub.
- Szendrei, J. (1996). Chapter 11: Concrete Materials in the Classroom. In Bishop et al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 411-434). Dordrecht (Netherlands): Kluwer Academic Publishers.
- Wertsch, J., Del Río, P., and Alvarez, A. (1995). Sociocultural studies: History, action, and mediation. In Wertsch, J., Del Río, P., and Alvarez, A. (Eds.), *Sociocultural Studies of Mind* (pp. 1-34). USA: Cambridge University Press.
-

# Ciclos de aprendizaje en matemáticas y retos para jugar

---

**Jorge Barojas Weber**

Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico, UNAM

[jbw40104@servidor.unam.mx](mailto:jbw40104@servidor.unam.mx)

**Nahina Dehesa Degives**

Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV.

[ndehesa@enigma.red.cinvestav.mx](mailto:ndehesa@enigma.red.cinvestav.mx)

## Resumen

En la primera sección discutimos acerca del papel del juego en la exploración y construcción de conceptos matemáticos y su relación con el manejo de distintos tipos de lenguajes (natural, técnico y formal). En la segunda sección, como fundamento que permite conectar el desarrollo de juegos con cambios en el empleo de lenguajes, describimos las nociones de registros de representación y ciclos de aprendizaje. Al final de cada una de estas dos secciones presentamos, respectivamente, un ejemplo ilustrativo de un juego geométrico y de una secuencia de actividades de aprendizaje para un curso introductorio de matemáticas al nivel del bachillerato. La interpretación y desarrollo de tales actividades toma en cuenta los cuatro elementos en cuestión: juegos, lenguajes, registros de representación y ciclo de aprendizaje.

## 8.1 Juegos y matemáticas

Jugar y juego provienen del latín *iocari* y *iocus*; palabras tales como joya, juguete y jugar se derivan de la misma raíz *ioc*. Jugar implica diversión y competencia, para cumplir con propósitos o metas. Además de entretener, los juegos pueden servir para desarrollar habilidades de importancia en la construcción y aplicación de conocimientos, propiciar el espíritu de iniciativa y la creatividad, conseguir precisión y rapidez en el manejo de información, facilitar el establecimiento de relaciones e inferencias, así como desarrollar estrategias para ganar. Sin embargo, al jugar no necesariamente se cumplen pro-



pósitos de enseñanza, como en el caso de la utilización de los llamados materiales didácticos. Ningún tipo de juego tiene necesariamente que premiarnos por haber demostrado dominio de temas conectados con la educación formal, en cualquiera de sus manifestaciones.

Interpretaremos como juego a toda escenificación de una situación en la cual se trabaja un modelo de un contexto de la realidad en donde ocurren eventos que deben satisfacer ciertas reglas, las que definen al juego. Con propósitos didácticos, consideraremos que dicho contexto comprende situaciones problematizadoras, preguntas generadoras y actividades de aprendizaje (Barojas y Pérez, 2001).

Es común pensar que un buen principio para empezar a aprender algo es jugar y al hacerlo, descubrir patrones de comportamiento y regularidades, manejar ciertos lenguajes y formas de pensamiento, así como desarrollar tácticas, estrategias, alianzas... El juego puede ser un medio socializador y de exploración conceptual, en donde los participantes experimentan con entusiasmo la motivación y el compromiso para indagar y ganar en una competencia sana que promueve la superación y la colaboración. También se suelen mejorar destrezas particulares relacionadas con el cuerpo físico como en los deportes, con la capacidad de razonar como en el ajedrez o con el desarrollo de un proyecto de vida en el llamado “juego de los abalorios”, título de la novela de Hermann Hesse (1943).

En términos simplificadores, existen juegos que podríamos denominar de patio y otros de salón o hasta existenciales. Los primeros requieren de habilidades como patear la pelota y meter gol, mientras que los otros implican audacia y elegancia en la manera de ser y pensar, llegando hasta la modulación completa de una forma de vida en una comunidad entera, tal como era el caso de la Castalia en donde vivía el Magister Ludi.

Sin embargo, hay demasiados ejemplos de que aprender es para la mayoría de los alumnos una ominosa tarea disociada del placer de jugar. Por su parte, el maestro pocas veces emprende su tarea docente con una actitud lúdica ni la propicia en sus alumnos al organizarles actividades de aprendizaje, asignarles tareas o enfrentarlos ante exámenes y otras formas de evaluación. De esta manera se desprecian muchas oportunidades para que alumnos y maestros promuevan su creatividad e imaginación proponiendo ideas para desarrollar nuevos juegos y participen en las etapas de su conceptualización, elaboración y aplicación.

---

Por otra parte, en las tareas de descubrimiento e invención tan necesarias en los procesos de investigación y creación, la actitud lúdica es fundamental. De diferentes maneras, quienes trabajan ideas y materiales en ciencias, artes, humanidades y tecnología, juegan y disfrutan cuando manejan sus materiales para generar productos. En el caso de las matemáticas, algunos temas de investigación de importancia han resultado de perseguir respuestas a preguntas relacionadas con juegos, porque éstos abren un espacio creativo para la exploración, el descubrimiento y la invención.

Al introducirse la computadora como elemento de soporte esencial en actividades de entretenimiento y de enseñanza, se han desarrollado juegos basados en problemas matemáticos, como por ejemplo el problema de poblaciones de predadores y presas cuyo comportamiento se describe mediante sistemas de ecuaciones integro-diferenciales acopladas que se resuelven numéricamente. La cantidad de situaciones lúdicas a las que se puede recurrir con la computadora es prácticamente inagotable, para no referirnos a simulaciones cada vez más maravillosas de mundos percibidos o inventados. Estas simulaciones son proyecciones en una pantalla bidimensional y corresponden a situaciones tridimensionales que ocurren en el mundo físico ó se deben a un sorprendente manejo de realidades virtuales en donde todo parece ser posible.

Ciertamente, las matemáticas son mucho más que un juego, el lenguaje de la naturaleza y el sustrato en el cual se expresa la estructura del pensamiento formal. Los frutos del pensamiento postulacional, en forma de descubrimientos, invenciones y soluciones de problemas son una materia prima muy fecunda para inventar juegos en donde se manejan situaciones que involucran objetos, conceptos y procedimientos matemáticos.

Aquí nos interesan las aplicaciones de los juegos en su relación con el manejo de lenguajes y el diseño de actividades de aprendizaje en matemáticas. Además, nos referiremos a juegos que tienen como soporte materiales, dispositivos o instrumentos hechos en papel, cartón, plástico, madera, metal..., no los que pueden simularse en el mundo de las computadoras y los multimedia.

Para ilustrar lo anterior, presentamos un ejemplo de juego en matemáticas, tomado del Proyecto Retos para Jugar (Barojas et al, 1999). Se trata del juego denominado CIRTRAFI porque se refiere a CIRculos - TRAZos - FIGuras. En este juego se establecen correlaciones entre tarjetas que contienen una serie de trazos circulares y las figuras que pueden obtenerse con los mismos (Fig. 1a). CIRTRAFI se puede jugar a un primer nivel en la modalidad de

---

lotería o de memorama. En el primer caso se reparten a los participantes tarjetones que contienen casillas con trazos hechos con circunferencias de dos diámetros diferentes y se muestran las tarjetas de las figuras que resultan cuando se iluminan ciertas regiones de los dibujos que se obtienen con tales trazos (ver Fig. 3(b)). Los participantes en el juego deberán identificar cuando la tarjeta de la figura presentada por quien dirige el juego corresponde a los trazos en alguna de las casillas de su tarjetón; gana el participante que primero completa las casillas de su tarjetón.

En la modalidad de memorama se colocan boca abajo y en desorden tarjetas de parejas trazos – figura y por turnos los jugadores escogen y voltean dos tarjetas; si tales tarjetas forman un par que correlaciona correctamente trazos y figuras, el jugador se lleva el par de tarjetas y vuelve a jugar, en caso contrario cede el turno al siguiente jugador. Como es costumbre en este tipo de juegos, gana el jugador que acumula un mayor número de parejas, una vez que se han agotado todas las tarjetas.

En casos de jugadores con mayor grado de conocimientos pueden plantearse interesantes problemas cuando se procede a cuantificar y establecer conclusiones que implican cadenas de razonamientos, por ejemplo en relación con cálculos de áreas. Si se observan las figuras obtenidas con trazos circulares que se muestran en la Fig. 3(a), calcular las áreas de las figuras sombreadas es un problema que dista de ser trivial, aunque se conozcan los valores de los dos radios con las cuales se obtienen los trazos circulares y las posiciones de los centros correspondientes. Otra actividad interesante es la reproducción de las figuras que se usan en el juego, usando regla y compás, así como la obtención de figuras más complicadas. También puede recurrirse a programas de cómputo que permiten el trazo de figuras geométricas de estructuras complejas y generar patrones bidimensionales que repiten en las direcciones vertical y horizontal la figura principal generada con trazos circulares (Fig. 4). El límite en este tipo de actividades es la imaginación y el tiempo de los participantes.

En todas las modalidades y niveles de juego de CIRTRAFI se promueve un uso de lenguaje natural enriquecido por términos matemáticos tales como círculo, circunferencia, radio, centro, intersección, área, segmento, sector, simetría, rotación... A pesar de que todos los eventos que ocurren durante el juego se comentan, discuten y deciden utilizando el lenguaje natural propio de los jugadores, éstos empiezan a manejar el pensamiento matemático porque los objetos del juego mismo son de naturaleza matemática. Para nada se

---

requiere memorizar definiciones, fórmulas o propiedades. Aparte del interés intrínseco de la interacción social que provoca CIRTRAFI en niños, adolescentes y adultos, este juego ayuda a desarrollar habilidades características del pensamiento matemático tales como establecer correlaciones, hacer abstracciones e inferencias, comparar y decidir, visualizar formas geométricas y describir sus características en términos matemáticos.

En circunstancias como las anteriores, el juego es un vehículo amable y accesible que facilita el paso del lenguaje natural a un lenguaje más técnico que incluye abstracciones propias de una disciplina científica, en este caso de la geometría, para llegar inclusive al manejo de situaciones que requieren del manejo de un lenguaje formal como sería el caso del cálculo de áreas de las figuras sombreadas obtenidas a partir de trazos circulares. Este hecho reviste gran importancia por sus implicaciones en el proceso de aprender y aplicar matemáticas. La siguiente sección considera tales aspectos.

## **8.2 Los lenguajes en el aprendizaje de las matemáticas**

Diferentes actividades de aprendizaje suelen clasificarse y estructurarse de acuerdo con la forma como los conceptos se presentan, representan y utilizan por quien aprende. Por ello Skemp (1980) opina que en relación con las matemáticas: “La meta principal de una presentación lógica es convencer a quienes dudan, mientras que una presentación psicológica busca la comprensión.” ... “La presentación lógica muestra la idea matemática, no la forma matemática de pensar.” Es decir, la presentación lógica consiste en mostrar los productos de los descubrimientos matemáticos, mientras que la presentación psicológica trata de inducir en el aprendiz los procesos involucrados en la comprensión de tales descubrimientos. Por lo mismo, Skemp considera que el aprendizaje de las matemáticas consiste en la formación de estructuras conceptuales, las cuales, en general, se comunican y manejan por medio de símbolos.

Es importante que los aprendices entiendan cómo se presentan los conceptos matemáticos y cómo esos conceptos se registran y utilizan en términos de diferentes tipos de lenguajes. Todo lenguaje, sea éste natural, técnico o formal, es un conjunto de símbolos que siguen ciertas reglas y que tienen como propósito el comunicar mensajes.

---

Entenderemos por registro a todo dispositivo usado para guardar algo. De acuerdo con Duval (1993), el lenguaje natural es el registro más apropiado para iniciar y concluir el proceso de aprender matemáticas. Por ello la enseñanza de esta importante disciplina debe proponer y coordinar actividades de aprendizaje en donde el lenguaje natural expresa diversos registros y es el puente y soporte para construir otros lenguajes, como el técnico y el formal, con sus propios símbolos y reglas de operación.

Es bien conocido que un mismo objeto puede tener diferentes representaciones (palabras, símbolos, fórmulas, modelos, dibujos, esquemas, curvas, gráficas, tablas, códigos...). Cada una de las representaciones proporciona una idea parcial del objeto representado. Las representaciones de los objetos matemáticos adquieren significado y son registradas por el aprendiz de acuerdo con las circunstancias de su uso.

Mediante el empleo de diferentes registros de representación, los aprendices adquieren maestría en interpretar las situaciones matemáticas, utilizando primero su propio lenguaje natural, luego insertando los términos abstractos que componen el lenguaje técnico de la disciplina en cuestión, para pasar al uso del lenguaje formal cuando se manejan situaciones complicadas y luego regresar a su lenguaje natural enriquecido por las tres etapas anteriores. Consideraremos que estas cuatro etapas constituyen un ciclo de aprendizaje (Barojas y Dehesa, 2001).

En función de lo anterior, diremos que el aprendizaje significativo ocurre cuando el aprendiz pasa por ciclos de aprendizaje y logra establecer correspondencias entre distintas representaciones del objeto o situación matemática en cuestión. Esto implica que el aprendiz ha adquirido soltura y seguridad en el empleo de los tres lenguajes (natural, técnico y formal) y maneja diferentes registros de representación. La capacidad de traducir de un lenguaje a otro puede iniciarse mediante actividades lúdicas. Dicha capacidad alcanzará un mayor desarrollo cuando el aprendiz-jugador va más allá del juego y construya conceptos, encuentre y describa propiedades, haga demostraciones y resuelva problemas.

En resumen, un ciclo de aprendizaje en matemáticas consta de las siguientes cuatro etapas, mismas que son usadas de manera gradual e integrada por los estudiantes cuando participan en su propia representación y apropiación del conocimiento:

---

- (1) Descripción de la situación, evento ó fenómeno en lenguaje natural: uso e interpretación de términos y frases según la experiencia y significados que les atribuyen los aprendices en su vida cotidiana.
- (2) Explicación de series de situaciones desde los puntos de vista de los aprendices, pero incluyendo abstracciones que expresan lo que es común en tales situaciones y forman parte del lenguaje técnico característico de una disciplina.
- (3) Uso de registros de representación que integran la estructura de un cierto modelo teórico en donde se describen y explican en lenguaje formal los conceptos y las relaciones conceptuales propias de ese modelo.
- (4) Manejo de cambios de representaciones para describir, predecir y calcular; esto requiere cierto control o maestría de las representaciones involucradas, las cuales luego se interpretan en un lenguaje natural enriquecido.

Para fundamentar el planteamiento anterior, retomemos la consideración Duval (1993) respecto al hecho de que en el aprendizaje de las matemáticas intervienen dos procesos básicos, el de abstracción (A) y el de reconocimiento (R). Asociados a estos procesos del pensamiento y funcionando como elementos que conectan las etapas del ciclo de aprendizaje antes descrito, definimos los niveles  $A_{CL}$ ,  $A_{RE}$ ,  $R_{CN}$  y  $R_{IN}$  (ver Fig. 1, adaptada de Barojas y Dehesa, 2001). La notación correspondiente a los subíndices es la siguiente: (CL) cualitativo, (RE) representacional, (CN) cuantitativo e (IN) interpretativo. A continuación describimos brevemente tales procesos y niveles:

**Abstracción:** proviene de la detección de semejanzas y diferencias en clases de objetos relacionados con nuestras propias experiencias; puede usarse como una referencia general ó servir para atribuir significado a algo. Este proceso permite interpretar relaciones conceptuales con el propósito de utilizar representaciones matemáticas para comprender mejor diferentes fenómenos; sus niveles son:

Cualitativo ( $A_{CL}$ ): se refiere a la abstracción de conceptos en términos cualitativos propios del lenguaje natural que describen situaciones extramatemáticas, mismas que podrían referirse a diferentes puntos de vista del

---

mundo o aún a completos paradigmas científicos, dependiendo de la madurez del aprendiz.

**Representacional** ( $A_{RE}$ ): concierne abstracciones de conceptos expresados en forma matemática; corresponde a representaciones en lenguaje matemático del contenido del nivel  $A_{CL}$  descrito previamente en términos cualitativos.

**Reconocimiento:** es resultado de memorizaciones y reacomodaciones de estructuras conceptuales que sirven para identificar objetos, relaciones ó experiencias; implica el darse cuenta o aceptar propiedades generales relativas a hechos o a conexiones entre ellos. Durante este proceso se construyen modelos matemáticos de diferente grado de complejidad y se aclaran las limitaciones y posibilidades de las situaciones descritas en términos matemáticos. En este caso los niveles asociados son:

**Cuantitativo** ( $R_{CN}$ ): se identifican objetos de naturaleza matemática que se describen usando lenguajes formales y se realizan cambios entre representaciones. Este nivel implica la manipulación del contenido del nivel  $A_{RE}$  apoyados en la estructura y las reglas de operación de las representaciones matemáticas, mismas que se usan para describir, predecir ó calcular.

**Interpretativo** ( $R_{IN}$ ): corresponde al reconocimiento de objetos matemáticos en nuevas situaciones extra-matemáticas en donde se examinan circunstancias de aprendizaje más complejas que las iniciales. Este nivel cierra el ciclo de aprendizaje al interpretar en un lenguaje cotidiano enriquecido lo que se ha logrado en el nivel previo  $R_{CN}$ .

Apoyados en estos dos procesos y sus correspondientes cuatro niveles, planteamos una estrategia de enseñanza que implica que el maestro desempeña dos roles fundamentales, el de modelado y el de instrumentación, mismos que describimos a continuación (ver Fig. 2, también adaptada de Barojas y Dehesa, 2001).

El rol del maestro en el modelado sirve para motivar, desarrollar e ilustrar aplicaciones de conceptos y modelos; se conecta con el proceso de abstracción. Este rol entra en funcionamiento cuando el maestro describe una situación asociada al funcionamiento de cierto sistema o fenómeno y usa como primera versión una explicación en la que emplea el lenguaje natural, para proceder luego a traducirlo e interpretarlo en términos primero del lenguaje técnico y luego del formal (corresponde a los niveles de abstracción  $A_{CL}$  y  $A_{RE}$ ; describe el camino que parte de la etapa 1, pasa por la 2 y llega a la 3; ver Fig. 2).

---

El rol de instrumentación entra en operación cuando el maestro aplica y evalúa la comprensión de los conceptos; se refiere al proceso de reconocimiento. Este rol concierne tareas relacionadas con la identificación, traducción e interpretación de las representaciones matemáticas, las cuales al principio se expresan en el lenguaje formal propio de la disciplina y posteriormente se describen en el de un lenguaje natural enriquecido con la adquisición y aplicación de los conocimientos nuevos que han sido generados mediante el tránsito por las cuatro etapas del ciclo de aprendizaje (corresponde a los niveles de reconocimiento  $R_{CN}$  y  $R_{IN}$ ; parte de la etapa 3, pasa por la 4 y llega nuevamente a la 1; ver Fig. 2).

De acuerdo con la estrategia antes descrita, los niveles antes indicados ( $A_{CL}$ ,  $A_{RE}$ ,  $R_{CN}$  y  $R_{IN}$ ), cumplen las siguientes funciones de naturaleza didáctica:

- explorar: ( $A_{CL} \rightarrow A_{RE}$ ) para promover una búsqueda que pueda conducir al descubrimiento y la invención;
- entrenar: ( $A_{RE} \rightarrow R_{CN}$ ) para desarrollar habilidades de aprendizaje;
- comprender ( $R_{CN} \rightarrow R_{IN}$ ) para mejorar y aplicar el conocimiento ya adquirido; y
- apropiarse ( $R_{IN} \rightarrow A_{CL}$ ) para incorporar y utilizar en términos personales algo recientemente adquirido y aplicarlo satisfactoriamente en situaciones diferentes o más complejas.

De esta manera, la estrategia didáctica que se apoya en el desarrollo de ciclos de aprendizaje permite definir dos tipos de objetivos: el Objetivo 1, que se refiere al proceso de abstracción y va de la exploración al entrenamiento y el Objetivo 2, que está conectado con el proceso de reconocimiento y requiere la aplicación de conceptos matemáticos para pasar de la comprensión a la apropiación de conocimientos.

Conviene mencionar que la noción de ciclo de aprendizaje se ha aplicado al desarrollo de heurísticos útiles en la solución de problemas en física (Barojas y Pérez, 2001) y matemáticas (Barojas y Dehesa, 2004), en sistemas de aprendizaje humano tales como la formación de profesores (Barojas, 2003) y

---



en la construcción del conocimiento organizacional (Barojas y Jiménez, 2003).

Como ejemplo ilustrativo de una aplicación de la inclusión de juegos, del uso de registros de representación y del manejo de lenguajes en el ciclo de aprendizaje antes descritos, proponemos una clasificación de las actividades de aprendizaje contempladas en el curso de Matemáticas I del primer semestre en el Sistema de Bachillerato del Distrito Federal (D.F.). La información correspondiente ha sido tomada directamente de los Programas de Estudio de Matemáticas I, publicados por el Instituto de Educación Media Superior del D.F. En este caso consideramos que los dos primeros niveles del ciclo de aprendizaje, los de abstracción cualitativa y representacional ( $A_{CL}$  y  $A_{RE}$ ), intervienen primordialmente en las aplicaciones de juegos, que en dicho programa sólo ocasionalmente se llega al nivel del reconocimiento cuantitativo ( $R_{CN}$ ) y que es poco probable que se aborde el nivel de reconocimiento interpretativo ( $R_{IN}$ ) que cierra el ciclo de aprendizaje mediante aplicaciones a situaciones extramatemáticas de mayor complejidad respecto de las que inician el ciclo.

En la Tabla 1 presentamos en la primera columna los temas principales de la lista de contenidos del programa de Matemáticas I. Las dos siguientes columnas contienen actividades asociadas a tales contenidos, mismas que hemos distribuido en los niveles correspondientes a  $A_{CL}$ ,  $A_{RE}$  y  $R_{CN}$ . El propósito de estas actividades de aprendizaje es ejercitarse en la exploración de conceptos mediante la manipulación de objetos matemáticos concretos (segunda columna) para pasar posteriormente a actividades conectadas con representaciones simbólicas de los mismos, así como las operaciones y los algoritmos que puedan construirse con ellos (tercera columna). Para apoyar el desarrollo de tales actividades podrán concebirse juegos con tarjetas, fichas y tableros, como en el caso de CIRTRAFI. También podrán utilizarse máquinas articuladas que permitan generalizar construcciones con regla y compás.

La utilización de máquinas articuladas en el contexto antes descrito tiene una triple justificación: (1) implica actividades de exploración y descubrimiento, como en el desarrollo de los juegos del tipo de CIRTRAFI; (2) propicia el manejo de los lenguajes natural, técnico y formal, siguiendo los niveles del ciclo de aprendizaje considerado en este trabajo, y (3) permite desarrollar actividades de aprendizaje asociadas a los niveles  $A_{CL}$ ,  $A_{RE}$ ,  $R_{CN}$  y  $R_{IN}$ , según sea el grado de madurez alcanzado por los estudiantes en relación con

---

el manejo de los registros de representaciones. Todos y cada uno de estos aspectos influyen en el desarrollo del pensamiento matemático.

La importancia del diseño de actividades de aprendizaje referidas a transiciones entre las etapas constitutivas del ciclo de aprendizaje estriba en que si los alumnos participan activamente en ellas, de dicha participación podrán derivarse la construcción y aplicación de conocimientos. Esto significa que, de acuerdo con Jonassen, Peck y Wilson (1999), los alumnos deben involucrarse en actividades que les presenten novedad e interés y de las cuales obtengan aprendizajes, para que después manifiesten lo que han aprendido al ejecutar tales actividades. Nuestra propuesta consiste justamente en desarrollar juegos y construir máquinas para la enseñanza de las matemáticas que sean utilizadas como instrumentos concretos para propiciar dichos aprendizajes.

**Agradecimientos.** Hacemos reconocimiento al trabajo de Silvia Villarreal Bello para preparar las figuras 3 y 4 de CIRTRAFI, a partir de documentos generados por Martha Islas Meza y la conceptualización de dicho juego realizada por Nahina Dehesa.

---

## Referencias

- Barojas, J., Canencia, T. Escalante, L., T. García, E. González y M. Islas. 1999. *Retos para jugar*. Congreso de SOMEDYCIT en León, Guanajuato.
- Barojas, J. y Dehesa, N., 2001. Mathematics for Social Scientists: Learning Cycles and Teaching Strategies. *Industry and Higher Education*. Vol. 15, No. 4, pp. 269 – 277.
- Barojas, J. y R. Pérez. 2001. *Physics and Creativity: Problem Solving and Learning Contexts*. **Industry and Higher Education**. Vol. 15, No. 6, pp.1–9.
- Barojas, J. 2003. *Teacher training as collaborative problem solving*. **Educación Technology and Society**.
- Barojas, J. y E. Jiménez. 2003. *Gestión del conocimiento organizacional en educación*.
- Barojas, J. y N. Dehesa. 2004. *Semiotic representations in problem solving and writing*. (Sometido a publicación).
- Duval, R. 1993. *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée* (Registros de representaciones semióticas y funcionamiento cognitivo del pensamiento), **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, Vol. 5, IREM Strasbourg, Francia.
- Hesse, H. 1943. *Das Glasperlenspiel (EL juego de abalorios)*. Fretz und Wasmuth Verlag, Zúrich, Switzerland. En traducción de Alianza Editorial, Madrid, España (2000).
- Jonassen, D.H., K.L. Peck y B.G. Wilson, B.G., (1999) *Learning with technology: A Constructivist Perspective*. Prentice Hall. Merrill. Estados Unidos.
- Skemp, R. 1980. *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*, Ed. Morata, Madrid, España.
-

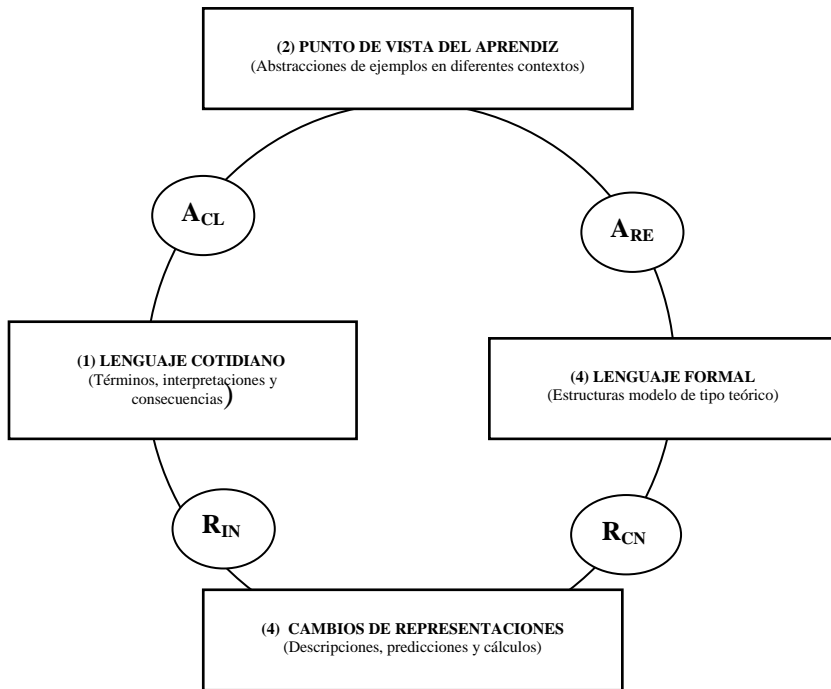


Figura 1. Ciclo de aprendizaje utilizado en la construcción del conocimiento matemático.

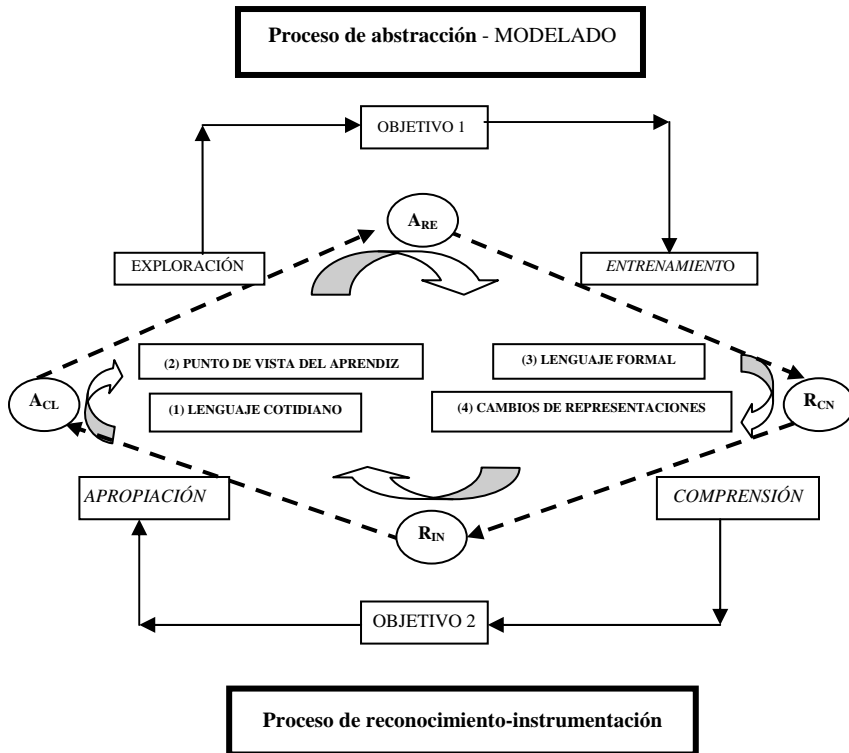


Figura 2. Diagrama de una estrategia didáctica para el desarrollo de conceptos matemáticos.

**Tabla 1.**  
**Actividades de aprendizaje para el curso de Matemáticas I**

<b>TEMAS</b>	<b>ABSTRACCIÓN (A<sub>CL</sub> y A<sub>RE</sub>)</b>	<b>RECONOCIMIENTO(R<sub>CN</sub>)</b>
Lenguajes simbólicos	Opinar, discutir y representar con símbolos.	Verbalizar, escribir e inducir.
Números Naturales	Repasar operaciones y trabajar con propiedades de conmutatividad, asociatividad y distributividad.	Uso de paréntesis. Cálculo de áreas de cuadrados y rectángulos.
Sistemas Antiguos de Numeración	Comparar sistemas como el maya, babilónico, romano y egipcio.	Realizar conversiones entre tales sistemas.
Bases	Leer y escribir en distintas bases.	Manejar sistemas posicionales y algoritmos.
Múltiplos y Divisores	Ejercicios para la obtención de múltiplos y divisores.	Obtención del mínimo común múltiplo y del máximo común divisor.
Primos y Algoritmo de Euclides	Factorización.	Algoritmos de descomposición.
Números Enteros	Operaciones y leyes de signos.	Uso de paréntesis, recta numérica y valor absoluto.
Ecuaciones (Primer acercamiento)	Ecuaciones con enteros.	Tablas de expresiones. Uso de lenguaje algebraico.
Construcciones con Regla y compás	Construcción de perpendiculares, paralelas, mediatrices, puntos medios y bisectrices.	Copiar ángulos. Operaciones con segmentos.
Congruencia	Obtención de criterios de congruencia a partir de construcciones con regla y compás para copiar triángulos y polígonos.	Justificación formal de las construcciones con regla y compás (primer paso hacia la demostración)
Propiedades del triángulo	Clasificación de triángulos. Construcción de mediatrices, bisectrices, alturas y medianas.	Necesidad y lógica de las demostraciones geométricas.
Área	Cálculo de áreas de triángulos.	Construcción de tablas (acercamiento a funciones).
Ángulos	Medidas con transportador. Distinción de ángulos congruentes.	Demostración de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.
Semejanza (primer acercamiento)	Dividir un segmento en cierto número de partes iguales.	Demostración intuitiva.
Introducción a los números naturales	Definición y notación. Construcción con regla y compás.	Fraciones equivalentes. Operaciones con fracciones.
Ecuaciones (segundo acercamiento)	Solución de ecuaciones de primer grado y obtención de tablas.	Plantear y resolver ecuaciones a partir de problemas.

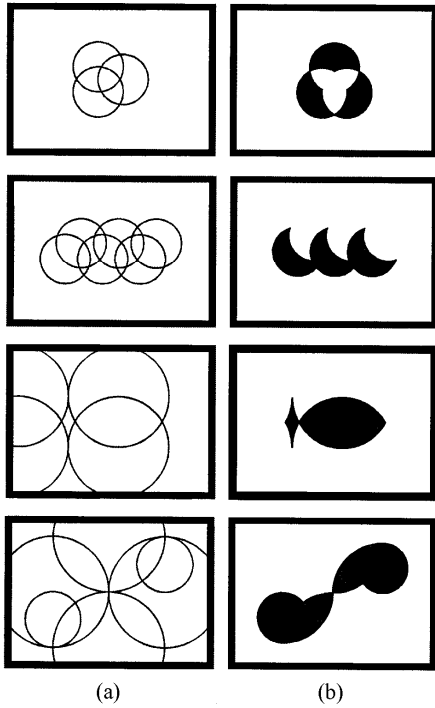


Fig. 3. (a) Trazos circulares.  
(b) Figuras correspondientes con CIRTRAFI

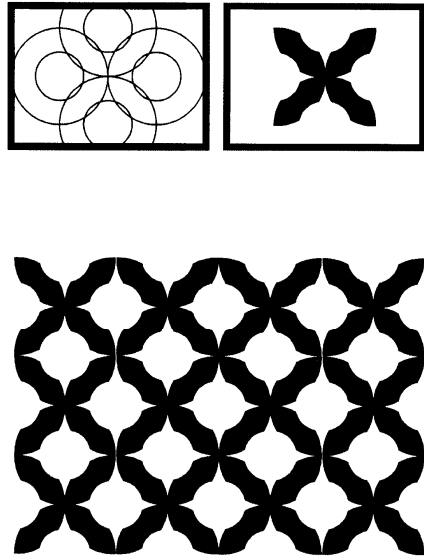


Fig. 4. Ejemplo del diseño de un patrón formado por la reproducción de una figura compleja obtenida mediante trazos circulares