UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

APUNTES DE CÁLCULO DIFERENCIAL PARA BACHILLERATO MODULAR NO ESCOLARIZADO

REPORTE DE ACTIVIDAD DOCENTE

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C A

P R E S E N T A :

MIRIAM SANDOVAL LEÓN

TUTORA:
M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA

2010

Hoja de Datos del Jurado
1. Datos del alumno Sandoval León Miriam 53-62-07-60 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Carrera: Matemáticas 0-7935158-0
2. Datos del Tutor M en C Elena de Oteyza de Oteyza
3. Datos del Sinodal 1 Mat Laura Pastrana Ramírez
4. Datos del Sinodal 2 M en C Emma Lam Osnaya
5. Datos del Sinodal 3 M en C Agustín Ontiveros Pineda
6. Datos del Sinodal 4 M en C Alejandro Bravo Mojica
7. Datos del trabajo escrito Apuntes de Cálculo Diferencial para Bachillerato Modular no escolarizado. 102p 2010

A mi familia

con todo mi cariño.

Agradecimiento especial a:

M. en C. Elena de Oteyza de Oteyza

Por su paciencia y asesoría para la elaboración de este trabajo.

Gracias a:

Mat. Laura Pastrana Ramírez
M. en C. Emma Lam Osnaya
M. en C. Agustín Ontiveros Pineda
M. en C. Alejandro Bravo Mojica

Por sus aportaciones y por aceptar ser parte del jurado.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo surge de la necesidad tanto de los estudiantes del Colegio Nacional de Capacitación Intensiva (CNCI), y de una inquietud personal, como asesora de este centro de enseñanza, de contar con un material de apoyo para el estudio de la materia de Cálculo Diferencial.

En este centro de enseñanza, se abarca el plan de estudios de cada materia en un periodo de cuatro semanas en forma de asesorías. En particular, las materias de ciencias exactas, como son Matemáticas, Física y Química, tienen asignadas 40 horas de asesoría por módulo.

Estos apuntes están apegados al plan de estudio establecido en este centro de enseñanza, con lo que pretende cubrir las necesidades específicas de los estudiantes de este tipo de bachillerato modular no escolarizado. Se pretende que con estas herramientas básicas el estudiante pueda, por su cuenta, profundizar en el estudio de los diferentes temas de Cálculo Diferencial.

El material de trabajo que se presenta, tiene como objetivo que el alumno tenga la opción de avanzar en sus conocimientos tanto dentro como fuera de la escuela y de forma individual y/o en equipo, ya que por lo reducido del tiempo de los módulos, no es posible abarcar todos los temas únicamente en el tiempo de la asesoría aunque los alumnos siempre tienen la opción de preguntar sus dudas. El estudio externo es también una forma de fomentar el autoaprendizaje en los alumnos.

Espero que estos apuntes también sean de utilidad para los asesores que impartan la materia, como apoyo para la organización de las asesorías de la misma.

La estructura general de los apuntes es la siguiente:

- Se basan en los objetivos definidos para cada tema.
- Se presentan los conceptos teóricos de cada tema de forma resumida.
- Se desarrollan ejemplos resueltos.
- Se presentan problemas de aplicación.
- Se proponen ejercicios y problemas para que sean resueltos por el alumno.

Los temas están divididos por semana, de la siguiente manera:

En el Capítulo I se presenta el material de estudio de la primera semana. Se retoman concepto básicos definidos ya en cursos anteriores, como son el concepto de relación, función, y la clasificación de estas últimas.

El Capítulo II corresponde a la segunda semana. Se introduce el concepto de límite, así como su definición formal. Se presentan las propiedades de los límites de funciones y los teoremas para cálculo de límites, incluso para formas indeterminadas. En este capítulo, se ha tratado de ejemplificar cada uno de los teoremas presentados aunque también se dan ejemplos de cálculo de límites por medio de la definición formal, estos últimos sólo son presentados y ejemplificados, pero no se profundiza en ellos, ya que para esto se requeriría de un tiempo mayor al que se establece para este curso. Sin embargo, este tema es contemplado por ser parte del plan de estudio de la materia.

En el Capítulo III se presentan los temas de la cuarta semana. Se revisan los temas de derivada y razón de cambio. Se inicia con la definición de derivada y se resuelven ejercicios utilizando el método de los cuatro pasos y las principales fórmulas de derivación.

En el Capítulo IV se revisan los temas de la semana 4.Se presentan ejemplos y ejercicios de máximos y mínimos en los que se pretende mostrar la aplicación de los mismos en diferentes áreas del conocimiento.

Por último, se presenta un anexo que contiene el Plan de Estudios de la materia de Cálculo Diferencial, en la que se han basado estos apuntes, así como la bibliografía básica que permitirá complementar este material.

Con la convicción de que los alumnos, que llegan a tomar este curso, son personas capaces de aprender todos los temas presentados en este material contando la guía del asesor, espero que estos apuntes faciliten el cumplimiento de los objetivos de la materia de Cálculo Diferencial que son:

- Aportar los conceptos básicos y fundamentales de Cálculo Diferencial de manera clara y resumida.
- Motivar al alumno a profundizar en el estudio de cada tema.
- Que el alumno conozca la importancia que tiene el estudio del Cálculo Diferencial en la vida cotidiana y cómo se relaciona con diferentes áreas del conocimiento.
- Que el alumno pueda "reconstruir" el conocimiento adquirido en base a los ejercicios propuestos de cada tema.
- Que el alumno desarrolle un pensamiento crítico a los resultados obtenidos para los ejercicios propuestos.
- Que el alumno desarrolle una metodología de investigación, estudio y autoaprendizaje.

CAPÍTULO I.

1. CONCEPTOS BÁSICOS

1.1. RELACIONES Y FUNCIONES

En esta sección, se recordarán algunos elementos básicos relacionados con funciones y relaciones.

1.1.1. PRODUCTO CARTESIANO

Si tenemos dos conjuntos *A* y *B*, y tratamos de armar todas las parejas posibles formadas por un elemento del conjunto *A* y un elemento del conjunto *B*, obtendremos el producto cartesiano de los dos conjuntos. Se representa como:

$$A \times B.$$

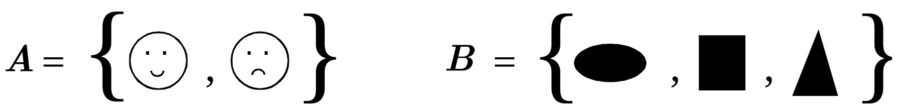
Podemos representarlo de diferentes formas: Tablas, diagramas de flechas, diagramas de árbol, y gráficas cartesianas. Cada pareja que formemos con un elemento *a* de *A* y uno *b* de *B*, en ese orden, recibe el nombre de pareja ordenada de tal manera que la definición de producto cartesiano queda establecida de la siguiente forma:

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

Esto es, el conjunto de parejas ordenadas *a, b* tales que *a* está en *A* y *b* está en *B*.

Ejemplo:

Dados los conjuntos ***A*** y ***B***



Su representación, en diferentes formas del producto cartesiano $A \times B$ es***:***

Tabla:

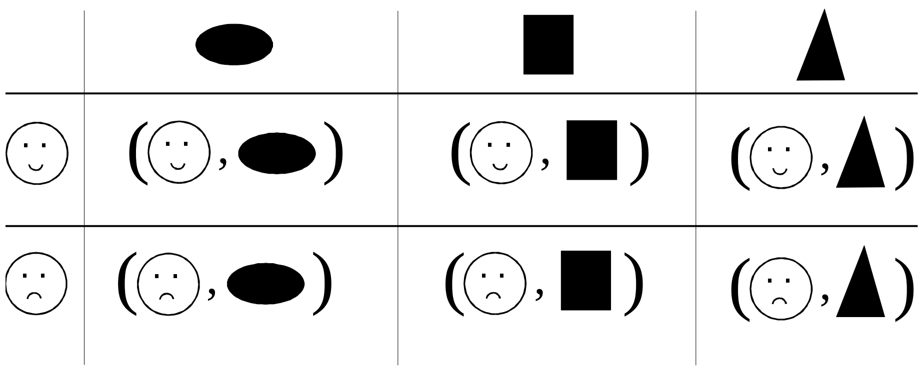


Diagrama de Flechas

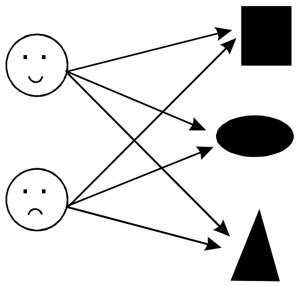
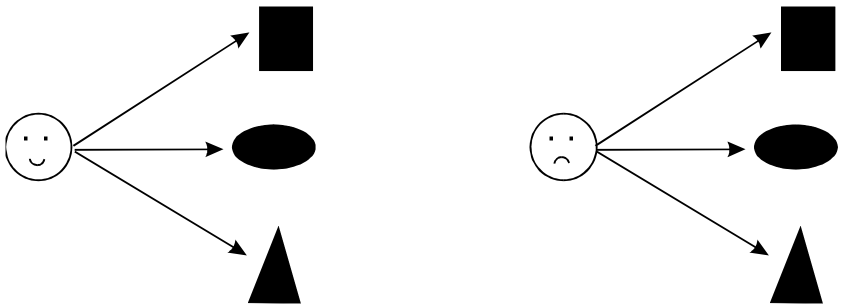
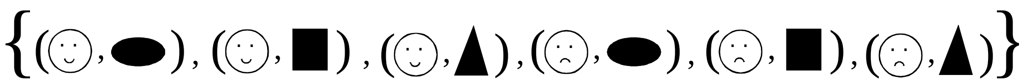


Diagrama de árbol



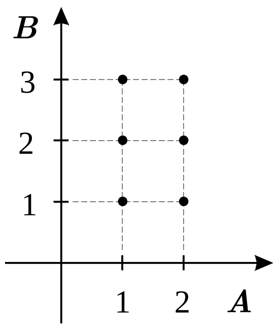
Todas ellas representan a las siguientes parejas ordenadas:

$A \times B =$ 

Otra representación gráfica del producto cartesiano es la de las gráficas cartesianas, pero en éstas solamente podemos representar conjuntos en los que se tenga definido un orden.

Ejemplo 1:

Si $A = \{1,2\}$ y $B = \{1,2,3\}$ se tiene que $A \times B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\}$.
Su representación como gráfica cartesiana es:



Ejemplo 2:

Un equipo de fútbol escogerá el uniforme que utilizará la siguiente temporada. Digamos que *A* es el conjunto de las playeras que se pueden elegir y ***B*** el conjunto de los shorts. Encontrar todas las posibilidades de los uniformes que se pueden escoger.

A = {azul, roja, café, verde}   *B* = {azul, negro, blanco}

Solución:

Formemos la tabla de posibles uniformes que representa $A \times B$:

Playeras / Shorts	*a* = Azul	*r* = Roja	*c* = Café	*v* = Verde
a = Azul	*(a, a)*	*(r, a)*	*(c, a)*	*(v, a)*
n = Negro	*(a, n)*	*(r, n)*	*(c, n)*	*(v, n)*
b = Blanco	*(a, b)*	*(r, b)*	*(c, b)*	*(v, b)*

El producto cartesiano representado por parejas ordenadas es:

$A \times B = \{(a,a),\ (a,n),\ (a,b),\ (r,a),\ (r,n),\ (r,b),\ (c,a),\ (c,n),\ (c,b),\ (v,a),\ (v,n),\ (v,b)\}$.

Ejemplo 3:

Representar el producto cartesiano $A \times B$ de los conjuntos $A = \{1,3,5\}$ y $B = \{2,4,6,8\}$ utilizando parejas ordenadas.

$$A \times B = \{(1,2),(1,4),(1,6),(1,8),(3,2),(3,4),(3,6),(3,8),(5,2),(5,4),(5,6),(5,8)\}.$$

1.1.2. RELACIONES

Se llama relación entre los conjuntos *A* y *B* a un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. Este puede estar formado por una sola pareja ordenada, varias o todas las que forman parte de $A \times B$.Al conjunto *A* se le llama dominio y al conjunto *B* se le llama contradominio.

Ejemplo: Dados conjuntos $A = \{1,3,5\}$ y $B = \{2,4,6,8\}$ tenemos que

$$A \times B = \{(1,2),(1,4),(1,6),(1,8),(3,2),(3,4),(3,6),(3,8),(5,2),(5,4),(5,6),(5,8)\}.$$

Podemos definir las siguientes relaciones:

a) R es el subconjunto del producto cartesiano $A \times B$ formado por las parejas cuya primera coordenada es 1:

$$\mathrm{R} = \{(1,2),(1,4),(1,6),(1,8)\}.$$

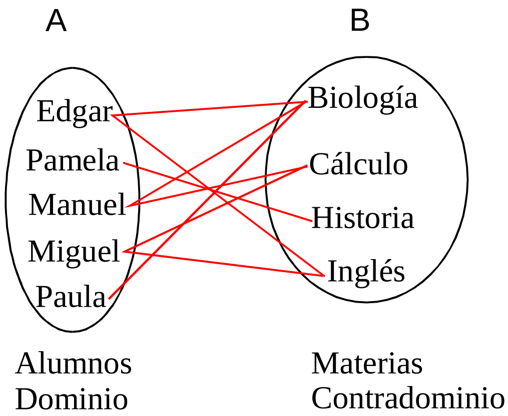
b) S es el subconjunto del producto cartesiano $A \times B$ formado por las parejas cuya segunda coordenada es menor que 5:

$$\mathrm{S} = \{(1,2),(1,4),(3,2),(3,4),(5,2),(5,4)\}.$$

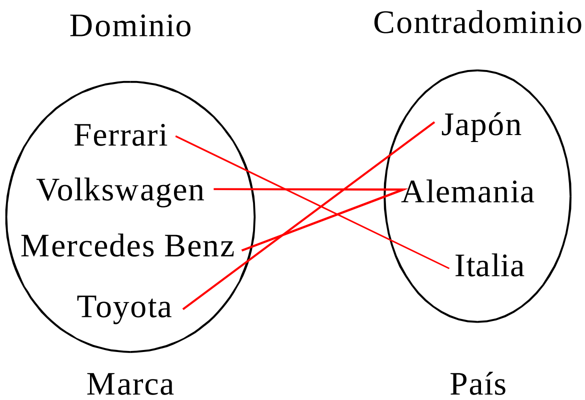
Como se puede observar, en los ejemplos anteriores los conjuntos R y S, son subconjuntos del producto cartesiano $A \times B$. A estos conjuntos les llamamos ***relaciones***.

Ejemplos de relaciones:

a) Definimos m como la relación de los alumnos de Prepa Plus y las materias que cursa en el módulo actual.



b) Definimos p como la relación entre la marca de un coche con el país que lo produce



c) Sea q la relación entre los números naturales pares menores que 8

$$q = \{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4)(6,6)\}.$$

d) Sea s la relación entre los números naturales menores que 3

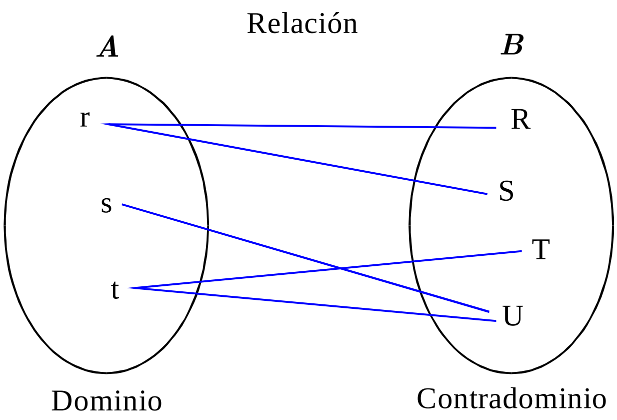
$$s = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}.$$

1.1.3. FUNCIONES.

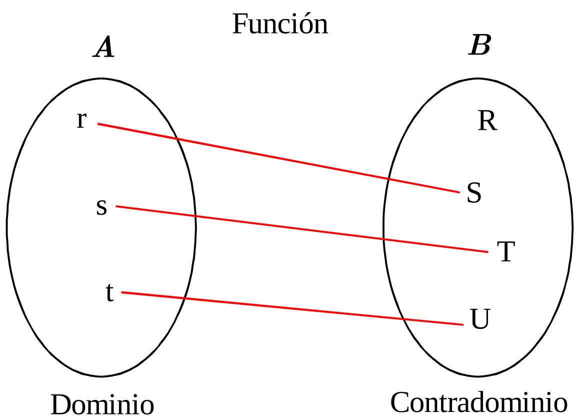
Una ***función*** es una relación que existe entre dos conjuntos, con la condición de que a cada elemento del ***dominio*** le corresponde ***uno y sólo un*** elemento del ***contradominio***. Cada elemento del ***contradominio*** que está **relacionado** con algún elemento del **dominio** recibe el nombre de ***imagen*** de éste. El conjunto de imágenes se llama ***rango*** o ***dominio de imágenes***. El ***rango*** es un subconjunto propio o impropio del ***contradominio***.

En consecuencia, **toda *función* es una *relación***, pero algunas relaciones no son funciones.

Ejemplo 1:



Ejemplo 2:



Si el **Ejemplo 1**, lo representamos por parejas ordenadas se tiene que:

$$A \times B = \{(r, R), (r, S), (s, U), (t, T), (t, U)\},$$

donde se ve que hay elementos en *A* como *r*, al cual le corresponden dos elementos de *B*, por lo que este ejemplo representa una relación y no una función.

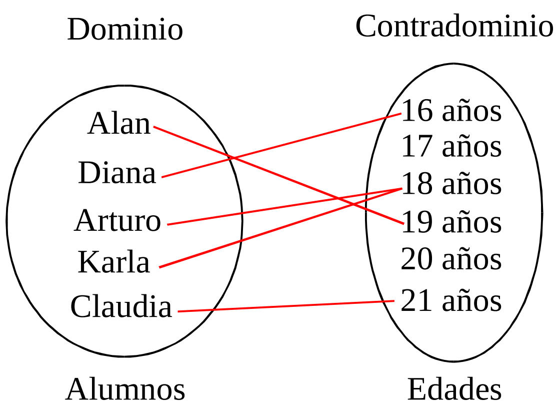
En una función, la ***Regla de correspondencia*** define la **asociación** que hay entre el ***dominio*** y el ***contradominio***.

Dada una función, a la variable a la que se asignan valores, se llama ***variable independiente.***

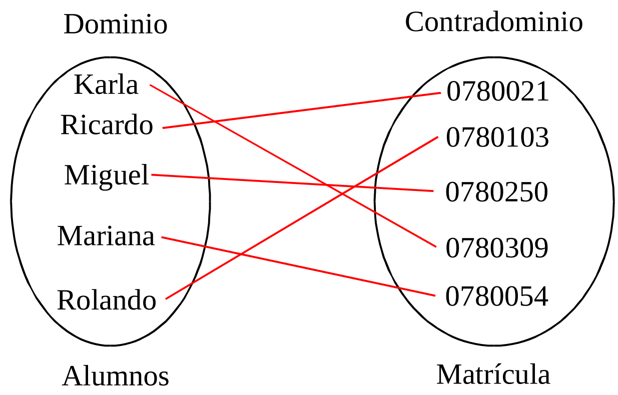
La ***variable dependiente***, es aquella que su valor se determina "dependiendo" de la ***variable independiente***.

Ejemplos de funciones:

a) Definimos *f* como la edad de cada persona de un grupo:



b) Definimos g como la función entre cada alumno de CNCI y su matrícula



c) Sea h la función entre los números naturales menores que 5 y su doble

$$h = \{(1,2), (2,4), (3,6), (4,8)\}.$$

d) Sea k la función entre los números naturales menores que 5 y el número 3

$$k = \{(1,3), (2,3), (3,3), (4,3)\}.$$

1.1.4. ACTIVIDADES DE REFUERZO.

I. Resuelve los siguientes ejercicios sobre producto cartesiano.

a) Escribe un ejemplo práctico en el que utilices producto cartesiano.

b) Escribe la representación en parejas ordenadas del producto cartesiano $A \times B$ si: $A = \{-2,-1,0,1,2\}$ y $B = \{-1,1\}$.

II. De los siguientes ejemplos, di cuales son relaciones y cuáles son funciones. Representa gráficamente.

a) Sea f la relación que asocia las fechas del mes de julio con los días de la semana.
b) Sea h la relación que asocia a cada mujer que es madre, con sus hijos.
c) Sea g la relación que asocia a cada país con su capital.

III. Propón dos ejemplos de funciones y dos de relaciones.

IV. De los siguientes conjuntos de parejas ordenadas, identifica cuáles son funciones y cuáles no.

$a)$ $\{(-2,2),(-1,1),(0,0),(1,1),(2,2)\}.$

$b)$ $\{(3,2),(4,2),(5,3),(6,3)\}.$

$c)$ $\{(4,7),(5,7),(6,8),(7,8)\}.$

$d)$ $\{(1,0),(2,4),(3,5),(3,6),(5,4)\}.$

1.2. FUNCIONES REALES

Una *función* se define por tres elementos: ***El dominio, el contradominio y la regla de correspondencia:***

Una *función real de variable rea*l, es aquella que tiene como ***dominio*** un subconjunto de los números reales y su ***contradominio*** es el conjunto de los números reales.

Si en una función f, el dominio se representa con A y el ***contradominio*** con B y f es la ***regla de correspondencia*** entre el ***dominio*** y el ***contradominio***, la función será representada como:

$$f: A \to B \qquad y = f(x) \quad \text{donde } x \in A,\ y \in B$$

Ejemplos:

1. $f: \Re \to \Re$ tal que $f(x) = 2x + 4, \qquad y = 2x + 4.$
2. $f: \Re \to \Re$ tal que $f(x) = x^3 + 3x - 8, \qquad y = x^3 + 3x - 8.$
3. $f: \Re \to \Re$ tal que $f(x) = \operatorname{sen}(x), \qquad y = \operatorname{sen}(x).$
4. $f: \Re \to \Re - \{0\}$ tal que $f(x) = \dfrac{1}{x}, \qquad y = \dfrac{1}{x}.$

En los ejemplos anteriores, x representa a la ***variable independiente***, así como y o $f(x)$ a la variable dependiente.

1.2.1. TRAZO DE GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES REALES

La ***gráfica de una función*** es el conjunto de puntos en el plano de la forma (x, y) en donde ***x*** está en el dominio de la función, ***y*** está en el ***contradominio***. A la ***x*** también se le llama abscisa y a la ***y*** ordenada:

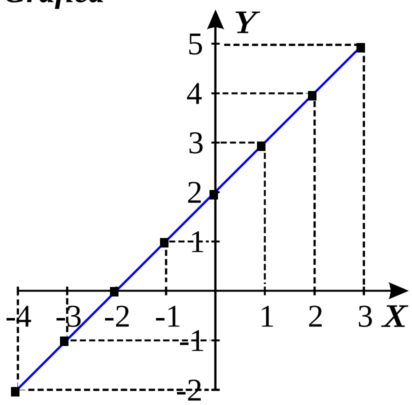
Ejemplo: Representar gráficamente la función $f(x) = x + 2$

Hagamos la tabla de $f(x) = x + 2$ y dibujemos los puntos en el plano que le corresponden:

En la columna de x pondremos algunos puntos del dominio. En la columna y, la imagen correspondiente de x bajo la función:

Tabla ***Gráfica***

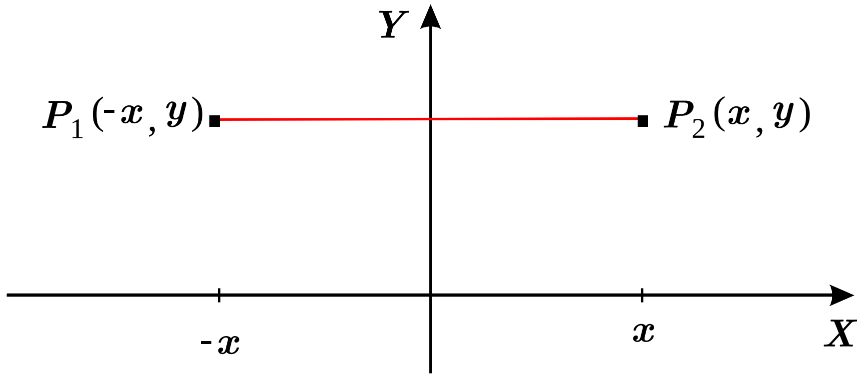
x	$y = f(x)$
-4	-2
-3	-1
-2	0
-1	1
0	2
1	3
2	4
3	5



1.2.2 .SIMETRÍA CON RESPECTO AL EJE Y

Un elemento que resulta un auxiliar en la gráfica de funciones, es determinar si existe una simetría de la función con respecto al eje ***Y***.

Si los puntos P_1 y P_2 son simétricos con respecto al eje ***Y*** y las coordenadas de P_1 son $(-x, y)$, entonces las coordenadas de P_2 serán (x, y); es decir, P_1 y P_2 tienen la misma ordenada y sus abscisas tienen el mismo valor absoluto pero diferente signo.



1.2.3. INTERSECCIÓN CON LOS EJES

Al trazar la gráfica de una función, es importante encontrar los puntos de intersección de la gráfica con los ejes.

Cuando una gráfica intersecta el eje ***X*** entonces la ordenada es cero y corresponden a las raíces o soluciones reales de una ecuación, también conocidas como ceros de la función.

Cuando una gráfica intersecta el eje ***Y*** entonces la abcisa es cero.

Ejemplo:

Determinar los puntos de intersección de $y = -\frac{2}{3}x + 2$ con los ejes.

Solución:

La intersección con el eje ***Y*** se obtiene sustituyendo *x* con cero en la ecuación.

Si *x* = 0 entonces (sustituimos el valor de ***x*** en la ecuación) de donde

$$\begin{aligned} y &= -\frac{2}{3}(0) + 2 \\ &= 0 + 2 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Por tanto, $(0,2)$ es el punto de intersección con el eje ***Y.***

La intersección con el eje ***X*** se obtiene sustituyendo *y* con cero en la ecuación.
Si $y = 0$, entonces (sustituimos el valor de ***y*** en la ecuación) y despejamos *x*:

$$0 = -\frac{2}{3}x + 2$$

$$-2 = -\frac{2}{3}x$$

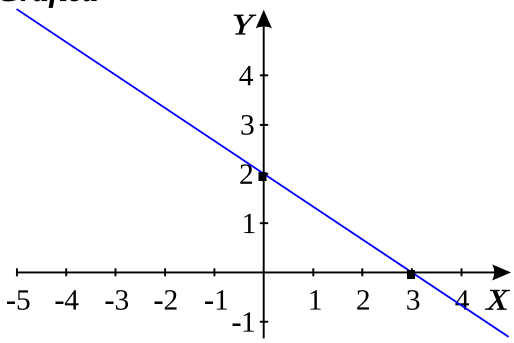
$$x = \frac{-2}{-\frac{2}{3}}$$

$$x = 3.$$

Por tanto, (3, 0) es el punto de intersección con el eje ***X.***

Tabla	
x	y
0	2
3	0

Gráfica



1.2.4. CARACTERÍSTICAS GENERALES DE LAS FUNCIONES

Se dice que una función es ***inyectiva*** si cada elemento del ***contradominio*** es ***imagen*** de, cuando más, un elemento del dominio. A una función *inyectiva* también se le conoce como ***función uno a uno***.

Se dice que una función es ***suprayectiva*** si cada elemento del ***contradominio*** es ***imagen*** de cuando menos un elemento del ***dominio***. A una función ***suprayectiva*** también se le llama ***función sobre.***

Las funciones en que a elementos diferentes del *dominio* corresponden ***imágenes*** distintas y, además, cada elemento del ***contradominio*** es *imagen* de algún elemento del ***dominio***, son ***inyectivas y suprayectivas*** a la vez, se llaman ***funciones biyectivas***. A la ***función biyectiva*** también se le llama ***función biunívoca***.

1.2.5. FUNCIONES BÁSICAS

A continuación se describirán algunas funciones reales de variable real, sus gráficas y sus propiedades:

1.2.5.1. FUNCIÓN CONSTANTE

Sea $f:\Re\to\Re$, tal que $f(x)=k$ con $k\in\Re$.

Ejemplo:

Sea $f:\Re\to\Re$**,** tal que $f(x)=3$.

Gráfica de una función constante $f(x)=3$

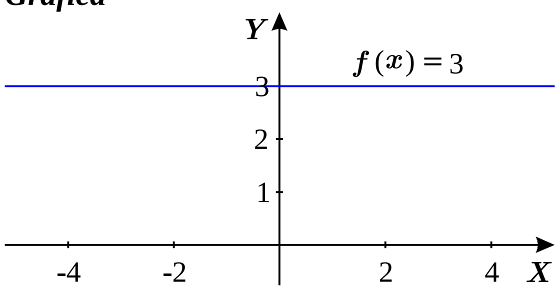
Es el conjunto de puntos del plano que representan a las parejas ordenadas de la función, donde su primera componente es un número real y su segunda componente es el valor constante; en este caso el número 3.

Tabla

Datos

x	y
-2	3
-1	3
0	3
1	3
2	3

Gráfica



Propiedades de la función constante $f(x) = 3$

.

a) Inyectividad.

A cada elemento del dominio corresponde el ***3*** como ***imagen***, de manera que diferentes elementos del ***dominio*** tienen la misma ***imagen***; por tanto, esta función ***constante*** **no es** ***inyectiva***.

b) Suprayectividad.

Como el ***dominio*** y el ***contradominio*** de la función son los números reales y a cualquier $x \in \Re$ le corresponde el número 3, entonces si llamamos ***C*** al conjunto de las imágenes de $f(x)$ tenemos que:

$C = \{3\}$ y $\{3\} \neq \Re$ por consiguiente, la función no es *suprayectiva.*

c) Biyectividad.

La función no es ***inyectiva ni suprayectiva;*** en consecuencia, tampoco es *biyectiva.*

1.2.5.2. FUNCIÓN IDENTIDAD:

Sea: $f : \Re \to \Re$ tal que $f(x) = x$.

Gráfica de la función identidad:

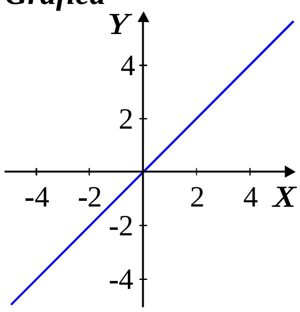
Es el conjunto de puntos del plano que representan a las parejas ordenadas de la función, cuyas primeras y segundas componentes son el mismo número real.

Tabla

Datos

x	y
-3	-3
-2	-2
-1	-1
0	0
1	1
2	2

Gráfica



a) ***Inyectividad.***

Dados dos números reales diferentes, las imágenes que les corresponden también son diferentes; es decir: Si $x_1, x_2 \in \Re$ y $x_1 \neq x_2$, entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$ por consiguiente, la *función identidad* es *inyectiva.*

b) Suprayectividad.

La *imagen de la función identidad* es igual al contradominio $\Re$; en consecuencia, la función identidad es *suprayectiva.*

c) Biyectividad.

La *función identidad* es *inyectiva* y *suprayectiva* a la vez, por lo que también es *biyectiva.*

1.2.5.3. FUNCIÓN CUADRÁTICA

Sea $f:\Re \to \Re$, tal que $f(x)=x^2$.

Gráfica de la función cuadrática: es el conjunto de los puntos del plano que representa a las parejas ordenadas de la función. La primera componente es un número real y la segunda componente es el cuadrado de la primera.

$$\{(x, f(x)) \mid f(x)=x^2, x\in \Re\}.$$

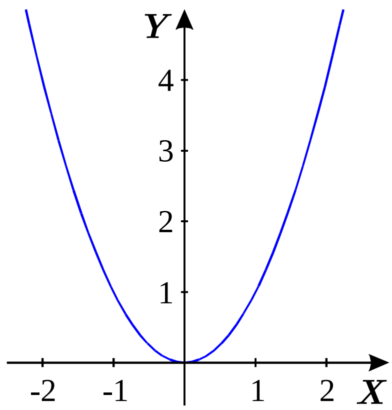
Veamos la gráfica de esta función:

Tabla

Datos

x	$y=x^2$
-2	$(-2)^2=4$
-1	$(-1)^2=1$
0	$(0)^2=0$
1	$(1)^2=1$
2	$(2)^2=4$

Gráfica



Otro ejemplo de función cuadrática es el siguiente:

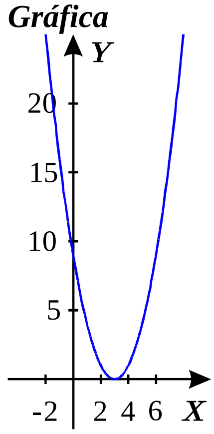
Sea $f:\Re \to \Re$ con $f(x)=(x-3)^2$.

Tabla

Datos

x	y
1	$(1-3)^2=(-2)^2=4$
2	$(2-3)^2=(-1)^2=1$
3	$(3-3)^2=(0)^2=0$
4	$(4-3)^2=(1)^2=1$
5	$(5-3)^2=(2)^2=4$
6	$(6-3)^2=(3)^2=9$

Gráfica



a) ***Inyectividad***: Existen dos números reales diferentes – por ejemplo, dos números simétricos – tales que su imagen bajo la función es la misma. Al trazar *rectas paralelas al eje X*, cada una de ellas corta en dos puntos a la representación geométrica de la gráfica de la función, por ello, la *función cuadrática no es inyectiva.*

b) ***Suprayectividad***: La función cuadrática tiene *dominio* y *contradominio* real, pero su imagen es el conjunto de los *números reales no negativos* y no la totalidad de los números reales, es decir, existen elementos en el *contradominio* (los números reales negativos), los cuales no son imagen bajo la función, de algún elemento del *dominio*, entonces la *función cuadrática no es suprayectiva*.

c) ***Biyectividad***: Dado que la *función cuadrática* no es *inyectiva* ni *suprayectiva*, tampoco es *biyectiva*.

1.2.5.4. ACTIVIDADES DE REFUERZO.

a) Traza la gráfica de siguiente función constante: Sea $f:\Re \to \Re$ tal que $f(x) = -2$.

b) Dada la función $f:\Re \to \Re$, tal que $f(x) = -x$, traza su gráfica y describe las diferencias con $g:\Re \to \Re$, $g(x) = x$.

3) Traza la gráfica de la siguiente función cuadrática: Sea $f:\Re \to \Re$, tal que $f(x) = -2x^2$.

1.2.6. CLASES DE FUNCIONES.

De manera general, las funciones se clasifican en algebraicas y trascendentes.

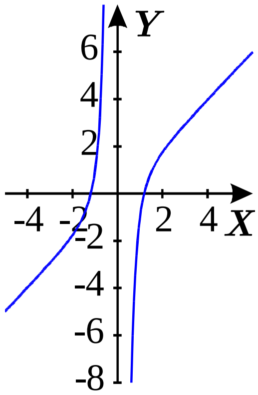
1.2.6.1. FUNCIONES ALGEBRAICAS

Una función algebraica es aquella cuyo valor se puede obtener mediante sumas, restas, multiplicaciones, divisiones o extracción de raíces.

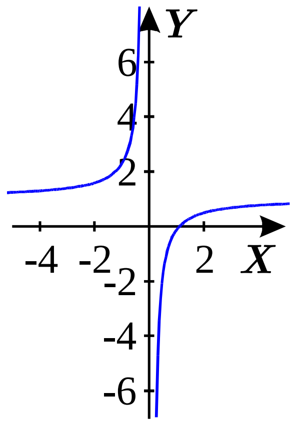
En los ejemplos se muestran las gráficas de las funciones para que los alumnos se familiaricen con ellas. Con los elementos con que cuentan en este momento, no podrían dibujarlas con exactitud.

Ejemplos:

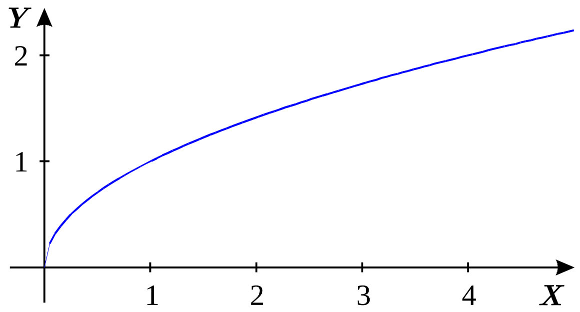
a) $f(x) = x - \dfrac{2}{x^3}$.



b) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$.



c) $f(x) = \sqrt{x}$.



1.2.6.2. FUNCIONES POLINOMIALES

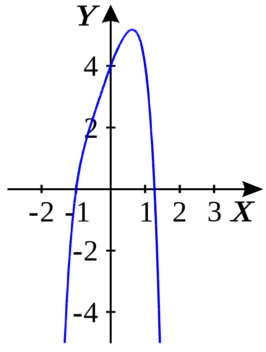
Una función polinomial es una función algebraica cuya regla de correspondencia es un polinomio en una variable.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

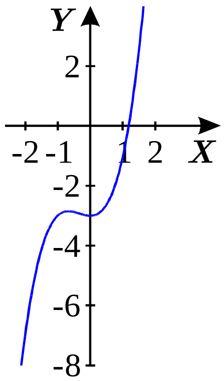
donde $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ... a_2, a_1, a_0$ son números reales, $a_n \neq 0$.

Ejemplos:

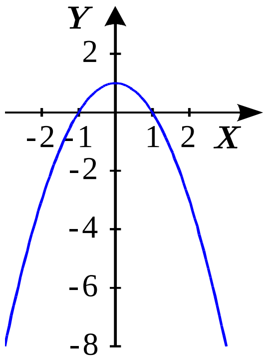
a) $f(x) = -x^6 - x^3 - 2x^2 + 3x + 4$.



b) $f(x) = x^3 + x^2 - 3$.



c) $f(x) = -x^2 + 1$.



1.2.6.3. FUNCIONES TRASCENDENTES

Las funciones trascendentes son las funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales.

1.2.6.3.1 *FUNCIÓN LOGARÍTMICA*

Recordemos que el logaritmo de un número es el exponente al cual se debe elevar la base para obtener dicho número. Es decir, se tiene la expresión:

$$2^3 = 8.$$

Al dos le llamaremos base, al tres exponente y al ocho potencia de manera que:

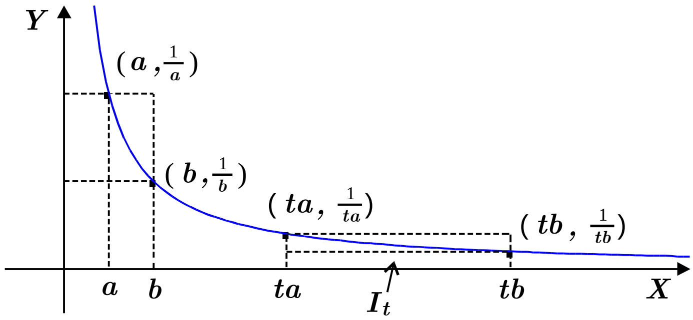
$$2^3 = 8 \Rightarrow \log_2 8 = 3.$$

Ejemplos:

1. $2^4 = 16 \Rightarrow \log_2 16 = 4.$
2. $7^2 = 49 \Rightarrow \log_7 49 = 2.$
3. $36^{\frac{1}{2}} = 6 \Rightarrow \log_{36} 6 = \frac{1}{2}.$

Definición de Logaritmo Natural. [1]

Sobre un intervalo $[a,b]$ del semieje positivo X construyamos dos rectángulos, uno inscrito y otro excrito a la gráfica de la función $f(x)=\frac{1}{x}$. Hagamos lo mismo sobre el intervalo $[ta,tb]$, donde $t>0$. Veremos que las áreas de los dos rectángulos inscritos coinciden entre sí, y que lo mismo sucede con los dos rectángulos excritos.



Solución:

Las áreas de los rectángulos construidos sobre $[a,b]$ son

$$I=(b-a)\left(\frac{1}{b}\right) \text{ (inscrito) } \quad \text{y} \quad E=(b-a)\left(\frac{1}{a}\right) \text{ (excrito).}$$

En tanto que las áreas de los rectángulos con base en $[ta,tb]$ son

$$I_t=(tb-ta)\left(\frac{1}{tb}\right) \text{ (inscrito) } \quad \text{y} \quad E_t=(tb-ta)\left(\frac{1}{ta}\right) \text{ (excrito).}$$

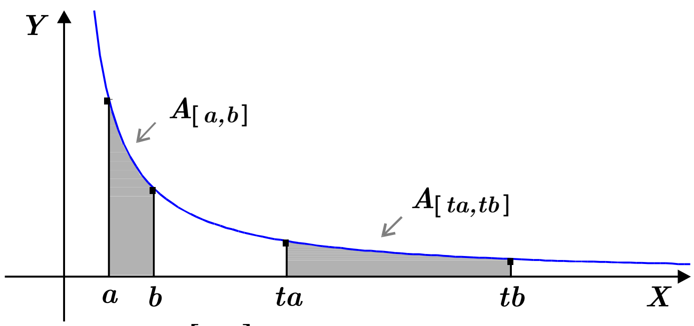
Simplificando las expresiones anteriores obtenemos:

$$I_t=(tb-ta)\left(\frac{1}{tb}\right)=(b-a)\left(\frac{1}{b}\right)=I \quad (inscrito)$$

y

$$E_t=(tb-ta)\left(\frac{1}{ta}\right)=(b-a)\left(\frac{1}{a}\right)=E \quad (excrito)$$

Usando técnicas del cálculo integral y los resultados anteriores, se puede probar que el área debajo de la gráfica de $f(x)=\frac{1}{x}$ en el intervalo $[a,b]$ es igual al área debajo de la curva en el intervalo $[ta,tb]$.



Es decir, si para cada intervalo $[a,b]$ con $a>0$ llamamos $A_{[a,b]}$ al área de la región que está sobre el intervalo $[a,b]$ y abajo de la gráfica de $f(x)=\frac{1}{x}$, entonces resulta que:

$$A_{[a,b]} = A_{[ta,tb]} \quad \text{si} \quad t > 0 \qquad ....\textbf{(1)}$$

Consideremos ahora dos números x, y mayores que 0, entonces es claro de la figura que

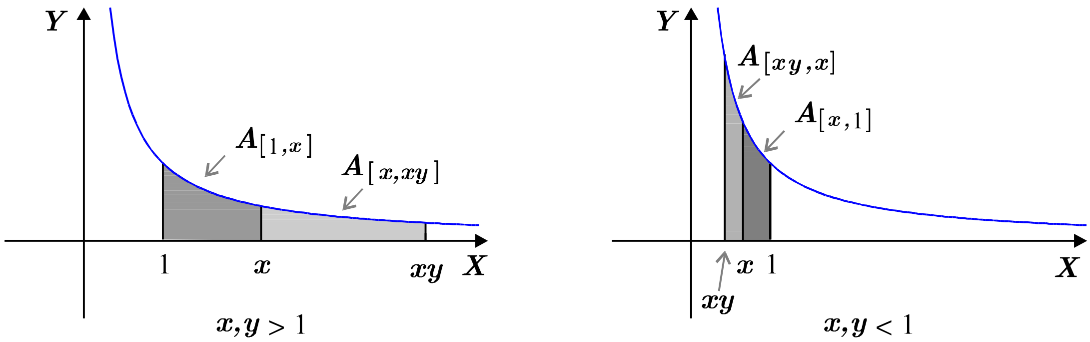
$$A_{[1,xy]} = A_{[1,x]} + A_{[x,xy]}$$

y por **(1)** tenemos

$$A_{[x,xy]} = A_{[1,y]}$$

de donde

$$A_{[1,xy]} = A_{[1,x]} + A_{[1,y]} \ldots\ldots\ \ldots\textbf{(2)}$$



(a) (b)

Definimos la función $\ln : (0,\infty) \to \Re$, llamada logaritmo natural, como

$$\ln x = \begin{cases} A_{[1,xy]} & si \quad x \geq 1 \\ -A_{[1,xy]} & si \quad x < 1 \end{cases}$$

la cual por la propiedad **(2)** satisface que

$$\ln xy = \ln x + \ln y \quad \text{para} \quad x, y \quad \text{positivos.}$$

Esta igualdad se conoce como propiedad logarítmica.

Propiedades de los logaritmos:

Si N, x, b son tres cantidades tales que

$$N = b^x; \quad b > 0; \quad b \neq 1.$$

Entonces x es el logaritmo de N en base b y se escribe $x = \log_b N$.

Por tanto:

$$\log_b N = x \;\; si \;\; y \;\; sólo \;\; si \;\; N = b^x.$$

Para los logaritmos se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\log_b(MN) = \log_b M + \log_b N.$
2. $\log_b\left(\dfrac{M}{N}\right) = \log_b(M) - \log_b(N).$
3. $\log_b(M)^n = n\log_b M.$
4. $\log_b 1 = 0.$
5. $\log_b\left(\dfrac{1}{N}\right) = -\log_b N.$

Los logaritmos más utilizados son el de base e (logaritmo neperiano), el de base 10 (logaritmo común), el de base 2 (logaritmo binario). La elección de un determinado número como base de los logaritmos no es crucial, debido a que se pueden hacer las conversiones de una base a otra de manera sencilla. Para ello, es útil la siguiente fórmula que define al *logaritmo de N en base a* (suponiendo que a, N, y b son números reales positivos y que tanto a como b son diferentes de 1):

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}\ , \qquad\qquad a, b \neq 1.$$

Ejercicios: Resuelve los siguientes logaritmos:

$a)$ $\log_3 \frac{1}{9}$.

$b)$ $\log_8 \frac{1}{4}$.

$c)$ $\log_5 \frac{1}{125}$.

1.2.6.3.1. 1. FUNCIÓN LOGARÍTMICA BASE 2

Sea $f : \Re \rightarrow \Re^+$ tal que $f(x) = \log_2 x$.
Esta función la podemos expresar como: $2^y = x$.

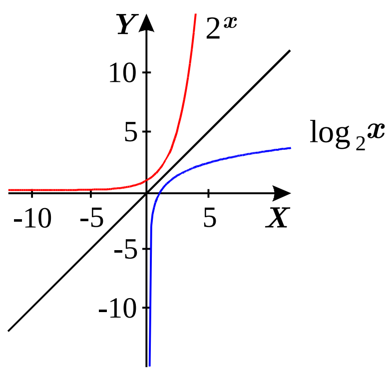
Si $y = f(x)$, además $f(x) = 2^x$ se tiene $y = 2^x$ o bien:
$2^x = y$ que significa: $\log_2 y = x$.

De tal manera que al sustituir a $y = f(x)$ con los valores de la tabla anterior, se tiene:

Tabla

x	$f(x) = \log_2 x$
$\frac{1}{8}$	$\log_2 \frac{1}{8} = y$ entonces $2^y = \frac{1}{8}$ de aquí que $y = -3$
$\frac{1}{4}$	$\log_2 \frac{1}{4} = y$ entonces $2^y = \frac{1}{4}$ de aquí que $y = -2$
$\frac{1}{2}$	$\log_2 \frac{1}{2} = y$ entonces $2^y = \frac{1}{2}$ de aquí que $y = -1$
1	$\log_2 1 = y$ entonces $2^y = 1$ de aquí que $y = 0$
2	$\log_2 2 = y$ entonces $2^y = 2$ de aquí que $y = 1$
4	$\log_2 4 = y$ entonces $2^y = 4$ de aquí que $y = 2$
8	$\log_2 8 = y$ entonces $2^y = 8$ de aquí que $y = 3$

Gráfica



En las tablas de $f(x)=2^x$ y $y=\log_2 x$ se observa que las coordenadas de las parejas ordenadas correspondientes están invertidos, hecho que se puede observar en la gráfica, donde las representaciones geométricas respectivas son simétricas respecto a la función identidad. De aquí que las funciones exponencial y logarítmica son inversas una de otra.

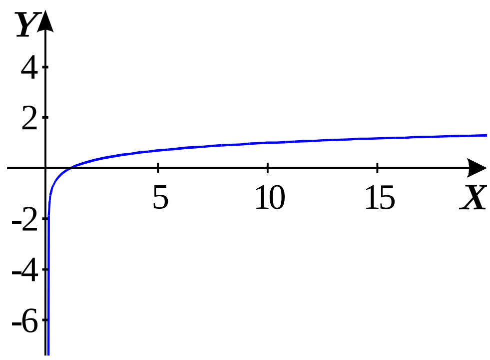
1.2.6.3.1.2. FUNCIÓN LOGARÍTMICA BASE 10

Cuando en un logaritmo se usa la base 10, no se acostumbra escribirla**.**

Así en $10^2 = 100$ *entonces* $\log_{10} 100 = 2$ se escribe $\log 100 = 2$.

A estos logaritmos se les llama logaritmos decimales.

La función logaritmo en base 10 está definida como $f(x)=\log(x)$ y su gráfica es la siguiente:



1.2.6.3.1.3. FUNCIÓN LOGARITMO NATURAL

Si el logaritmo tiene como base al número e se denota como:

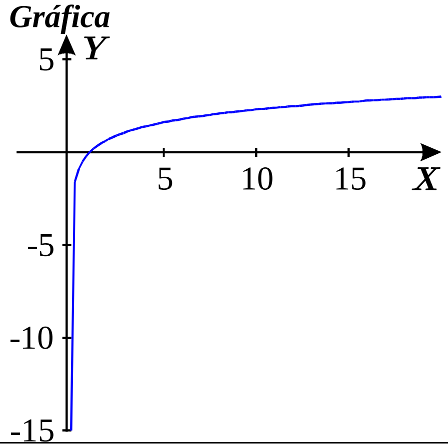
$$y=\log_e x=\ln x.$$

A esta clase de logaritmo se le llama Logaritmo Natural. Demos a x valores que faciliten la gráfica de esta función:

Tabla

x	$y=\ln x$
$\frac{1}{e}$	-1
$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$-\frac{1}{2}$
1	0
e	1
e^2	2

Gráfica



Cabe mencionar que los logaritmos que más se utilizan son los logaritmos naturales y los decimales.

1.2.6.3.2. FUNCIÓN EXPONENCIAL.

La función exponencial es una función real, trascendente, cuya regla de correspondencia es:

Sea $f:\Re \to \Re$ tal que $f(x) = a^x$ con $x \in \Re$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Sus características son:

- Si a es cualquier número real positivo diferente de 1 y x *es un número racional*, la función exponencial de base a, $f(x) = a^x$ asocia a cada número real x con un número positivo a^x.

-Si a es cualquier número real positivo diferente de 1 y x *es un número irracional*, la función exponencial de base a, $f(x) = a^x$ asocia a cada número real x con un número positivo $a^x = \exp(x \ln a) = e^{x \ln a}$.

-Si la base fuera un número real negativo, no se podría afirmar nada de su potencia, pues ésta podría dar lugar a tres situaciones: ser positiva si el exponente es par, negativa si el exponente es impar o quedar indefinida en los números reales para ciertos exponentes fraccionarios como $x = \frac{1}{2}$.

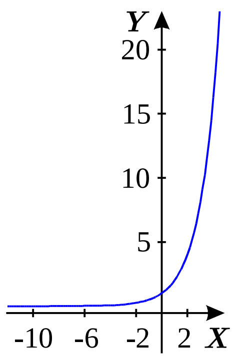
1.2.6.3.2.1. FUNCIÓN EXPONENCIAL BASE 2

Si $a \in [1, \infty]$, por ejemplo, $a = 2$, la función se expresa: $f(x) = 2^x$. Al calcular algunos valores de x se obtiene la tabla:

Tabla

x	$f(x) = 2^x$
-3	$f(-3) = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$
-2	$f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$
-1	$f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$
0	$f(0) = 2^0 = \frac{1}{2^0} = \frac{1}{1} = 1$
1	$f(1) = 2^1 = 2$
2	$f(2) = 2^2 = 4$
3	$f(3) = 2^3 = 8$

Gráfica



La función exponencial tiene como dominio el conjunto de los números reales y como rango el conjunto de los números reales positivos.

También se puede observar en la gráfica, que la función crece a medida que los valores de x aumentan y que pasa por el punto de coordenadas $(0,1)$, pues $2^0 = 1$.

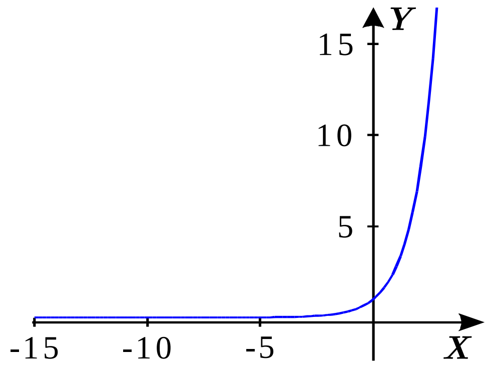
1.2.6.3.2.2. FUNCIÓN EXPONENCIAL CON BASE e.

Número e. El número e es un número irracional que se utiliza en el estudio de fenómenos físicos, biológicos o sociales.

Su valor aproximado es de: $e \approx 2.7182818 \approx 2.72$

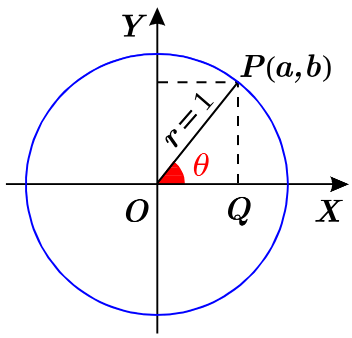
Se define la ***función exponencial en base*** e como:

$f(x) = e^x$ donde e es la base. La gráfica de esta función es:



1.2.6.3.3. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Para definir el seno y el coseno de ángulos **[1]** nos movemos sobre el círculo unitario (círculo con centro en el origen y radio 1) a partir del punto $(0,1)$ y en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. El punto P obtenido tiene coordenadas: $P(\cos x, \operatorname{sen} x)$



En la figura anterior, tenemos que θ es un ángulo y $P(a,b)$ es un punto cualquiera sobre la circunferencia; si $r = \overline{OP}$ que es la distancia del origen a P, las funciones trigonométricas se definen como:

$$sen\theta = \frac{b}{r}; \quad \cos\theta = \frac{a}{r}; \quad \tan\theta = \frac{b}{a}; \quad \cot\theta = \frac{a}{b}; \quad \sec\theta = \frac{r}{a}; \quad \csc\theta = \frac{r}{b}.$$

De estas relaciones, se tiene que: $(a,b) = (\cos\theta, \text{sen}\,\theta)$.

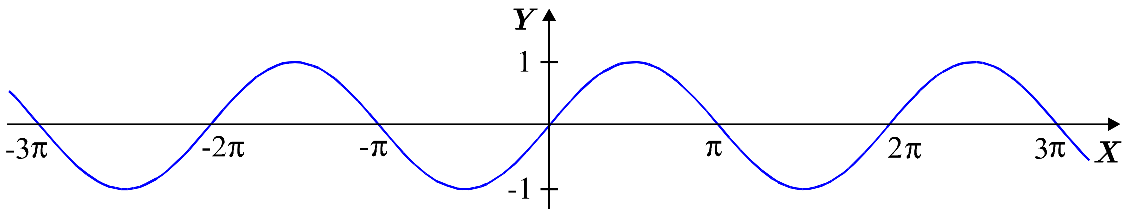
En las funciones trigonométricas, su dominio y su rango son subconjuntos de los números reales. Todas las funciones trigonométricas son periódicas.

Grafiquemos, algunas de estas funciones, utilizando las tablas de las funciones trigonométricas o la calculadora:

Ejemplo 1: Trazar la gráfica de la función seno: $f(x) = \text{sen}(x)$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y	0	0.5	0.7071	0.866	1	0.866	0.7071	0.5	0

x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y	-0.5	-0.7071	-0.866	-1	-0.866	-0.7071	-0.5	0



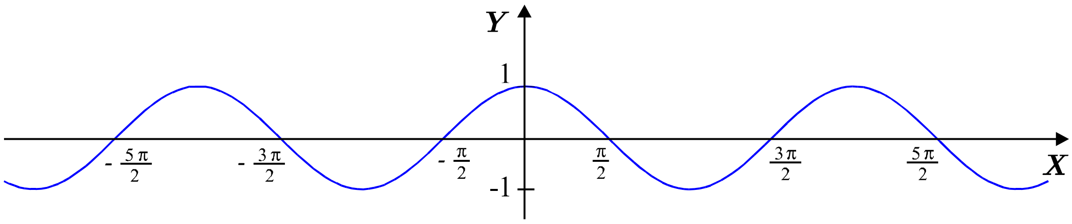
Como se puede observar:
La gráfica intersecta al ***eje Y*** en el origen.
La gráfica intersecta al ***eje X*** en $\pm n\pi$ (es decir, π, 2π , 3π…).
La curva ‘‘se vuelve a repetir’’, es decir, forma un período cada 2π.
El rango de la función es : $[-1,1]$.

Ejemplo 2: Trazar la gráfica de la función coseno: $f(x) = \cos(x)$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y	1	0.866	0.707	0.5	0	-0.5	-0.707	-0.866	-1

-

x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y	-0.866	-0.707	-0.5	0	0.5	0.707	0.860	1



Como se puede observar:
La gráfica intersecta al ***eje Y*** en el $(0,1)$.

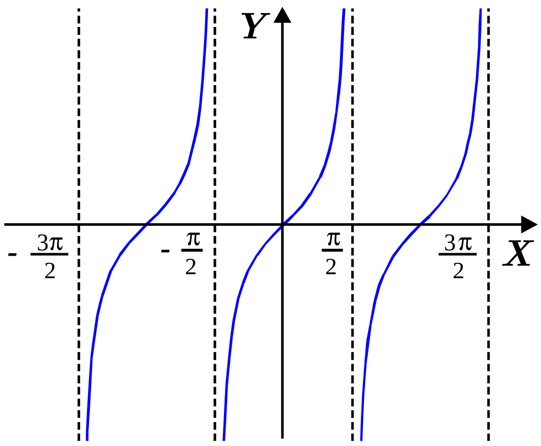
La gráfica intersecta al ***eje X*** en $\pm(2n-1)\left(\frac{\pi}{2}\right)$, es decir $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}...\right)$.

La curva "se vuelve a repetir", es decir, forma períodos cada 2π.
El rango de la función es: $[-1,1]$.

Ejemplo 3: Trazar la gráfica de la función tangente: $f(x) = \tan(x)$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y	1	0.577	1	1.732	No definida	-1.732	-1	-0.577	0

x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y	0.577	1	1.732	No definida	-1.732	-1	-0.577	0



Como se puede observar:
Dado que la función tangente está definida como sen(x) / cos(x), no está definida en los valores para los cuales el cos(x) = 0 (en los puntos de la forma $\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$, es decir, $\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}....$)

La gráfica sólo intersecta al eje Y en el origen.
La gráfica intersecta al eje ***X*** en $\pm n\pi$ es decir $\pi, 2\pi, 3\pi...$

La curva "se vuelve a repetir", es decir forma un período de π.

1.2.6.4. FUNCIÓN IMPLÍCITA DE DOS VARIABLES X, Y.

Una función implícita de dos variables es la que se expresa por una ecuación no resuelta (es decir, que no está despejada) para ninguna de las variables. Se denota como: $f(x,y)$.

Ejemplos:

$a)\ f(x,y) = xy^4 + yx^3 - \ln x.$

$b)\ f(x,y) = y^3 - y^2 - 5yx^2 + 4.$

$c)\ 3x^2y^2 - 5xy^3 - x^2 = 5.$

1.2.6.5. ACTIVIDADES DE REFUERZO.

Ejercicio: Dí si las siguientes funciones son Algebraicas o Trascendentes.

Función:	Tipo de función:
$y = x^2 - 2x + 1$.	
$y - \ln x = 1$.	
$y = \dfrac{3x-2}{x^2-1}$.	
$y = \text{sen}^2(2x)$.	
$y = x^{\frac{1}{3}}$.	

1.2.6.6. FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

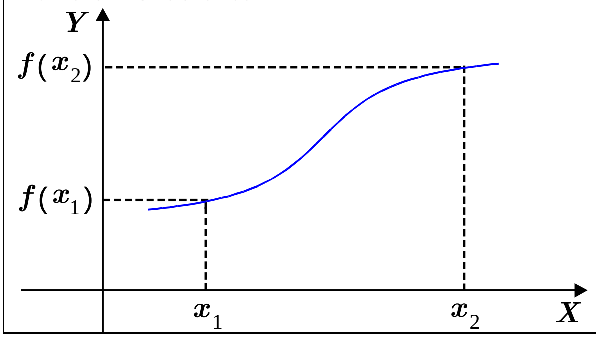
Una función es creciente en un conjunto C contenido en el dominio de la función si para cualesquiera dos puntos x_1 y x_2 en C se tiene que:

$$x_1 < x_2 \ \ entonces \ \ f(x_1) < f(x_2).$$

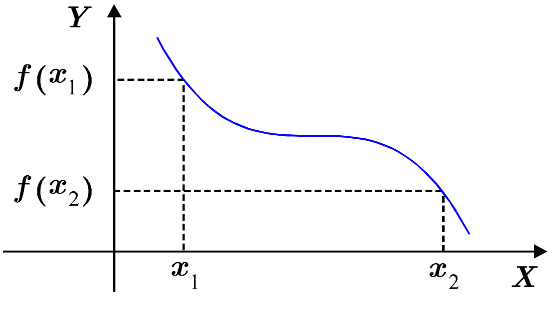
Una función es decreciente en un conjunto C contenido en el dominio de la función si para cualesquiera dos puntos x_1 y x_2 en C se tiene que:

$$x_1 < x_2 \ \ entonces \ \ f(x_1) > f(x_2).$$

Función Creciente



Función Decreciente



1.2.6.6.1. ACTIVIDADES DE REFUERZO:

1. Tomando al menos tres valores de x en el intervalo $(0,1)$, dí si las siguientes funciones son crecientes o decrecientes en el intervalo y por qué:

Función	Creciente o decreciente
$f(x) = -2x + 1$.	
$y = \frac{1}{x}$.	
$f(x) = 3x - 8$.	
$y = x^3 + 2$.	
$f(x) = -x^2 + 8$.	

CAPÍTULO II.

2. LÍMITES

Sea f una función. Queremos saber el valor de la función $f(x)$ cuando x se aproxima a un valor c, pero no es necesariamente igual a c. Esto es, si x se aproxima más y más a c, pero x no es igual a c, ¿qué pasa con $f(x)$? Diremos que si $f(x)$ se acerca más y más a un valor *L*, entonces diremos que $f(x)$ tiende a *L* conforme x se aproxima a c y se representa de la forma:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \,.$$

Decir que ***"x se aproxima a c"*** o ***"x tiende a c"*** significa que independientemente de lo próximo que esté x del valor c, existe siempre otro valor de x (distinto de c) en el dominio de f que está aún más próximo a c.

Veamos unos ejemplos:

Ejemplo 1: Sea $f(x) = 4 + x$.

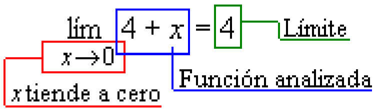
Solución: Queremos saber que pasa con $\lim_{x \to 0} 4 + x$.

Al darle valores a x cercanos a cero obtenemos números que se acercan a 4 por la derecha y por la izquierda.

x	*y* = 4 + *x*	
– 0.1	3.9	
– 0.01	3.99	
– 0.001	3.999	*por la derecha*
– 0.0001	3.9999	
0.1	4.1	
0.01	4.01	*por la izquierda*
0.001	4.001	
0.0001	4.0001	

El valor de x se acerca a "cero" y el valor de $f(x)$ (la imagen de la función) se acerca a 4. Para hablar con propiedad, en matemáticas no se dice "se acerca a" sino "tiende a". Cuando x *tiende a cero,* $f(x)$ *tiende a cuatro*. Esto lo escribimos como:

$$\lim_{x\to 0} 4 + x = 4\,.$$



Nota: En este ejemplo se puede observar que el valor de la función cuando $x = 0$ es igual al valor del límite. Esta propiedad la tienen las funciones polinómicas, esto es, el límite cuando x se aproxima o tiende a c se puede calcular sustituyendo c por x en el polinomio.

Límites laterales:

El límite lateral por la ***izquierda*** de una función $y = f(x)$ en el punto $x = c$ es el valor al que se aproxima $f(x)$ cuando x se aproxima al valor de a por valores ***menores que*** c. Lo representamos por:

$$\lim_{x\to c^{--}} f(x)$$

El límite lateral por la ***derecha*** de una función $y = f(x)$ en el punto $x = c$ es el valor al que se aproxima $f(x)$ cuando x se aproxima al valor de a por valores ***mayores que*** c. Lo representamos por:

$$\lim_{x\to c^{+-}} f(x)$$

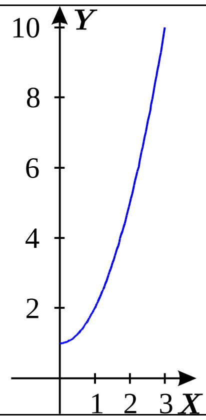
Una función no puede tender a dos límites distintos a la vez. Esto es, ***si el límite de una función existe, es único.***

Teorema: El límite $\lim_{x\to c} f(x)$ existe, si el límite por la izquierda: $\lim_{x\to c^{-}} f(x)$, y el límite por la derecha: $\lim_{x\to c^{+}} f(x)$, son iguales, es decir:

$$\lim_{x\to c^{-}} f(x) = \lim_{x\to c^{+}} f(x)\,.$$

En los siguientes ejemplos se mostrará, dando valores a x, que se cumple el límite propuesto.

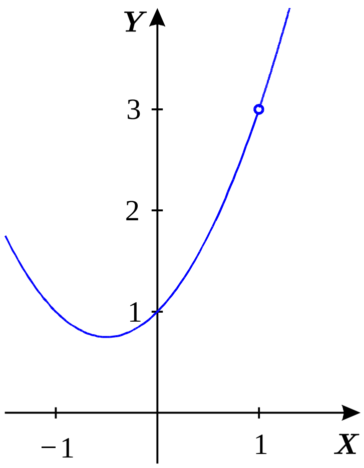
Ejemplo 1: $\lim_{x \to 3} x^2 + 1 = 10$.



x	$f(x)$
2.90	9.41
2.95	9.7025
2.99	9.9401
2.999	9.994001
3.0001	10.0006
3.001	10.006
3.01	10.06
3.1	10.61

Ejemplo 2: Sea $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$, $x \neq 1$, ver que $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$.

Para todo punto $x \neq 1$ podemos trazar la gráfica de la función. Ahora, para tener idea del comportamiento de la gráfica de f cerca de $x = 1$, usamos dos conjuntos de valores x, unos que se aproximen al 1 por la izquierda y otros por la derecha. La siguiente tabla muestra los correspondientes, valores de $f(x)$.



Mientras x se acerca al 1 por la izquierda así como x se acerca al 1 por la derecha, sucede que $f(x)$ se acerca al 3.

x	$f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$, $x \neq 1$
0.9	2.71
0.99	2.9701
0.999	2.997001
1.001	3.003001
1.01	3.0301
1.1	3.31

Como se puede observar, en la gráfica hay un hoyo en el punto (1, 3), esto se debe a que la función f no está definida en el número 1. Por tanto, cuando x se acerca a 1, $f(x)$ se acerca a 3.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=3.$$

De lo anterior tenemos que si $f(x)$ se aproxima arbitrariamente a un número L cuando x se aproxima a c por ambos lados, decimos que el *límite de* $f(x)$ *cuando* x *tiende a* c *es* L y escribimos

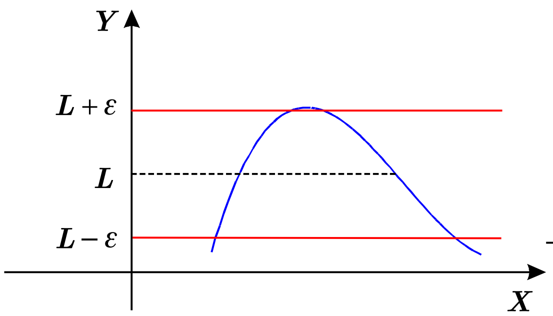
$$\lim_{x\to c} f(x)=L.$$

2.1. DEFINICIÓN FORMAL DE LÍMITE

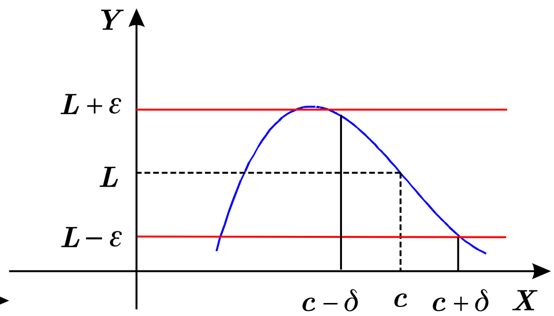
Se dice que $\lim\limits_{x\to c} f(x)=L$ si y sólo si para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $x\in$ Dom f y $0<|x-c|<\delta$, entonces $|f(x)-L|<\varepsilon$.

En forma gráfica se tiene:

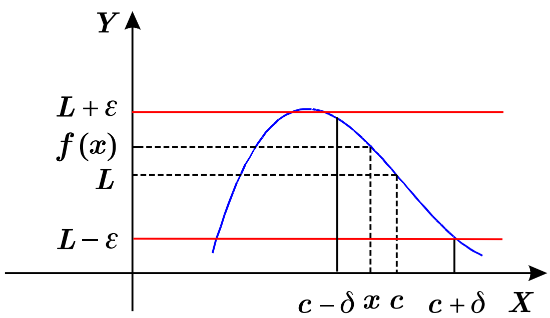
para cada $\varepsilon>0$



existe $\delta>0$



tal que si $0<|x-c|<\delta$, entonces $|f(x)-L|<\varepsilon$



Puede decirse entonces que la definición de límite dada anteriormente, establece que los valores de la función $f(x)$ se aproximan a un límite L, conforme x se aproxima a un número c, si el valor absoluto de la diferencia entre $f(x)$ y L se puede hacer tan pequeña como se quiera tomando x suficientemente cercana a *"c"*, pero no igual a *"c"*.

Veamos algunos ejemplos en los que se utiliza la definición de límite:

Ejemplo 1: Probar que $\lim_{x\to 2}(2x-1)=3$.

Solución: Debe probarse que dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $x\in\Re$ y $0<|x-2|<\delta$, entonces $|(2x-1)-3|<\varepsilon$.

Vamos a establecer una relación entre $(2x-1)$ y $(x-2)$.

Como $|(2x-1)-3| = |2x-4| = 2|x-2|$.

Entonces, para hacer $|(2x-1)-3|<\varepsilon$, es suficiente que $|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{2}$,

por lo que $0<\delta\le\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Luego, si $x\in\Re$ y $0<|x-2|<\delta$, entonces para $\delta\le\dfrac{\varepsilon}{2}$ tenemos que $|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{2}$

$2|x-2|<\varepsilon$ de aquí que $|2x-4|<\varepsilon$ como $|2x-4|=|2x-1-3|$.

Entonces $|(2x-1)-3|<\varepsilon$ y $|f(x)-L|<\varepsilon$.

Ejemplo 2: Probar que $\lim_{x\to 3}(4x-1)=11$.

Solución: Debe probarse que dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $x\in\Re$ y $0<|x-3|<\delta$ entonces $|(4x-1)-11|<\varepsilon$.

Como

$$|(4x-1)-11| = |4x-1-11| = |4x-12| = 4|x-3|,$$

entonces $4|x-3|<\varepsilon$ si $|x-3|<\dfrac{\varepsilon}{4}$ por lo que $0<\delta\le\dfrac{\varepsilon}{4}$.

Luego, si $x\in\Re$ y $0<|x-3|<\delta$, entonces para $\delta\le\dfrac{\varepsilon}{4}$ tenemos que $|x-3|<\dfrac{\varepsilon}{4}$

$4|x-3|<\varepsilon$ de aquí que $|4x-12|<\varepsilon$ y $|4x-1-12+1|<\varepsilon$

$|(4x-1)-11|<\varepsilon$ y $|f(x)-L|<\varepsilon$.

En general, el determinar el $\lim_{x\to c} f(x)=L$ mediante el uso directo de la definición no siempre es sencilla, por lo que para hacerlo se contará con la ayuda de una serie de teoremas, que estudiaremos más adelante.

2.2. TEOREMAS DE LÍMITES

Para facilitar la obtención del ***límite de una función*** sin tener que recurrir cada vez a la definición formal, se establecen los siguientes teoremas.(Véase [2] para demostración de teoremas)

T-1. Si ***k*** es una constante y ***a*** un número cualquiera, entonces $\lim_{x\to a} k=k$.

T-2. Para cualquier número dado ***a***, $\lim_{x\to a} x=a$ **.**

T-3. Si *m y b* son dos constantes cualesquiera, entonces $\lim_{x\to a}(mx+b)=ma+b$.

T-4. Si $\lim_{x\to a} f(x)=L$ y $\lim_{x\to a} g(x)=M$ entonces:

i) $\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=L\pm M$.

ii) $\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=L\cdot M$.

iii) $\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{L}{M}$ siempre que $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$ y $M\neq 0$.

iv) $\lim_{x\to a}\left[kf(x)\right]=kL$, si ***k*** es una constante.

T-5. Si $\lim_{x\to a} f(x)=L$ y ***n*** es un entero positivo, entonces:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^n=\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n=L^n.$$

T-6. Si ***f*** es un polinomio y ***a*** es un número real, entonces:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a).$$

T-7.Si $\lim_{x\to a} f(x)=L$ y ***n*** es un entero positivo, entonces,

$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \left[\sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} \right] = \sqrt[n]{L}$ tomando en cuenta que $f(x) \geq 0$ y $L > 0$ cuando n es

par.

T-8. Si $f(x) = g(x) \quad \forall x \neq a$ y $\lim_{x \to a} g(x) = L$, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Se resolverán los siguientes ejemplos, utilizando los teoremas de límites.

Ejemplo 1: Calcular $\lim_{x \to 6} 15$.

Solución: Utilizando el T-1 tenemos que 15 es una constante, por lo tanto:

$$\lim_{x \to 6} 15 = 15.$$

Ejemplo 2: Calcular $\lim_{x \to 5} (3x - 7)$.

Solución: La función $f(x) = 3x - 7$ tiene la forma $mx + b$**.** Utilizando el T-3 tenemos que:

$$\lim_{x \to 5} (3x - 7) = 3(5) - 7 = 15 - 7 = 8.$$

Ejemplo 3: Calcular $\lim_{x \to 2} (x^2 + 2x + 9)$.

Solución: $f(x) = x^2 + 2x + 9$ es una función polinomial, por lo tanto, utilizando el T-6:

$$f(2) = 2^2 + 2(2) + 9 = 17$$

$$\therefore \lim_{x \to 2} (x^2 + 2x + 9) = 17.$$

Ejemplo 4: Calcular $\lim_{x \to 4} \frac{5x - 2}{2x + 1}$.

Solución: Como $4 \in Dom\ f$ y $\lim_{x \to 4} 2x + 1 = 9$, aplicando el T-4-iii de límites se tiene que:

$$f(4) = \frac{5(4) - 2}{2(4) + 1} = \frac{18}{9} = 2 \quad \therefore \lim_{x \to 4} \frac{5x - 2}{2x + 1} = 2.$$

Ejemplo 5: Calcular $\lim_{x \to 1} \sqrt{\frac{8x + 1}{x + 3}}$.

Solución: Aplicando T-3 y T-7, se tiene que como $1 \in Dom\ f$, si $x > 0$, entonces $8x + 1 > 0$ y $x + 3 > 0$, entonces $f(x) > 0$.

$$\lim_{x \to 1} \sqrt{\frac{8x + 1}{x + 3}} = \sqrt{\lim_{x \to 1} \left[\frac{8x + 1}{x + 3} \right]} = \sqrt{\frac{\lim_{x \to 1} (8x + 1)}{\lim_{x \to 1} (x + 3)}} = \sqrt{\frac{8(1) + 1}{1 + 3}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}.$$

A continuación se presentarán algunos ejemplos sobre límites que no son directos, pues presentan una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ al utilizar directamente los teoremas de operaciones de límites. Por ejemplo, si la función está definida como $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ donde p y q son polinomios y $p(a) = q(a) = 0$. Para eliminar la indeterminación, se deberán utilizar métodos de factorización y luego calcular el límite.

Recuerda que por el **Teorema del Factor (véase [4])** se tiene que si $p(a) = 0$, entonces esto significa que $x - a$ es factor del polinomio *p*. De igual forma si $q(a) = 0$, entonces esto significa que $x - a$ es factor del polinomio q.

Ejemplo 6: Calcular $\lim\limits_{x \to -\frac{3}{2}} \frac{4x^2 - 9}{2x + 3}$.

Solución: Utilicemos ***diferencia de cuadrados*** para la factorización:

Se tiene que:

$$\frac{4x^2 - 9}{2x + 3} = \frac{(2x - 3)(2x + 3)}{(2x + 3)} = (2x - 3) \quad \text{si} \quad x \neq -\frac{3}{2}$$

entonces

$$\lim_{x \to -\frac{3}{2}} \frac{4x^2 - 9}{2x + 3} = \lim_{x \to -\frac{3}{2}} (2x - 3) = 2\left(-\frac{3}{2}\right) - 3 = -6.$$

Ejemplo 7: Calcular $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

Solución: En este caso

$$p(x) = x^2 - 9 \qquad q(x) = x - 3,$$

y $\quad p(3) = q(3) = 0$.

Como no podemos calcular directamente el límite, utilicemos ***diferencia de cuadrados***.

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{(x - 3)} = x + 3 \quad \text{si} \quad x \neq 3, \ \text{entonces} \quad \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} (x + 3) = 6.$$

Ejemplo 8: Calcular $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}$.

Solución: En este caso

$$p(x) = x^3 + 3x^2 - 4$$

$$q(x) = x^3 + 5x^2 + 8x + 4 \qquad \text{y} \qquad p(-2) = q(-2) = 0.$$

No es posible aplicar directamente el teorema T-4-iii, pues se obtendría una indeterminación, pero esta expresión se puede factorizar y simplificar, así se obtiene el límite aplicando T-4-iii:

Por teorema del factor se tiene que $x+2$ es factor de $p(x)$ y de $q(x)$.

Utilizando división sintética para encontrar los factores de $p(x)$ se tiene que:

Acomodamos los coeficientes de $p(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ en la división sintética:

1	3	0	-4	-2
	-2	-2	4	
1	1	-2	0	

Por lo que el cociente es: $\left(x^2 + x - 2\right)$.

Se tiene entonces que: $x^3 + 3x^2 - 4 = (x+2)\left(x^2 + x - 2\right)$.

Acomodamos ahora los coeficientes de $q(x) = x^3 + 5x^2 + 8x + 4$ en la división sintética:

1	**5**	**8**	**4**	**-2**
	-2	-6	**-4**	
1	**3**	**2**	**0**	

Por lo que el cociente es: $\left(x^2 + 3x + 2\right)$.

De donde $x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = (x+2)\left(x^2 + 3x + 2\right)$.

De aquí que:

$$\frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} = \frac{(x+2)(x^2 + x - 2)}{(x+2)(x^2 + 3x + 2)} = \frac{(x^2 + x - 2)}{(x^2 + 3x + 2)} \text{ si } x \neq -2.$$

Entonces

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} = \lim_{x \to -2} \frac{(x^2 + x - 2)}{(x^2 + 3x + 2)}.$$

Ahora $p_1(x) = x^2 + x - 2$ $\quad q_1(x) = x^2 + 3x + 2$ y

$p_1(-2) = q_1(-2) = 0$ por lo que nuevamente realizaremos otra factorización.

Acomodamos los coeficientes de $p_1(x) = x^2 + x - 2$ en la división sintética:

1	1	-2	-2
	-2	2	
1	-1	0	

Por lo que el cociente es: $(x-1)$

Acomodamos los coeficientes de $q_1(x) = x^2 + 3x + 2$ en la división sintética:

$$\begin{array}{ccc|l} 1 & 3 & 2 & \underline{\;-2\quad\quad} \\ & -2 & -2 & \\ \hline 1 & 1 & 0 & \end{array}$$

Por lo que el cociente es: $(x+1)$

De lo anterior se tiene que:

$$\frac{(x^2+x-2)}{(x^2+3x+2)}=\frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x+1)}=\frac{x-1}{x+1} \quad \text{de donde} \qquad \lim_{x\to-2}\frac{x-1}{x+1}=\frac{-3}{-1}=3.$$

2.2.1. FACTORIZACIÓN UTILIZANDO CONJUGADOS

Si tenemos un cociente de dos funciones las cuales valen cero en a, pero en algunas de ellas aparece un radical, las podemos resolver eliminando el radical, multiplicando y dividiendo por el conjugado del término que contiene al radical.

Ejemplo 9: Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$.

Solución: No es posible aplicar directamente el teorema T-4-iii, pues se obtendría una indeterminación, pero esta expresión se puede multiplicar y dividir por el conjugado del numerador (que contiene los radicales) y simplificar la expresión, así se obtiene el límite aplicando T-4-iii:

$$\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}=\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}{(x)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}=\frac{(x+2-2)}{(x)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}=\frac{x}{(x)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}.$$

Entonces:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{0+2}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Ejemplo 10: Calcular $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{\sqrt{x+1}-3}$.

Solución: No es posible aplicar directamente el teorema T-4-iii, pues se obtendría una indeterminación, pero esta expresión se puede multiplicar y dividir por el conjugado del denominador (que contiene los radicales) y simplificar la expresión, así se obtiene el límite aplicando T-4-iii:

$$\frac{x-8}{\sqrt{x+1}-3}=\frac{(x-8)\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{\left(\sqrt{x+1}-3\right)\left(\sqrt{x+1}+3\right)}=\frac{(x-8)\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{x+1-9}=\frac{(x-8)\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{x-8}=\frac{\sqrt{x+1}+3}{1}.$$

De aquí que:

$$\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt{x+1}-3}=\lim_{x\to 8}\sqrt{x+1}+3=\sqrt{8+1}+3=\sqrt{9}+3=3+3=6.$$

2.3. ACTIVIDADES DE REFUERZO

Calcular:

1. $\lim_{x \to 3} \pi$.

2. $\lim_{x \to 2} \left(x^2 + 4x - 3\right)$.

3. $\lim_{x \to 3} \left(x^3 + 2x^2 - 7x + 4\right)$.

4. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{4 + x} - 2}{x}$.

5. $\lim_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{\sqrt{x + 3} - 2}$.

6. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - x - 12}{x^2 + x - 20}$.

7. $\lim_{x \to 4} \dfrac{3x^2 + 1}{x + 4}$.

8. $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 27}{x - 3}$.

2.4. LIMITES INFINITOS

2.4.1. LÍMITES INFINITOS DE LA FORMA $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ **o** $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

Hay funciones que aumentan o disminuyen sin límite a medida que la variable independiente se acerca a un valor fijo determinado.

Sea f una función definida en un intervalo abierto que contenga a a**,** excepto posiblemente en $x = a$**,** si x tiende a a y $f(x)$ ***crece indefinidamente***, decimos que ***el límite de*** f ***es infinito.***

Definición: El límite de f es infinito cuando x tiende a a si:

$$\forall\ N > 0\ \exists\ \delta > 0\ \ tal\ \ que\ \ si\ \ x \in Dom\, f\ \ \text{y}\ \ 0 < |x - a| < \delta, entonces\ f(x) > N$$

y se escribe como:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

De igual forma, sea f una función definida en un intervalo abierto que contenga a a, excepto posiblemente en $x = a$, si x tiende a a y $f(x)$ ***decrece indefinidamente***, decimos que ***el límite de f es menos infinito.***

Definición: El límite de f es menos infinito cuando x tiende a a si:
$\forall\ N > 0\ \exists\ \delta > 0$ *tal que si* $x \in$ *Dom* f y $0 < |x-a| < \delta$, *entonces* $f(x) < -N$

y se escribe como:

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty\ .$$

En relación a estas definiciones, se enuncian los siguientes teoremas (continuará la numeración de teoremas de límites)(Véase **[3]** para demostración de teoremas):

T-9. Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y

(i) $f(x) > 0$ para $x < a$, entonces $\lim_{x\to a^-} \frac{1}{f(x)} = \infty$.

(ii) $f(x) < 0$ para $x < a$, entonces $\lim_{x\to a^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

T-10. Si $a, c \in \Re$ y c es una constante, $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = c$, $c \neq 0$, entonces:

(i) Si $c > 0$ y si $f(x) \to 0$ con $f(x) > 0$ en un intervalo que contenga a a

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty\ .$$

(ii) Si $c > 0$ y si $f(x) \to 0$ con $f(x) < 0$ en un intervalo que contenga a a

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty\ .$$

(iii) Si $c < 0$ y si $f(x) \to 0$ con $f(x) > 0$ en un intervalo que contenga a a

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty\ .$$

(iv) Si $c < 0$ y si $f(x) \to 0$ con $f(x) < 0$ en un intervalo que contenga a a

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty .$$

T-11: (i) Si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, y $\lim_{x \to a} g(x) = c$, se tiene que:

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = +\infty .$$

(ii) Si $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, y $\lim_{x \to a} g(x) = c$, se tiene que:

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = -\infty .$$

T-12 Si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, y $\lim_{x \to a} g(x) = c$, $c \neq 0$, se tiene que:

(i) Si $c > 0$, $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = +\infty$.

(ii) Si $c < 0$, $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = -\infty$.

T-13 Si $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, y $\lim_{x \to a} g(x) = c$, donde $c \in \Re$ es una constante y $c \neq 0$, se tiene que:

(i) Si $c > 0$, $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = -\infty$.

(ii) Si $c < 0$, $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = +\infty$.

T-14 Si $p > 0$, entonces $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^p} = 0$.

T-15 Si $p > 0$, entonces: $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^p} = 0$.

T-16 Si $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ y $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \neq a$, entonces $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$.

T-17. i) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ si y sólo si $\lim_{x \to a^+} \frac{1}{f(x)} = 0$ y $f(x) > 0$ con $x \in (a,b)$.

ii) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ si y sólo si $\lim_{x \to a^-} \frac{1}{f(x)} = 0$ y $f(x) < 0$ con $x \in (a,b)$.

Ejemplo 1: Calcular $\lim_{x\to 2}\left(8x+\frac{4}{(2x-4)^2}\right)$**.**

Solución: Sabemos que $\lim_{x\to 2} 8x = 16$**,** $\lim_{x\to 2}(4) = 4$**,** $\lim_{x\to 2}(2x-4)^2 = 0$ **y** $(2x-4)^2 > 0$ para $x \neq 2$**.**

Aplicando T-10(i) se tiene que: $\lim_{x\to 2}\left(\frac{4}{(2x-4)^2}\right) = \infty$**.**

y aplicando T-11 (i) se tiene que: $\lim_{x\to 2}\left(8x+\frac{4}{(2x-4)^2}\right) = \infty$**.**

Ejemplo 2: Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-3}{x^3}$.

Solución: Multiplicamos y dividimos por el conjugado

$$\frac{\sqrt{9+x}-3}{x^3} = \left(\frac{\sqrt{9+x}-3}{x^3}\right)\left(\frac{\sqrt{9+x}+3}{\sqrt{9+x}+3}\right) = \frac{9+x-9}{x^3\left(\sqrt{9+x}+3\right)} = \frac{1}{x^2\left(\sqrt{9+x}+3\right)} \quad \text{si} \quad x \neq 0.$$

De donde $f(x) = \frac{1}{x^2\left(\sqrt{9+x}+3\right)}$ está definida si $x \in [-9,0)\cup(0,\infty)$ y $f(x) > 0$ en su dominio.

Como $\lim_{x\to 0}\frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to 0} x^2\left(\sqrt{9+x}+3\right) = 0$, por T-17 se tiene que $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-3}{x^3} = \infty$.

Ejemplo 3: Calcular $\lim_{x\to -1}\frac{(x+5)(x-4)}{(x+1)^2}$.

Solución: Calculamos $\lim_{x\to -1}\frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)^2}{(x+5)(x-4)} = 0$.

Analizando el signo de $f(x)$ se tiene que el denominador de la función $(x+1)^2 > 0$ si $x \in (-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$.

Analizando el signo del numerador se tiene que:

$(x+5)(x-4) > 0$, si ambos factores tienen el mismo signo.

$$\left.\begin{array}{l} x+5>0, \text{se tiene que} \\ x>-5 \ \text{ entonces } x\in(-5,\infty) \\ \qquad\qquad \text{y} \\ x-4>0, \text{ se tiene que} \\ x>4 \text{ entonces } x\in(4,\infty) \end{array}\right\} \text{ es decir, } x\in(-5,\infty)\cap(4,\infty)=(4,\infty).$$

O bien:

$$\left.\begin{array}{l} x+5<0, \text{ se tiene que} \\ x<-5 \ \text{ entonces } x\in(-\infty,-5) \\ \qquad\qquad \text{y} \\ x-4<0, \text{se tiene que} \\ x<4 \ \text{ entonces } x\in(-\infty,4) \end{array}\right\} \text{ es decir, } x\in(-\infty,-5)\cap(-\infty,4)=(-\infty,-5).$$

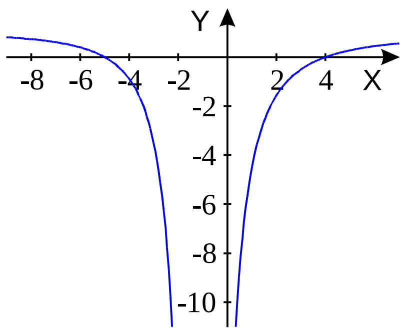
Por tanto $(x+5)(x-4)>0$ si $x\in(-\infty,-5)\cup(4,\infty)$.

Como nos interesa el signo de la función f en un intervalo que contenga a -1, entonces se tiene que si $x\in(-5,4)$, entonces $(x+5)(x+4)<0$.

$$f(x)=\frac{(x+5)(x-4)}{(x+1)^2}<0 \quad \text{en} \quad [-5,-1)\cup(-1,4], \text{ entonces}$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{(x+5)(x-4)}{(x+1)^2}=-\infty .$$

La siguiente gráfica muestra la función:



2.4.2. LÍMITES INFINITOS DE LA FORMA $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ ***o*** $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ **.**

En estos casos la variable tiende a más o a menos infinito, pero el límite es un número real.

Definición: $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ significa que a partir de cierto momento $f(x)$ está tan cerca de L como queramos. Es decir,

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ M > 0\ tal\ que\ si\ x \in Dom\ f\ \ y\ x > M, entonces\ \left| f(x) - L \right| < \varepsilon .$$

Definición: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ significa que a partir de cierto momento $f(x)$ está tan cerca de L como queramos. Es decir,

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N > 0\ tal\ que\ si\ x \in Dom\ f\ \ y\ x < -N, entonces\ \left| f(x) - L \right| < \varepsilon .$$

En relación a estas definiciones, se enuncian los siguientes teoremas:

T.18 Si *f* y *g* son funciones:

i) Si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to-\infty} g(x) = L_2, entonces\ \lim_{x\to-\infty} (f+g)(x) = L_1 + L_2$.

ii) Si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to-\infty} g(x) = L_2, entonces\ \lim_{x\to-\infty} (f\cdot g)(x) = L_1 \cdot L_2$.

iii) Si $\lim_{x\to-\infty} g(x) = L_2$ y $L_2 \neq 0$, *entonces* $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L_2}$.

Ejemplo 1: Calcular $\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^2+6x-1}{x^3-x^2+3x}$.

Solución: Si factorizamos x^2 en el numerador y x^3 en el denominador tenemos que:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^2+6x-1}{x^3-x^2+3x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(5+\frac{6}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(5+\frac{6}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)} .$$

Podemos ver que el numerador tiende a 5, pues por T-15, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{6}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$ y el denominador tiende a $-\infty$ pues por T-14 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{x^2}=0$ y por T-1 $\lim\limits_{x\to-\infty}1=1$, entonces tenemos como resultado $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x^2+6x-1}{x^3-x^2+3x}=0$.

Ejemplo 2: Calcular $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-5x^2+2}{7x-x^2-5x^3}$.

Solución: Se tiene que: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-5x^2+2}{7x-x^2-5x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-\frac{5}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{\frac{7}{x^2}-\frac{1}{x}-5}$ esto, al dividir el numerador y el denominador entre x^3, que es la mayor potencia de la variable *x* en la fracción.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{5}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{\frac{7}{x^2}-\frac{1}{x}-5}=-\frac{3}{5}.$$

Ejemplo 3: Calcular $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+3}{2x^3-x^2}$.

Solución: Dividiendo numerador y denominador por la mayor potencia de *x* que es x^3, tenemos:

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+3}{2x^3-x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{x}+\frac{3}{x^3}}{2-\frac{1}{x}}$ usando T-14 tenemos que $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{x}+\frac{3}{x^3}}{2-\frac{1}{x}}=\frac{0+0}{2-0}=0$.

Por tanto, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+3}{2x^3-x^2}=0$.

Ejemplo 4: Calcular $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x+7}{2x-3}$.

Solución: Dividiendo numerador y denominador entre x tenemos que:

$\frac{4x+7}{2x-3}=\frac{\frac{4x+7}{x}}{\frac{2x-3}{x}}=\frac{4+\frac{7}{x}}{2-\frac{3}{x}}$ por tanto $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x+7}{2x-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4+\frac{7}{x}}{2-\frac{3}{x}}=\frac{4+0}{2-0}=\frac{4}{2}=2$.

Ejemplo 5: Calcular $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{16+x}-4}{x^3}$.

Solución: Multiplicamos y dividimos por el conjugado

$$\frac{\sqrt{16+x}-4}{x^3} = \left(\frac{\sqrt{16+x}-4}{x^3}\right)\left(\frac{\sqrt{16+x}+4}{\sqrt{16+x}+4}\right) = \frac{16+x-16}{x^3\left(\sqrt{16+x}+4\right)} = \frac{1}{x^2\left(\sqrt{16+x}+4\right)}$$

si $x \neq 0$.

De donde $f(x) = \frac{1}{x^2\left(\sqrt{16+x}+4\right)}$ está definida si $x \in [-16,0) \cup (0,\infty)$ y $f(x) > 0$.

Como $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to\infty} x^2\left(\sqrt{16+x}+4\right) = \infty$ se tiene que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{16+x}-4}{x^3} = 0.$$

2.4.3. LÍMITES INFINITOS DE LA FORMA $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Definición: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ significa que $\forall M > 0\ \exists\, k > 0$ tal que $x \in$ *Dom* f y si $x > k$, *entonces* $f(x) > M$.

T-19. Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L \neq 0$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ y $\lim_{x\to\infty} h(x) = \infty$, entonces se tiene que:

(i) $\lim_{x\to\infty}(f+g)(x) = \infty$.

(ii) $\lim_{x\to\infty}(f \cdot g)(x) = \begin{cases} \infty \text{ si } L > 0 \\ -\infty \text{ si } L < 0 \end{cases}$.

(iii) $\lim_{x\to\infty}(g \cdot h)(x) = \infty$.

Ejemplo 1: Calcular $\lim_{x\to\infty} \sqrt{2x^2+4} + \sqrt{5x^4+1}$.

Solución: Como $\lim_{x\to\infty} \sqrt{2x^2+4} = \infty$ y $\lim_{x\to\infty} \sqrt{5x^4+1} = \infty$ entonces

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{2x^2+4} + \sqrt{5x^4+1} = \infty .$$

2.4.4. ACTIVIDADES DE REFUERZO

Calcular:

1. $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}$.

2. $\lim_{t\to\infty}\dfrac{5t^2+3}{2t^3-t^2}$.

3. $\lim_{x\to\infty}(5x^2-2x+3)$.

4. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x+3}{x^2+5x+6}$.

5. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+x^2+5}{3x^5+x^3-x}$.

6. $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{4x^2+5x-2}{3x^4+1}$.

7. $\lim_{t\to\infty}\dfrac{6t^3+4t-3}{2t^3-3t+5}$.

2.5. TEOREMAS DE CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN.

Definición: Una función ***f* es continua en** a ***si y sólo*** si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

a) ***Existe*** $f(a)$.
b) ***Existe*** $\lim_{x\to a} f(x)$.
c) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

En caso de que al menos una de estas tres condiciones ***no*** se cumpla, ***la función es discontinua en*** a**.**

Se tiene que:

Una ***función polinomial es continua para todo número real*** a**.**

Una función racional es continua para todo número real a***, con excepción de los puntos en los que su denominador es cero.***

Ejemplos: En los siguientes ejemplos se verá si las funciones dadas cumplen las condiciones de continuidad.

Ejemplo 1: La función $f(x)=5x^4-3x^2-8x+1$ es una función polinomial, por lo que es continua en $\Re$.

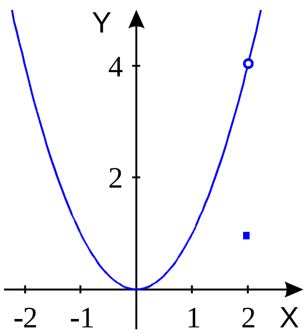
Ejemplo 2: Sea $f(x)=\begin{cases} x^2, \text{ si } x\neq 2 \\ 1, \text{ si } x=2 \end{cases}$.

a) Para el punto $x=2$, de acuerdo con la definición existe $f(2)$ y $f(2)=1$.

b) Existe el límite de la función en $x=2$ y además $\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2} x^2=4$.

c) Pero $\lim_{x\to 2} f(x)=4\neq f(2)$ por tanto, la función f es discontinua en $x=2$.

d) Tracemos su gráfica:



Ejemplo 3: Sea $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\geq 2 \\ x-1 & \text{si } x<2 \end{cases}$.

a) Encontramos límites por la izquierda y por la derecha

Tenemos que $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} x^2=4$ y

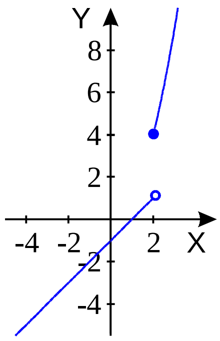
$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} x-1=1$$

b) Para el punto $x=2$, de acuerdo con la definición existe $f(2)$ y $f(2)=4$.

c) La función está definida en todo su dominio, pero no existe $\lim_{x\to 2} f(x)$.

Pues $\lim_{x\to 2^+} f(x)=4\neq \lim_{x\to 2^-} f(x)=1$ por lo que $f(x)$ no es continua.

d)   La gráfica de esta función es:



Ejemplo 4:   Sea $f(x) = [x]$ que representa a la función escalonada, es decir, al máximo entero menor o igual que x por ejemplo:

a) Tabulemos la función para algunos valores:

$$f(-1) = [x] = \begin{cases} -4 \ si \ x \in [-4,-3) \\ -3 \ si \ x \in [-3,-2) \\ -2 \ si \ x \in [-2,-1) \\ -1 \ si \ x \in [-1,0) \\ 0 \ si \ x \in [0,1) \\ 1 \ si \ x \in [1,2) \\ 2 \ si \ x \in [2,3) \\ 3 \ si \ x \in [3,4) \\ 4 \ si \ x = 4 \end{cases}$$

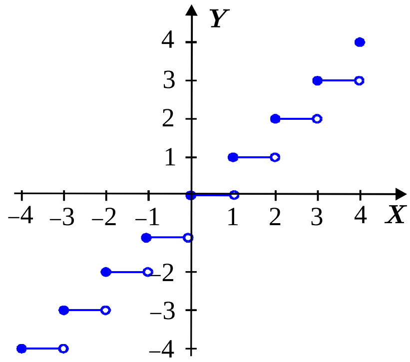
b) La gráfica presenta saltos en cada número entero.

c) Para el punto $x = 1,$ por ejemplo, existe $f(1)$ y $f(1) = 1.$

d) La función está definida en todo su dominio, pero no existe $\lim_{x \to 1} f(x)$ pues

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1 \neq \lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$ por lo que $f(x)$ no es continua.

e)   La gráfica de esta función es:



Ejemplo 5: Dada la función $f(x)=\dfrac{3x+1}{x^2+2}$, veamos si es continua en $\Re$.

$f(x)=\dfrac{3x+1}{x^2+2}$ es una función racional por lo que es continua para todo número real a, con excepción de los puntos en los que su denominador es cero.

Los puntos para los que el denominador es cero son los que cumplen :

$x^2+2=0$, lo cual no se cumple en $\Re$, por lo que la función es continua en $\Re$.

2.6. CONTINUIDAD Y DISCONTINUIDAD EN UN INTERVALO

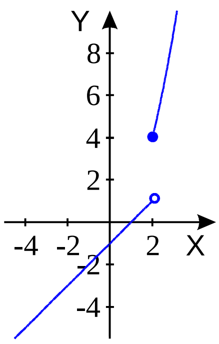
Una función $f(x)$ ***es continua*** en el intervalo (a,b) ***si es continua para todos los valores de*** x ***comprendidos en el intervalo***.

Si f ***es discontinua*** para algún valor de (a,b)***, la función es discontinua en*** (a,b)**.**

Ejemplo 1: La función $f(x)=1+2x-x^2$ es continua en el intervalo $(-1,1)$ por serlo para todos los valores del intervalo.

Ejemplo 2: La función $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{si } x\geq 2 \\ x-1, & \text{si } x<2 \end{cases}$, en el intervalo $(-3,3)$.

Si trazamos su gráfica tenemos:



a) La gráfica presenta un salto en $x = 2$.

b) Para el punto $x = 2$ de acuerdo a la definición de continuidad, existe $f(2)$ y $f(2) = 4$.

c) No existe ***límite*** de la función en $x = 2$ pues el $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 1$ y $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 4$ y como este límite no existe, entonces tampoco se cumple que $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$ de aquí que la función no es continua en $(-3,3)$.

2.7. TEOREMA DE VALOR INTERMEDIO

Si f es continua en $[a,b]$ y M es un número comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un número c comprendido entre a y b tal que $f(c) = M$.(¨Veáse **[6]** para demostración).

Definición: Se dice que una función f tiene un ***valor máximo absoluto en*** c**,** si existe un intervalo que contiene a c y sobre el cual f está definida de tal manera que $f(c) \geq f(x)$ para todo x en el intervalo.

Definición: Se dice que una función f tiene un ***valor mínimo absoluto en*** c**,** si existe un intervalo que contiene a c y sobre el cual f está definida de tal manera que $f(c) \leq f(x)$ para todo x en el intervalo.

Si la función f tiene un máximo absoluto o un mínimo absoluto en c, entonces se dice que tiene un extremo absoluto**.**

2.8. TEOREMA DE VALORES EXTREMOS

Si f ***es continua en un intervalo cerrado*** $[a,b]$, entonces f tiene un valor ***máximo absoluto y un valor mínimo absoluto*** en $[a,b]$. $f(c) = M$.(¨Veáse **[6]** para demostración).

Definición: Se dice que una función f tiene un ***valor máximo relativo en*** c**,** si existe un intervalo abierto que contiene a c y sobre el cual f está definida de tal manera que $f(c) \geq f(x)$ para todo x en el intervalo.

Definición: Se dice que una función f tiene un ***valor mínimo relativo en*** c**,** si existe un intervalo abierto que contiene a c y sobre el cual f está definida de tal manera que $f(c) \leq f(x)$ para todo x en el intervalo.

Si la función f tiene un máximo relativo o un mínimo relativo en c, entonces se dice que tiene un extremo relativo**.**

2.9. ACTIVIDADES DE REFUERZO:

En cada una de las siguientes funciones:

a) Traza la gráfica.
b) Determina si hay puntos en los que la gráfica presente alguna discontinuidad.
c) En caso de que la función no sea continua muestra las condiciones de continuidad que no se cumplen.

1. $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1}$.

2. $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$.

3. $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$.

4. $f(x) = \dfrac{x-3}{x^3-27}$.

5. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x-6}{x-2} & \text{si} \quad x \neq 2 \\ 1, \quad \text{si} & x = 2 \end{cases}$.

6. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x-2} & \text{si} \quad x \neq 2 \\ 2, \quad \text{si} & x = 2 \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si} \quad x < 1 \\ 1 - x^2 & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$.

8. $f(x) = \dfrac{9x^2 - 4}{3x + 2}$.

9. $f(x) = \dfrac{10}{x^2}$.

10. $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{2x}{3} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$.

CAPÍTULO III.

3. DERIVADAS Y RAZONES DE CAMBIO

3.1. DEFINICIÓN DE DERIVADA.

Existen diferentes definiciones equivalentes de derivada. Algunas de ellas son:

- ***Tangente a una curva***. La recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $P = (x, f(x))$ es la recta que pasa por P con pendiente igual a la derivada de f en x.
- ***Velocidad de una partícula que se mueve sobre una línea recta***. La velocidad en el instante t de un objeto, cuya posición sobre una recta viene dada por $f(t)$ en el instante t, es la derivada de f en el punto t.

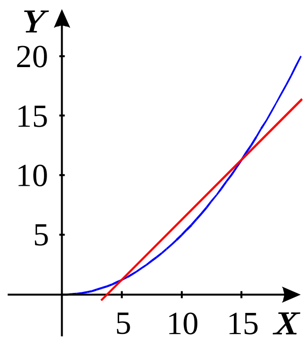
Una forma clásica de construir el concepto de derivada es la definición de recta tangente a una curva y es la que se utilizará en este trabajo.

Recordemos que si una recta tiene un ángulo de inclinación α, decimos que su pendiente es:

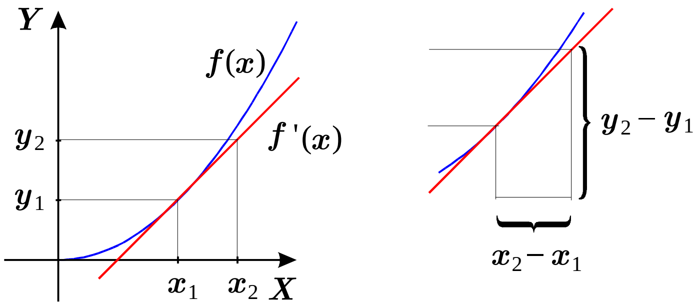
$$m = \tan(\alpha) .$$

La ***derivada*** de una ***función*** en un punto "a" surge del problema de calcular la ***tangente*** a la gráfica de la función en el punto de abscisa "a"

Para construir esta definición, iniciaremos por tomar una recta que corta a la gráfica de la función en más de un punto, como se muestra a continuación:



A medida que los intervalos de posición en x son más pequeños como el esquema que se muestra a continuación, la línea recta tiende a ser más semejante a una línea tangente que a una línea recta secante:



Analizando esta recta tangente podemos ver que el triángulo rectángulo que se forma puede conducirnos a analizar cuál es la ecuación de la pendiente de la recta tangente. Nótese que la hipotenusa dentro del triángulo rectángulo corresponde a la línea recta.

Como podemos apreciar la ecuación que relaciona la línea recta con la pendiente de la recta tangente está dada por:

$$\tan(\alpha) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Pero esta relación nos da la pendiente de una línea recta:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{si} \quad x_1 \neq x_2.$$

Este cociente es la pendiente de la recta tangente si la diferencia de $x_2 - x_1$ es cada vez más pequeña, es decir, $x_2 \to x_1$, o lo que es equivalente:

$$m = \tan(\alpha) = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Si este límite existe se le llama la derivada de *f*:

$$f'(x_1) = \lim_{x_1 \to x_2} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Si h es la diferencia de $x_2 - x_1$ entonces:

$$f'(x_1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h + x_1) - f(x_1)}{h}.$$

Algunas formas de denotar la derivada son las siguientes:

Notación de Lagrange: Si $y = f(x)$, la derivada se representa como $f'(x) = y'$.

Notación de Cauchy: Si $y = f(x)$ la derivada de *y* se representa por: $D_x y$ que se lee Derivada de *y* respecto de *x*.

Notación de Leibniz: (llamada también notación americana). Si $y = f(x)$ su derivada se representa por $\frac{dy}{dx}$ o $\frac{df(x)}{dx}$

En este trabajo, se utilizará la notación de Lagrange para derivada:

Si $y = f(x)$ la derivada se representa como $f'(x) = y'$.

La ***derivada de una función en un punto*** mide, por tanto, la ***pendiente de la tangente*** a la función en dicho punto. La ***derivada*** es útil en el estudio de las funciones, pues nos da información sobre el crecimiento o decrecimiento de una función o la concavidad o convexidad de la misma en los diferentes intervalos en los que se puede descomponer su dominio.

Es importante tener en cuenta que hay ***funciones que no tienen derivadas*** en un punto, y que para que una función tenga derivada, ***la función debe ser continua*** pero no todas las funciones continuas son derivables en todos sus puntos. Un ejemplo de esto es la siguiente función:

$$f(x) = |x|.$$

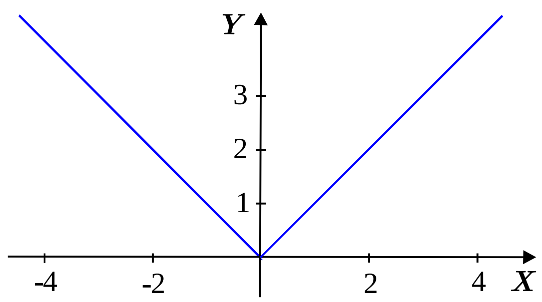
Como se puede observar, la función es continua en cero pero no tiene derivada en ese punto porque:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

Pero sacando límites por la izquierda y por la derecha se tiene que:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1.$$

De aquí que la función es continua en cero pero no tiene derivada ahí pues los límites laterales son distintos.



Veamos un ejemplo para determinar la derivada de una función utilizando la definición y la llamada ***"regla de los cuatro pasos":***

3.2. REGLA DE LOS CUATRO PASOS PARA DERIVAR UNA FUNCIÓN

***1. Dar un incremento a* x. *Sea h este incremento*:** $x+h$

2. Calcular el valor del incremento bajo la función: $f(x+h)$

3. Escribir el cociente $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

4. Calcular $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Ejemplo 1: Calcular la derivada de la función $y=f(x)=4x^2-3$, utilizando ***la "regla de los cuatro pasos".***

Solución:

Paso 1: Damos un incremento a x. Sea *h* este incremento.

Paso 2. Calcular el valor del incremento bajo la función: $f(x+h)=4(x+h)^2-3$.

Desarrollamos el binomio cuadrado: $f(x+h)=4(x^2+2xh+h^2)-3$.

$$f(x+h)=4x^2+8xh+4h^2-3.$$

Paso 3. Escribimos el cociente $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\left(4x^2+8xh+4h^2-3\right)-\left(4x^2-3\right)}{h}=\frac{8xh+4h^2}{h}=8x+4h \text{ si } h\neq 0.$$

Paso 4. Calcular $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Calcular $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}8x+4h=8x$.

Ejemplo 2: Calcular la derivada de la función $y=f(x)=x^3$, utilizando ***la "regla de los cuatro pasos".***

Solución:

Paso 1: Damos un incremento a x. Sea $x+h$ este incremento.

Paso 2. Calcular el valor del incremento bajo la función: $f(x+h)=(x+h)^3$.

Desarrollamos el binomio al cubo: $(x+h)^3=(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)$.

Paso 3. Escribimos el cociente $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-x^3}{h}\\ &= \frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}\\ &= \frac{h\left(3x^2+3xh+h^2\right)}{h}\\ &= 3x^2+3xh+h^2 \qquad \text{si } h\neq 0.\end{aligned}$$

Paso 4. Calcular $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Calcular $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}3x^2+3xh+h^2=3x^2$.

Ejemplo 3: Calcular la derivada de la función $y=\sqrt{x}$, utilizando ***la "regla de los cuatro pasos".***

Solución:

Paso 1: Damos un incremento a *x*:

$$x+h.$$

Paso 2. Calcular el valor del incremento bajo la función:

$$f(x+h)=\sqrt{x+h}.$$

Paso 3. Escribimos el cociente $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}.$$

Paso 4. Calcular $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Si se observa, cuando $h \to 0$ se tiene que $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$, hay una indeterminación del tipo cero sobre cero, sin embargo podemos racionalizar esta expresión multiplicando y dividiendo por el conjugado del numerador:

$$\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

si $h \neq 0$.

Calcular el límite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

3.2.1. ACTIVIDADES DE REFUERZO

Calcula la derivada de las siguientes funciones, utilizando la "***regla de los cuatro pasos***".

1. $f(x) = 5x$.
2. $f(x) = 2x^2 + 4$.
3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.
4. $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$.
5. $f(x) = 2 - x^3$.
6. $f(x) = \frac{1}{x-2}$.
7. $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$.
8. $f(x) = \frac{1-x}{3}$.
9. $f(x) = \frac{3}{2} - 6x$.
10. $f(x) = \frac{2+x}{2-x}$.

3.3. REGLAS DE DERIVACIÓN:

Para una función, la obtención de su derivada mediante la aplicación de su definición es un proceso laborioso, y algunas veces no tan sencillo de simplificar. Existen Reglas Generales de Derivación de funciones las cuales aplicamos para derivar las funciones. El proceso consiste en conocer f y encontrar f'. Estas Reglas son las siguientes:

FUNCIÓN	**DERIVADA**
D1. Derivada de la función constante. Si $f(x)=k$	$f'(x)=0$
D2. Derivada de la función identidad. Si $f(x)=x$	$f'(x)=1$
D3. Derivada de una función lineal. Si $f(x)=mx+b$	$f'(x)=m$
D4. Derivada de la suma de funciones. Si $h(x)=f(x)+g(x)$ y existen $f'(x)$ y $g'(x)$, entonces	$h'(x)=f'(x)+g'(x)$
D5. Derivada del producto de dos funciones: Si $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ son funciones tales que: $h(x)=f(x)g(x)$ y existen $f'(x)$ y $g'(x)$, entonces	$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
D6. Derivada del producto de una constante por una función: Si $h(x)=Cf(x)$ donde C es la función constante y $f'(x)$ existe entonces	$h'(x)=Cf'(x)$
D7. Derivada del cociente de dos funciones: Si $f(x), g(x)$ y $h(x)$ son funciones tales que: $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}, g(x)\neq 0$ y existen $f'(x)$ y $g'(x)$, entonces	$h'(x)=\dfrac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$
D8. Derivada de la potencia. Si $f(x)=x^n$, entonces	$f'(x)=nx^{n-1}$
D9. Derivada de funciones compuestas (Regla de la Cadena) Si $h(x)=f(g(x))$ y existen $f'(g(x))$ y $g'(x)$, entonces	$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$
D10. Derivada del seno. Si $f(x)=\operatorname{sen}(x)$, entonces	$f'(x)=\cos(x)$
D11. Derivada del coseno. Si $f(x)=\cos(x)$, entonces	$f'(x)=-\operatorname{sen}(x)$
D12. Derivada de la tangente. Si $f(x)=\tan(x)$, entonces	$f'(x)=\sec^2(x)$
D13. Derivada de la cotangente. Si $f(x)=\cot(x)$, entonces	$f'(x)=-\csc^2(x)$
D14. Derivada de la secante. Si $f(x)=\sec(x)$, entonces	$f'(x)=\tan(x)\sec(x)$
D15. Derivada de la cosecante. Si $f(x)=\csc(x)$, entonces	$f'(x)=-\csc(x)\cot(x)$
D16. Derivada del logaritmo natural. Si $f(x)=\ln(x)$, entonces	$f'(x)=\dfrac{1}{x}$
D17. Derivada del logaritmo base *a*. Si $f(x)=\log_a x$, entonces	$f'(x)=\dfrac{1}{x\ln a}$
D18. Derivada de la exponencial base a. Si $f(x)=a^x$, entonces	$f'(x)=a^x\ln a$
D19. Derivada de la exponencial base e. Si $f(x)=e^x$, entonces	$f'(x)=e^x$

Ejemplos:

Encontrar la derivada de las siguientes funciones, utilizando las reglas de derivación:

1. $f(x)=5$. *Solución:* Como 5 es una constante, utilizando D1, se tiene que $f'(x)=0$.

2. $f(x)=-2$. *Solución:* Como -2 es una constante, utilizando D1, se tiene que $f'(x)=0$.

3. $f(x) = 3z$ **.** *Solución:* Como $3z$ es una constante, utilizando D1, se tiene que $f'(x) = 0$.

4. $f(x) = 3x$ **.** *Solución :*Utilizando D3, se tiene que $m = 3$ y $b = 0$ por tanto $f'(x) = 3$.

5. $f(x) = kx - c$ *Solución:* Utilizando D3, se tiene que $m = k$ y $c = -b$ por tanto $f'(x) = k$.

6. $f(x) = -\frac{2}{3}x + 5$ **.** *Solución:* Utilizando D3, se tiene que $m = -\frac{2}{3}$ y $b = 5$ por tanto $f'(x) = -\frac{2}{3}$.

7. $f(x) = x^5$. *Solución:* Utilizando D8 tenemos que $f'(x) = 5x^4$.

8. $f(x) = x^{-3}$. *Solución:* Utilizando D8 tenemos que $f'(x) = -3x^{-4}$.

9. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$. *Solución:* Utilizando D8 tenemos que $f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}$.

10. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$. *Solución:* Utilizando D8 tenemos que $f'(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{-1}{4}}$.

11. $h(x) = 3x^2 - x$ **.**

Solución: Utilizando D4, tenemos que $f(x) = 3x^2$ y $g(x) = -x$, entonces

$$h'(x) = f'(x) + g'(x);$$

Pero utilizando D8 $f'(x) = 6x$; $g'(x) = -1$ por tanto $h'(x) = 6x - 1$.

12. $y = x^2 - 3x + 6$ **.**

Solución: Utilizando D4, tenemos que $f(x) = x^2$, $g(x) = -3x$ y $h(x) = 6$ entonces:

$$y' = f'(x) + g'(x) + h'(x);$$

Pero utilizando D8 $f'(x) = 2x$; $g'(x) = -3$; $h'(x) = 0$.

Por tanto $y' = 2x - 3$.

13. $h(x)=(x+2)(x+1)$.

Solución: Utilizando el producto de funciones se tiene que si:

$f(x)=(x+2)$ y $g(x)=(x+1)$ entonces $f'(x)=1$ y $g'(x)=1$ por lo tanto aplicando D5 tenemos:

$$h'(x)=1(x+1)+1(x+2)=2x+3.$$

14. $h(x)=(x^2+4x-3)(3x^2+12x+12)$.

Solución: Utilizando el producto de funciones tenemos que si:

$f(x)=(x^2+4x-3)$ y $g(x)=(3x^2+12x+12)$ entonces aplicando D8.

$f'(x)=2x+4$ y $g'(x)=6x+12$ de donde, aplicando D5:

$$h'(x)=(2x+4)(3x^2+12x+12)+(6x+12)(x^2+4x-3).$$

Multiplicando tenemos que:

$$h'(x)=(6x^3+24x^2+24x+12x^2+48x+48)+(6x^3+24x^2-18x+12x^2+48x-36).$$

Reduciendo expresiones:

$$h'(x)=12x^3+72x^2+102x+12.$$

15. $h(x)=5(x^3+7x-4)$.

Solución: Aplicando D6 sea C = 5 una constante y $f(x)=(x^3+7x-4)$ obtenemos que:

$$h(x)=Cf(x) \quad \text{y} \quad h'(x)=Cf'(x)$$

Encontramos que aplicando D8.

$$h'(x)=5(3x^2+7)=15x^2+35.$$

16. $h(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ con $x+1\neq 0$;

Solución: Aplicaremos la regla de cociente D7.

Sean $f(x)=x-1$ y $g(x)=x+1$.

Encontramos sus derivadas, tenemos que $f'(x)=1$ y $g'(x)=1$

Aplicamos D7

$$h'(x)=\frac{(x+1)(1)-(x-1)(1)}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}.$$

17. $y=\dfrac{3x^2-2x+5}{4x^2+5}$.

Solución: Aplicaremos la regla de cociente D7.

Sean $f(x)=3x^2-2x+5$ y $g(x)=4x^2+5$.

Encontramos sus derivadas aplicando D8.

Tenemos que: $f'(x)=6x-2$ y $g'(x)=8x$.

Aplicamos D7:

$$\begin{aligned}h'(x)&=\frac{(4x^2+5)(6x-2)-(3x^2-2x+5)(8x)}{(4x^2+5)^2}\\&=\frac{(24x^3-8x^2+30x-10)-(24x^3-16x^2+40x)}{(4x^2+5)^2}\\&=\frac{8x^2-10x-10}{(4x^2+5)^2}.\end{aligned}$$

18. $y=(3x-1)^2$.

Solución: Si definimos a la función $f(x)=x^2$ y $g(x)=3x-1$ se tiene que:

$y=f(g(x))$ por D9 tenemos que $y'=f'(g(x))\cdot g'(x)$.

Tenemos que $f'(x)=2x$ y $g'(x)=3$

Entonces: $y'=f'(g(x))\cdot g'(x)=2(3x-1)\cdot 3=6(3x-1)=18x-6$.

19. $y=\sqrt{3-2x^2}$.

Solución: Si definimos a la función $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=3-2x^2$ se tiene que:

$y=f(g(x))$ por D9 tenemos que $y'=f'(g(x))\cdot g'(x)$.

Tenemos que $f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ y $g'(x)=-4x$.

Entonces: $y'=f'(g(x))\cdot g'(x)=\frac{1}{2}(3-2x^2)^{-\frac{1}{2}}(-4x)=-2x(3-2x^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{-2x}{\sqrt{3-2x^2}}$.

20. $y=\operatorname{sen}(3x)$.

Solución: Si definimos a la función $f(x)=\operatorname{sen}(x)$ y $g(x)=3x$ se tiene que:

$y=f(g(x))$ por D9 tenemos que $y'=f'(g(x))\cdot g'(x)$.

Tenemos por D10 que $f'(x)=\cos(x)$ y $g'(x)=3$.

Entonces: $y'=f'(g(x))\cdot g'(x)=\cos(3x)\cdot 3=3\cos(3x)$.

21. $y=\frac{1}{3}\cos^3 x$.

Solución: Si definimos a la función $f(x)=x^3$ y $g(x)=\cos x$ se tiene que:

$y=\frac{1}{3}f(g(x))$ por D9 tenemos que $y'=\frac{1}{3}[f'(g(x))\cdot g'(x)]$.

Tenemos que $f'(x)=3x^2$ y por D11. $g'(x)=-\operatorname{sen}(x)$.

Entonces: $y'=\frac{1}{3}[f'(g(x))\cdot g'(x)]=\frac{1}{3}[3(\cos x)^2\cdot(-\operatorname{sen}(x))]=-\operatorname{sen}(x)\cdot\cos^2(x)$.

22. $y = \tan\frac{1-x}{1+x}$.

Solución: Si definimos a la función $f(x) = \tan(x)$ y $g(x) = \frac{1-x}{1+x}$ se tiene que:

Por D12. $f'(x) = \sec^2(x)$ por D67

$$g'(x) = \frac{(1+x)(-1)-(1-x)(1)}{(1+x)^2} = \frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}.$$

Por D9 $y' = f'(g(x))\cdot g'(x) = \left(\sec^2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right)\cdot\left(\frac{-2}{(1+x)^2}\right).$

23. $y = \cot\sqrt{\frac{x}{2}}$.

Solución: Si definimos $f(x) = \cot(x)$ y $g(x) = \sqrt{\frac{x}{2}}$ tenemos que

Por D13, $f'(x) = -\csc^2(x)$ y $g'(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{x}{2}\right]^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{x}{2}}}\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right].$

Aplicando D9 $y' = f'(g(x))\cdot g'(x) = -\csc^2\left[\sqrt{\frac{x}{2}}\right]\cdot\frac{1}{4}\left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right] = -\frac{1}{4}\left[\sqrt{\frac{2}{x}}\right]\csc^2\left[\sqrt{\frac{x}{2}}\right].$

24. $y = \sec^2(x)$.

Solución: Si definimos a la función $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sec(x)$ se tiene que:

$$f'(x) = 2x \quad \text{y} \quad g'(x) = \tan(x)\sec(x).$$

Por D9 $y' = f'(g(x))\cdot g'(x) = 2(\sec(x))\tan(x)\sec(x) = 2\sec^2(x)\tan(x)$.

25. $y = \sec(x)\tan(x)$.

Solución: Podemos definir la función como un producto de funciones:

$y = f(x)g(x)$

Sea $f(x) = \sec(x)$, entonces $f'(x) = \tan(x)\sec(x)$.

Sea $g(x) = \tan(x)$, entonces $g'(x) = \sec^2(x)$.

Utilizando D5, tenemos que:

$$\begin{aligned} y'(x) &= f'(x)g(x) + f(x).g'(x) \\ &= \tan(x)\sec(x)\tan(x) + \sec(x)\sec^2(x) \\ &= \tan^2(x)\sec(x) + \sec^3(x). \end{aligned}$$

26. $y = \cot(x)\csc(x)$.

Solución: Podemos ver a la función y como un producto de funciones.

$$y = f(x)g(x).$$

Sea $f(x) = \cot(x)$ por D13 $f'(x) = -\csc^2(x)$.

Sea $g(x) = \csc(x)$ por D15 $g'(x) = -\csc(x)\cot(x)$.

Por D5 tenemos que:

$$\begin{aligned} y'(x) &= f'(x)g(x) + f(x).g'(x) \\ &= -\csc^2(x)\csc(x) + \cot(x)(-\csc(x)\cot(x)) \\ &= -\csc^3(x) - \cot^2(x)\csc(x). \end{aligned}$$

27. $y = \csc^3(2x)$.

Solución: Podemos ver a la función y como una composición de funciones:

$$y = f(g(x)).$$

Definamos $f(x) = x^3$, entonces $f'(x) = 3x^2$.

$g(x) = \csc(2x)$, entonces $g'(x) = -2\csc(2x)\cot(2x)$.

Por D9 $y' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 3(\csc(2x))^2(-2\csc(2x)\cot(2x)) = -6\csc^3(2x)\cot(2x))$.

28. $y = \ln(1-3x)$.

Solución: Se puede ver a la función y como una composición de funciones:

$$y = f(g(x)).$$

Sea $f(x) = \ln(x)$, entonces por D16, $f'(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = (1-3x)$ de donde $g'(x) = (-3)$.

De aquí que $y' = f'(g(x) \cdot g'(x) = \left(\frac{1}{1-3x}\right) \cdot (-3) = \frac{-3}{1-3x}$.

29. $y = x\ln(x)$.

Solución: Esta función la podemos ver como un producto de funciones.

Definamos $f(x) = x$, $g(x) = \ln(x)$.

$$f'(x) = 1, \quad g'(x) = \frac{1}{x}, \quad y = f(x)g(x).$$

Por D5 tenemos que:

$$y'(x) = f'(x)g(x) + f(x).g'(x) = \ln(x) \cdot 1 + x\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \ln(x).$$

30. $y = \log_3 \frac{2}{x}$.

Solución: Se puede ver a la función y como una composición de funciones

$$y = f(g(x)).$$

Sea $f(x) = \log_3(x) = \frac{\ln x}{\ln 3}$, $g(x) = \frac{2}{x} = 2x^{-1}$.

Por D17 $f'(x) = \left(\frac{1}{\ln 3}\right)\left(\frac{1}{x}\right)$ por D6 y D8 $g'(x) = 2(-1)x^{-2} = \frac{-2}{x^2}$.

Por D9 $y' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \left(\frac{1}{\ln 3}\right)\left(\frac{1}{\frac{2}{x}}\right) \cdot \left(\frac{-2}{x^2}\right) = \frac{-2x}{2x^2 \ln 3} = \frac{-1}{x\ln 3}$.

31. $y = e^{2x}$.

Solución: Se puede ver a la función y como una composición de funciones

$$y = f(g(x)):$$

$f(x) = e^x$ y $g(x) = 2x$ de donde:

$$f'(x) = e^x \quad \text{y} \quad g'(x) = 2.$$

Por D9 $y' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}$.

32. $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Solución: Se puede ver a la función y como una división de funciones:

$$f(x) = e^x - e^{-x} \quad \text{y} \quad g(x) = e^x + e^{-x}.$$

Que a su vez serán derivadas como suma y resta de funciones respectivamente. De aquí que, por D19.

$$f'(x) = e^x + e^{-x}, \qquad g'(x) = e^x - e^{-x}$$

Utilizando la regla del cociente D7 tenemos que:

$$y'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2} = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{(e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}) - \left(e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}\right)}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}.$$

33. $y = a^{\operatorname{sen}(x)}$.

Solución: Se puede ver a la función y como una composición de funciones.

Sean $f(x) = a^x$ y $g(x) = \operatorname{sen}(x)$.

Obteniendo derivadas se tiene que: $f'(x) = a^x \ln a$ y $g'(x) = \cos(x)$.

Por D9 $y' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = a^{\operatorname{sen}(x)} \ln a \cos(x)$.

3.3.1. ACTIVIDADES DE REFUERZO

Basándote en las reglas de derivación, encuentra la derivada de las siguientes funciones:

1. $y = 4x^3 - 3x^2 - 5$.
2. $y = 2x^{-3} + 3x^{-1}$.
3. $y = x^{\frac{2}{3}}$.
4. $y = (x^2 + 1)(x^3 - 1)$.
5. $y = 3x - 4\sqrt[3]{x^4} + 5x^2 - 1$.
6. $y = (3x - 1)^2$.
7. $y = \dfrac{2}{3x^2} - \dfrac{1}{4x}$.
8. $y = (2x^4 - 7x^3 + 3x - 1)^2$.
9. $y = \dfrac{1}{(x+1)^2}$.
10. $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.
11. $y = \dfrac{(x^2 - 5)^3}{(x^2 + 3)^2}$.
12. $y = \sqrt{3 - 2x}$.
13. $y = \sqrt{\dfrac{2x+3}{2x-1}}$.
14. $\sqrt[4]{\dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 1}}$.
15. $y = (5x - 2)\sqrt{1 - x^2}$.
16. $f(x) = 3\operatorname{sen} 2x$.
17. $f(x) = \cos x^2$.
18. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.
19. $f(x) = \operatorname{sen}(x)\cos(x)$.
20. $f(x) = \cos(2x^2 - 3)$.
21. $f(x) = \tan\dfrac{1-x}{1+x}$.
22. $f(x) = \sec\dfrac{2-x}{3}$.
23. $f(x) = \csc\dfrac{2x-1}{5}$.
24. $f(x) = \dfrac{1}{3}\tan^3 x + \tan^2 x + \tan x$.
25. $f(x) = \cot\dfrac{\sqrt{x}}{2}$.
26. $f(x) = \tan x \cot x$.
27. $f(x) = \cot x \csc x$.
28. $f(x) = \ln(5x + 2)$.
29. $f(x) = \ln(ax^2 + b)$.
30. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \cos x}\right)$.
31. $f(x) = e^{nx}$.
32. $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

3.4. DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Si una función f se deriva, se obtiene *f’* (primera derivada).

Si la primera derivada *f’* se deriva, se obtiene *f’’* (segunda derivada). Si ésta a su vez se deriva se obtiene *f’’’* (tercera derivada) y así sucesivamente se obtienen las derivadas llamadas de orden superior.

Ejemplo 1: Sea $f(x)=5x^4+2x^3-4x^2-3x+1$ encontremos las derivadas de orden superior:

Utilizando D4, D6 y D8, se tiene que $f'(x)=20x^3+6x^2-8x-3$.

Utilizando D4, D6 y , se tiene que $f''(x)=60x^2+12x-8$.

Utilizando D4, D6 y D8 , se tiene que $f'''(x)=120x+12$.

Utilizando D3 , se tiene que $f^{(4)}(x)=120$.

Utilizando D1, se tiene que $f^{(5)}(x)=0$.

De manera general, la *n-ésima* derivada de *f* se puede denotar como $f^{(n)}$, donde *n* es un entero positivo mayor que 1.

Otras formas de denotar las derivadas sucesivas de una función *f* son las siguientes:

Primera derivada: $f'(x)=y'$.

Segunda derivada: $f''(x)=y''$.

Tercera derivada: $f'''(x)=y'''$.

n-ésima derivada: $f^{(n)}(x)=y^{(n)}$.

3.4.1. ACTIVIDADES DE REFUERZO

I. Encuentra la primera y segunda derivada de las siguientes funciones:

1) $y=x^3+2x^2-7x-1$.

2) $y=x^4-x^2+x-3$.

3) $f(x)=(2x+3)^3$.

4) $f(x)=\sqrt[3]{3x^2-1}$.

5) $f(x)=\operatorname{sen}2x$.

6) $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$.

3.5. APLICACIONES DE LA DERIVADA.

Al principio de esta unidad definimos como derivada a la velocidad, en el instante *t* de un objeto cuya posición sobre una recta está dada por *f*(*t*) en el instante *t*, *f'*(*t*) es la derivada de *f* en el punto *t.* Veamos detalladamente un ejemplo de este concepto.

Ejemplo 1:

Supongamos que una partícula se mueve sobre una recta de acuerdo con la ecuación $s = 2t^2 - 12t + 8$, donde s se mide en centímetros y t en segundos. Encontrar los intervalos de tiempo en los que la velocidad es negativa, cero o positiva.

Solución:

Podemos utilizar la derivada para encontrar la velocidad instantánea del móvil. Sabemos, por Física, que la fórmula para calcular la velocidad es: $v = \frac{d}{t}$.

Representemos a la derivada de *s* con respecto a *t* como:

$$v'(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(2t^2 - 12t + 8) = 4t - 12.$$

La velocidad de la partícula será negativa cuando $4t - 12 < 0$, de aquí que

$4t < 12$ y $t < \frac{12}{4} = 3$, es decir, es negativa en $0 < t < 3$.

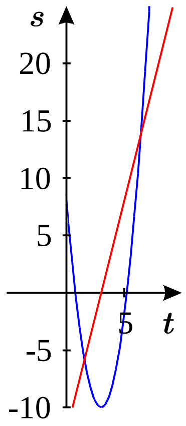
La velocidad de la partícula será cero cuando $4t - 12 = 0$, es decir, cuando $t = 3$.

La velocidad de la partícula será positiva cuando $4t - 12 > 0$, es decir, cuando $t > 3$.

Podemos ver los valores del tiempo para *s* y *v*, así como la gráfica:

t	$s(t) = 2t^2 - 12t + 8$	$v(t) = 4t - 12$
0	$s(0) = 2(0)^2 - 12(0) + 8 = 8$	$v(0) = 4(0) - 12 = -12$
1	$s(1) = 2(1)^2 - 12(1) + 8 = -2$	$v(1) = 4(1) - 12 = -8$
2	$s(2) = 2(2)^2 - 12(2) + 8 = -8$	$v(2) = 4(2) - 12 = -4$
3	$s(3) = 2(3)^2 - 12(3) + 8 = -10$	$v(3) = 4(3) - 12 = 0$
4	$s(4) = 2(4)^2 - 12(4) + 8 = -8$	$v(4) = 4(4) - 12 = 4$
5	$s(5) = 2(5)^2 - 12(5) + 8 = -2$	$v(5) = 4(5) - 12 = 8$
6	$s(6) = 2(6)^2 - 12(6) + 8 = 8$	$v(6) = 4(6) - 12 = 12.$

Si identificamos la recta donde se mueve el móvil con el eje vertical (que llamaremos *s*), y ponemos el tiempo en el eje horizontal (que llamaremos *t*), la gráfica es:



En la gráfica se observa que si $0 < t < 3$ la velocidad es negativa y la partícula se desplaza hacia debajo de manera decreciente de *s*.

Si $t = 3$ la velocidad es cero, y después se vuelve positiva al desplazarse hacia arriba en dirección creciente de *s*.

Tenemos entonces que, dada la ecuación de movimiento de un cuerpo para obtener su velocidad en un instante dado, calculamos el valor de la derivada de la posición respecto al tiempo en dicho instante.

Sabemos también que la aceleración mide la razón de cambio de la velocidad respecto al tiempo, por tanto, la aceleración en un instante dado es la derivada de la velocidad respecto al tiempo para ese instante, es decir:

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \text{y como} \quad v = \frac{ds}{dt} \quad \text{entonces} \quad a = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Esto significa, que la aceleración es la derivada de la derivada (la segunda derivada) de la posición respecto al tiempo.

Si resumimos nuestro ejemplo tenemos que:

$$s = 2t^2 - 12t + 8, \qquad v = \frac{ds}{dt} = 4t - 12, \qquad a = \frac{d^2 s}{dt^2} = 4.$$

Por lo que concluimos que la velocidad aumenta a razón constante de 4 centímetros por segundo cada segundo y se escribe 4 centímetros por segundo por segundo, como podemos ver en los valores calculados de *v* cuando *t* varía de 0 a 6.

Ejemplo 2:

Si una partícula se mueve sobre una recta según la ecuación $s = 2t^3 - 3t + 1$ donde *s* se mide en metros y *t* en segundos, hallar la velocidad y la aceleración de la partícula cuando $t = 3$.

Solución:

La velocidad de una partícula en un instante t está dada por:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(2t^3 - 3t + 1) = 6t^2 - 3$$

por lo que si t = 3, la velocidad de la partícula es:

$$v(3) = 6(3)^2 - 3 = 6(9) - 3 = 54 - 3 = 51 \ {}^{\mathrm{m}}\!/_{\mathrm{s}} \ .$$

La aceleración de la partícula en un instante t es:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(6t^2 - 3) = 12t \ .$$

Si t = 3 la aceleración de la partícula estará dada por $a = 12(3) = 36 \ {}^{\mathrm{m}}\!/_{s^2}$.

Ejemplo 3:

Si una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba desde una altura de 15 metros con una velocidad inicial de 25 metros por segundo, encontrar:

a) La ecuación de movimiento.

b) La velocidad de la pelota a los 2 segundos.

c) La aceleración al segundo 1.

d) El tiempo en el que sube la pelota.

e) La altura máxima que alcanza.

Solución:

a) La ecuación de movimiento está dada por:

$$e = 15 + 25t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad \text{si } g = 9.8,$$

entonces la ecuación de movimiento estará dada por:

$$e = 15 + 25t - 4.9t^2 \ .$$

b) La velocidad de la pelota en el instante t es:

$$v = \frac{de}{dt} = 25 - 9.8t \ .$$

y a los 2 segundos, la velocidad de la pelota es:

$$v = 25 - 9.8(2) = 25 - 19.6 = 5.4 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} \ .$$

c) La aceleración de la pelota en el instante t es: $a = \frac{dv}{dt} = -9.8$.

Si $t = 1$, entonces la aceleración será : $-9.8 \, {}^{m}\!/\!{}_{s^2}$.

d) La pelota sube hasta el instante en que la velocidad se hace cero y después cae. Entonces si igualamos la velocidad a cero y calculamos el valor de t:

$v = 25 - 9.8t$ igualando a cero tenemos que $25 - 9.8t = 0$.

Despejando t se tiene que: $t = 2.55$ s y en este momento la pelota alcanza su altura máxima.

e) La altura máxima que alcanza la pelota se obtiene a partir de la ecuación del movimiento cuando $t = 2.55$, entonces:

$$e = 15 + 25t - 4.9t^2 = 15 + 2.5(2.55) - 4.9(2.55)^2 = 15 + 63.75 - 31.86 = 46.89 \ \text{m} \ .$$

3.5.1. ACTIVIDADES DE REFUERZO

1. Una partícula se mueve sobre una recta de acuerdo a la ecuación de movimiento $s = f(t)$, donde s es la distancia dirigida al origen en pies a los t segundos. Para cada uno de los incisos siguientes encuentra:

I. La velocidad $v(t)$ y la aceleración $a(t)$ en el instante t

II. Los intervalos en los que la partícula se mueve con velocidad positiva, negativa o no se mueve.

a) $s = 6t - t^2$.

b) $s = t^2 - 6t$.

c) $s = t^2 - 9t + 24$.

2. Las ecuaciones de dos móviles son $e_1 = 2t^2 - 3t - 1$ y $e_2 = t^2 + t$. ¿En qué instante tiene igual velocidad? ¿Cuál es la velocidad de cada móvil en el instante $t = 1$? ¿Y en el instante $t = 3$?

CAPÍTULO IV.

4. MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Hasta el momento, la ***derivada*** la hemos interpretado geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la ***gráfica*** de una ***función*** en un punto de la misma. Los puntos en los que la derivada es cero son aquellos en los que la recta tangente es horizontal.

A continuación se enunciarán algunos teoremas**]** que serán de utilidad para la graficación de funciones:

Teorema 1[véase 1]: Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y diferenciable en el intervalo abierto (a,b).

i) Si $f'(x) > 0$ para todo ***x*** en (a,b), entonces ***f*** es creciente en (a,b).

ii) Si $f'(x) < 0$ para todo ***x*** en (a,b), entonces ***f*** es decreciente en (a,b).

En base al teorema 5 podemos definir el siguiente teorema:

Teorema 2. [véase 1]:
Si f es continua en un intervalo I, y es no nula para todo $x \in I$ entonces f es positiva en todo I o negativa en todo I.

Definición de máximo relativo: Se dice que una función ***f*** tiene un ***máximo relativo*** en ***c*** si existe un intervalo abierto que contiene a ***c*** y sobre el cual ***f*** está definida de manera que $f(c) \geq f(x)$ para todo ***x*** en el intervalo.

Definición de mínimo relativo: Se dice que una función ***f*** tiene un ***mínimo relativo*** en ***c*** si existe un intervalo abierto que contiene a ***c*** y sobre el cual ***f*** está definida de manera que $f(c) \leq f(x)$ para todo ***x*** en el intervalo.

Si la función ***f*** tiene un ***máximo relativo*** o un ***mínimo relativo*** en ***c,*** entonces ***f*** tiene un ***extremo relativo.***

Veamos un ***teorema*** en el cual se apoya la determinación de los posibles valores de ***c*** para los cuales existen ***extremos relativos***:

Teorema 3.

Si existe ***f(x)*** para todo $x \in (a,b)$; si ***f*** tiene un ***extremo relativo*** en ***c*** con ***a < c < b***, y si $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$.

Demostración: Supongamos que ***f(c)*** es el ***valor máximo*** de ***f*** en ***(a, b).***
Si $f'(c)$ existe, por definición de derivada se tiene que: $f'(c) = \lim_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$.

Como ***f*** tiene un ***máximo relativo*** en ***c,*** entonces $f(c) \geq f(x)$ por tanto

$$f(x) - f(c) \leq 0 .$$

Si ***x*** se aproxima a ***c*** por la ***derecha,*** $x \rightarrow c^{+}$, entonces $x > c$ y $x - c > 0$, por tanto

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \quad \text{y si existe el } \textbf{\textit{límite,}} \text{ entonces } \lim_{x \to c^{+}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 .$$

Si ***x*** se aproxima a ***c*** por la ***izquierda,*** $x \rightarrow c^{-}$, entonces $x < c$ y $x - c < 0$, por tanto

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \text{ y si existe el límite, entonces } \lim_{x \to c^{-}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 .$$

Como $f'(x)$ existe, los ***límites*** por la ***izquierda*** y por la ***derecha*** de ***c*** deben ser iguales entre sí e iguales a $f'(c)$, por lo que $f'(c) \geq 0$ y $f'(c) \leq 0$ por tanto $f'(c) = 0$ que es lo que queríamos demostrar.

La demostración de cuando $f(c)$ es un valor ***mínimo*** de ***f*** en (a,b) es similar a la del valor máximo.

Es importante hacer notar que en el teorema 3 se debe incluir que $a < c < b$, pues hay funciones para las que $f'(x) = 0$ para algún valor de *x*, pero esto no quiere decir que se tenga un valor extremo relativo allí. Ejemplifiquemos esto con la siguiente función:

Ejemplo:

1. Encontramos la derivada de la función de $f(x) = x^3$

$$f'(x) = 3x^2$$

Igualamos a cero la derivada:

$$f'(x) = 3x^2 = 0$$

de donde

$$x = 0 .$$

Como solo tenemos un punto crítico y el dominio de la función son todos los reales, entonces consideramos los intervalos

$$(-\infty,0) \text{ y } (0,\infty)$$

Evaluamos la derivada de la función en $-1 \in (-\infty,0)$:

$$f'(-1) = 3(-1)^2 > 0 .$$

Como $f'(x) > 0$ la función es creciente en el intervalo $(-\infty,0)$ (**teorema 1i**).

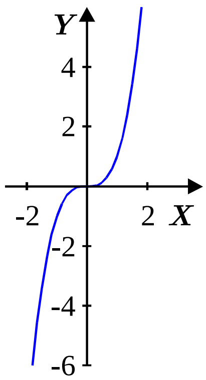
Evaluamos la derivada en $1 \in (0,\infty)$:

$$f'(1) = 3(1)^2 > 0 .$$

Como $f'(x) > 0$ la función es creciente en el intervalo $(0,\infty)$ (**teorema 1ii**).

Como la derivada no cambia de signo entonces en cero no hay máximo ni mínimo.

Podemos representar los puntos anteriores en la siguiente gráfica:



Definición de punto crítico: Si ***c*** es un punto en el dominio de definición de una ***función f*** y **si** $f'(c)=0$ ***o*** $f'(c)$ no existe, se dice que ***c*** es un ***punto crítico*** de ***f.***

De los puntos anteriores tenemos que para que una ***función*** tenga un ***extremo relativo*** en ***c***, entonces ***c*** debe ser un ***punto crítico***.

Ejemplo 1: Encontrar los puntos críticos de la siguiente función: $f(x)=x^3+7x^2-5x$

Solución:

1. Encontramos $f'(x)=3x^2+14x-5$.
2. Igualamos $f'(x)=0$, es decir, $3x^2+14x-5=0$.
3. Encontramos las raíces utilizando fórmula general:

$$x=\frac{-14\pm\sqrt{14^2-4(3)(-5)}}{2(3)}=\frac{-14\pm\sqrt{196+60}}{6}=\frac{-14\pm\sqrt{256}}{6}=\frac{-14\pm16}{6}.$$

De donde: $x_1=\frac{-30}{6}=-5$ y $x_2=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ que son los únicos puntos críticos de la función, ya que la derivada existe en todos los reales.

4. Como el dominio de la función son los reales, consideramos los puntos críticos para determinar los siguientes intervalos:

$$(-\infty,-5),\qquad \left(-5,\frac{1}{3}\right),\qquad \left(\frac{1}{3},\infty\right)$$

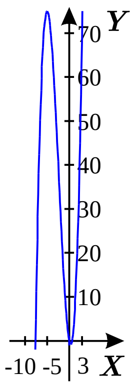
5. Evaluamos la derivada $f'(x)=3x^2+14x-5$ en un valor de cada uno de los intervalos para ver como se comporta la función en cada intervalo:

Evaluamos $-6\in(-\infty,-5)$ y se tiene que $f'(-6)=3(-6)^2+14(-6)-5=19>0$ por lo que la función es creciente en el intervalo $(-\infty,-5)$.

Evaluamos $0\in\left(-5,\frac{1}{3}\right)$ y se tiene que $f'(0)=3(0)^2+14(0)-5=-5<0$, por lo que la función es decreciente en el intervalo $\left(-5, \frac{1}{3}\right)$.

Evaluamos $1 \in \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$ y se tiene que $f'(1) = 3(1)^2 + 14(1) - 5 = 12 > 0$, por lo que la función es creciente en el intervalo $\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$.

6. Podemos esbozar la función en la siguiente gráfica:



Ejemplo 2: Encontrar los puntos críticos de la siguiente función $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

Solución:

1. Encontramos $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.
2. Queremos ver cuando $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} = 0$, pero esto nunca se cumple ya que el numerador es 2.
3. Si $x = 0$, no existe $f'(0)$ por lo que concluimos que si $x = 0$, la función tiene un punto crítico en este valor.
4. Definamos los siguientes intervalos para analizar en ellos el comportamiento de la función:

$$(-\infty, 0), \qquad (0, \infty)$$

5. Evaluamos la derivada en un valor de cada uno de los intervalos para ver como se comporta la función en ese intervalo:

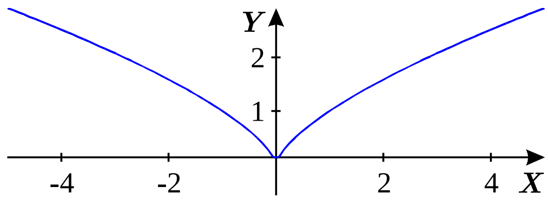
Evaluamos $-1 \in (-\infty, 0)$ y se tiene que $f'(-1) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{-1}} < 0$.

Evaluamos $1 \in (0, \infty)$ y se tiene que $f'(1) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{1}} > 0$.

En el primer intervalo la derivada es menor que cero por lo que la función es decreciente len ese intervalo.

En el segundo intervalo la función es mayor que cero por lo que es creciente en ese intervalo.

6. Podemos hacer el esbozo de la gráfica de la función:



Ejemplo 3: Encontrar los puntos críticos de la siguiente función $f(x)=\sqrt[3]{x^4}$.

Solución:

1. Encontramos la derivada de la función de $f(x)=\sqrt[3]{x^4}$

$$f'(x)=\frac{4\sqrt[3]{x}}{3}$$

2. Igualamos a cero la derivada:

$$f'(x)=\frac{4\sqrt[3]{x}}{3}=0\text{; esto se da cuando}\quad x=0.$$

3. Definamos los siguientes intervalos para analizar en ellos el comportamiento de la función:

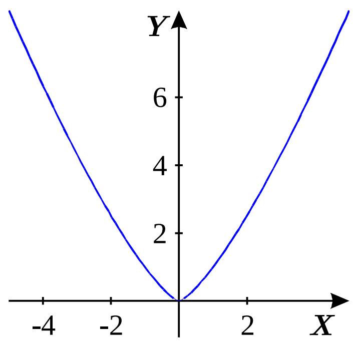
$$(-\infty,0), \qquad (0,\infty)$$

4. Evaluamos la derivada $f'(x)=\frac{4\sqrt[3]{x}}{3}$ en un valor de cada uno de los intervalos para ver como se comporta la función en ese intervalo:

Evaluamos $-1\in(-\infty,0)$ y se tiene que $f'(-1)=\frac{4\sqrt[3]{-1}}{3}=-\frac{4}{3}<0$ por lo que la función es decreciente en este intervalo $(-\infty,0)$.

Evaluamos $1\in(0,\infty)$ y se tiene que $f'(-1)=\frac{4\sqrt[3]{1}}{3}=\frac{4}{3}>0$ por lo que la función es creciente en este intervalo $(0,\infty)$.

5. Podemos representar los puntos anteriores en la gráfica de la función:



Definición de máximo absoluto: Una función tiene un valor ***máximo absoluto*** en un intervalo que contiene a ***c*** si $f(c) \geq f(x)$ para todo ***x*** en el intervalo, y se dice que $f(c)$ es el ***valor máximo absoluto*** en el intervalo.

Definición de mínimo absoluto: Una función tiene un valor ***mínimo absoluto*** en un intervalo que contiene a ***c*** si $f(c) \leq f(x)$ para todo ***x*** en el intervalo, y se dice que $f(c)$ es el ***valor mínimo absoluto*** en el intervalo.

Definición de extremo absoluto: Un ***extremo absoluto*** de una ***función*** en un ***intervalo*** es un ***valor máximo absoluto*** o ***mínimo absoluto*** de la ***función*** en el ***intervalo***.

Si cambiamos el ***intervalo*** por el ***dominio*** de la ***función***, tenemos que:

Una función tiene un valor ***máximo absoluto*** si ***c*** está en el ***dominio*** de definición de f y si $f(c) \geq f(x)$ para todo ***x*** en el dominio de f.

Una función tiene un valor ***mínimo absoluto*** si ***c*** está en el ***dominio*** de definición de f y si $f(c) \leq f(x)$ para todo ***x*** en el dominio de f.

4.1. TEOREMA DEL VALOR EXTREMO: Si la función f es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, entonces f tiene un ***valor máximo absoluto*** y un ***valor mínimo absoluto*** en $[a,b]$.(Véase **[4]** para demostración).

Utilizando el teorema del valor extremo y la definición de punto crítico, podemos determinar los ***extremos absolutos*** de una función continua en $[a,b]$ de la siguiente forma:

1. **Encontrar los puntos críticos de f en $[a,b]$.**
2. **Evaluar la función en los puntos críticos de f en $[a,b]$.**
3. **Encontrar $f(a)$ y $f(b)$.**
4. **De los valores encontrados en los pasos 2 y 3, el mayor es el valor máximo absoluto y el menor es el valor mínimo absoluto.**

Ejemplo:

Encontrar los ***extremos absolutos*** de $f(x) = -x^2 + 4x - 1$ en $[0,3]$.

Solución:

1. Encontrar los puntos críticos de f en $[0,3]$.

La ***derivada*** de f es: $f'(x) = -2x + 4$.
Igualando la ***derivada*** a cero tenemos que:

$$-2x + 4 = 0.$$

Despejando x tenemos que:

$$x = \frac{-4}{-2} = 2.$$

Por lo que el puntos crítico es 2.

2. Evaluar la función en los puntos críticos de f en $[0,3]$.

Si evaluamos la función en su punto crítico tenemos que:

$$f(2) = -(2)^2 + 4(2) - 1 = 3.$$

3. Encontrar $f(0)$ y $f(3)$.

$$f(0) = -(0)^2 + 4(0) - 1 = -1$$

$$f(3) = -(3)^2 + 4(3) - 1 = -2.$$

4. De los valores encontrados en los pasos 2 y 3, el mayor es el valor máximo absoluto y el menor es el valor mínimo absoluto.

Por lo que el ***valor máximo absoluto*** es **3** y se obtiene cuando ***x* = 2** y el ***valor mínimo absoluto*** es **-2** y se obtiene cuando ***x* = 3.**

4.1.1. ACTIVIDADES DE REFUERZO

I. Encontrar los puntos críticos de la función dada:

1. $f(x) = \frac{3x^2}{2}$.
2. $f(x) = x^3 + 12x^2 + 45x - 52$.
3. $f(x) = (x^2 - 4)^{\frac{2}{3}}$.
4. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$.

II. Encontrar los extremos absolutos de la función en el intervalo dado, si es que existe. Encontrar los valores de *x* para los que se tiene un extremo absoluto.

1. $f(x) = -x^2 + 4x - 1$ en $[0,3]$.
2. $f(x) = \frac{1}{x}$ en $[2,3)$.
3. $f(x) = \frac{1}{x}$ en $[-2,3]$.
4. $f(x) = \sqrt{3 + x}$ en $[-3, \infty)$.
5. $f(x) = x^2 + 3x$ en $[-2,1]$.
6. $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ en $[-2,1]$.

4.2. FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

A continuación se verán algunas aplicaciones de la derivada que son importantes en el análisis de funciones.

4.2.1. FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES. CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA

Recordemos las definiciones de algunos conceptos preliminares:

Una función f es **creciente** en un conjunto $(a,b) \subset Dom\, f$ si para cualesquiera dos puntos x_1, x_2 en (a,b), $x_1 \neq x_2$, se tiene que si $x_1 < x_2$, *entonces* $f(x_1) < f(x_2)$.

Una función f es **decreciente** en un conjunto $(a,b) \subset Dom\, f$ si para cualesquiera dos puntos x_1, x_2 en (a,b), $x_1 \neq x_2$, se tiene que si $x_1 < x_2$, *entonces* $f(x_1) > f(x_2)$.

Si una ***función*** es ***creciente o decreciente*** en $A \subset Dom\ f$, entonces se dice que la ***función*** es ***monótona*** en (a,b).

Cuando en la gráfica de una función $y = f(x)$, la pendiente de la recta tangente, en cada punto de un intervalo (a,b) es positiva, la función es creciente en (a,b) y cuando es negativa en cada punto de (a,b), entonces la función es decreciente,.
Como hemos visto anteriormente, la pendiente de la recta tangente a una curva, $y = f(x)$ es $f'(x)$ por tanto diremos que la función es creciente si $f'(x) > 0$ y es decreciente si $f'(x) < 0$.

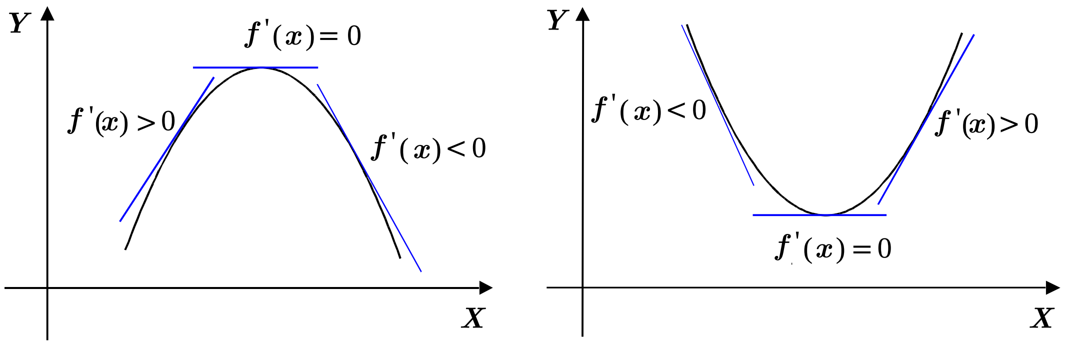
Teorema (Criterio de la primera derivada para los extremos relativos de una función).(Véase **[2]** para demostración**).**

Sea f una función derivable en un intervalo (a,b) excepto posiblemente en $c \in (a,b)$ y c es un punto crítico de f, entonces:

i) Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,c)$ y $f'(x) < 0$ para todo $x \in (c,b)$, entonces f tiene un valor máximo relativo en c.

ii) Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a,c)$ y $f'(x) > 0$ para todo $x \in (c,b)$, entonces f tiene un valor mínimo relativo en c.

Estos criterios nos dicen que si tenemos una función continua en un número c y $f'(x)$ cambia su signo de positivo a negativo, entonces $\boldsymbol{f}$ tiene un valor máximo relativo en c, y si $f'(x)$ cambia su signo de negativo a positivo, entonces f tiene un valor mínimo relativo en c. Veamos este resultado en las siguientes gráficas:



Ejemplo 1:
Calcular los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)=2x^3-3x^2-12x+2$.
Solución:

a) Obtenemos la primera derivada: $f'(x)=6x^2-6x-12$.
b) Igualamos la derivada a cero y resolvemos la ecuación:

$$6x^2-6x-12=0.$$

Dividimos entre 6:

$$x^2-x-2=0.$$

Factorizando:

$$(x-2)(x+1)=0.$$

Las raíces son: $x_1=2$ y $x_2=-1$.

c). Tomemos los valores de las raíces ordenándolos en forma creciente y definimos los siguientes intervalos:

$$(-\infty,-1),\qquad(-1,2),\qquad(2,\infty)$$

Evaluando en $-2\in(-\infty,-1)$, tenemos que:

$f'(-2)=6(-2)^2-6(-2)-12=24+12-12=24>0$ .por lo que la función es creciente en el intervalo $(-\infty,-1)$.

Evaluando en $0\in(-1,2)$, tenemos que:

$f'(0)=6(0)^2-6(0)-12=-12<0$, por lo que la función es decreciente en el intervalo $(-1,2)$.

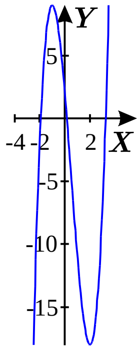
Evaluando en $3\in(2,\infty)$, tenemos que:

$f'(3)=6(3)^2-6(3)-12=132>0$, por lo que la función es creciente en el intervalo $(2,\infty)$.

Como la derivada es positiva en $(-\infty,-1)$, y negativa en $(-1,2)$, entonces en $x=-1$ hay un máximo.

Como la derivada es negativa en $(-1,2)$ y positiva en $(2,\infty)$, entonces en $x=2$ hay un mínimo.

d) Se muestra un esbozo de la gráfica de la función.



.

Ejemplo 2:
Calcular los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = x^2 - 4x - 1$.

Solución:

a) Obtenemos la primera derivada: $f'(x) = 2x - 4$.

b) Igualamos la derivada a cero y resolvemos la ecuación:

$$2x - 4 = 0.$$

Despejando: $x = \frac{4}{2} = 2$, la raíz es: $x_1 = 2$.

c) Tomemos el valore de la raíz y definamos los siguientes intervalos:

$$(-\infty, 2), \qquad (2, \infty)$$

Evaluando en $0 \in (-\infty, 2)$ tenemos que:

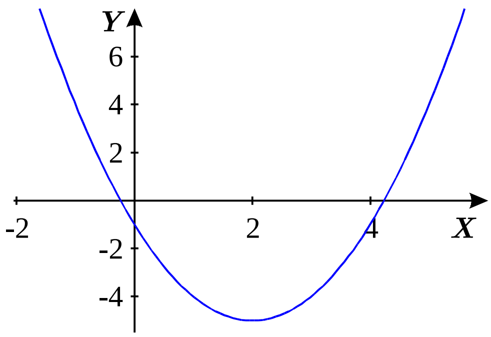
$f'(0) = 2(0) - 4 = -4 < 0$, por lo que la función es decreciente en el intervalo.

Evaluando en $3 \in (2, \infty)$ tenemos que:

$f'(3) = 2(3) - 4 = 2 > 0$, por lo que la función es creciente en el intervalo.

Como la derivada es negativa en $(-\infty, 2)$ y positiva en $(2, \infty)$, entonces en $x = 2$ hay un mínimo.

d) Se muestra un esbozo de la gráfica de la función. .



Ejemplo 3:

Calcular los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)=\begin{cases} 3-x^2, & \text{si } x\le 2 \\ x, & \text{si } x>2 \end{cases}$.

Solución:

Si $x\le 2$ la función es $f(x)=3-x^2$ y su derivada es $f'(x)=-2x$ ya que

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{3-x^2-(-1)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{4-x^2}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x^2-4)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}-(x+2)=-4.$$

Si $x>2$ la función es $f(x)=x$ y su derivada es $f'(x)=1$ ya que

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{x-2}=1.$$

Cuando x se acerca a 2 por la izquierda escribimos: $f_-'(2)=-4$.

Cuando x se acerca a 2 por la derecha escribimos: $f_+'(2)=1$.

Por lo tanto, $f'(2)$ no existe y 2 es un punto crítico.

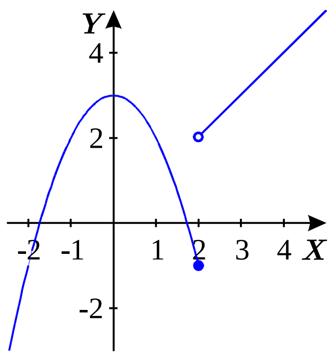
Cuando $x\le 2$ $f'(x)=-2x$.

Igualando a cero la derivada tenemos que $-2x=0$ por lo que $x=0$ es un punto crítico.

Hagamos una tabla con los resultados obtenidos para hacer un esbozo de la gráfica:

	$f(x)$	$f'(x)$	Conclusión
$x<0$		+	***f*** es creciente.
$x=0$	3	0	***f*** tiene un valor máximo relativo.
$0<x<2$		–	***f*** es decreciente.
$x=2$	-1	No existe	***f*** tiene un punto crítico.
$x>2$		+	***f*** es creciente.

Por tanto, la función es creciente en los intervalos $(-\infty,0)$ y $(2,\infty)$ y decreciente en $(0,2)$. Un esbozo de la gráfica es el siguiente:



Ejemplo 4:

Calcular los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)=|x|$.

Solución:

1. Calculemos a derivada usando la definición de límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|-|0|}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}..$$

Pero sacando límites por la izquierda y por la derecha se tiene que:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\frac{x}{x}=1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\frac{-x}{x}=-1.$$

Además
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x=0$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} -x=0$$

De aquí que la función es continua en cero pero no tiene derivada ahí pues sus límites laterales son distintos.

2. Como $x=0$, es un punto crítico, podemos definir intervalos que nos permitan conocer el comportamiento de la función.

3. Definimos los intervalos $(-\infty,0),(0,\infty)$.

Evaluando en $-1\in(-\infty,0)$ tenemos que:

$f'(-1)=-1<0$, por lo que la función es decreciente en el intervalo $(-\infty,0)$.

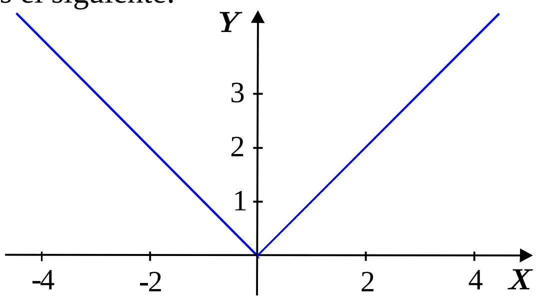
Evaluando en $1\in(0,\infty)$ tenemos que:

$f'(1)=1>0$, por lo que la función es creciente en el intervalo $(0,\infty)$.

Hagamos una tabla con los resultados obtenidos para hacer un esbozo de la gráfica:

	$f(x)$	$f'(x)$	Conclusión
$x<0$		–	***f*** es decreciente.
$x=0$	0	No existe	***f*** tiene un mínimo.
$x>0$		+	***f*** es creciente.

Por tanto, la función es decreciente en los intervalos $(-\infty,0)$ y creciente en $(0,\infty)$. Un esbozo de la gráfica es el siguiente:



4.2.2. ACTIVIDADES DE REFUERZO

Para cada una de las siguientes funciones:
a) Encuentra sus extremos relativos aplicando el criterio de la primera derivada.
b) Determina los intervalos en los que la función es creciente y en los que es decreciente.
c) Haz un bosquejo de la gráfica.

1) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 5$.

2) $f(x) = x^4 + 4x$.

3) $f(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$.

4) $f(x) = x\sqrt{5-x^2}$.

5) $f(x) = \begin{cases} 5-2x, & \text{si } x < 3 \\ 3x-10, & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$.

4.3. CÁLCULO DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS CON EL CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

Otra forma de determinar los extremos relativos considerando únicamente al número crítico ***c*** es el criterio de la segunda derivada para extremos relativos.
El siguiente teorema sustenta este criterio:

Teorema 4.
Sea ***c*** un punto crítico de una función ***f*** en la cual $f'(c) = 0$ y f' existe para todos los valores de *x* en algún intervalo que contenga a ***c***. Entonces si $f''(c)$ existe y:

i) $f''(c) < 0$, ***f*** tiene un valor máximo relativo en ***c.***
ii) $f''(c) > 0$, ***f*** tiene un valor mínimo relativo en ***c.***

Cuando $f''(c) = 0$ y $f'(c) = 0$ nada se puede decir acerca de un extremo relativo en ***c***.

Ejemplo 1:
Calcular los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$
Solución:
a) Calculamos la primera y segunda derivadas:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$
$$f''(x) = 12x - 6.$$

b) Se iguala la primera derivada a cero y se resuelve la ecuación:

$$6x^2 - 6x - 12 = 0.$$

Dividimos entre 6:

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

Factorizando:

$$(x-2)(x+1)=0\,.$$

Las raíces son: $x_1 = 2$ y $x_2 = -1$.

c) Se sustituyen las raíces encontradas en la segunda derivada:

Si $x = 2$, entonces $f''(2) = 12(2) - 6 = 24 - 6 = 18$ y como $18 > 0$, entonces existe un mínimo.

Evaluemos la segunda raíz. Sea $x = -1$, entonces

$$f''(-1) = 12(-1) - 6 = -12 - 6 = -18\,.$$

Como $-18 < 0$ entonces, existe un máximo.

d) Obtenemos el mínimo de la función evaluando $f(x)$ en $x = 2$

$$f(2) = 2(2)^3 - 3(2)^2 - 12(2) + 2 = 2(8) - 3(4) - 24 + 2 = 16 - 12 - 24 + 2 = -18\,.$$

e) Obtenemos el máximo de la función evaluando $f(x)$ en $x = -1$

$$f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 2 = 2(-1) - 3(1) + 12 + 2 = -2 - 3 + 12 + 2 = 9\,.$$

Por tanto, el punto mínimo está en $(2,-18)$ y el punto máximo en $(-1,9)$.

Ejemplo 2:
Calcular los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = x^3 - 5x + 6$.

Solución:
a) Calculamos la primera y segunda derivadas:

$$f'(x) = 3x^2 - 5$$
$$f''(x) = 6x.$$

b) Se iguala la primera derivada con cero y se resuelve la ecuación:

$$3x^2 - 5 = 0 \quad \text{por lo que} \quad x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}\,.$$

c) Se sustituyen las raíces encontradas en la segunda derivada:

Si $x = \sqrt{\frac{5}{3}}$, entonces $f''\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = 6\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = 6\sqrt{\frac{5}{3}} > 0$, entonces existe un mínimo.

Si $x = -\sqrt{\frac{5}{3}}$, entonces $f''\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = 6\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = -\sqrt{\frac{5}{3}} < 0$, entonces existe un máximo.

c) Obtenemos el mínimo de la función evaluando $f(x)$ en $x=\sqrt{\frac{5}{3}}$

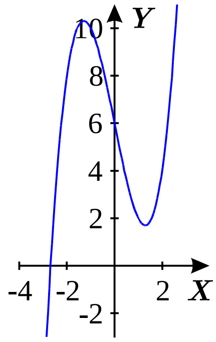
$$f\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)=\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^3-5\sqrt{\frac{5}{3}}+6=\sqrt{\frac{5}{3}}\left(\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2-5\right)+6=\sqrt{\frac{5}{3}}\left(\frac{5}{3}-5\right)+6=\sqrt{\frac{5}{3}}\left(\frac{-10}{3}\right)+6\,.$$

El punto mínimo es $\left(\sqrt{\frac{5}{3}},-\sqrt{\frac{5}{3}}\left(\frac{10}{3}\right)+6\right)$.

e) Obtenemos el máximo de la función evaluando $f(x)$ en $x=-\sqrt{\frac{5}{3}}$:

$$f\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)=\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^3+5\sqrt{\frac{5}{3}}+6=-\sqrt{\frac{5}{3}}\left(\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2-5\right)+6=-\sqrt{\frac{5}{3}}\left(\frac{5}{3}-5\right)+6=\sqrt{\frac{5}{3}}\left(\frac{10}{3}\right)+6.$$

El punto máximo está dado por $\left(-\sqrt{\frac{5}{3}},\sqrt{\frac{5}{3}}\left(\frac{10}{3}\right)+6\right)$.



4.3.1. ACTIVIDADES DE REFUERZO

Encontrar los extremos relativos de cada función utilizando el criterio de la segunda derivada. En caso de que no exista la segunda derivada, utilizar el criterio de la primera derivada

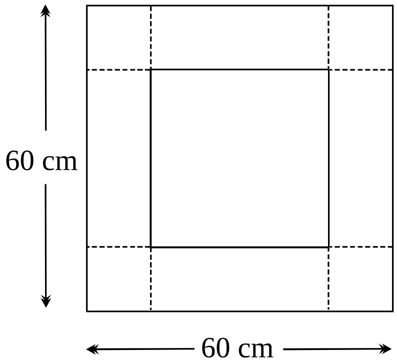
1. $f(x)=3x^2-2x+1$.
2. $f(x)=-4x^3+3x^2+18x$.
3. $f(x)=2x^3-9x^2+27$.
4. $f(x)=(x-4)^2$.
5. $f(x)=x(x-1)^3$.
6. $f(x)=x\sqrt{x+3}$.
7. $f(x)=x^4-4x^3+4x^2-4$.
8. $f(x)=(x+2)^3$.
9. $f(x)=x\sqrt{8-x^2}$.
10. $f(x)=(x-3)^4$.

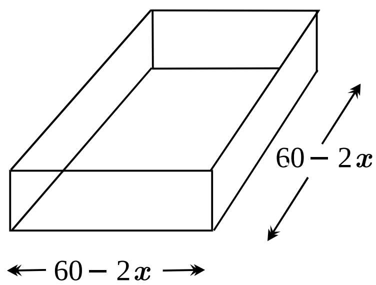
4.4. APLICACIONES PRÁCTICAS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Ejemplo 1: Se tiene una pieza cuadrada de cartón que mide 60 cm por lado y se quiere construir una caja abierta cortando cuadrados iguales en las esquinas y doblando hacia arriba. ¿De qué tamaño se cortarán los cuadrados de las esquinas para lograr que la caja tenga un volumen máximo?

Solución:

Llamemos *x* al lado del cuadrado que se va a recortar y *V* al volumen de la caja





La función del volumen de la caja es

$$V = (60-2x)(60-2x)x = 3600x - 240x^2 + 4x^3 = 4x^3 - 240x^2 + 3600x\,.$$

Encontramos la derivada de *V*:

$$V' = 12x^2 - 480x + 3600\,.$$

Igualamos a cero la derivada para encontrar los puntos críticos:

$$12x^2 - 480x + 3600 = 0\,.$$

Factorizando tenemos que:

$$12x^2 - 480x + 3600 = 0$$
$$12\left(x^2 - 40x + 300\right) = 0$$
$$12\left(x-30\right)\left(x-10\right) = 0.$$

Por lo tanto, las raíces son: $x_1 = 30$ y $x_2 = 10$.

Calculemos ahora la segunda derivada:

$$V''(x) = 24x - 480\,.$$

Evaluamos $x_1 = 30$ y $x_2 = 10$ en la segunda derivada

$$V''(30) = 24(30) - 480 = 720 - 480 = 240 > 0\,.$$
$$V''(10) = 24(10) - 480 = 240 - 480 = -240 < 0\,.$$

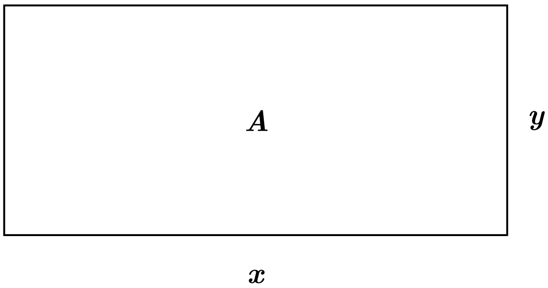
Por lo que $V(x)$ tiene un valor máximo en $x = 10$ y un valor mínimo en $x = 30$.

Si sustituimos estos valores en la función de volumen tenemos que:

$$V(30) = \left[60 - 2(30)\right]\left[60 - 2(30)\right](30) = (0)(0)(30) = 0$$
$$V(10) = \left[60 - 2(10)\right]\left[60 - 2(10)\right](10) = (40)(40)(10) = 1600.$$

De los valores calculados, se tiene que la caja tiene un volumen máximo de 16,000 cm^3 si hacemos un corte de 10 cm, es decir, x = 10 cm.
Cuando $x = 30$, el volumen es cero, es decir, no podemos construir la caja.

Ejemplo 2: Con 100 m lineales de tela de alambre, se quiere cercar un corral de forma rectangular. Encontrar las dimensiones del corral que se puede delimitar de manera que su área sea máxima.



Solución:

Definamos A como el área del corral. Si x es el largo, y el ancho, entonces el área estará dada por:

$$A = xy.$$

Sabemos además que la tela de alambre es de 100 m, por lo tanto, el perímetro del corral rectangular estará dado por:

$$2x + 2y = 100 \quad \text{dividiendo entre 2} \quad x + y = 50.$$

Despejando y tenemos que:

$$y = 50 - x.$$

Si sustituimos y en la función de área para tener una sola variable tendremos que la función de área estará dada por:

$$A = x(50 - x) = 50x - x^2.$$

Derivamos A, de aquí que: $A' = 50 - 2x$.

Para encontrar los puntos críticos, igualamos a cero la derivada: $50 - 2x = 0$.

Despejando x tenemos que: $2x = 50$ por tanto $x = \frac{50}{2} = 25$.

Encontramos el valor de y:

$$\begin{aligned} y &= 50 - x \\ &= 50 - 25 \\ &= 25. \end{aligned}$$

Calculemos ahora la segunda derivada:

$$A''(x) = -2x.$$

Evaluamos $x_1 = 25$ en la segunda derivada, entonces:

$$A''(25) = -2(25) = -50.$$

Por lo que $A(x)$ tiene un valor máximo en $x = 25$.
Si sustituimos estos valores en la función de volumen tenemos que:

$$A(25)=50(25)-(25)^2=1250-625=625\,.$$

De lo anterior se tiene que el área máxima se tiene cuando el largo y el ancho del corral miden 25 m. De manera que el corral es cuadrado y el área es de $625\,\mathrm{m}^2$.

Ejemplo 3: Hallar dos números enteros positivos que tengan como producto 16 y su suma sea mínima.

Solución:

Sean *x*, *y* dos números tales que su producto es 16, de aquí que:

$$xy=16\,;$$

despejando y se tiene que $y=\dfrac{16}{x}$.

Observación: Como $xy=16,$ entonces $x\neq 0, y\neq 0.$

La función suma estará dada por:

$$S=x+y\,.$$

Y se maximizará entre $[1,16]$ (ya que para $x=0$, no está definida esta función)

Sustituyendo la *y* que despejamos de la suma se tiene que:

$$S=x+\frac{16}{x}=\frac{x^2+16}{x}\,.$$

Derivando la función suma se tiene que:

$$S'=\frac{x(2x)-(x^2+16)}{x^2}=\frac{x^2-16}{x^2}\,.$$

Igualando a cero la derivada se tiene que: $x^2-16=0$ de aquí que:

$$x=\pm 4\,.$$

Calculemos ahora la segunda derivada:

$$S''(x)=\frac{x^2(2x)-(x^2-16)(2x)}{(x^2)^2}=\frac{2x^3-2x^3+32x}{x^4}=\frac{32x}{x^4}=\frac{32}{x^3}\,.$$

Por las hipótesis del problema $x>0$, por lo que evaluamos $x=4$ en la segunda derivada, entonces:

$$S''(4)=\frac{32}{4^3}=\frac{32}{64}=\frac{1}{2}\,.$$

Por lo que $S(x)$ tiene un valor mínimo en $x=4$.

Ahora calculamos el valor de y:

$$y=\frac{16}{x}=\frac{16}{4}=4\,.$$

Si sustituimos estos valores en la función de la suma tenemos que:

$$S(4)=\frac{(4)^2+16}{4}=\frac{16+16}{4}=\frac{32}{4}=8\,.$$

De donde se observa que si $x = 4$, entonces $y = 4$ observando que la suma es mínima.

Ejemplo 4:

El precio de venta de un artículo es de $100-0.2x$ pesos, donde x es el número de artículos que se producen en un día. Si el costo de producir y vender x artículos en un día es de $C(x)=40x+15000$ pesos, ¿cuántos artículos se deben producir y vender en un día para que la utilidad sea máxima?

Solución:

La utilidad U se obtiene multiplicando el número de artículos producidos en un día por el precio de venta de cada uno y a este producto se le resta el costo de producir y vender x artículos por día. Tenemos entonces que:

$$U = x(100-0.2x)-(40x+15000).$$

Agrupando términos semejantes se tiene que:

$$\begin{aligned} U &= 100x-0.2x^2-40x-15000 \\ &= -0.2x^2+60x-15000. \end{aligned}$$

La derivada de U respecto a x es:

$$U'(x) = -0.4x+60.$$

Igualando a cero para encontrar la utilidad máxima tenemos que:

$$-0.4x+60=0.$$

De aquí que:

$$x=\frac{-60}{-0.4}=150.$$

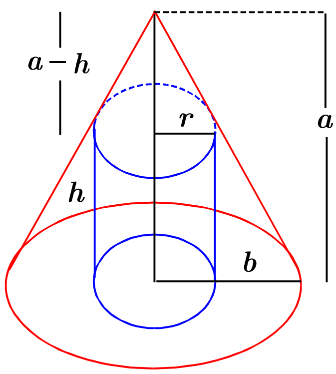
Por lo que si se producen 150 artículos, se tendrá una utilidad máxima.

Ejemplo 5.

Hallar las dimensiones del cilindro circular recto de máximo volumen que se puede inscribir en un cono circular dado.

Solución:

Hagamos un dibujo que represente el problema:



Sean b el radio de la base del cono y a su altura.

El cilindro tiene radio $\boldsymbol{r}$, altura $\boldsymbol{h}$ y volumen $\boldsymbol{V}$.

Sabemos que el volumen del cilindro está dado por $V=\pi r^2 h$.

Utilizando semejanza de triángulos tenemos que:

$$\frac{a-h}{r}=\frac{a}{b}.$$

Despejando *h* se tiene que:

$$a - h = \frac{a}{b} r$$

$$h = a - \frac{a}{b} r.$$

Sustituyendo *h* en la fórmula del volumen se tiene que:

$$V = \pi r^2 \left(a - \frac{a}{b} r \right) = \pi r^2 a - \pi \frac{a}{b} r^3 .$$

La derivada de *V* respecto a *r* es:

$$V'(r) = 2\pi a r - 3\pi \frac{a}{b} r^2 = \pi a r \left(2 - \frac{3}{b} r \right).$$

Igualando a cero la derivada se obtiene que:

$$\pi a r \left(2 - \frac{3}{b} r \right) = 0$$

así $r = 0$, o bien, $2 - \frac{3}{b} r = 0$ de donde $r = \frac{2b}{3}$ siendo este el número crítico.

Cuando $r = 0$ y $r = b$ el volumen es cero.

Para $r = \frac{2b}{3}$ el volumen es máximo.

Calculemos la segunda derivada para saber si r es máximo.

$$V''(r) = 2\pi a - 6\pi \frac{a}{b} r = 2\pi a \left(1 - \frac{3}{b} r \right).$$

Si sustituimos $r = \frac{2b}{3}$ en *V''* tenemos que

$$V''\left(\frac{2b}{3} \right) = 2\pi a \left(1 - \frac{3}{b} \left(\frac{2b}{3} \right) \right) = 2\pi a (1 - 2) = -2\pi a .$$

Como $a > 0$ entonces se tiene que la segunda derivada es negativa, por lo que la función volumen tiene un máximo en $r = \frac{2b}{3}$.

Si sustituimos $r = \frac{2b}{3}$ en $V(r)$ tenemos que

$$V\left(\frac{2b}{3} \right) = \pi \left(\frac{2b}{3} \right)^2 a - \pi \frac{a}{b} \left(\frac{2b}{3} \right)^3 = \frac{4}{9} \pi a b^2 \left(1 - \frac{2}{3} \right) = \frac{4}{27} \pi a b^2 > 0.$$

Si sustituimos $r = \frac{2b}{3}$ en *h* tenemos que

$$h = a - \frac{a}{b} r = a - \frac{a}{b} \left(\frac{2b}{3} \right) = a - \frac{2a}{3} = \frac{a}{3} .$$

Esto implica que el volumen máximo del cilindro se obtiene cuando su altura es $\frac{1}{3}$ de la altura del cono y su radio es $\frac{2}{3}$ del radio del cono en el que se haya inscrito.

4.4.1. ACTIVIDADES DE REFUERZO

1. Encuentra dos números que sumen 20 y su producto sea máximo.

2. Con una pieza cuadrada de cartón de 2 m por lado se quiere construir una caja abierta de base cuadrada. Calcular la caja con volumen máximo.

3. Se tiene 200 m de tela de alambre para cercar un jardín de forma rectangular.¿Cuáles deben ser sus dimensiones si se quiere que el área sea máxima?

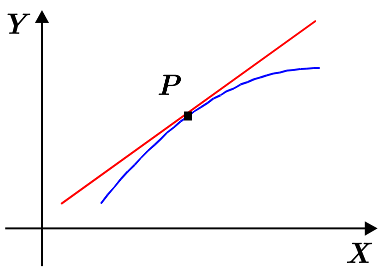
4. Una página tendrá un área impresa de 24 pulgadas cuadradas, un margen de 1.5 pulgadas en la parte superior e inferior y un margen de 1 pulgada en los lados. ¿Cuáles son las dimensiones de la página más pequeña que cumple las condiciones establecidas? (*Sugerencia : Llama x a la base, y a la altura del área impresa. Del área impresa despeja y en términos de x y sustituye en el área de la página).*

5. El precio de venta de un artículo es de $120 - 0.5x$ pesos, donde x es el número de artículos que se producen en un día. Si el costo de producir y vender x artículos por día es $C(x) = 30x + 2500$ pesos, ¿cuántos artículos se deben producir en un día para que la utilidad sea máxima?

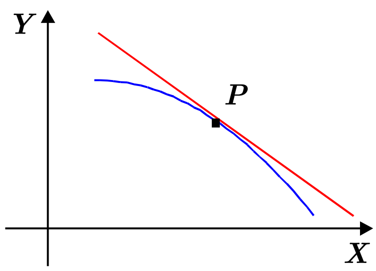
6. Se desea hacer una lata, con capacidad de un litro que tenga la forma de un cilindro circular recto. Hallar la razón de la altura al radio de la base de manera que se utilice la menor cantidad de material en la fabricación de la lata. *(Sugerencia: Dibuja un cilindro circular recto de radio r y altura h. De la fórmula para calcular el volumen considera V=1 y despeja h en términos de r; sustituye h en la fórmula para calcular el área de un cilindro circular recto)*.

4.5. CONCAVIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN.

Dada una función y un punto cualquiera *P*, en su gráfica se pueden presentar los siguientes casos en relación con la recta tangente en dicho punto.

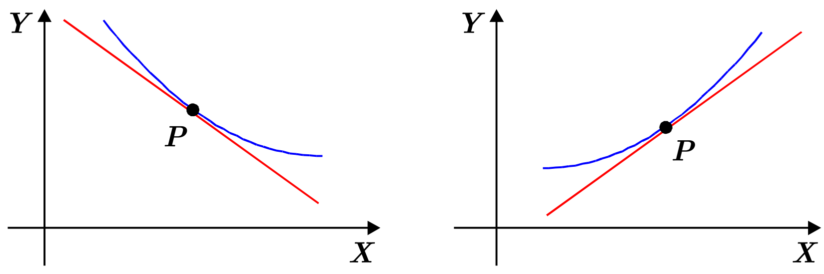


(a)



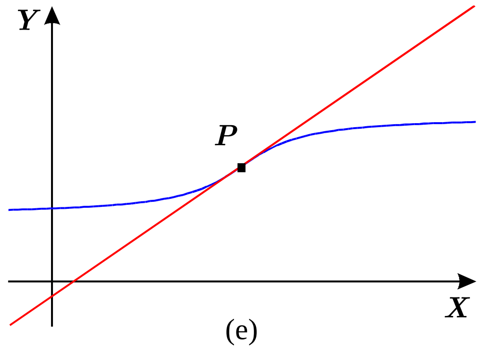
(b)

En los casos (a) y (b) se observa que para valores muy cercanos al punto *P*, la gráfica de la función se encuentra por debajo de la recta tangente en *P*, por lo que se dice que la curva es cóncava hacia abajo.



(c) (d)

En los casos (c) y (d) se observa que para valores muy cercanos al punto *P*, la gráfica de la función se encuentra por arriba de la recta tangente a *P*, por lo que se dice que la curva es cóncava hacia arriba.



(e)

En el caso (e), la curva cambia de sentido de la concavidad en el punto *P* y se dice que la curva tiene **un punto de inflexión en *P***.

Definición: Sea ***f*** una función diferenciable sobre un intervalo abierto (a,b):

- Si ***f'*** es creciente sobre (a,b), la gráfica de ***f*** es cóncava hacia arriba sobre (a,b).
- Si ***f'*** es decreciente sobre (a,b), ***f*** es cóncava hacia abajo sobre (a,b).

4.5.1. TEOREMA DE CONCAVIDAD:

- Si $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces ***f*** es cóncava hacia arriba en (a,b).
- Si $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces ***f*** es cóncava hacia abajo en (a,b).

Es importante señalar que los recíprocos de este teorema no son válidos.

Ejemplo: Calcular los puntos de inflexión de la curva $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$.

Solución:

a) Encontramos la primera y la segunda derivadas:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

$$f''(x) = 12x - 6.$$

b) Igualamos a cero la segunda derivada y encontramos las raíces:

$$12x - 6 = 0$$

$$x = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

Como la función está definida en todos los reales, entonces consideramos los intervalos

$$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \qquad \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$$

d) Tomamos $0 \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ y evaluamos allí la segunda derivada:

$$f''(0) = 12(0) - 6 = -6 < 0.$$

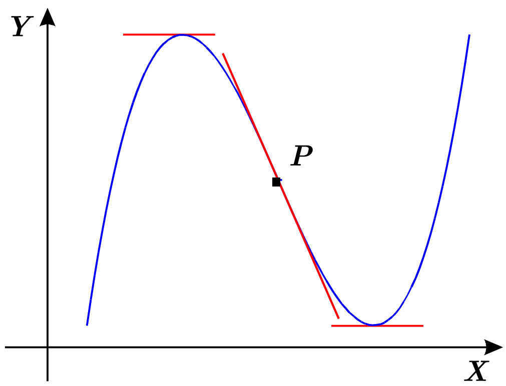
Tenemos entonces que en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, f es cóncava hacia abajo.

e) Tomamos $1 \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ y evaluamos allí la segunda derivada:

$$f''(1) = 12(1) - 6 = 6 > 0.$$

Tenemos entonces que en $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$, f es cóncava hacia arriba.

Definición: Un punto de inflexión de una función f, es un punto en el que la gráfica de f cambia de concavidad.



Teorema 5.
Si la función f es diferenciable en algún intervalo abierto que contenga a c, y si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica f, entonces si $f''(x)$ existe, $f''(c) = 0$.

A continuación se enuncian algunos criterios sobre puntos de inflexión utilizando derivadas:

4.5.2. CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA
Si la primera derivada se anula para un valor $x = a$.
Es decir $f'(a) = 0$, y no cambia de signo, entonces hay una inflexión para $x = a$.
Este criterio no sirve para determinar los puntos de inflexión, solamente señala que si al aplicar el criterio de la primera derivada para calcular extremos relativos, ésta no cambia de signo, entonces hay un punto de inflexión pero no nos dice cuál es.

4.5.3. CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

Si la concavidad cambia de sentido, entonces la segunda derivada cambia de signo y es igual a cero en el punto de inflexión. El procedimiento para determinar los puntos de inflexión es el siguiente:

a) Encontrar la segunda derivada.

b) Se iguala la segunda derivada a cero y se encuentran las raíces. Para cada una de las raíces en la segunda derivada se ve si hay cambio de signo en valores cercanos (algún valor a la izquierda y algún valor a la derecha), si existe el cambio de signo, entonces hay que determinar que si hay punto de inflexión.

c) Las ordenadas de los puntos de inflexión se obtienen sustituyendo las raíces de la segunda derivada en la función.

4.5.4. CRITERIO DE LA TERCERA DERIVADA

a) Se halla la segunda derivada, se iguala a cero y se obtienen las raíces de la ecuación.

b) Se saca la tercera derivada y se sustituyen en ella las raíces obtenidas en el paso anterior. Para las raíces en las que la tercera derivada es distinta de cero hay punto de inflexión.

Veamos algunos ejemplos en lo que se utilizaran los resultados anteriores.

Ejemplo 1:

Calcular los puntos de inflexión de la curva $y = 4x^3 - 12x^2 + 36x + 7$.

Solución: Se aplicará el criterio de la segunda derivada.

a) Calculamos la primera derivada: $f'(x) = 12x^2 - 24x + 36$.

b) Calculamos la segunda derivada : $f''(x) = 24x - 24$.

c) Igualamos a cero la segunda derivada: $24x - 24 = 0$.
Despejamos *x*:

$$24x = 24$$

$$x = \frac{24}{24} = 1.$$

Consideramos los intervalos

$$(-\infty,1) \qquad\qquad (1,\infty).$$

d) Evaluamos $0 \in (-\infty,1)$

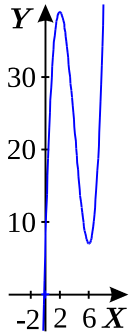
$$f''(0) = 24(0) - 24 = -24 < 0.$$

e) Evaluamos $2 \in (1,\infty)$

$$f''(2) = 24(2) - 24 = 48 - 24 = 24 > 0.$$

Conclusión:

Como la segunda derivada es negativa para valores menores que 1 y positiva para valores mayores que 1, se concluye que $x = 1$ es un punto de inflexión.



Ejemplo 2:

Calcular los puntos de inflexión de la curva: $f(x) = x^4 - 2x^3$.

Solución: Se aplicará el criterio de la tercera derivada:

a) Se calculan la primera, segunda y tercera derivada:

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2$$
$$f''(x) = 12x^2 - 12x$$
$$f'''(x) = 24x - 12.$$

b) Se iguala a cero la segunda derivada y se obtienen las raíces:

$$12x^2 - 12x = 0.$$

Factorizando se tiene que $12x(x-1) = 0$.

Las raíces son: $x = 0$ y $x = 1$.

c) Sustituimos cada una de las raíces en la tercera derivada.

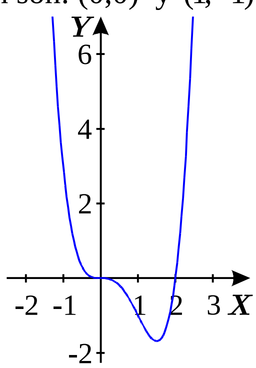
Para $x = 0$; $f'''(0) = 24(0) - 12 = -12$.
Para $x = 1$; $f'''(1) = 24(1) - 12 = 12$.

Para las raíces anteriores, la tercera derivada es distinta de cero, por tanto, cada una de ella es un punto de inflexión.

d) Para obtener las coordenadas de estos puntos de inflexión evaluamos estos valores en la función original.

Para $x = 0$; $f(0) = 0^4 - 2(0)^3 = 0$.
Para $x = 1$; $f(1) = 1^4 - 2(1)^3 = 1 - 2 = -1$.

Por tanto, los puntos de inflexión son: $(0,0)$ y $(1,-1)$.



Ejemplo 3:

Determinar en donde es cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo y encontrar los puntos de inflexión (si existen) de la gráfica de la función $f(x) = (1-2x)^3$.

Solución:

a) Encontramos primera y segunda derivada :

$$f'(x) = 3(1-2x)^2(-2) = -6(1-2x)^2$$
$$f''(x) = -6(2)(1-2x)(-2) = 24(1-2x).$$

b) Igualamos a cero la segunda derivada y obtenemos las raíces:

$$24(1-2x) = 0$$
$$1-2x = 0$$
$$1 = 2x$$
$$x = \frac{1}{2}.$$

c) Consideramos los intervalos

$$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \qquad \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$$

Sea $0 \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, entonces $f''(0) = 24(1-2(0)) = 24 > 0$.

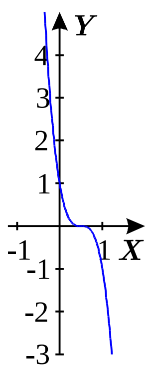
Sea $1 \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$, entonces $f''(1) = 24(1-2(1)) = 24-48 = -24 < 0$.

Como la segunda derivada cambia de signo, entonces hay inflexión en $x = \frac{1}{2}$.

d) Pongamos en la siguiente tabla los resultados:

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusión
$x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$			+	La gráfica es cóncava hacia arriba.
$x = \frac{1}{2}$	0	0	0	La gráfica tiene un punto de inflexión.
$x \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$			–	La gráfica es cóncava hacia abajo.

e) Con la información anterior tenemos un esbozo de la gráfica:



4.6. TRAZADO DE GRÁFICAS

Utilizando los resultados anteriores podemos resumir un método para trazar la gráfica de una función $f(x)$.

a) Encontrar la primera y segunda derivadas $f'(x)$ y $f''(x)$.

b) Encontramos los puntos críticos de f, que son las x en el dominio de f tales que $f'(x)=0$ o $f'(x)$ no existe.

c) Se aplica el criterio de la primera derivada o el de la segunda derivada para saber si existen máximos relativos, mínimos relativos o ninguno de los dos.

d) Los intervalos en los que f es creciente se determinan a partir de los valores de x para los cuales $f'(x)>0$; Los intervalos para los cuales f es decreciente se determinan a partir de los valores de x para los cuales $f'(x)<0$.

e) Los posibles puntos de inflexión son los valores para los cuales $f''(x)=0$ o $f''(x)$ no existe. Para esto se verifica el cambio de signo de $f''(x)$.

f) Los valores de x para los cuales $f''(x)>0$ determinan dónde la gráfica es cóncava hacia arriba y los valores de x para los cuales $f''(x)<0$ determinan dónde la gráfica es cóncava hacia abajo.

g) Formar una tabla con los resultados obtenidos y trazar la gráfica.

Ejemplo:
Determinar la gráfica de la función $f(x)=x^3+3x^2-3x-3$.

Solución:
a) Encontramos la primera y segunda derivada:

$$f'(x)=3x^2+6x-3$$

$$f''(x)=6x+6.$$

b) Igualamos $f'(x)$ con cero y resolvemos:

$$3x^2+6x-3=0.$$

Dividiendo entre 3:

$$x^2+2x-1=0$$
.

Obtenemos las raíces utilizando fórmula general:

$$x_1=-1+\sqrt{2} \quad \text{y} \quad x_2=-1-\sqrt{2}.$$

c) f'' existe para todos los valores de *x*; el único punto posible de inflexión es aquel para el cual $f''(x)=0$. Encontremos este punto:

$$6x+6=0$$
$$6x=-6$$
$$x=\frac{-6}{6}=-1.$$

Los puntos críticos son: $x_1=-1+\sqrt{2}$, $x_2=-1-\sqrt{2}$ y $x=-1$.
Los intervalos que excluyen estos valores son:

$$\left(-\infty,-1-\sqrt{2}\right),\ \left(-1-\sqrt{2},-1\right),\ \left(-1,-1+\sqrt{2}\right),\ \left(-1+\sqrt{2,\infty}\right).$$

d) Determinemos si $x=-1$ es punto de inflexión, es decir, debemos ver si f'' cambia de signo antes y después de $x=-1$ y con esto conoceremos también la concavidad de la gráfica. Tomamos para esto los puntos $x=-2$ y $x=0$ y evaluamos en ellos la segunda derivada:

$$f''(-2)=6(-2)+6=-12+60=-6$$
$$f''(0)=6(0)+6=6.$$

Como hubo cambio de signo, antes y después de $x=-1$, decimos que $x=-1$ es punto de inflexión.

e) Vemos si existen extremos relativos. Esto lo hacemos aplicando el criterio de la segunda derivada:

Sustituimos $x=-1+\sqrt{2}$ y $x=-1-\sqrt{2}$ en la segunda derivada:

Para $x=-1+\sqrt{2}$:

$$f''(-1+\sqrt{2})=6(-1+\sqrt{2})+6=-6+6\sqrt{2}+6=6\sqrt{2}>0,$$

por tanto, hay un mínimo en $x=-1+\sqrt{2}$.

Para $x=-1-\sqrt{2}$:

$$f''(-1-\sqrt{2})=6(-1-\sqrt{2})+6=-6-6\sqrt{2}+6=-6\sqrt{2}<0,$$

Por tanto, hay máximo en $x=-1-\sqrt{2}$.

f) Para sacar las coordenadas de los puntos mínimo y máximo, evaluamos en la función original:

Aproximamos $x_1=-1+\sqrt{2}\approx 0.41$ y $x_2=-1-\sqrt{2}\approx -2.41$

$$f(0.41)=(0.41)^3+3(0.41)^2-3(0.41)-3=-3.66$$
$$f(-2.41)=(-2.41)^3+3(-2.41)^2-3(-2.41)-3=7.66.$$

Por tanto, el punto mínimo está en $(0.41,-3.66)$ y el punto máximo en $(-2.41,7.66)$.

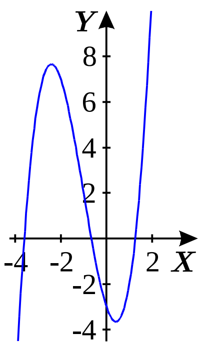
g) Dividamos la gráfica en los siguientes intervalos:

$$\left(-\infty,-1-\sqrt{2}\right),\ \left(-1-\sqrt{2},-1\right),\ \left(-1,-1+\sqrt{2}\right),\ \left(-1+\sqrt{2,\infty}\right)$$

y veamos como se comporta el signo. Pongamos en la siguiente tabla los resultados:

Valores de x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusión
$x\in\left(-\infty,-1-\sqrt{2}\right)$		+	$-$	La gráfica es creciente y cóncava hacia abajo.
$x=-1-\sqrt{2}$	≈ 7.66	0	$-6\sqrt{2}<0$	La gráfica tiene un máximo relativo.
$x\in\left(-1-\sqrt{2},-1\right)$		$-$	$-$	f es decreciente; la gráfica es cóncava hacia abajo.
$x=-1$	2	-6	0	La gráfica tiene un punto de inflexión.
$x\in\left(-1,-1+\sqrt{2}\right)$		$-$	+	f es decreciente; la gráfica es cóncava hacia arriba.
$x=-1+\sqrt{2}$	≈ -3.66	0	$6\sqrt{2}>0$	La gráfica tiene un mínimo relativo
		+	+	f es creciente; la gráfica es cóncava hacia arriba.

h) Con la información anterior tenemos un esbozo de la gráfica:



4.6.1 ACTIVIDADES DE REFUERZO

I. Para cada una de las siguientes funciones determina donde es cóncava hacia arriba y donde es cóncava hacia abajo; encuentra los puntos de inflexión si es que existen.

1. $f(x)=x^3+9x$.
2. $f(x)=x^4-8x^3+24x^2$.
3. $f(x)=x^3-9x^2+24x-7$.
4. $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2$.
5. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$.

II. Construir la gráfica de cada función

1. $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$.
2. $f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 4$.
3. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 16x$.
4. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.
5. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 2}$.

CONCLUSIONES

Algunas partes de este trabajo, como Derivada, Máximos y Mínimos, fueron ya utilizadas durante las asesorías. El material fueaceptado por parte de los alumnos y sí facilitó el trabajo tanto dentro del salón d e clase como fuera de éste, pues los alumnos pudieron avanzar de acuerdo a su ritmo sin depender en su totalidad del asesor.

Por lo que hubo una petición generalizada de tener un material similar de los otros temas del curso.

Es cierto, sin duda, que el pretender cubrir un curso básico de Cálculo Diferencial en 40 horas es una tarea difícil, por lo que considero importante buscar alternativas para que tanto los alumnos como los asesores podamos cumplir con este cometido.

Aunque en este trabajo se presentan los temas indicados en el Plan de Estudio de la materia de Cálculo Diferencial, no considero que sea un material terminado. Creo que el trabajo en el salón de clase, así como la opinión y las sugerencias de alumnos y asesores, aportarán valiosos elementos que deberán tomarse en cuenta para enriquecer el presente material.

Existen temas dentro del plan de estudio de la materia, como el de la demostración de la existencia de límites por medio de la definición. Considero que en este nivel, este tipo de demostraciones formales no están aún al alcance de los alumnos y no forman parte del objetivo del curso, por lo que sería conveniente omitirlos.

Es un compromiso personal y como egresada de la carrera de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, el colaborar a que mis alumnos se acerquen sin temor a las Matemáticas, y en particular al Cálculo Diferencial, y descubran el valor y los alcances de estos conocimientos en su vida dándoles un uso responsable .Creo que este trabajo podría considerarse como un primer paso.

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA:

[1] De Oteyza, Elena et al.: *Conocimientos fundamentales de Matemáticas Cálculo Diferencial e Integral.* Primera edición México 2006. Pearson Educación.

[2] Thomas George: *Calculus*, Décima primera edición 2005. Pearson/Addison Wesley.

[3] Granville, Smith Longley: *Cálculo Diferencial e Integral***,** reimpresión 1976. UTEHA.

[4] Ortiz Campos Francisco José: *Cálculo diferencial***,** Primera edición 2006. Publicaciones Cultural.

[5] Stewart James: *Calculus*, Cuarta edición 1999. Brooks/Cole Publishing Company

[6] Protter/Morrey: Cálculo con Geometría Analítica, Tercera edición 1980. Fondo Educativo Interamericano

ANEXOS

Curso	CÁLCULO DIFERENCIAL	Clave	CD1P23

Semana No.	1
Fecha	Mayo 2008

Unidad 1	FUNCIÓN

Guía de Estudio para el Alumno

Conceptos importantes que debes estudiar

- Constante, continuidad, contradominio, dominio, función, imagen, logaritmo, rango o conjunto imagen, regla de correspondencia, relación, variable, variable dependiente, variable independiente.

Recomendaciones (estrategias de estudio)

- Primero lee, repasa y entiende. No trates de desarrollar ejercicios sin estudiar y entender previamente las bases teóricas, porque además de que pierdes tiempo en buscar los conceptos que no entiendes, te desanimarás al no entender lo que desarrollas.
- Desarrolla nuevamente y entiende los ejemplos que se tratan en las tutorías. Lo principal aquí es entender, preguntarse ¿por qué se realiza tal o cual operación? No se trata de memorizar pasos, sino de entender los porqués de cada cosa.

Calendario de estudio

Día	Tema, conceptos, actividades a desarrollar
Lunes	TEMAS • Variable y constante (Pág. 4) • Concepto de función (Pág. 5) • Relación (Pág. 7) • Notación de función (Pág. 9) CONCEPTOS Variable, dominio de la variable, constante, función, variable independiente, variable dependiente, relación, dominio, contradominio, imagen.

<table>
<tr><td></td><td>ACTIVIDADES A DESARROLLAR
• Lectura y síntesis
• Análisis de los ejemplos resueltos
• Consulta de dudas con el tutor
• Resolver los problemas propuestos</td></tr>
<tr><td>Martes</td><td>TEMAS
• Gráfica de una función (Pág. 12)
• Función real. Criterio de la vertical (Pág. 16)
• Dominio y dominio de imágenes de una función (Pág. 18)
• Recursos adicionales para el trazo de gráficas. Intersecciones con los ejes. Simetría (Pág. 28)

CONCEPTOS
Característica de una función, función real, conjunto imagen o rango, intersecciones con los ejes, simetría.

ACTIVIDADES A DESARROLLAR
• Lectura y síntesis
• Análisis de los ejemplos resueltos
• Consulta de dudas con el tutor
Resolver los problemas propuestos</td></tr>
<tr><td>Miércoles</td><td>TEMAS
• Función implícita y función explícita (Pág. 34)
• Clases de funciones (Pág. 34)
• Representación gráfica de las funciones (Pág. 36)
• Función polinomial (Pág. 36)

CONCEPTOS
Función constante, función cuadrática, función implícita, función explícita, función algebraica, función racional, función irracional, funciones trascendentes, función polinomial, función idéntica, crecimiento y decrecimiento de una función.

ACTIVIDADES A DESARROLLAR
• Lectura y síntesis
• Análisis de los ejemplos resueltos
• Consulta de dudas con el tutor
• Resolver los problemas propuestos</td></tr>
<tr><td>Jueves</td><td>TEMAS
• Función racional (Pág. 54)
• Función exponencial (Pág. 61)
• Función logarítmica (Pág. 65)

CONCEPTOS
Función racional, asíntotas, función exponencial, función logarítmica, base, exponente, potencia, logaritmo, propiedades de los logaritmos.

ACTIVIDADES A DESARROLLAR</td></tr>
</table>

	• Lectura y síntesis • Análisis de los ejemplos resueltos • Consulta de dudas con el tutor • Resolver los problemas propuestos
Viernes	TEMAS • Función trigonométrica (Pág. 70) • Propiedades de las funciones (Pág. 74) CONCEPTOS Función trigonométrica, continuidad, límite, función parte entera. ACTIVIDADES A DESARROLLAR • Lectura y síntesis • Análisis de los ejemplos resueltos • Consulta de dudas con el tutor • Resolver los problemas propuestos

Bibliografía básica (capítulos, páginas a estudiar)	**Fuentes complementarias** (libros, revistas, sitios web)
• **Cálculo diferencial** Primera edición 2006. Autor: Francisco José Ortiz Campos. Editorial: Publicaciones Cultural. Unidad 1 (pp. 4-85)	• Bosch, Carlos; Guerra, Manuel; Hernández, Carlos; De Oteyza, Elena. *Cálculo diferencial e integral*. McGraw-Hill. México, 2003. • Ayres, Frank Jr. *Cálculo diferencia e integral (Teoría y 1,175 problemas resueltos)*. Serie Schaum McGraw-Hill. México, 1999. ---- El cual puedes descargar gratuitamente en formato *.pdf en el siguiente sitio web: http://rapidshare.com/files/10855234/Calculo_Diferencial_e_Integral_-_Teoria_y_1175_Problemas_Resueltos.rar • En este sitio web puedes encontrar teoría y ejemplos resueltos: http://usuarios.lycos.es/calculodiferencial/ • En esta liga podrás encontrar videos ilustrativos que explican la resolución de problemas paso a paso: http://www.matematicasbachiller.com/videos/cdiferencial/ind_dif02.htm#1 • http://www.matematicasbachiller.com/temario/calcudif/tema_01/indice.html

Prácticas, Laboratorios, Ejercicios, Cuestionarios
• **Ejercicios cálculo 1, páginas: 6 y 7.** • **Ejercicios cálculo 2, páginas: 11 y 12.** • **Ejercicios cálculo 3, páginas: 17 y 18.** • **Ejercicios cálculo 4, páginas: 26, 27 y 28.** • **Ejercicios cálculo 5, páginas: 33 y 34.** • **Ejercicios cálculo 6, páginas: 35 y 36.** • **Ejercicios cálculo 7, página: 54.**

- **Ejercicios cálculo 8, páginas: 60 y 61.**
- **Ejercicios cálculo 9, página: 65.**
- **Ejercicios cálculo 10, páginas: 69 y 70.**
- **Ejercicios cálculo 11, página: 74.**
- **Ejercicios cálculo 12, página: 79.**
- **Evaluación sumativa, página: 81.**
- **Glosario, páginas: 83 y 84.**

Curso	CÁLCULO DIFERENCIAL	Clave	CD1P23

Semana No.	2
Fecha	Mayo 2008

Unidad 2	LÍMITES

Guía de Estudio para el Alumno

Conceptos importantes que debes estudiar

- Condiciones de continuidad, continuidad y discontinuidad en un intervalo, definición de continuidad, definición de límite, discontinuidad esencial, discontinuidad removible, límite, límite lateral, límites de funciones, límites en el infinito, límites infinitos, teorema de continuidad de una función.

Recomendaciones (estrategias de estudio)

- Primero lee, repasa y entiende. No trates de desarrollar ejercicios sin estudiar y entender previamente las bases teóricas, porque además de que pierdes tiempo en buscar los conceptos que no entiendes, te desanimarás al no entender lo que desarrollas.
- Desarrolla nuevamente y entiende los ejemplos que se tratan en las tutorías. Lo principal aquí es entender, preguntarse ¿por qué se realiza tal o cual operación? No se trata de memorizar pasos, sino de entender los porqués de cada cosa.

Calendario de estudio

Día	Tema, conceptos, actividades a desarrollar
Lunes	TEMAS **Vectores** • Noción intuitiva de límites y límites laterales (Pág. 88) CONCEPTOS Límites. ACTIVIDADES A DESARROLLAR • Lectura y síntesis • Análisis de los ejemplos resueltos • Consulta de dudas con el tutor

	• Resolver los problemas propuestos
Martes	TEMAS • Definición de límites (Pág. 99) CONCEPTOS Definición de límite, continuidad y discontinuidad en un intervalo.. ACTIVIDADES A DESARROLLAR • Lectura y síntesis • Análisis de los ejemplos resueltos • Consulta de dudas con el tutor • Resolver los problemas propuestos
Miércoles	TEMAS • Proposiciones para el cálculo de límites (Pág. 108) • Teorema de los límites (Pág. 108) • Límites de funciones (Pág. 109) CONCEPTOS Formas indeterminadas del tipo 0/0. ACTIVIDADES A DESARROLLAR • Lectura y síntesis • Análisis de los ejemplos resueltos • Consulta de dudas con el tutor • Resolver los problemas propuestos
Jueves	TEMAS • Límites infinitos y límites en el infinito (Pág. 118) CONCEPTOS Límites infinitos, límites en el infinito, formas indeterminadas del tipo ∞/∞, límite lateral. ACTIVIDADES A DESARROLLAR • Lectura y síntesis • Análisis de los ejemplos resueltos • Consulta de dudas con el tutor • Resolver los problemas propuestos
Viernes	TEMAS • Teorema de continuidad de una función (Pág. 127) • Condiciones de continuidad (Pág. 127) • Teoremas de valor medio y de valores extremos (Pág. 133) CONCEPTOS Condiciones de continuidad, teorema del valor intermedio, teorema de valores extremos, discontinuidad removible, discontinuidad esencial. ACTIVIDADES A DESARROLLAR • Lectura y síntesis • Análisis de los ejemplos resueltos

	• Consulta de dudas con el tutor • Resolver los problemas propuestos

Bibliografía básica (capítulos, páginas a estudiar)	**Fuentes complementarias** (libros, revistas, sitios web)
• **Cálculo diferencial** Primera edición 2006. Autor: Francisco José Ortiz Campos. Editorial: Publicaciones Cultural. Unidad 2 (pp. 86-137)	• Bosch, Carlos; Guerra, Manuel; Hernández, Carlos; De Oteyza, Elena. *Cálculo diferencial e integral*. McGraw-Hill. México, 2003. • Ayres, Frank Jr. *Cálculo diferencia e integral (Teoría y 1,175 problemas resueltos)*. Serie Schaum McGraw-Hill. México, 1999. ---- El cual puedes descargar gratuitamente en formato *.pdf en el siguiente sitio web: http://rapidshare.com/files/10855234/Calculo_Diferencial_e_Integral_-_Teoria_y_1175_Problemas_Resueltos.rar • En este sitio web puedes encontrar teoría y ejemplos resueltos: http://usuarios.lycos.es/calculodiferencial/ • En esta liga podrás encontrar videos ilustrativos que explican la resolución de problemas paso a paso: http://www.matematicasbachiller.com/videos/cdiferencial/ind_dif02.htm#1 • http://www.matematicasbachiller.com/temario/calcudif/tema_01/indice.html

Prácticas, Laboratorios, Ejercicios, Cuestionarios

- **Ejercicios cálculo 13, páginas: 97, 98 y 99.**
- **Ejercicios cálculo 14, páginas: 106, 107 y 108.**
- **Ejercicios cálculo 15, páginas: 114 y 115.**
- **Ejercicios cálculo 16, páginas: 117 y 118.**
- **Ejercicios cálculo 17, páginas: 122 y 123.**
- **Ejercicios cálculo 18, páginas: 125, 126 y 127.**
- **Ejercicios cálculo 19, página: 132.**
- **Evaluación sumativa, página: 135.**
- **Glosario, página: 137.**

Curso	CÁLCULO DIFERENCIAL	Clave	CD1P23

Semana No.	3
Fecha	Mayo 2008

Unidad 3	LAS RAZONES DE CAMBIO Y LA DERIVADA

Guía de Estudio para el Alumno

Conceptos importantes que debes estudiar

- Definición de la derivada, derivación implícita, derivación logarítmica, derivada, derivadas de orden superior, diferenciabilidad y continuidad, incremento, normal, razón de cambio, regla de la cadena, regla de la potencia, regla de los cuatro pasos, tangente, velocidad instantánea.

Recomendaciones (estrategias de estudio)

- Primero lee, repasa y entiende. No trates de desarrollar ejercicios sin estudiar y entender previamente las bases teóricas, porque además de que pierdes tiempo en buscar los conceptos que no entiendes, te desanimarás al no entender lo que desarrollas.
- Desarrolla nuevamente y entiende los ejemplos que se tratan en las tutorías. Lo principal aquí es entender, preguntarse ¿por qué se realiza tal o cual operación? No se trata de memorizar pasos, sino de entender los porqués de cada cosa.

Calendario de estudio

Día	Tema, conceptos, actividades a desarrollar
Lunes	TEMAS • La derivada (Pág. 140) • Interpretación geométrica de la derivada (Pág. 140) • Razón de cambio promedio e instantánea (Pág. 151) • La derivada como razón de cambio (Pág. 159) • Diferenciabilidad en un intervalo (Pág. 170) CONCEPTOS Tangente, punto de tangencia, incremento en una variable, incremento de una función, secante, pendiente, normal, velocidad instantánea, definición de derivada, definición de función derivada, notación de Lagrange, notación de Cauchy, notación de Leibniz,

	regla de cuatro pasos, diferenciabilidad en un intervalo. ACTIVIDADES A DESARROLLAR • Lectura y síntesis • Análisis de los ejemplos resueltos • Consulta de dudas con el tutor • Resolver los problemas propuestos
Martes	TEMAS • Reglas de derivación (Pág. 172) • Reglas del producto y del cociente (Pág. 176) • Regla de la potencia (Pág. 179) CONCEPTOS Derivación de funciones algebraicas: derivada de la función constante, derivada de la función identidad, derivada de la suma de dos funciones, derivada del producto de dos funciones, derivada del producto de una constante por una función, derivada del cociente de dos funciones, derivada de la función potencial de la forma $y = x^n$, derivada de una función compuesta. ACTIVIDADES A DESARROLLAR • Lectura y síntesis • Análisis de los ejemplos resueltos • Consulta de dudas con el tutor • Resolver los problemas propuestos
Miércoles	TEMAS • Regla de la cadena (Pág. 188) • Derivación implícita (Pág. 193) CONCEPTOS Regla de la cadena, derivación implícita. ACTIVIDADES A DESARROLLAR • Lectura y síntesis • Análisis de los ejemplos resueltos • Consulta de dudas con el tutor • Resolver los problemas propuestos
Jueves	TEMAS • Derivadas de funciones trigonométricas y funciones trigonométricas inversas (Pág. 196) • Derivadas de funciones exponencial y logarítmica (Pág. 209) • Derivadas de orden superior (Pág. 216) CONCEPTOS Derivadas de funciones trigonométricas directas: derivada de la función seno, derivada de la función coseno, derivada de la función tangente, derivada de la función cotangente, derivación de la función secante, derivación de la función cosecante; derivadas de las funciones logarítmicas y exponencial, derivadas de orden superior.

	ACTIVIDADES A DESARROLLAR • Lectura y síntesis • Análisis de los ejemplos resueltos • Consulta de dudas con el tutor • Resolver los problemas propuestos
Viernes	TEMAS • Aplicaciones de la derivada (Pág. 217) • Velocidad y aceleración (Pág. 217) CONCEPTOS Velocidad, aceleración, razón de cambio. ACTIVIDADES A DESARROLLAR • Lectura y síntesis • Análisis de los ejemplos resueltos • Consulta de dudas con el tutor • Resolver los problemas propuestos

Bibliografía básica (capítulos, páginas a estudiar)	**Fuentes complementarias** (libros, revistas, sitios web)
• **Cálculo diferencial** Primera edición 2006. Autor: Francisco José Ortiz Campos. Editorial: Publicaciones Cultural. Unidad 3 (pp. 138-227)	• Bosch, Carlos; Guerra, Manuel; Hernández, Carlos; De Oteyza, Elena. *Cálculo diferencial e integral*. McGraw-Hill. México, 2003. • Ayres, Frank Jr. *Cálculo diferencia e integral (Teoría y 1,175 problemas resueltos)*. Serie Schaum McGraw-Hill. México, 1999. ---- El cual puedes descargar gratuitamente en formato *.pdf en el siguiente sitio web: http://rapidshare.com/files/10855234/Calculo_Diferencial_e_Integral_-_Teoria_y_1175_Problemas_Resueltos.rar • En este sitio web puedes encontrar teoría y ejemplos resueltos: http://usuarios.lycos.es/calculodiferencial/ • En esta liga podrás encontrar videos ilustrativos que explican la resolución de problemas paso a paso: http://www.matematicasbachiller.com/videos/cdiferencial/ind_dif02.htm#1 • http://www.matematicasbachiller.com/temario/calcudif/tema_01/indice.html

Prácticas, Laboratorios, Ejercicios, Cuestionarios
• **Ejercicios cálculo 20, páginas: 150 y 151.** • **Ejercicios cálculo 21, página: 158.** • **Ejercicios cálculo 22, páginas: 168 y 169.** • **Ejercicios cálculo 23, páginas: 171 y 172.** • **Ejercicios cálculo 24, páginas: 174 y 175.**

- **Ejercicios cálculo 25, páginas: 186 y 187.**
- **Ejercicios cálculo 26, página: 192.**
- **Ejercicios cálculo 27, página: 196.**
- **Ejercicios cálculo 28, página: 201.**
- **Ejercicios cálculo 29, página: 207.**
- **Ejercicios cálculo 30, páginas: 215 y 216.**
- **Ejercicios cálculo 31, página: 222, 223 y 224.**
- **Evaluación sumativa, página: 225.**
- **Glosario, página: 227.**

Curso	CÁLCULO DIFERENCIAL	Clave	CD1P23

Semana No.	4
Fecha	Mayo 2008

Unidad 4	VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS Y SUS APLICACIONES

Guía de Estudio para el Alumno

Conceptos importantes que debes estudiar

- Concavidad, criterio de la primera derivada, criterio de la segunda derivada, criterio de la tercera derivada, extremo relativo, máximo relativo, mínimo relativo, número crítico, punto de inflexión, valor máximo absoluto, valor mínimo absoluto.

Recomendaciones (estrategias de estudio)

- Primero lee, repasa y entiende. No trates de desarrollar ejercicios sin estudiar y entender previamente las bases teóricas, porque además de que pierdes tiempo en buscar los conceptos que no entiendes, te desanimarás al no entender lo que desarrollas.
- Desarrolla nuevamente y entiende los ejemplos que se tratan en las tutorías. Lo principal aquí es entender, preguntarse ¿por qué se realiza tal o cual operación? No se trata de memorizar pasos, sino de entender los porqués de cada cosa.

Calendario de estudio

Día	Tema, conceptos, actividades a desarrollar
Lunes	TEMAS • Cálculo de valores máximos y mínimos relativos con el criterio de la primera derivada (Pág. 230) • Máximos y mínimos de una función (Pág. 230) CONCEPTOS Extremo relativo, máximo relativo, mínimo relativo, número crítico, máximo absoluto, mínimo absoluto, extremo absoluto, teorema del valor extremo. ACTIVIDADES A DESARROLLAR • Lectura y síntesis • Análisis de los ejemplos resueltos • Consulta de dudas con el tutor • Resolver los problemas propuestos

Martes	TEMAS • Problemas prácticos de máximos y mínimos (Pág. 235) • Aplicaciones de la derivada (Pág. 235) CONCEPTOS Aplicaciones que incluyen un extremo absoluto en un intervalo cerrado, criterio de la primera derivada. ACTIVIDADES A DESARROLLAR • Lectura y síntesis • Análisis de los ejemplos resueltos • Consulta de dudas con el tutor • Resolver los problemas propuestos
Miércoles	TEMAS • Cálculo de valores máximos y mínimos por el criterio de la segunda derivada (Pág. 246) • Criterio de la segunda derivada para extremos relativos (Pág. 246) CONCEPTOS Criterio de la segunda derivada para extremos relativos. ACTIVIDADES A DESARROLLAR • Lectura y síntesis • Análisis de los ejemplos resueltos • Consulta de dudas con el tutor • Resolver los problemas propuestos
Jueves	TEMAS • Concavidad y puntos de inflexión (Pág. 250) CONCEPTOS Punto de inflexión, concavidad hacia arriba, concavidad hacia abajo, teorema de concavidad, criterio de la primera derivada, criterio de la segunda derivada, criterio de la tercera derivada. ACTIVIDADES A DESARROLLAR • Lectura y síntesis • Análisis de los ejemplos resueltos • Consulta de dudas con el tutor • Resolver los problemas propuestos
Viernes	TEMAS • Trazado de curvas (Pág. 259) • Aplicaciones para trazar la gráfica de una función (Pág. 259) • Aplicaciones en las ciencias naturales, económica-administrativas y sociales (Pág. 264) CONCEPTOS Función creciente, función decreciente, puntos de inflexión, máximos, mínimos, concavidad, asíntota. ACTIVIDADES A DESARROLLAR • Lectura y síntesis • Análisis de los ejemplos resueltos • Consulta de dudas con el tutor • Resolver los problemas propuestos

Bibliografía básica (capítulos, páginas a estudiar)	**Fuentes complementarias** (libros, revistas, sitios web)
• **Cálculo diferencial** Primera edición 2006. Autor: Francisco José Ortiz Campos. Editorial: Publicaciones Cultural. Unidad 4 (pp. 228-281)	• Bosch, Carlos; Guerra, Manuel; Hernández, Carlos; De Oteyza, Elena. *Cálculo diferencial e integral*. McGraw-Hill. México, 2003. • Ayres, Frank Jr. *Cálculo diferencia e integral (Teoría y 1,175 problemas resueltos)*. Serie Schaum McGraw-Hill. México, 1999. ---- El cual puedes descargar gratuitamente en formato *.pdf en el siguiente sitio web: http://rapidshare.com/files/10855234/Calculo_Diferencial_e_Integral_-_Teoria_y_1175_Problemas_Resueltos.rar • En este sitio web puedes encontrar teoría y ejemplos resueltos: http://usuarios.lycos.es/calculodiferencial/ • En esta liga podrás encontrar videos ilustrativos que explican la resolución de problemas paso a paso: http://www.matematicasbachiller.com/videos/cdiferencial/ind_dif02.htm#1 • http://www.matematicasbachiller.com/temario/calcudif/tema_01/indice.html

Prácticas, Laboratorios, Ejercicios, Cuestionarios
• **Ejercicios cálculo 32, páginas: 238 y 239.** • **Ejercicios cálculo 33, páginas: 244 y 245.** • **Ejercicios cálculo 34, páginas: 249 y 250.** • **Ejercicios cálculo 35, página: 258.** • **Ejercicios cálculo 36, páginas: 263 y 264.** • **Ejercicios cálculo 37, páginas: 275, 276, 277 y 278.** • **Evaluación sumativa, página: 279.** • **Glosario, página: 281.**

Curso o materia	CALCULO DIFERENCIAL	**Clave**	**CD1P23**

Objetivo General del curso	Al finalizar el curso el alumno desarrollará habilidades y destrezas para planear y resolver problemas que involucren el concepto de derivada, interprete y analice diversas situaciones reales con la finalidad de plantear problemas de optimización y llegue a la solución de los mismos así como proporcionara los elementos necesarios y suficientes para abordar el cálculo integral.

Semana 1

Unidad 1	**FUNCIONES Y LIMITES**
Objetivos de Aprendizaje	**TEMAS**
• Aplicar el concepto de función, limite y continuidad de una función así como identificar los diferentes tipos de funciones e interpretar su grafica.	• Funciones, funciones algebraicas, funciones trascendentes,

Semana 2

Unidad 2	**FUNCIONES Y LIMITES (SEGUNDA PARTE)**
Objetivos de Aprendizaje	**TEMAS**
• Aplicar el concepto de función, limite y continuidad de una función así como identificar los diferentes tipos de funciones e interpretar su grafica.	• funciones continuas y discontinuas, limite de una función.

Semana 3

Unidad 3	LA DERIVADA
Objetivos de Aprendizaje	**TEMAS**
• Aplicar las técnicas de derivación y resolver problemas que involucren la razón de cambio	• La derivada como un limite, derivada de una función

Semana 4

Unidad 4	LA DERIVADA (SEGUNDA PARTE)
Objetivos de Aprendizaje	**TEMAS**
• Aplicar las técnicas de derivación y resolver problemas que involucren la razón de cambio	• Derivadas implícitas, derivadas de orden superior