UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

El Método del Análisis en la constitución de las cantidades imaginarias

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

ISRAEL RAMOS GARCÍA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. SANTIAGO LÓPEZ DE MEDRANO SÁNCHEZ

2010

Índice general

Introducción

La intención de este trabajo no es otra que la de una tesis de licenciatura y como tal se limitará a nuestros escasos conocimientos de la matemática y sobre todo de historia de las matemáticas. Decimos escasos conocimientos, porque el estudio sobre el origen de los números complejos, a través del estudio de los problemas que dan cuenta de la aparición de los numeros complejos es basto, así no es posible abarcar en un trabajo de tesis todos los problemas. Por lo que nos abocamos a aspectos particulares sobre el origen de los números complejos, que dan cuenta de la importancia de $\sqrt{-1}$ en la constitución de las cantidades imaginarias (cantidades no reales que surgen de la resolución de la ecuación $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + ... = 0$) en cantidades de la forma $M + N\sqrt{-1}$. Pero no por ser particulares le quita generalidad a los problemas que estudiaremos, en los cuales, la manera en que se nos presentan los números complejos, es determinante para las preguntas que contestaremos asociadas con la "representación" geométrica de los números complejos, incluyendo la "representación" misma.

Hoy día, es común asociar un número real con un segmento: así, representamos a los números reales sobre una línea recta (la recta real). En este sentido, $\frac{\pi}{2}$ se asocia con un segmento. Pero siendo un ángulo, lo podemos representar como la inclinación de dos líneas rectas. O si inscribimos el ángulo en un círculo de radio igual a la unidad, lo podemos representar como un arco de circunferencia. Por tanto, tenemos tres formas diferentes de representar $\frac{\pi}{2}$. Por otro lado, si consideramos las cantidades: líneas, superficies y sólidos. La longitud, área y volúmen tienen como representación el segmento de línea recta, el cuadrado y el cubo respectivamente, que a su vez, son un caso particular de las líneas, superficies y sólidos respectivamente. ¿Qué hace diferente al cuadrado de las demás figuras rectilíneas (equivalentes en área), como, por ejemplo, de los paralelogramos? ¿por qué elegir el cuadrado? ¿Qué hace diferente al cubo de los demás sólidos rectilineos (equivalentes en volúmen), como, por ejemplo, de los paralelepipedos? ¿por qué elegir el cubo? ¿por qué asignar un segmento a un ángulo rectilíneo y no la inclinación mutua entre dos líneas rectas o un arco de circunferencia? De hecho, cuando penasamos en la tercera parte de un ángulo, ¿por qué lo representamos como la inclinación de dos rectas o un arco de circunferencia y no como un segmento? Lo anterior nos conduce inevitablemente a preguntarnos ¿qué significa la representación de una cantidad y qué la determina?[1]

Por otro lado, también es común asociar a un número complejo una representación polar ($M + N\sqrt{-1} = r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$). Así, en el caso $r = 1$, $\cos\theta$ y $\sin\theta$ son base y altura de un triángulo rectángulo respectivamente, que se corresponden con la parte real e imaginaria de la representación polar del complejo $(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$. ¿Pero, qué nos conduce a esta representación? ¿será acaso que no hay otra representación de los números complejos, a diferencia de las demás cantidades (reales) y por eso, siendo única la representación, los representamos de esta forma? ¿O será acaso que hay otra representación? Si este es el caso, ¿qué nos conduce a elegir entre una y otra representación?, más aun, ¿por qué elegir?

Ahora, con respecto a la representación de los números complejos hasta donde tengo conocimiento, no se sabe por qué elegimos la representación que hoy tenemos. En este sentido, el matemático ingles John Wallis (1616-1703) fue el primero en hacer una contribución importante a la representación, no así al por qué, ya que da una representación diferente a la que hoy tenemos. Esto marca la pauta para preguntarnos ¿por qué elegimos una representación y no la otra? Para contestar esta pregunta, se aborda en el primer capítulo, dividido en dos partes, el problema de la divsión de una línea tal que el rectángulo formado por estas divisiones sea igual a un área dada. Problema que exhibe la imposibilidad de asociar a los complejos con un segmento. Debido a que este problema primero se traduce en resolver la ecuación: $x^2 + b^2 = ax$ donde, a, b son la longitud de la línea dada y b la longitud del lado del cuadrado igual al área dada. Segundo, para resolverla se intersecta un círculo con una línea recta. Así, cuando hay intersección las dos raíces reales se asocian con un segmento y si la línea recta no intersecta al círculo, las raíces de la ecuación son complejas y no hay segmento con que asociar a las raíces complejas. Entonces, surge la pregunta ¿qué sucede cuando hay racíces complejas, por qué no es posible asociarlas con un segmento? Para contestar esta pregunta, se aporta la asociación del problema de la división externa tal que el rectángulo formado por las divisiones sea igual a un área dada. Con la ecuación $x^2 = ax + b$ cuyas raíces son siempre reales. Que junto con lo hecho por Wallis para dar cabida a una representación de las raíces complejas de la ecuación: $x^2 + b^2 = ax$. Demuestran, que la imposibilidad esta asociada con que el punto de división no yace más sobre la línea en cuestión. De esta forma, los complejos encuentran una asociación con un segmento, que no yace sobre la línea en cuestión, sino fuera de ella y determinado por un ángulo y la longitud

[1] Para mayor detalle, con respecto al origen y contestación de estas preguntas. Veáse el apéndice **??**.

de un segmento.

En el segundo capítulo, con respecto a los complejos que surgen de la resolución de ecuaciones cubicas, dividido en dos partes. Se aborda, en la primera parte, el problema de la trisección de un ángulo asociado con las dos raices positivas de la ecuación: $x^3 + q\rho^2 = 3\rho^2 x$. Asociación atribuida a Descartes. Pero cuya construccion de la raíz, hemos incluido la dada por Al-khayyām (1048-1131) y no la dada por Descartes, para poder mostrar otra forma de construir esta raíz haciendo énfasis en las propiedades que el segundo hace de las cónicas que el primero no. También, se abordan las formulas dadas por Cardano para resolver las ecuaciones cubicas: $x^3 + B = Ax$, $x^3 = Ax + B$. Además de observar que los complejos que surgen de esta fórmula están asociados con la raíz real negativa de $x^3 + B = Ax$ que no esta asociada con la trisección de un ángulo. Debido a que, Descartes solo asoció las otras dos raíces positivas con la trisección de un ángulo. Y se da constestación a la pregunta ¿qué interpretación tiene la raíz negativa (o falsa como la nombra Descartes) de esta ecuación, raíz positiva de $x^3 = Ax + B$? Asociando esta con la trisección de un ángulo. Además se aporta otra construcción de la raíz positiva de la ecuación $x^3 = Ax + B$, diferente a la dada por Al-khayyām y Descartes. En la segunda parte, se muestra que la raiz cubica del número complejo que aparece en la fórmula de Cardano, es nuevamente de la misma forma $M + N\sqrt{-1}$ solo utilizando el cálculo de los números complejos. Esto es, cálculo que opera con $M + N\sqrt{-1}$, como suma y producto de números reales, con la salvedad de que $(\sqrt{-1})^2 = -1$. Sin utilizar la representación polar y como consecuencia sin usar las identidades trigonométricas, ya que esta representación supone lo que queremos mostrar, a saber que la parte real y la parte imaginaria se representan en un sistema de ejes ortogonales, una sobre el eje real y la otra sobre el eje de las ordenadas respectivamente. Además, se da una representación geométrica de estos complejos consecuencia de asociar la raíz real positiva de $x^3 = Ax + B$ con la trisección de un ángulo y de expresar esta raíz como la suma de dos complejos conjugados. Así, se asocia la trisección de un ángulo con la extracción de raíz cubica de un número complejo independientemente de las identidades trigonométricas o en su defecto de la representación polar de un número complejo. Por último, se muestra que la representación geométrica dada por Wallis, no hace compatible la suma de complejos conjugados con la representación dada, también por Wallis. Sin embargo, se muestra que ambas representaciones de la suma de complejos conjugados, por un lado la dada por Wallis y por otro, la que se originó con el problema de la trisección de un ángulo. Tienen en común reducir la suma a la proyección, sobre el eje real de la diagonal del paralelogramo determinada por los complejo conjugados.

Finalmente, en el capítulo 3 se aborda la generalización del problema de la trisección de un ángulo al problema de la división de un ángulo en n-partes iguales, donde n denota un número natural. Siendo la generalización, la que permite que la potenciación de un número complejo: $(x + iy)^n = x_n + y_n$ asocie a: x, y con la base y altura respectivamente de un triángulo rectángulo cuyo ángulo opuesto a la base es un ángulo dado, y a x_n, y_n con la base y la altura respectivamente de un triángulo rectángulo cuyo ángulo opuesto a la base es la n-esima parte del ángulo dado. Es decir, la generalización hace compatible el cálculo con los números complejos, cuyo origen es la resolución de la ecuación: $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \cdots = 0$, con la representación de los números complejos, donde la parte real y la parte imaginaria se asocian con la base y altura de un triángulo rectángulo respectivamente.

Israel Ramos García, 2010.

Capítulo 1

Sobre la representación de las raíces complejas de la ecuación $x^2 + b^2 = ax$

1. Introducción

En este capítulo se aborda el problema de la representación geométrica de las raíces complejas que surgen de la ecuación $x^2 + b^2 = ax$. A su vez, el capítulo esta dividido en dos partes. La primera parte (que comprende las secciones 2 y 3), aborda la imposibilidad de asociar las raíces complejas con un segmento (mas no, que imposibilita esta asociación). Asociando las ecuaciónes $x^2 + b^2 = ax$ y $x^2 = ax + b^2$ con el problema de la división interna y externa de un segmento dado tal que el rectángulo formado por dichas divisiones sea igual a cuadrado dado respectivamente. Y mostrando que, cuando las raíces de estas ecuaciones son reales, las raíces reales se asocian con un segmento que esta contenido en la línea recta que contiene al segmento a dividir. De esta forma, no es posible asociar las raíces complejas de $x^2 + b^2 = ax$ con un segmento, si, el segmento esta contenido en la línea recta que contiene al segmento a dividir. En la segunda parte (que comprende las secciones 5, 6 y 7) primero se aborda, qué imposibilita asociar las raíces complejas con un segmento, pero no con un segmento contenido en la línea recta que contiene a los segmentos reales positivos y negativos. Sino mostrando qué imposibilita asociar la parte imaginaria de la raíz compleja con un segmento. Imposibilidad que a su vez, impide asociar los números complejos (no puros, esto es, con parte real diferente de cero) con un segmento. Segundo, la asociación de la parte imaginaria de un número complejo con un segmento, que, permite asociar a los números complejos con un segmento que yace fuera de la línea recta real. No esta de más comentar, que en esta representación la parte real no es ortogonal a la parte imaginaria, como la representación que hoy tenemos de los números complejos.

2. El problema de la división de una línea

Teniendo en cuenta que en la antigüedad, la existencia de las cantidades esta asociada con exhibir una construcción que muestre, que la asociación de una cantidad real con un segmento de línea recta es posible.[1] Marca la pauta para que los números negativos y complejos fueran nombrados cantidades imposibles. En

[1] Ver apéndice **??**.

este sentido, por ejemplo, si asociamos los números negativos que surgen de la ecuación: $x + a = b$, cuando $a > b$ cuya raíz es $b - a$. Con el problema geométrico de cortar un subsegmento $[a]$ de un segmento dado $[b]$, el cual es posible si $a < b$ e imposible si $a > b$. Entonces, comprendemos por qué los números negativos, son cantidades imposibles. Esta imposibilidad, que surge de la asociación de la ecuación $x + a = b$ con el problema geométrico de cortar un subsegmento, impide asociar $[b - a]$ cuando $a > b$ con un segmento de línea recta, como con la raíz real positiva $(a < b)$. Así, dar sentido a los negativos y complejos como lo hacemos hoy, con el concepto de posición sobre una línea recta y con un vector (que, a su vez, tiene asociado un magnitud y dirección) en el plano respectivamente; Nos remite a que, cantidades que eran imposibles hoy son cantidades posibles, en tanto que, tienen un sentido en la geometría. De esta forma ¿qué es lo que es imposible, que no permite darles sentido en geometría? ¿Qué da status de cantidades igualmente posibles a las cantidades negativas y complejas? ¿Qué les da sentido en la geometría?

Por otro lado, asociar la ecuación $x^2 + b^2 = ax$ con un problema de naturaleza geométrica, permitirá saber qué tipo de imposibilidad esta asociada en este caso con las raíces complejas. Que, impide, asociarlas con un segmento como con las raíces reales.

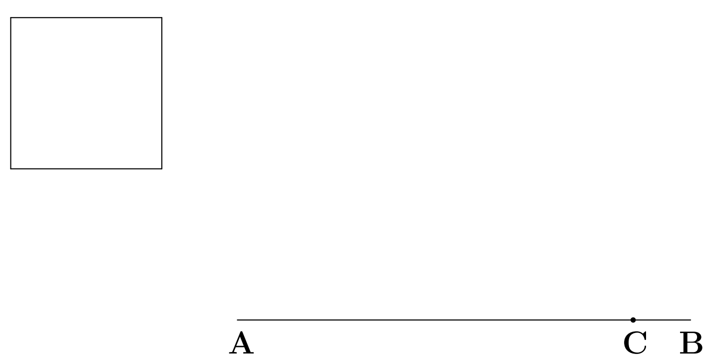

Figura 1. División de una línea — Playfair

2.1. PROBLEMA (DIVISIÓN DE UNA LÍNEA — PLAYFAIR 1778). *Dividir un segmento dado [AB] (ver Figura 1), tal que el rectángulo formado por dichas divisiones sea igual a un cuadrado dado [b^2].*

Sea $AB = a$ la línea dada y b el lado del cuadrado dado. Supongamos que C es el punto buscado, entonces

$$(AC)(CB) = b^2,$$

y haciendo $AC = x$, se tiene

$$(x)(a - x) = b^2,$$

así pues

$$ax - x^2 = b^2$$

luego

$$x^2 + b^2 = ax \tag{1}$$

Por tanto, el problema se reduce a resolver la ecuación (1). Por otro lado, para resolver esta ecuación considerese lo siguiente:

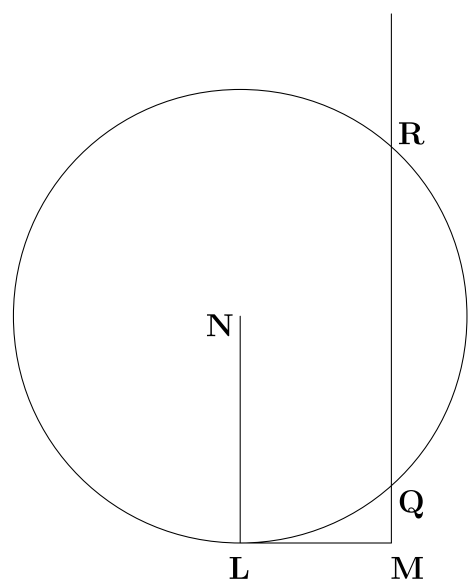

FIGURA 2. Soluciones de la ecuación: $x^2 + b^2 = ax$ — Descartes

CONSTRUCCIÓN:

1. Con centro N y radio $NL = \frac{a}{2}$ trácese el círculo LQR (ver Figura 2).
2. Haciendo $LM = b$, y por el punto M trácese MQR paralela a LN.
3. Afirmamos que, MQ y MR son las dos raíces de la ecuación.

Demostración. En efecto, por potencia de un punto $[M]$ respecto a la circunferencia $[LQR]$ se tiene: $LM^2 = (MR)(MQ)$, entonces si $MR = x$, tenemos que $MQ = a - x$ y así $x(a-x) = b^2$ o $x^2 + b^2 = ax$. Pero, si hacemos $MQ = x$, entonces $MR = a - x$, y otra vez, $(a-x)(x) = b^2$. Además, si O es el punto medio de QR,

$$MQ = OM - OQ = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2}$$

y

$$MR = MO + OR = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2}$$

□

Nótese que, cuando $b < \frac{a}{2}$ las raíces son reales y están asociadas con los segmentos MQ y MR. Pero si MR es tangente al círculo, es decir, $b = \frac{a}{2}$. Las raíces serian iguales y estarían asociadas ambas con el mismo segmento; mientras que si $b > \frac{a}{2}$, entonces la línea MR no encuentra al círculo y no hay segmento con que asociar a las raíces complejas.

3. División interna y externa de una línea

El planteamiento del problema de la división de una línea no contempla la división externa,[2] esto es, el problema esta planteado como: la división interna de una línea tal que el rectángulo formado por dichas divisiones sea igual a cuadrado dado. Al igual que el problema de cortar un subsegmento $[AC = a]$ de un segmento dado $[AB = b]$, el caso cuando $a > b$, es decir, $b - a < 0$, es imposible asociar $b - a$ con un segmento. Pero si extendemos continuamente el segmento AB en ambas direcciones, $b - a$ (< 0) se asocia con BC y no con CB como cuando $b - a > 0$. Lo hecho para los negativos plantea la posibilidad de que el caso de la división externa tal que el rectángulo formado por dichas divisiones sea igual a un cuadrado dado, si, este es posible claro esta. Permitiría asociar las raíces reales y complejas de la ecuación: $x^2 + b^2 = ax$, con un problema de naturaleza geométrica: la división interna y externa de una línea tal que las divisiones formen un rectángulo igual a un cuadrado dado respectivamente. Como con los números positivos y negativos que están asociados con la posición interna y externa del punto C respecto al segmento AB respectivamente.

Por otro lado, el problema de la división externa tal que el rectángulo formado por dichas divisiones sea igual a un área dada (o equivalentemente igual a un cuadrado dado). Hasta donde tengo conocimiento, es una aportación original, que permite dar cuenta de la imposibilidad de asociar las raíces complejas de

[2] Como el problema de cortar un subsegmento de un segmento dado, impone que el subsegmento tiene que ser menor que el segmento dado, ya que todo subsegmento es menor que el segmento del cual es parte. Así, este problema no contempla el caso cuando el subsegmento es más grande que el segmento, asociado con los números negativos.

la ecuación $x^2 + b^2 = ax$ con un segmento contenido en la línea recta que a su vez, contiene al segmento AB; Como cuando las raíces son reales. Ya que mostraremos que este problema esta asociado con las raíces (que son siempre reales) de la ecuación $x^2 = ax + b^2$.

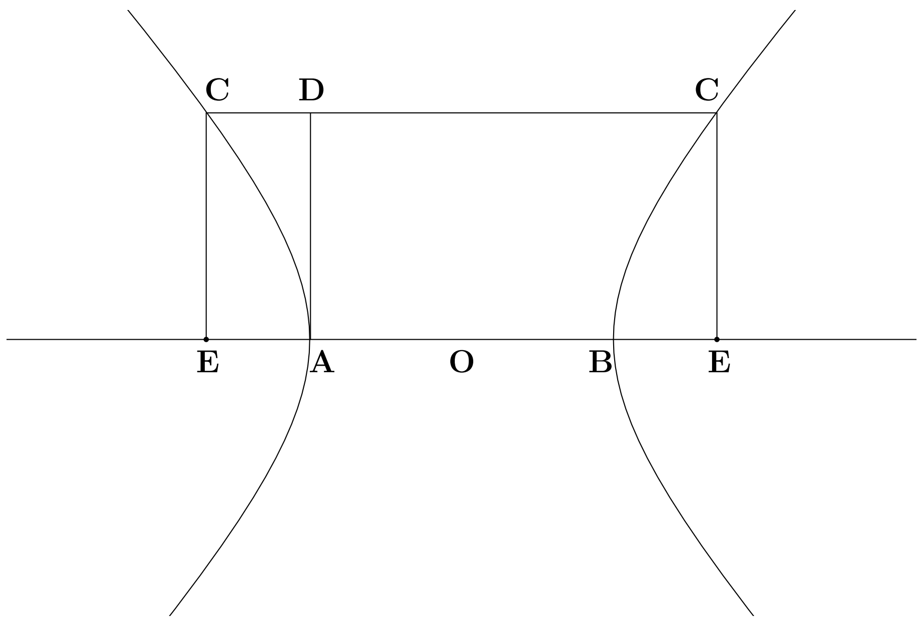

FIGURA 3. División externa de una línea

3.1. PROBLEMA. *Dividir (externamente) un segmento dado AB, tal que el rectángulo formado por dichas divisiones sea igual a un cuadrado dado.*

CONSTRUCCIÓN:

1. Tómese la hipérbola $ACBC$ cuyo lado transverso es AB (Ver Figura 3), tal que $\frac{\textit{lado recto}}{\textit{lado transverso}} = 1$
2. Constrúyase la ortogonal AD en A, hágase $AD = b$, b lado del cuadrado dado.
3. Por el punto D trácese la recta CC paralela a AB.
4. Prolónguese continuamente, en ambas direcciones, el segmento AB.
5. Sean E, E proyecciones (sobre la prolongación de AB) de C, C.
6. E es el punto buscado.

Demostración. Por propiedades de la hipérbola,[3] se tiene

$$\frac{CE^2}{(AE)(EB)} = \frac{lado\ recto}{lado\ transverso}$$

luego

$$CE^2 = (AE)(EB).$$

Por lo tanto

$$(AE)(EB) = b^2$$

□

Notese que, si $AB = a$ y $EB = x$. Sustituyendo en

$$(AE)(EB) = b^2$$

se tiene

$$(x - a)(x) = b^2$$

luego

$$x^2 = ax + b^2$$

Cuyas soluciones son

$$x_+ = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}$$

y

$$x_- = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}$$

De esta forma, si E esta a la izquierda de A, EB coincide con x_+ y si E esta a la derecha de A, EB coincide con x_-

Por tanto, notemos que cuando $AD > \frac{AB}{2}$, esto es, $b > \frac{a}{2}$. La recta ortogonal levantada en D no interseca a la circunferencia de diámetro AB, pero si interseca a la hipérbola ABC (ver Figura 4). En otras palabras, no es posible dividir (internamente) un segmento dado AB tal que el rectángulo que forman las divisiones sea igual a un área dada, cuando el área dada es más grande que el cuadrado de la mitad del segmento dado ($b^2 > \left(\frac{a}{2}\right)^2$). Sin embargo, la división (externa) de un segmento dado tal que el rectángulo que forman las divisiones sea igual a un área dada, si es posible cuando $b > \frac{a}{2}$. Así pues, dado que los problemas de la división interna y externa están asociados con las raíces reales de las ecuaciones: $x^2 + b^2 = ax$ y $x^2 = ax + b^2$ respectivamente. Entonces, las raíces complejas de la ecuación: $x^2 + b^2 = ax$, dan cuenta de la imposibilidad de la división, porque el punto no yace más sobre la línea recta que contiene a los puntos A y B. Pero esto

[3]Esta propiedad que carateriza a la hipérbola, se puede encontrar en la proposición 12 del libro I de las Cónicas de Apolonio. Pero también, se puede deducir del siguiente hecho: una hipérbola cuadrada tiene como ecuación $x^2 - y^2 = r^2$. Así, si O punto medio de AB es el origen y r es la distancia del punto O al punto B. Tenemos que, $y^2 = r^2 - x^2 = (x - r)(x + r)$, esto es, $CE^2 = (OE - OB)(OE + OB) = (OE - OA)(OE + OA) = (EB)(AE)$.

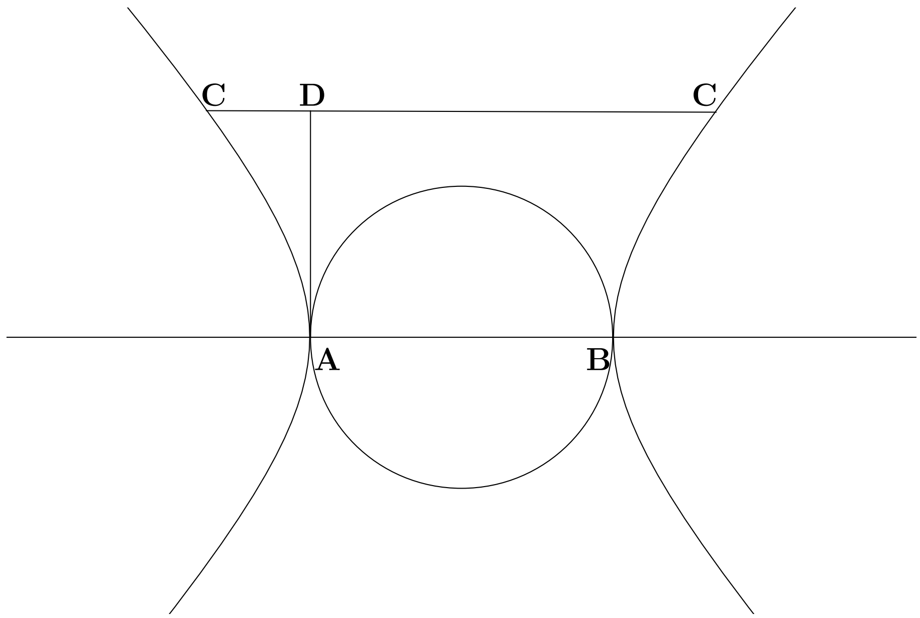

Figura 4. División interna y externa

no explica qué imposibilita asociar las raíces complejas con un segmento. Qué si, con un segmento contenido en la línea recta que contiene al segmento AB.

4. La ininteligibilidad de los números complejos

Para entender qué imposibilita asociar las raíces complejas de $x^2 + b^2 = ax$ con un segmento. Retomaremos el modo de resolver esta ecuación con el método conocido en la antigüedad como, aplicación de una área por defecto a lo largo de un segmento dado.

Ecuación:

$$x^2 + b^2 = ax$$

Análisis:

1. Sea $ACDE$ un cuadrado de lado x (ver Figura 5), sobre DC aplíquese el rectángulo DB equivalente a b^2.[4]
2. Luego, $AB = a$, ya que $x^2 + b^2 = ax$.
3. Por tanto, para determinar el lado del cuadrado $[x]$ se requiere aplicar sobre el segmento AB un área DB $[b^2]$ y que sea deficiente (que la aplicación sea menor) en un cuadrado $[AD]$.

[4]Esta construcción, se conoció como la aplicación de un área $[DB]$ por yuxtaposición sobre un segmento dado $[DC]$.

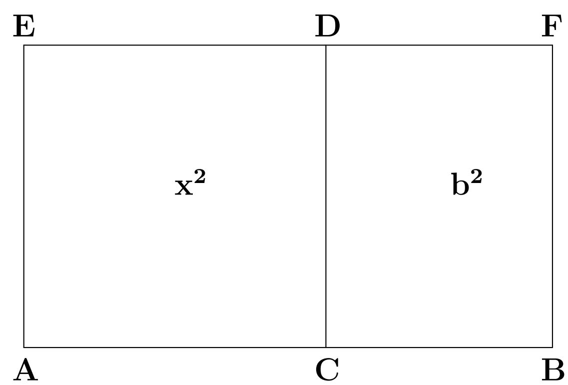

FIGURA 5. Análisis de la ecuacion $x^2 + b^2 = ax$.

4.1. PROBLEMA. *Dado un segmento AB, se requiere aplicar un área dada [b^2] que sea deficiente en un cuadrado.*

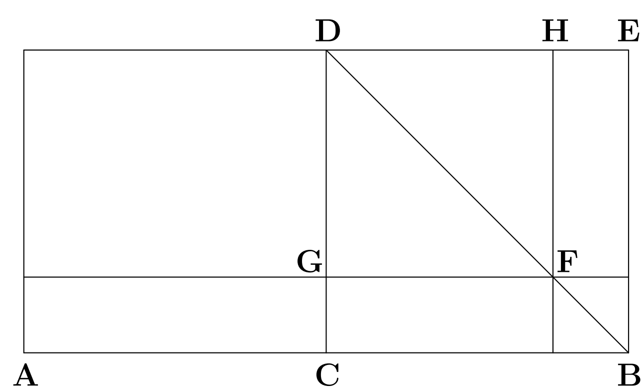

FIGURA 6. Aplicación de un área sobre un segmento por defecto.

Construcción:

1. Constrúyase sobre la mitad de la línea AB el cuadrado $BCDE$ (ver Figura 6); con vértice en D constrúyase el cuadrado $FGDH$ equivalente a $c^2 = (\frac{a}{2})^2 - b^2$.
2. Complétese el cuadrado AD.
3. Trácese la diagonal DB y prolónguese FG en ambas direcciones.
4. Afirmamos que AF es el área dada $[b^2]$ y BF el cuadrado, por el que la aplicación sobre la línea dada $[AB]$ es deficiente.

Demostración. En efecto, dado que $CB = \frac{a}{2}$, entonces $CBDE - GFHD = c^2 - (\frac{a}{2})^2 = b^2$. Y dado que el ractángulo CF es igual al rectángulo FE y el rectángulo BG es igual al rectángulo AG. Se sigue que $CF + FE + FB$, que a su vez es igual a b^2, es igual al rectángulo AF. Por otro lado, para ver que FB es un cuadrado. Cuando dos cuadrados como, DF y DB comparten vértice, entonces están colocados en torno de la diagonal del cuadrado mayor, en este caso del cuadrado DB. Así, FB es un cuadrado. □

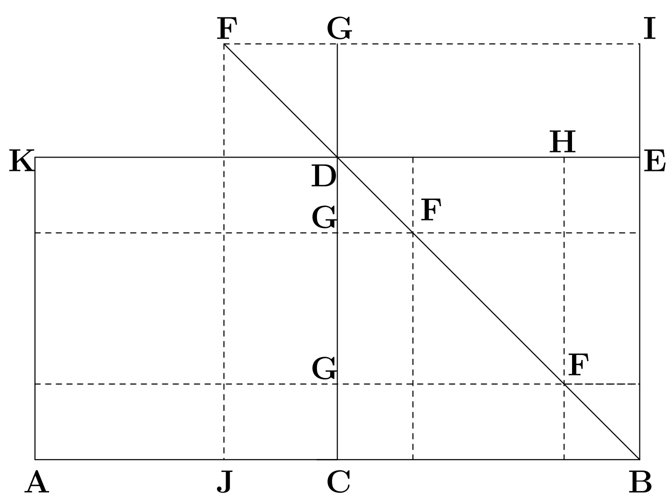

Figura 7

Ahora bien, el cuadrado $DGHF$ $[c^2]$ es igual a $(\frac{a}{2})^2 - b^2$. Cuando el vértice F del cuadrado $DGHF$ yace dentro del cuadrado $CBDE$ (ver Figura 7). Esto es, $b < \frac{a}{2}$, $c^2 > 0$. Y cuando el vértice F coincide con el vérice D del cuadrado $DGHF$, $b = \frac{a}{2}$ y $c^2 = 0$. Luego, cuando F yace fuera del cuadrado $CBDE$, pero sobre la diagonal DB. Nos gustaría que $c^2 < 0$ (ya que $b > \frac{a}{2}$) se asocie con el cuadrado DF.[5] Pero, esto no sucede ya que los lados del cuadrado DF son negativos. Así, el área es positiva y no negativa como nos gustaría. Ahora, también el rectángulo AF es igual a b^2, el área dada a aplicar sobre el segmento dado $AB = a$, y el lado del cuadrado BF raíz de la ecuación $x^2 + b^2 = ax$. Así, cuando F yace fuera, nos gustaría que $AF = b^2$, pero $b^2 = (\frac{a}{2})^2 - c^2$ y teniendo en cuenta que $c^2 < 0$, entonces la diferencia de cuadrados en realidad es una suma. Y cuando F yace en el interior de $CBDE$, b^2 es la diferencia de cuadrados $(\frac{a}{2})^2 - c^2$ y no la suma. Incluso estando F fuera, el rectángulo AF es la diferencia de los cuadrados $(\frac{a}{2})^2$ y $-c^2$. y no la suma $((\frac{a}{2})^2 - c^2)$ como se requiere para que el lado del cuadrado BF sea raíz de la ecuación $x^2 + b^2 = ax$, cuando $b > \frac{a}{2}$. Esto es, cuando las raíces son complejas. Dado que el rectángulo JD es igual al rectángulo DI y el rectángulo KG igual al rectángulo DI. Entonces $KG = JD$ y si quitamos el cuadrado DF se obtiene el rectángulo KF. Y dado que el rectángulo AF es igual a la suma de los rectángulos JK y KF. Entonces $AF = KJ + JD - DF = (\frac{a}{2})^2 - (-c^2)$. La cual es diferente de $(\frac{a}{2})^2 - c^2$.

Por tanto, si $c^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2$, entonces cuando $\frac{a}{2} > b$, $c = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2}$ es el lado de un cuadrado. Pero, si $\frac{a}{2} < b$, c ya no es el lado de un cuadrado, ya que $+c$ o $-c$, forman un cuadrado de área positiva: $(+c)(+c) = +c^2$ o $(-c)(-c) = +c^2$. Y no un cuadrado de área negativa: $-c^2 = (\sqrt{-1}c)^2$, con $c > 0$. Que es lo que se requiere. En este sentido, no es posible sustraer (o cortar) un cuadrado de área mayor a uno de área menor, esto es lo que no es posible entender si nos limitamos a esta asociación del cuadrado de un número c^2 con el cuadrado (figura) de lado c. Así, la imposibilidad de asociar las raíces complejas de la forma: $M + N\sqrt{-1}$ con un segmento de línea recta, yace en la imposibilidad de asociar el lado: $\sqrt{-c^2}$ de los cuadrados negativos: $-c^2$ con un segmento de línea recta, como con las raíces (o lados) reales: $\sqrt{c^2} = \pm c$.

Pero ¿qué nos impide superponer dos cuadrados y cortar el mayor $[b^2]$ del menor $[a^2]$? Y el exceso de área asignarla con la diferencia de las áreas $[a^2 - b^2]$ ¿No acaso se hace lo mismo con los segmentos? Se superponen y se corta el mayor $[b]$ al menor $[a]$, pero extendiendo el segmento menor en ambas direcciones, el segmento que excede se asigna con la diferencia de los segmentos $[a - b]$.

5. Sobre los números imaginarios

Hemos notado que la imposibilidad de asociar un segmento a las raíces complejas de la ecuación $x^2 + b^2 = ax$, yace en la imposibilidad de asociar $\sqrt{-c^2}$ con

[5]Esta forma de proceder es análoga a cuando diferenciamos la posición de un punto, sobre una línea recta, con respecto de otro que, yace sobre la misma línea, pero que es un punto de referencia. Designado así, con una cantidad positiva, si el segmento tiene uno de sus extremos a la derecha de este punto y una cantidad negativa, si tiene uno de sus extremos a la izquierda. En este caso, el punto de referencia es D, y diferenciamos la posición de F, sobre la diagonal DF, con respecto a D.

un segmento. Consecuencia de asociar el cuadrado de un número con el cuadrado (figura). En este sentido, lo que permite a John Wallis (1616-1703) considerado el primero en hacer una importante contribución al tratamiento geométrico de los números complejos, resolver este problema. Es primero, dar sentido a los números negativos en geometría con, el movimiento continuo de un punto sobre una línea recta respecto a un punto de referencia que yace sobre esta. Si el movimiento es hacia adelante respecto del punto de referencia, el segmento de línea recta determinado por el movimiento de este punto es denotado con el signo $+$ y si el movimiento es hacia atrás es denotado con el signo $-$ Segundo, hacer el cuadrado equivalente a un rectángulo por medio de la construcción de la media proporcional entre dos segmentos dados:

$$ab = x^2 \iff a : x :: x : b$$

Así, la media proporcional entre una cantidad positiva y una negativa:

$$-a : x :: x : b \iff x = \sqrt{(-a)(b)}$$

y su correspondiente construcción dan cabida a la expresión

$$\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2}$$

equivalente a

$$\sqrt{-\left(b - \frac{a}{2}\right)\left(b + \frac{a}{2}\right)}$$

Por otro lado, la construcción de la media proporcional oculta la respuesta a nuestra pregunta respecto a cortar un cuadrado mayor (en área) de uno menor, que produce los cuadrados de área negativa. Si procedemos a superponer los cuadrados, el área excedente no tiene la forma de un cuadrado. Así, para llevarla a un cuadrado se procede como lo hicieron los antiguos, construir un rectángulo equivalente en área al excedente. Conocido como el método de yuxtaposición de un área a lo largo de un segmento dado. Luego, se hace este rectángulo equivalente a un cuadrado, mediante la construcción de la media proporcional. De esta forma, dado que los lados del rectángulo son diferentes, este es susceptible de asignarse con un área negativa. No así, el cuadrado que tiene lados iguales. Luego, expresando la diferencia de cuadrados como el producto de dos segmentos distintos. Nos permite, construir los cuadrados de área negativa.

5.1. Construcción de la raíz cuadrada de los números negativos.

Construcción:

Si hacia adelante de A tomamos $AB = +b$; y de B tomamos $BC = +c$; haciendo $AC = AB + BC = +b + c$ el diámetro de un círculo (ver Figura 8). Entonces el seno, o media proporcional $BP = \sqrt{+bc}$.

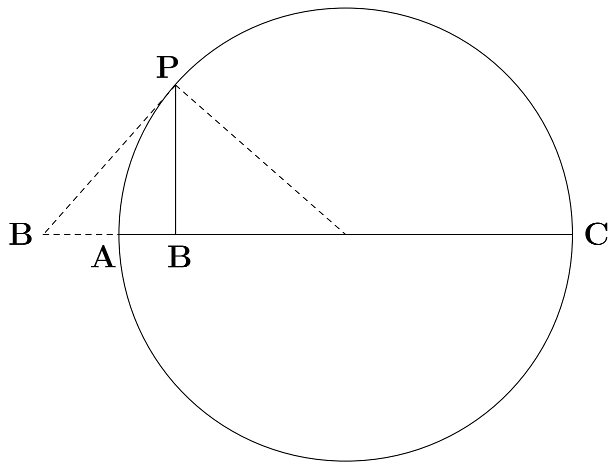

FIGURA 8. Construcción de la raíz de números negativos — Wallis

Si hacia atrás de A tomamos $AB = -b$; y de B tomamos hacia adelante $BC = +c$; haciendo $AC = AB + BC = -b + c$ el diámetro de un círculo. Entonces la tangente o media proporcional $BP = \sqrt{-bc}$.

Después de introducir los cuadrados de áreas negativas, asociando la diferencia de cuadrados con la media proporcional entre un número positivo y uno negativo. Para construir las raíces complejas $M+N\sqrt{-1}$ se hará uso del siguiente problema. Que a su vez hace uso de la construcción de los cuadrados de áreas negativas.

5.1. PROBLEMA (CONSTRUCCIÓN DE UN TRIÁNGULO — WALLIS). *Construir un triángulo sobre una linea AC (de longitud indefinida); en el que uno de los lados AP es dado; junto con (el ángulo $\angle PAC$ y consecuentemente) la altura PC; y el otro lado PB ($< AC$) (ver Figura 9): se requiere encontrar la base AB.*

CONSTRUCCIÓN:

1. Constrúyase la ortogonal PC a AC desde su punto C.
2. Con centro en P y radio PB trácese el círculo DBB.
3. Con centro el punto medio M de PC y radio MP trácese el círculo PBC.
4. Trácese AP; PB
5. AB es el lado requerido.

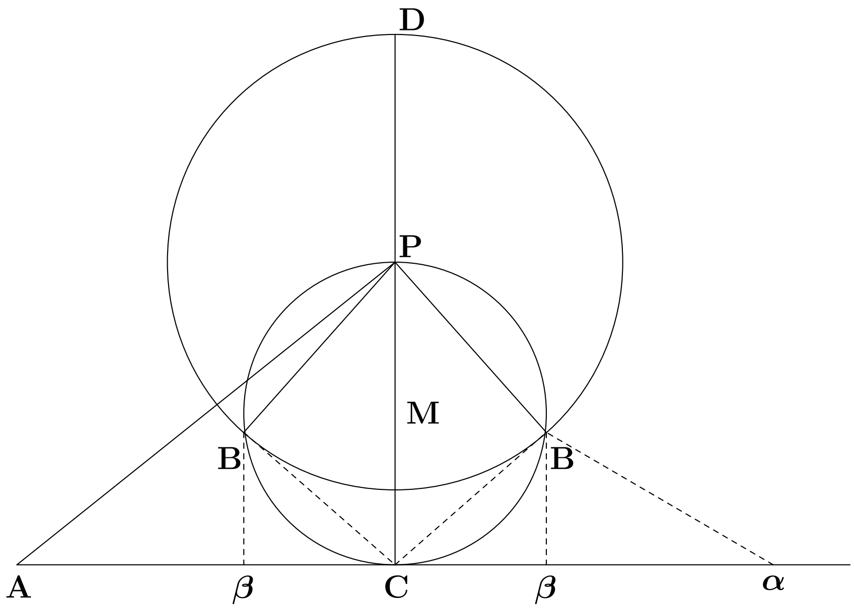

Figura 9. Construcción de un triángulo dado dos de sus lados y su altura ($PB < PC$) — Wallis

Demostración. Dado que PC es diámetrro, entonces

$$\angle PBC = R,^{6}$$

luego CB es tangente en B a PBB y

$$CB^2 = -(PC - PB)(PC + PB)$$

así pues

$$CB_{\pm} = \pm\sqrt{PB^2 - PC^2},$$

por lo tanto,

$$AB_{+} = AC + CB_{+} = AC + BC\sqrt{-1}$$

y

$$AB_{-} = AC + CB_{-} = AC - BC\sqrt{-1}$$

□

[6] R, denota un ángulo de 90°. También nombrado, en la antigüedad, ángulo recto.

6. Construcción geométrica de las raíces de la ecuación $x^2 \pm ax + b^2 = 0$

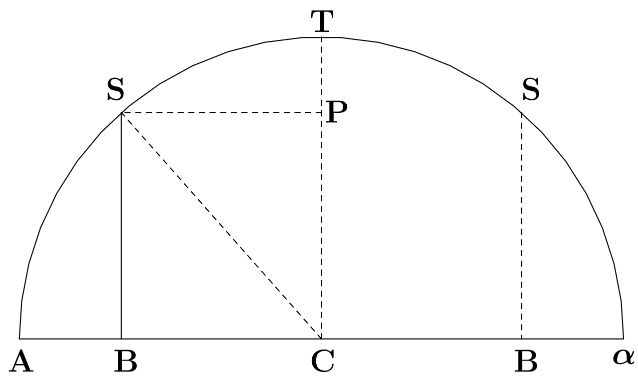

FIGURA 10. Construcción de las raíces [reales] de la ecuación $x^2 \pm ax + b^2 = 0$ — Wallis

ECUACIÓN:

$$x^2 \pm ax + b^2 = 0$$

CONSTRUCCIÓN:

1. Sea $A\alpha = a$ diámetro del semicírculo $A\alpha T$ con centro en el punto C (ver Figura 10); CT radio ortogonal en C a $A\alpha$.
2. Hágase $CP = b$; S proyección de P sobre la semicircunferencia $A\alpha T$ y B proyección de S sobre el segmento $A\alpha$.
3. AB, $B\alpha$ son las raíces buscadas.

DEMOSTRACIÓN. Dado que $PC = SB$, ya que $BCPS$ es un rectángulo y que el triángulo $\triangle CSB$ es rectángulo, entonces $BC = \pm\sqrt{CS^2 - SB^2}$, es decir, $BC = \pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2}$. Por otro lado $AB = AC - BC$ y $B\alpha = BC + C\alpha$ luego $AB = \frac{a}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2}$ y $B\alpha = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2}$. □

Ambas raíces positivas o negativas, si en la ecuación se tiene $-ax$ o $+ax$. Cuando BS incrementa, B se aproxima a C y CB decrece (la semidiferencia de las raíces). Ya que BS nunca puede ser más grande que CT (semidiametro): Por tanto, siempre que $b > \frac{a}{2}$ el caso propuesto para esta construcción es imposible.

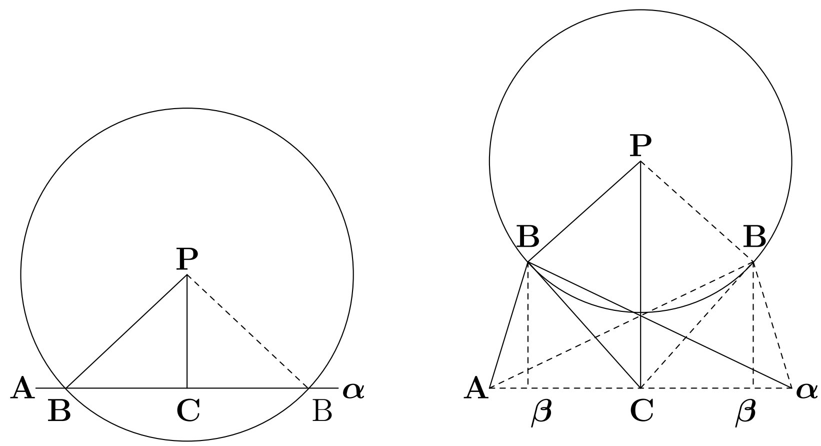

FIGURA 11. Construcción de las raíces: reales y complejas de la ecuación $x^2 \pm ax + b^2 = 0$ — Wallis

Cuando la ecuación $x^2 \pm ax + b^2 = 0$, presenta casos posibles e imposibles, es decir, si $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ es o no menor que b^2, la construcción es la siguiente:

CONSTRUCCIÓN:

1. Sea $AC\alpha = a$, constrúyase la perpendicular $CP = b$ en C punto medio de $AC\alpha$ y tomando $PB = \frac{a}{2}$, constrúyase el triángulo rectángulo PBC (ver Figura 11). Cuyo ángulo recto estaría en C o en B según sea $PB > PC$ o $PB < PC$

Notese que, las líneas rectas AB, $B\alpha$ son los dos valores de x. Ambos positivos si (en la ecuación) esta $-ax$, ambos negativos, si esta $+ax$. Los cuales son reales, si el ángulo recto esta en C, pero *imaginarias*[7] si esta en B. En ambos casos (si el ángulo recto esta en C o en B) el punto B puede indiferentemente ser tomado sobre uno u otro lado de PC, en posición semejante. Y los dos puntos B, B, son aquellos que la ecuación designa. En el primer caso, $AB\alpha$ es una línea recta y lo mismo para $AC\alpha$. En el segundo caso, $AB\alpha$ hace un ángulo, tal que $AC\alpha$ es igual a $A\alpha$ y sobre la cual si $AB\alpha$ es proyectada, B cae sobre β. En el primer caso, $AB + B\alpha = A\alpha = a$. En el segundo caso, no para B pero si para su proyección, $A\beta + \beta\alpha = a\alpha = a$.

[7]La connotación de raíces imaginarias viene de una manera de contradistinguir a las que ellos llamaron raíces reales: positivas o negativas.

7. Sobre la construcción de las cantidades imaginarias puras

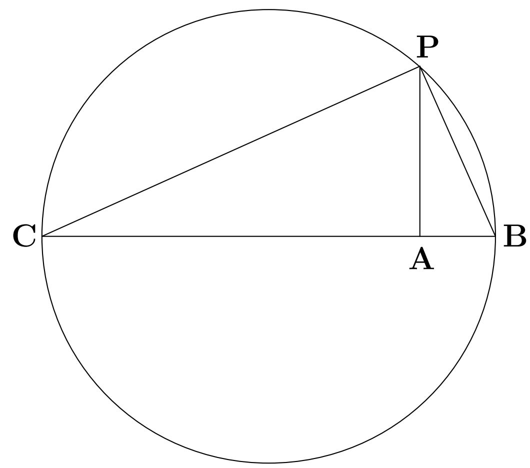

FIGURA 12. Construcción de las cantidades imaginarias puras

En la sección 5.1 se construyó la raíz de las cantidades negativas denotadas aquí con el nombre de cantidades imaginarias puras y se construyeron las cantidades imaginarias de la forma: $M + N\sqrt{-1}$, donde M y N denotan cantidades reales. Así, la parte imaginaria $[N]$ no se representa sobre una recta ortogonal respecto a la recta donde se representa la parte real $[M]$. ¿Qué determina a esta representación? No basta la introducción de las cantidades negativas en la geometría sino que también es importante la forma en que son introducidas, por ejemplo:

CONSTRUCCIÓN:

1. Sea A el origen (ver Figura 12), $AB = +a$ una cantidad positiva, $AC = -b$ una cantidad negativa ($a \neq b$).
2. Descríbase el círculo BPC cuyo diámetro es CB.
3. Constrúyase la ortogonal AP en A sobre CB.
4. AP es la media proporcional entre AB y AC.

Esta construcción ($\sqrt{(a)(-b)}$), a reserva de que todo rectángulo es equivalente a un cuadrado, construye la raíz de los cuadrados negativos ($\sqrt{-(ab)} = \sqrt{-c^2}$), es decir, construye las cantidades imaginarias puras. Además, la representación es sobre una recta ortogonal a la recta donde se representan las cantidades reales (negativas o positivas).

Por otro lado, la representación de las cantidades imaginarias puras no es independiente de la representación de las cantidades imaginarias de la forma: $M + N\sqrt{-1}$, ya que la construcción que hace Wallis de estas esta sujeta a la propiedad $AB + BC = AC$ (ver sección 5.1), propiedad que permitió construir las raíces complejas de la ecuación $x^2 \pm ax + b^2 = 0$ (ver seccion 5.1). Propiedad que no cumple esta construcción, ya que lo que se requiere es que la cantidad negativa o segmento AC tenga como punto inicial el punto final de la cantidad positiva o segmento AB, así pues, se requiere que $A = B$. Lo cual no sucede en esta construcción (ver Figura 12).

8. Conclusión

Asociar los números negativos con el problema de cortar un subsegmento de un segmento dado, mostró qué imposibilita asociarlos con un segmento. Pero si extendemos continuamente el segmento en ambas direcciones, es posible asignarles un segmento. Así, la distinción de la posición de un punto respecto de un segmento marca la pauta para esta asociación. Por otro lado, el problema de la división de una línea, mostró que es imposible asociar los numeros complejos con un segmento. Incluso extendiendo la línea en ambas direcciones y dando cabida al problema de la división externa. Así, la distinción de cantidades reales y complejas no yace en la distinción del problema de la división de un línea en división interna y externa respectivamente. Esto a su vez, da cuenta de la imposibilidad de asociarlas con un segmento, cuando el segmento esta contenido en la línea recta que contiene al segmento a dividir. En este sentido, a diferencia de los negativos (en la que la distinción, de cantidades positivas y negativas, yace en la posición interna y externa respecto de un segmento), los complejos marcan otro tipo de imposibilidad, asociada con los cuadrados de área negativa. Así, nuevamente lo que da cabida a la asociación de los números negativos con un segmento, mediante el movimiento continuo de un punto sobre una línea recta. No se aplica para dar sentido a los cuadrados de área negativa, como se mostró en la sección 4 (Figura 7). De esta forma, los cuadrados de área negativa marcan otro tipo de imposibilidad que la asociada con los números negativos. Razón por la cual, los números complejos se asocián con la posición de un punto que yace fuera de la línea recta que contiene a los números positivos y negativos.

Por otro lado, la asociación de los números de la forma: $M + N\sqrt{-1}$ con las raíces de la ecuación: $x^2 \pm ax + b^2 = 0$. Determina la representación geométrica de las cantidades imaginarias de la forma: $M + N\sqrt{-1}$, ya que es la propiedad: $x_+ + x_- = +a$ que se traduce en la propiedad $AB + B\alpha = A\alpha$ (ver sección 6) la que determinó la representación de las raíces complejas. Misma que determinó la representación de la raíz de los cuadrados negativos. De esta forma, el paso de una cantidad positiva a una cantidad negativa se hace a través del movimiento (continuo) de un punto sobre una línea recta. En otras palabras, no basta con introducir las cantidades negativas en geometría, sino que la interpretación física de estas, por ejemplo, impide pasar de una cantidad positiva a una cantidad negativa que no sea por el movimiento continuo de un punto. Como lo muestra la Figura 12 en la que el paso de la cantidad positiva AB a la cantidad negativa AC, se hace a través del movimiento de un punto que recorre primero el segmento AB y luego da un salto al punto A y recorre el segmento AC, este movimiento interrumpe la continuidad del movimiento de un punto que recorrería primero el segmento AB, luego el BA y finalmente el segmento AC. Y de esta forma pasar de una cantidad positiva AB a una cantidad negativa AC por medio de un movimiento continuo.

Capítulo 2

Sobre la representación de los números complejos que surgen de resolver la ecuación $x^3 = Ax + B$

1. Introducción

En este capítulo se aborda la representación geométrica de los números complejos que surgen de la formula de Cardano para resolver las ecuaciones $x^3 + B = Ax$ y $x^3 = Ax + B$, donde $A > 0$, $B > 0$. Cuando sus tres raíces son reales. A su vez, el capítulo esta dividido en dos partes. La primera (que comprende las secciones 2 y 3) aborda la asociación del problema de la trisección de un ángulo con la resolución de las ecuaciones $x^3 + B = Ax$ y $x^3 = Ax + B$. La construcción geométrica de las raíces, por medio de la posibilidad de la intersección de dos secciones cónicas. Y la deducción de la fórmula (dada por Cardano) para resolverlas. Mostrando que la fórmula contiene expresiones imaginarias (números complejos), cuando la raíz de la ecuación $x^3 = Ax + B$, esta asociada con el problema de la trisección de un ángulo. Lo cual muestra que la raíz es real, ya que esta asociada con la cuerda del arco que es la tercera parte del ángulo a trisecar. Así, la fórmula expresa a la raíz (la mayor en valor absoluto de las tres raíces reales) como, la suma de dos números complejo conjugados, y no como, la suma de las otras dos raíces reales (ya que por ausencia del término cuadratico en la ecuación, la suma de las tres raíces es igual cero). La segunda (que comprende las secciones 4 y 5), aborda la representación geométrica de la extracción de la raíz cubica de un número complejo, que a su vez es otro complejo que expresa a la raíz de la ecuación $x^3 = Ax + B$ como, la suma de este y su conjugado. Y se da contestación a la pregunta ¿por qué se elige entre una y otra representación (la que surge de la resolución de la ecuación $x^2 + b^2 = ax$ y la que surge de la resolución de $x^3 = Ax + B$)?

2. Trisección de un ángulo

En la sección **??** del capítulo 1, se vió que las raíces de la ecuación

$$x^2 \pm ax + b^2 = 0$$

en el caso real cumplen:

$$\begin{aligned} AB + B\alpha &= a \\ (AB)(B\alpha) &= b^2 \end{aligned}$$

y en el caso complejo, no para el punto B que yace fuera de $A\alpha$, sino para su proyección β:

$$\begin{aligned} A\beta + \beta\alpha &= a \\ (A\beta)(\beta\alpha) &< b^2 \end{aligned}$$

De hecho veremos al final de este capítulo que incluso considerando $AB + B\alpha$ como suma vectorial, dada por la representación geométrica de AB, $B\alpha$ (ver Figura **??**, sección **??** del capítulo 1) cuando AB y $B\alpha$ representan números complejos se tiene que $AB + B\alpha \neq a$ razón por la cual Wallis logra rescatar esta propiedad respecto a la proyección β de B, pero no dice nada respecto al producto $(AB)(B\alpha)$. No es difícil ver que $(A\beta)(\beta\alpha) < b^2$ consecuencia de que el punto B no yace más sobre la recta $A\alpha$. Por lo tanto, esta dificultad para poder definir una operación de suma y producto de los números complejos asociado con esta representación geométrica que sea compatible con los números complejos: $M + N\sqrt{-1}$ como raíces de la ecuación: $x^2 \pm ax + b^2 = 0$, nos plantea la siguiente pregunta: ¿qué problema de naturaleza geométrica, hace compatible el cálculo de los números complejos: $M + N\sqrt{-1}$ con su representación geométrica?

De esta forma, se motiva el estudio del viejo problema de la trisección de un ángulo y su correspondiente asociación con la resolución de la ecuación $x^3 + q\varrho^2 = 3\varrho^2 x$, donde ϱ es el radio del círculo donde esta inscrito el ángulo a trisecar, q la cuerda que subtiende este ángulo y x la cuerda que subtiende la tercera parte del ángulo. Asociación que muestra que las condiciones bajo las cuales la trisección es posible, es decir, que la cuerda q sea menor o igual al diámetro del círculo donde esta inscrito. Son justo las condiciones bajo las cuales la raíz[1] de la correspondiente ecuación contiene expresiones imaginarias[2] Así, la extracción de la raíz cubica de un número complejo plantea la pregunta: ¿esta nueva cantidad imaginaria es de la misma forma: $M + N\sqrt{-1}$, que las raíces complejas que surgen de la resolución de las ecuaciones de segundo grado? La contestación a esta última pregunta permitirá saber que relación tienen los numeros complejos: $M + N\sqrt{-1}$, que surgen de la resolución de las ecuaciones: $x^3 \pm 3\varrho^2 x + q\varrho^2 = 0$. Con el problema de la trisección de un ángulo, al mismo tiempo que, permitirá dar una contestación parcial de la primera pregunta (respecto de la compatibilidad del

[1] Las condiciones, en la formula, que da Cardano para la raíz de esta ecuación.

[2] Extracción de la raíz cubica de números complejos.

cálculo de las cantidades: $M + N\sqrt{-1}$ con su representación geométrica).

2.1. Problema (Descartes 1637). *Dado un ángulo rectilíneo (ver Figura 1); se requiere trisecar el ángulo dado.*

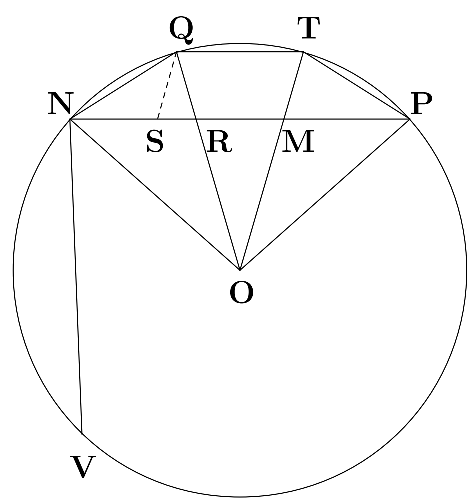

Figura 1. Trisección de un ángulo — Descartes

Zetetica:

1. Se requiere dividir el ángulo NOP o mas bien el arco circular $NQTP$, en tres partes iguales.
2. Sea $NO = \varrho$ el radio del círculo, $NP = q$ la cuerda que subtiende el arco dado y $NQ = x$ la cuerda que subtiende un tercio de este arco.
3. Trácese NQ, OQ, OT y QS paralela a TO.
4. El $\angle NOQ$ es medido por el arco NQ; el $\angle QNS$ es medido por $\frac{1}{2}$ arc QP o arc NQ; el $\angle SQR = \angle QOT$ que es medido por el arc QT o NQ; por tanto, el $\angle OQN = \angle NQR = \angle QSR$, el $\angle NOQ = QNR$ y el $\angle QRN = SRQ$. Luego $\triangle OQN \sim \triangle NQR \sim \triangle QSR$, por lo tanto, $NO : NQ = NQ : QR = QR : RS$.
5. Ya que $NO = \varrho$ y $NQ = x$, entonces $QR = \frac{x^2}{\varrho}$ y $RS = \frac{x^3}{\varrho^2}$.
6. Sea M el punto de intersección de OT y NP, así, $NP = 2NR + MR = 2NQ + MR = 2NQ + MS - RS = 2NQ + QT - RS = 3NQ - RS$ o

$q\varrho^2 = 3\varrho^2 x - x^3$ o $x^3 = 3\varrho^2 x - q\varrho^2$.[3]

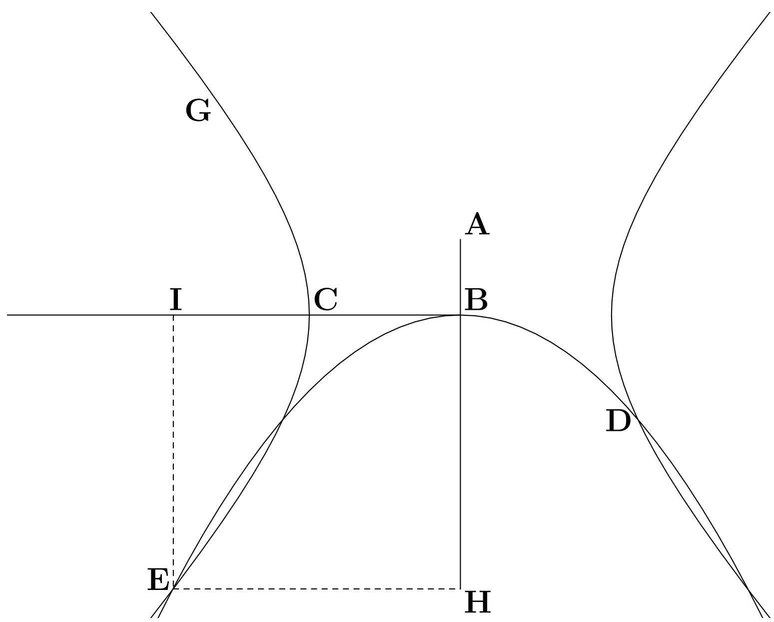

FIGURA 2. Construcción de la ecuación $x^3 + c = bx$ — Al-khayyām

Ahora, para determinar la incognita[4] x de la ecuación: $x^3 + q\varrho^2 = 3\varrho^2 x$, se determinara la incognita x de la ecuación: $x^3 + c = bx$, donde c, b denotan números reales positivos.

ECUACIÓN:

$$x^3 + c = bx$$

[3]Los antiguos no desarrollaron el álgebra. Para ser mas puntuales, la traducción de un problema en una ecuación y como consecuencia de ello trasladar la solución del problema a la de una ecuación, no es propio de la antigüedad. Aunque el libro II de Euclides, asociado con los origenes del álgebra geométrica, permita interpretar estas proposiciones mediante un lenguaje simbólico propio del álgebra, no existe en la antigüedad un antecedente de trasladar un problema en una ecuación (ver apéndice **??**). Por otro lado, Viète $(1540 - 1603)$ a esta traducción le nombro *Zetetica* (ver apéndice **??**).

[4]Determinar la incognita x de una ecuación, se tradujo en la geometría como la construcción de la ecuación. Así por ejemplo, son los métodos antiguos de construcción de áreas y volúmenes (ver apéndice **??**), los que le permite a Al-khāyyam $(1048 - 1131)$, a quien se le considera el primero en concebir la geometría algebraica, clasificar (de acuerdo a la existencia de raíces reales) las ecuaciones de segundo y tecer grado (incluyendo el término cuadratico). Por otro lado, Viète, a la construcción de una ecuación, le dio el nombre de *Exegetica* (Ver apéndice **??**).

Construcción:

1. Sea $AB = \sqrt{b}$, BC ortogonal a AB tal que
$$(AB^2)(BC) = c$$
2. Trácese la parábola DBE con vértice en B, eje AB y de lado recto AB, así la hipérbola ECG con vértice C (ver Figura 2), eje BC y diámetro transverso BC intersecta o no a la parábola DBE.
   Primer caso: (DBE) y (ECG) no se encuentran entonces, el problema es imposible.
   Segundo caso: Ellas se encuentran en un solo punto el cual es el punto de tangencia.
   Tercer caso: Ellas se encuentran en dos puntos, sea E un punto de intersección; sea I, H las proyecciones de E sobre BC y BA respectivamente.
3. Afirmamos que, $BI^3 + c = b(BI)$.

Demostración. En efecto, por propiedades conocidas de la hipérbola, se tiene
$$\frac{(EI^2)}{(BI)(IC)} = \frac{BC}{BC},$$
así pues
$$EI^2 = (BI)(IC),$$
de donde
$$\frac{BI}{IE} = \frac{IE}{IC};$$
por otro lado, por propiedades de la parábola
$$BI^2 = EH^2 = (BH)(BA)$$
de donde
$$\frac{AB}{BI} = \frac{BI}{BH} = \frac{BI}{IE} = \frac{IE}{IC},$$
así pues
$$\frac{AB^2}{BI^2} = \frac{BI}{IC},$$
luego
$$BI^3 = (AB^2)(IC)$$
así pues
$$\begin{aligned} BI^3 + c &= (AB^2)(IC) + (AB^2)(BC) \\ &= (AB^2)(IC + BC) \\ &= (AB^2)(BI) \\ &= b(BI) \end{aligned}$$

$\square$

3. El Ars Magna y las ecuaciones cúbicas

Esta lectura tiene la intención de recuperar las formulas que expone Cardano en el *Ars Magna* para la solución de las ecuaciones cúbicas sin termino cuadrático. Por lo cual las demostraciones que se expondrán no se corresponden con el texto de Cardano, se ha buscado otra forma de reencontrar dichas expresiones.

3.1. Sobre el Cubo y el Número Igual a la Primera Potencia.

3.1. PROPOSICIÓN. *La ecuación*

$$x^3 + B = Ax \tag{1}$$

tiene como solución

$$x = -\sqrt[3]{\frac{B}{2} + \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{\frac{B}{2} - \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{3}\right)^3}}$$

DEMOSTRACIÓN. En efecto, sea $x = -p - q$, entonces

$$(x + p)^3 = -q^3$$

luego

$$\begin{aligned} -q^3 &= x^3 + 3p^2x + 3px^2 + p^3 \\ &= x^3 + 3px(x + p) + p^3 \end{aligned}$$

entonces

$$-q^3 - p^3 = x^3 - 3pqx,$$

así pues

$$x^3 + (q^3 + p^3) = 3pqx, \tag{2}$$

igualando los coeficientes de (1) y (2)

$$3pq = A$$

$$q^3 + p^3 = B$$

por otro lado, haciendo $p' = p^3$ y $q' = q^3$, se tiene

$$q' + p' = B$$

$$p'q' = \left(\frac{A}{3}\right)^3$$

Lo cual se ha mostrado que se corresponde con la resolución de la ecuación:

$$x^2 + \left(\frac{A}{3}\right)^3 = Bx$$

Que tiene como soluciónes:

$$x_{\pm} = \frac{B}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{3}\right)^3}$$

por lo que,

$$p' = \frac{B}{2} + \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{3}\right)^3}$$

y

$$q' = \frac{B}{2} - \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{3}\right)^3},$$

por lo tanto,

$$p = \sqrt[3]{p'} = \sqrt[3]{\frac{B}{2} + \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{3}\right)^3}}$$

y

$$q = \sqrt[3]{q'} = \sqrt[3]{\frac{B}{2} - \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{3}\right)^3}}$$

dado que

$$x = -p - q$$

entonces

$$x = -\sqrt[3]{\frac{B}{2} + \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{\frac{B}{2} - \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{3}\right)^3}}$$

$\square$

3.2. Sobre el Cubo Igual a la Primera Potencia y el Número.

3.2. PROPOSICIÓN. *La ecuación*

$$x^3 = Ax + B \tag{3}$$

tiene como solución

$$x = \sqrt[3]{\frac{B}{2} + \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{B}{2} - \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{3}\right)^3}}$$

DEMOSTRACIÓN. En efecto, si $x_1,\ x_2,\ -x_3$ son solución de $x^3 + B = Ax$ y haciendo $x_3 = x_1 + x_2$, entonces

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2)^3 &= x_1^3 + 3x_1x_2^2 + 3x_1^2x_2 + x_2^3 \\ &= Ax_1 - B + 3x_1x_2(x_1 + x_2) + Ax_2 - B\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}x_3^3 &= A(x_1 + x_2) - 2B + 3x_1x_2(x_1 + x_2) \\ &= Ax_3 - 2B + 3x_1x_2x_3\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$x_3^3 = Ax_3 + B$$

ya que $(x_1)(x_2)(-x_3) = B$. Luego x_3 es solución de (3), por tanto, si $-x_3$ es solución de (1) entonces x_3 es solución de (3). Así,

$$x = \sqrt[3]{\frac{B}{2} + \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{B}{2} - \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{3}\right)^3}}$$

□

Nótese que, ambas ecuaciones ($x^3 = Ax + B$, $x^3 + B = Ax$) contienen expresiones imaginarias en la expresión algebraica de su raíz, si $\left(\frac{B}{2}\right)^2 < \left(\frac{A}{3}\right)^3$, en caso contrario, es decir, si $\left(\frac{B}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{A}{3}\right)^3$, la solución x es real. Ahora, el problema de la trisección de un ángulo se corresponde con la resolución de la ecuación:

$$x^3 + q\rho^2 = 3\rho^2 x \tag{4}$$

donde q es la cuerda que subtiende el ángulo θ, ρ el radio del círculo donde esta inscrito el ángulo θ y x es la cuerda que subtiende la tercera parte del ángulo θ. Así pues, se tiene

$$0 < \theta < 4R$$

y

$$0 < q < 2\rho$$

Por otro lado, la ecuación:

$$x^3 + B = Ax \tag{5}$$

tiene como solución

$$x = -\sqrt[3]{\frac{B}{2} + \sqrt{(\frac{B}{2})^2 - (\frac{A}{3})^3}} - \sqrt[3]{\frac{B}{2} - \sqrt{(\frac{B}{2})^2 - (\frac{A}{3})^3}}$$

la cual es real si

$$\left(\frac{B}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{A}{3}\right)^3 \tag{6}$$

Igualando los coeficientes de (4) y (5), se tiene

$$B = q\rho^2$$

$$A = 3\rho^2$$

sustituyendo en (6)

$$\frac{q\rho^2}{2} \geq (\frac{3\rho^2}{3})^3$$

luego

$$q\rho^2 \geq 2\rho^3,$$

así pues

$$q \geq 2\rho$$

y en el caso de la trisección de un ángulo, la construcción es posible si

$$0 < q < 2\rho$$

Se observa entonces que la condición para que la expresión algebraica de la raíz contenga expresiones complejas, es la condición para que esta misma sea real.

3.3. Pasaremos ahora a analizar el problema (geométrico) que yace detrás de la ecuación $x^3 = Ax + B$.[5]

ZETETICA:

1. Sea $4R < \theta < 6R$, así, $\frac{4}{3}R < \frac{\theta}{3} < 2R$.
2. Trácese con centro O y radio OP el círculo PQR (ver Figura 3); marcamos el arco PS, el cual define el ángulo $\theta - 4R$, que es dado ya que θ es dado. Sean Q, R puntos sobre la circunferencia, tal que, $\angle OPQ = \angle OQR = \angle ORS = \frac{\theta}{3}$.

[5]Descartes no asoció la trisección de un ángulo con la ecuación: $x^3 = Ax+B$, ya que las dos raíces reales de la ecuación: $x^3 + B = Ax$, están asociadas con la trisección de los ángulos (θ) determinados por los arcos PN, NP ($0 < \theta < 4R$, donde $R := \frac{\pi}{2}$). Por otro lado, las cantidades imaginarias (raíces no reales) que aparecen en la formula de Cardano, cuya suma es la raíz real positiva de $x^3 = Ax + B$ raíz negativa de $x^3 + B = Ax$, ya que las tres raíces son reales y la suma de las tres raíces es igual a cero por la ausencia de termino cuadratico. Así, asociar esta ecuación: $x^3 = Ax + B$, con el problema de la trisección de un ángulo ($4R < \theta < 6R$), permtirá dar otra representación geométrica de los números complejos, a la que se tenía con la resolución de ecuaciones de segundo grado dada por Wallis.

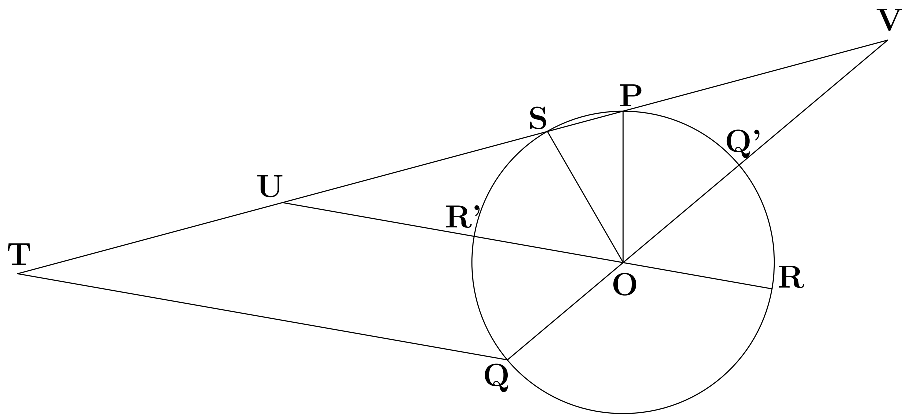

FIGURA 3. Trisección de un ángulo correspondiente a $x^3 = 3\rho^2 x + q\rho^2$

3. Trácese PS y prolóngese indefinidamente en ambas direcciones; trácese por Q una paralela a OR, y sea T el punto de intersección de esta con la prolongación de PS; prolóngese OR, y sea U el punto de intersección de esta con la prolongación de SP; prolóngese OQ y sea V el punto de intersección de esta con la prolongación de SP.
4. Afirmamos que $PQ^3 = 3(OP^2)(PQ) + (SP)$.

DEMOSTRACIÓN. Dado que

$$\angle POQ = \angle ROS$$

entonces

$$\angle POQ - \angle SOP = \angle ROS - \angle SOP,$$

es decir,

$$\angle SOQ = \angle POR;$$

pero

$$\angle R'OQ = \angle Q'OR,$$

por ser opuestos por el vértice, por lo tanto,

$$\angle SOR' = \angle Q'OP.$$

Y como el $\triangle PSO$ es isósceles, entonces $\angle PSO = \angle OPS$, así pues

$$\angle OSU = 2R - \angle PSO = 2R - \angle OPS = \angle VPO,$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}\angle OSU &= \angle VPO\\ \angle POV &= \angle SOU\end{aligned}$$

y ya que la suma de los ángulos interiores de un triángulo = 2R, entonces

$$\angle SUO = \angle OVP.$$

Por otro lado, dado que $UO \parallel TQ$, entonces

$$\angle SUO = \angle UTQ;$$

pero

$$\angle SUO = \angle QVT = \angle OVP,$$

por lo tanto, el $\triangle VTQ$ es isósceles. Así pues

$$\angle VOR = \angle VUR + \angle OVU = 2\angle OVU;$$

pero

$$\angle VOR = \angle Q'OR = 2\angle Q'QR = 2\angle OQR = 2\angle PQO,$$

ya que $\triangle PQO = \triangle OQR$ e isósceles, por lo tanto,

$$\angle OVU = \angle PQO = \angle PQV,$$

así pues, el $\triangle PQV$ es isósceles; y también se tiene que el $\triangle PQO$ es isósceles y con los mismos ángulos que los triángulos $\triangle PQV$ y $\triangle VTQ$. Entonces si $PQ = x$, $OP = \rho$ y $SP = q$, por la semejanza $\triangle PQO \cong \triangle PQV \cong \triangle VTQ$ se tiene

$$\rho : x :: x : \frac{x^2}{\rho} :: \frac{x^2}{\rho} : VT$$

luego

$$VT = \frac{x^3}{\rho^2},$$

por otro lado, se mostró

$$\angle OVU = \angle OQR = \angle QRO = \angle QRU$$

y

$$\angle VUO = \angle OVU$$

así pues

$$\angle VUO = \angle QRU$$

lo cual implica que $UT \parallel QR$; pero $RU \parallel TQ$, por lo tanto, $UTQO$ es un paralelogramo; entonces $QR = UT$, además $QR = PQ$ y como $\triangle PQV$ es isósceles, entonces $PQ = VP$; pero se mostró que los $\triangle VPO$ y $\triangle SUO$ tienen los mismos ángulos y dado que $SO = OP$, entonces estos dos triángulos son congruentes, luego $VP = SU$, por lo tanto,

$$VT = VP + PS + SU + UT = 3x + q,$$

además

$$VT = \frac{x^3}{\rho^2}$$

entonces

$$\frac{x^3}{\rho^2} = 3x + q,$$

por lo tanto,

$$x^3 = 3\rho^2 x + q\rho^2.$$

□

3.4. Construcción de la ecuación $x^3 = px + q$. Pasaremos ahora a la determinación de la incognita x de la ecuación: $x^3 = px + q$,[6] para ver si las condiciones bajo las cuales la formula de Cardano para la raíz real de esta se corresponden con las condiciones bajo las cuales, la construcción

de esta incognita vía la intersección de secciones cónicas, es posible.

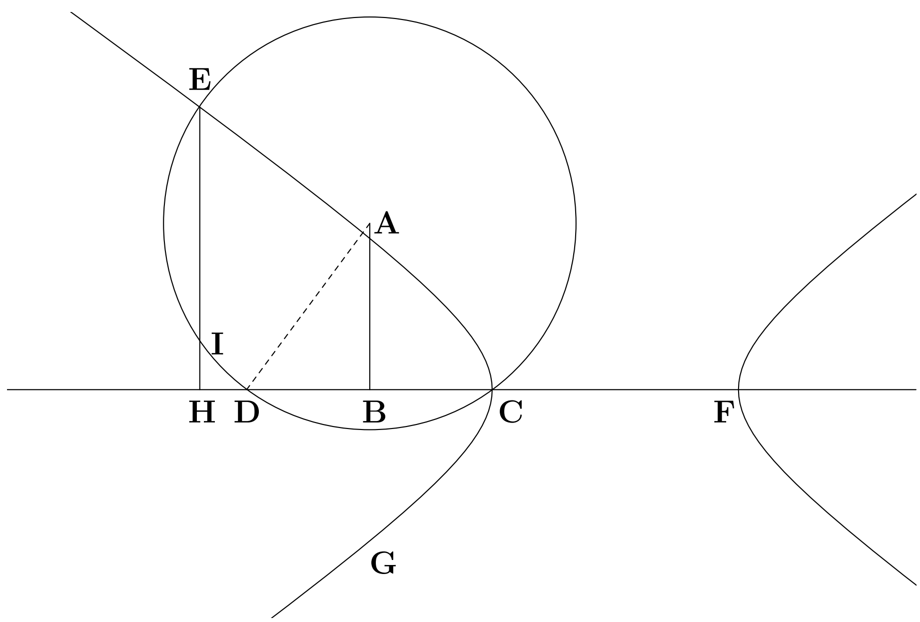

Figura 4. Construcción de la ecuación: $x^3 = px + q$

[6]La construcción del segmento de línea recta asociado con x que satisface la ecuación, Descartes la realiza por medio la intersección de una parábola con un círculo y Al-khayyām por la intersección de una hipérbola con una parábola. Aquí, se realizará por medio de la intersección de una hipérbola con un círculo.

Ecuación:

$$x^3 = px + q$$

Construcción:

1. Sea $AB = \sqrt{p}$, CD ortogonal a AB (ver Figura 4), tal que $(AB)^2(CD) = q$.
2. Con centro A y radio AD descríbase el círculo DCE.
3. Con vértice C, eje CF y lado transverso $CF = DC$ descríbase la hipérbola ECG.
4. Las dos curvas necesariamente se encuentran, sea E el otro punto de inetersección y H, su proyección sobre la prolongación de DC. I, la intersección de EH con el círculo DCE.
5. Afirmamos que $CH^3 = pCH + q$.

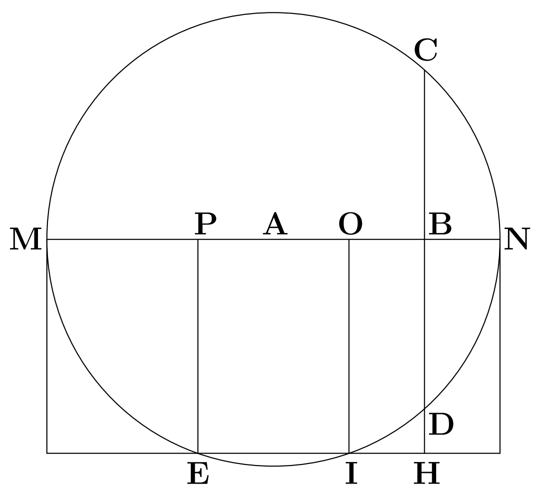

Figura 5

Demostración. Prolónguese AB en ambas direcciones; M, N las intersecciones con la circunferencia DCE. Sean P, O las proyecciones de E, I sobre MN. Dado que A es centro y $EI = PO$ cuerda, entonces

$$PA = AO$$

luego

$$\begin{aligned} MP &= MA - PA \\ &= AN - AO \\ &= ON \end{aligned}$$

y dado que

$$BO = HI,$$

entonces

$$\begin{aligned} HE + HI &= PA + AB + BO \\ &= AO + OB + AB \\ &= AB + AB = 2AB. \end{aligned}$$

Por otro lado, por propiedadades de la hipérbola, se tiene

$$(CH + CF)(CH) = EH^2; \tag{7}$$

y dado que $CD = CF$, entonces

$$\begin{aligned} EH^2 &= ((CH - DH) + CH)(CH)) \\ &= -(DH)(CH) + 2CH^2; \end{aligned}$$

y por propiedades del círculo, se tiene

$$(CH)(HD) = (EH)(IH)$$

sustituyendo

$$EH^2 = -(EH)(IH) + 2CH^2$$

luego

$$(EH)(EH + IH) = 2CH^2;$$

por lo tanto,

$$(EH)(2AB) = 2CH^2$$

o

$$CH^2 = (EH)(AB).[7] \tag{8}$$

[7]El caso cuando H yace en el interior de DC es análogo, salvo que para este caso:

$$HE - HI = 2AB$$

y

$$\begin{aligned} EH^2 &= ((CD + DH) + CH)(CH)) \\ &= (DH)(CH) + 2CH^2, \end{aligned}$$

luego

$$(EH)(EH - IH) = 2CH^2,$$

de (7) y (8) se tiene,

$$\frac{CH+CF}{CH}=\frac{EH}{CH}$$

y

$$\frac{EH}{CH}=\frac{CH}{AB},$$

luego

$$\frac{CH+CF}{CH}=\frac{EH}{CH}=\frac{CH}{AB},$$

entonces

$$\frac{CH^3}{AB^3}=\frac{CD+CH}{AB},$$

así pues

$$\begin{aligned} CH^3 &= (AB)^2(CD+CH) \\ &= (AB)^2(CD)+(AB)^2(CH); \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$CH^3=pCH+q.$$

□

Nótese que, la expresión algebraica de la raíz, que contiene expresiones imaginarias si $\left(\frac{q}{2}\right)^2>\left(\frac{p}{3}\right)^3$. Lo cual, no se corresponde con la construcción del segmento de línea recta asociado a la raíz de la ecuación, ya que esta [construcción] siempre es posible, no hay casos imposibles. También, para los mismos parámetros ρ, q, si $0<\theta<4R$, la ecuación asociada con el problema de la trisección de un ángulo es: $x^3+q\rho^2=3\rho^2x$, y si $4R<\theta<6R$, la ecuación asociada con el problema de la trisección de un ángulo es: $x^3=q\rho^2+3\rho^2x$.

Se puede ver también, al igual que en el la ecuación, $x^3+\rho^2q=3\rho^2x$, la condición para que la expresión algebraica de la raíz contenga expresiones imaginarias, es la condición para que ésta vista como solución de la trisección de un ángulo, sea real. Esto para el caso de la trisección de un ángulo correspondiente a la ecuación $x^3=3\rho^2x+\rho^2q$. Por tanto, para ambas ecuaciones ($x^3+\rho^2q=3\rho^2x$, $x^3=3\rho^2x+\rho^2q$), la expresión algebraica de la raíz (dada por Cardano) contiene expresiones imaginarias al mismo tiempo que las construcciones (de los segmentos de línea recta asociado a las raíces) de las ecuaciones, como problemas, muestran que las soluciones son reales.

---

por lo tanto,

$$(EH)(2AB)=2CH^2$$

así pues

$$CH^2=(EH)(AB).$$

4. Sobre las cantidades imaginarias que nacen de la trisección de un ángulo

4.1. Proposicición.

$$a + \sqrt{b}i = \sqrt[3]{\frac{B}{2} + \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{3}\right)^3}}$$

donde:

$$\begin{aligned} a &= \alpha/2 \\ \alpha^3 &= A\alpha + B \\ b &= A/3 - (\alpha/2)^2 \end{aligned}$$

Análisis:

1. Supongase que $a + \sqrt{b}i = \sqrt[3]{\frac{B}{2} + \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{3}\right)^3}}$.
2. luego $(a + \sqrt{b}i)^3 = \frac{B}{2} + \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{3}\right)^3}$.
3. Desarrollando el binomio al cubo,
$$a^3 + 3a^2\sqrt{b}i - 3ab - \sqrt{b^3}$$
igualando
$$\begin{aligned} a^3 - 3ab &= \frac{B}{2} \\ 3a^2\sqrt{b} - \sqrt{b^3} &= \sqrt{\left(\frac{A}{3}\right)^3 - \left(\frac{B}{2}\right)^2}. \end{aligned}$$
4. Pero
$$3a^2\sqrt{b} - \sqrt{b^3} = \sqrt{b}(3a^2 - b)$$
luego
$$b(3a^2 - b)^2 = \left(\frac{A}{3}\right)^3 - \left(\frac{B}{2}\right)^2. \tag{9}$$
5. Por otro lado,
$$(a^3 - 3ab)^2 = \left(\frac{B}{2}\right)^2 \tag{10}$$
6. sumando (9) y (10) se tiene
$$b(3a^2 - b)^2 + (a^3 - 3ab)^2 = \left(\frac{A}{3}\right)^3$$

por otro lado,

$$\begin{aligned} b(3a^2-b)^2+(a^3-3ab)^2 &= b(9a^4-6a^2b+b^2)+(a^6-6a^4b+9a^2b^2)\\ &= 9a^4b-6a^2b^2+b^3+(a^6-6a^4b+9a^2b^2)\\ &= a^6+3a^2b^2+3a^4b+b^3, \end{aligned}$$

haciendo $a^2=u$, se tiene

$$u^3+3ub^2+3u^2b+b^3=\left(\frac{A}{3}\right)^3,$$

así pues

$$(u+b)^3=\left(\frac{A}{3}\right)^3,$$

por lo tanto,

$$a^2+b=\frac{A}{3}. \tag{11}$$

7. De (9) y (11), se tiene

$$a(a^2-3b)=\frac{B}{2}$$

y

$$b=\frac{A}{3}-a^2$$

luego

$$\begin{aligned} a(a^2-3b) &= a(a^2-3(\frac{A}{3}-a^2))\\ &= a^3-aA+3a^3 \end{aligned}$$

así pues

$$\begin{aligned} \frac{B}{2} &= a^3-aA+3a^3\\ &= 4a^3-aA, \end{aligned}$$

por tanto,

$$a^3=\frac{B}{8}+\frac{A}{4}a.$$

y haciendo $a=\frac{\alpha}{2}$, se tiene

$$\alpha^3=A\alpha+B.^8$$

[8]La deducción del planteamiento de esta proposición, se realizó por medio del método del análisis (ver apéndice **??**), los pasos esbozados son los que permiten saber el por qué de las

4.1. Sobre la representación de la expresión $\sqrt[3]{\frac{B}{2} + \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{3}\right)^3}}$.

Igualando los coeficientes de:

$$x^3 + B = Ax$$

y

$$x^3 + \rho^2 q = 3\rho^2 x,$$

se tiene

$$B = \rho^2 q$$

$$A = 3\rho^2,$$

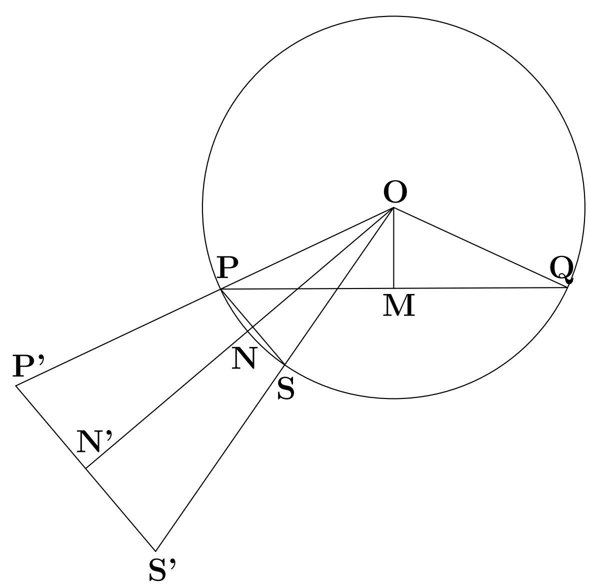

FIGURA 6

condiciones que satisfacen: α, b y a. Así, la síntesis proceso inverso del análisis (ver apéndice **??**) sería la demostración de esta proposición.

por otro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{2}+\sqrt{\frac{A}{3}-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}\,i &= \sqrt[3]{\frac{B}{2}+\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2-\left(\frac{A}{3}\right)^3}}\\
\frac{\alpha}{2}-\sqrt{\frac{A}{3}-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}\,i &= \sqrt[3]{\frac{B}{2}-\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2-\left(\frac{A}{3}\right)^3}}
\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
MP &= \frac{\alpha}{2}; \quad OP=\rho; \quad OP'=\rho^3; \quad PS=q\\
MO &= \sqrt{\rho^2-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} \quad = \quad \sqrt{\frac{A}{3}-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}\\
P'S' &= \rho^2 q \quad = \quad B\\
ON' &= \sqrt{OP'^2-P'N'^2} \quad = \quad \sqrt{(\rho^3)^2-\left(\rho^2\frac{q}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{A}{3}\right)^3-\left(\frac{B}{2}\right)^2}
\end{aligned}$$

Nótese que las cantidades complejas que aparecen dentro de la $\sqrt[3]{}$, el doble de su parte real y la parte imaginaria, son base y altura del $\triangle OP'S'$ respectivamente (ver Figura 6), y las cantidades imaginarias que surgen de la extracción de la raíz cúbica, el doble de su parte real y la parte imaginaria son base y altura del $\triangle OPM$ respectivamente. Ahora, si $\angle POQ=\theta$, $\angle POS=\theta'$ y $\angle OPQ=\varphi$ entonces $\theta'=3\theta-4R$ (ver sección 3.3 y Figura 3). Pero $\varphi=R-\frac{\theta}{2}$, luego $\angle OPS=R-\frac{\theta'}{2}$, así pues, $\angle OPS=R-\frac{3\theta-4R}{2}=\frac{2R-3\theta+4R}{2}=3R-\frac{3}{2}\theta=3\varphi$

Por otro lado, el problema de la trisección del ángulo 3θ mayor que la circunferencia de un círculo ($3\theta>4R$), asociado con la resolución de la ecuación $x^3=3\rho^2x+q\rho^2$, con el que estan asociadas la expresiones imaginarias de la formula de cardano para la solución de la ecuación $x^3=Ax+B$. También, notamos en la observación anterior, estan asociadas indirectamente con la trisección del ángulo $\angle OPS$, más aun, están asociadas indirectamente con la trisección del ángulo $\angle POS$ asociado con la resolución de la ecuación $x^3+q\rho^2=3\rho^2x$.

Será la generalización del problema de la trisección de un ángulo al problema de la división de un ángulo en n-partes iguales, la que mostrará qué relación hay entre la ecuación $x^3=3\rho^2x+q$ y la ecuación que surge de la generalización en el caso particular en que $n=3$. Problema en cuya generalización yace la formula de D'Moivre:

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

Tema de la segunda parte de este trabajo, donde se dara una demostración geométrica de esta identidad.

5. Sobre la suma de los números complejos como vectores

En la construcción de las cantidades complejas dada por Wallis (ver sección **??**), para el caso real

$$AB + B\alpha = A\alpha$$

y para el caso complejo

$$A\beta + \beta\alpha = A\alpha.$$

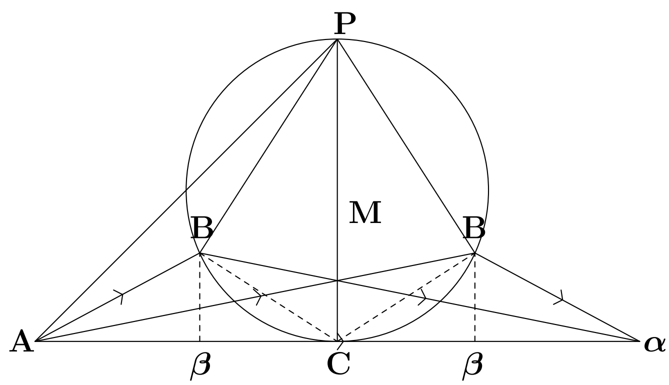

Figura 7. Suma vectorial

Así (ver Figura 7):

$$\begin{aligned} AB + AB &= \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2}\right) + \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2}\right) \\ &= a \\ &= A\alpha, \end{aligned}$$

cuando $b^2 > \left(\frac{a}{2}\right)^2$ la suma es reducida a la suma de segmentos de línea recta, con la proyección β de B:

$$AB + AB := A\beta + \beta\alpha,$$

ya que esta representación determinada por la resolución de la ecuación, $x^2+b^2 = ax$, a su vez determina la suma de cantidades complejo conjugadas, así la suma vectorial:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\alpha} = \overrightarrow{A\alpha}$$

en la que $B\alpha$ estaría asociada con:

$$-\overline{\alpha C} + i\overline{CB}$$

si B esta a la izquierda de del punto C respecto a la línea PC, con

$$-\overline{\alpha C} - i\overline{CB}$$

si B esta a la derecha de del punto C respecto a la línea PC, luego

$$AB + B\alpha = (\overline{AC} + i\overline{CB}) + \big(-\overline{\alpha C} + i\overline{CB}\big) = 2i\overline{CB} \neq a = A\alpha$$
$$AB + B\alpha = (\overline{AC} - i\overline{CB}) + \big(-\overline{\alpha C} - i\overline{CB}\big) = -2i\overline{CB} \neq a = A\alpha$$

Por lo tanto, esta representación de las cantidades complejas impide la suma vectorial como la conocemos ahora. Pero esta definición, consecuencia de reducir la suma vectorial a la suma de segmentos de línea recta, muestra como al igual que en el caso de las demás cantidades reales (como son: ángulos, áreas y volúmenes) las cuales [sus operaciones] se redujeron al conocimiento de las [operaciones de las] líneas rectas,[9] siguen siendo los segmentos de línea recta (como magnitudes y no como magnitudes con posición) los que detreminan la forma de operar de los números complejos que hoy se representan como vectores en el plano (segmentos con magnitud y dirección).

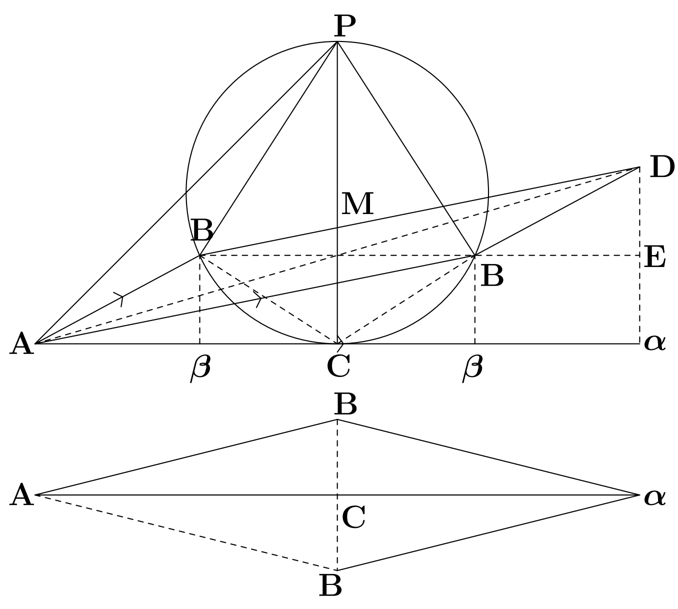

FIGURA 8. Ley del paralelogramo

[9]Ver apéndice ??.

5.1. Sobre la Ley del Paralelogramo. Retomemos la construcción que hizo Wallis, recordemos que AC es la parte real y CB la parte imaginaria de $AB = AC + CB$ (ver Figura 8), además se tenía que $A\beta + \beta\alpha = A\alpha = 2AC$, $AB + AB = 2AC$.

Si por B, B, se trazan la paralelas BD, BD a AB, AB y por D se traza la paralela DE a $B\beta$. Se puede ver que $\triangle A\beta B \cong \triangle BDE$ (B a la derecha de M), por lo que $BE = A\beta$ (β a la izquierda de C) y se habría mostrado que $A\beta = \beta\alpha$, por lo tanto, $\beta\alpha EB$ es un paralelogramo, así pues, la proyección de AD sobre $A\alpha$ es igual $A\alpha$, es decir, la suma de estos dos complejos ($A\alpha = 2AC$) es la proyección de la diagonal del paralelogramo que determinan estos dos complejos (AB, AB).[10]

Ahora, si se toma la representación que se hizo de estas cantidades con respecto a la trisección de un ángulo, la diferencia ahora es que CB es ortogonal a AC, luego se tiene que la proyección de AD sobre $A\alpha$ y $A\alpha$ coinciden, es decir, la suma de las dos cantidades complejas es la diagonal del paralelogramo que determinan estos dos complejos. En ambas representaciones, de las cantidades complejas, la suma de cantidades complejo conjugadas es la proyección, sobre una recta de referencia donde se representan las cantidades reales: positivas y negativas, de la diagonal del paralelogramo que determinan ambos segmentos (AB, AB).

6. Conclusión

Resolver una ecuación (para la geometría) no es denotar las raíces con una formula, como lo hacemos hoy en un curso de álgebra, dando formulas para las soluciones de una ecuación, llamese ecuaciones de segundo grado, tercer grado y cuarto grado. Se requiere su construcción o segmento de línea recta con el que están asociados estas expresiones algebraicas de las raíces. En este sentido, las cantidades imaginarias como llamaron a las cantidades (no reales) que surgen de la resolución de ecuaciones de grado n, donde n es un número natural, contenidas en la formula: $M + N\sqrt{-1}$ [11] no tienen asociada la magnitud de un segmento de línea recta (como el caso de las raíces reales), sino la posición de un segmento de línea recta, como se mostró en el caso particular de las ecuaciones

[10] La operación: $AB + AB := A\beta + \beta\alpha = A\alpha$, esta bien definida, ya que $PB^2 - PC^2 = -(PC - PB)(PC + PB)$, y haciendo $PB = \frac{a}{2}$, $PC = b$ ($b > \frac{a}{2}$), se tiene $c^2 = \left(b - \frac{a}{2}\right)\left(b + \frac{a}{2}\right)$. Ahora, si consideramos la hipérbola: $xy = c^2$, se puede tomar como $x = PC + PB$, $y = PC - PB$. Así, hay una infinidad de valores para x, y que cumplen: $c^2 = xy$, todos lo puntos de la hipérbola que están por debajo de la identidad. Así, la proyección (β) de todos los $B's$ cumplen: $A\beta + \beta\alpha = A\alpha$, ya que β yace entre A y α, para cualquiera de las $B's$. Por tanto, la operación esta bien definida.

[11] No hay mas imaginarios que los números complejos.

de segundo y tercer grado. De esta forma se diferencian las reales de la complejas:

Ecuaciones de segundo grado:

Las cantidades de la forma $\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$ se asociaron con la magnitud del segmento AB, $B\alpha$ para el caso real y con la posición del segmento AB, AB para el caso imaginario, ahora en el caso real se debe a si $\angle BCA = 2R$ y si $\angle BCA < 2R$ para el caso complejo, lo cual muestra que para el caso real basta con la magnitud AB para determinar la posición de B y para el caso complejo es la magnitud AC y el $\angle BCA$ para determinar la posición del punto B. Por lo tanto, los números complejos se asocian con determinar las posición de un punto [B] respecto de una línea dada [$A\alpha$].

Ecuaciones de tercer grado:

Es el problema de la trisección de un ángulo, el que asocia la expresión algebraica (que da Cardano) para las raíces de un ecuación cubica (de donde surgen números complejos) con el siguiente problema: Si nos es dado un ángulo [$\angle POQ$] en magnitud y posición, tomamos un punto P arbitrario sobre la línea recta OP que determina el ángulo dado. Entonces OP y $\angle POQ$ determinan un triángulo isósceles $\triangle POQ$. Trisecar el ángulo $\angle POQ$, es trisecar el arco de circunferencia $\widehat{PQ}$ que, a su vez, se reduce a conocer la cuerda [PQ] del arco $\widehat{NQ}$. Conocer PS es conocer la base del triángulo isósceles $\triangle POS$. Por lo tanto, determinar el $\triangle POS$ es determinar sus lados y su ángulos, pero $OP = OS$ y los ángulos $\angle SPO = \angle OSP$ son dados. Entonces determinar su lados y ángulos se reduce a determinar PS o determinar $\angle POS$. Ahora, las cantidades complejas que aparecen dentro de la $\sqrt[3]{\quad}$, el doble de la parte real y la parte imaginaria son base y altura del triángulo $\triangle OP'S'$ respectivamente y las cantidades que surgen de la extracción de la raíz cúbica, el doble de su parte real y su parte imaginaria son base y altura del $\triangle OPQ$ respectivamente. Respecto a la operación producto o extracción de raíz cubica de números complejos, los números complejos se asocian con el conocimiento de la base y altura de un triangulo isósceles, es decir, con determinar la posición de la línea recta PS. Pero es esta última construcción, la que se asocia con el problema: dado un ángulo, trisecar el ángulo dado. La que hace compatible el cálculo de los números complejos, que surgen de la resolución de las ecuaciones de tercer grado: $x^3 \pm q\rho^2 - 3\rho^2 x = 0$,[12] con su representación geométrica.

[12]No se refiere a las raíces complejas de estas ecuaciones, ya que estas tienen tres raíces reales, se refiere a las numeros complejos que expresan a la raíz real (positiva o negativa) de las ecuaciónes: $x^3 = q\rho^2 + 3\rho^2 x$, $x^3 + q\rho^2 = 3\rho^2 x$ respectivamente.

Capítulo 3

Sobre la representación de los números complejos

1. Introducción

En este capítulo se aborda el problema de la generalización de la trisección de un ángulo al problema de la división de un ángulo en n-partes iguales, donde n es un número natural. El cual permite asociar la parte real e imaginaria de un número complejo con la base y altura de un triángulo rectángulo respectivamente. Y cuya asociación es compatible con el cálculo de los números complejos. Que a su vez, tiene su origen en la resolución de ecuaciones.

2. Sobre las cantidades que nacen del círculo

La generalización del problema de la trisección de un ángulo al problema de división de un ángulo en n-partes iguales permite ver como el cálculo de las cantidades de la forma $x + y\sqrt{-1}$ es compatible con el problema geométrico de determinar la relación de la base $[x_n]$ y altura $[y_n]$ de un triángulo dado con la base $[x]$ y altura $[y]$ del triángulo cuyo ángulo es la n-esima parte del ángulo de la base del triángulo dado, que se resume en la identidad:

$$(x + yi)^n = x_n + y_n i$$

Sin mas preámbulos, pasemos a la generalización del problema de la trisección de un ángulo. Para ello, se observa que, si $\angle TOP = \frac{\angle QOP}{n}$ (ver Figura 1), y dado que $\angle MOP = \frac{\angle QOP}{2}$, $\angle NOP = \frac{\angle TOP}{2}$. Entonces $\angle NOP = \frac{\angle MOP}{n}$. Ya que OM y ON son perpendiculares a las bases PQ y PT de los $\triangle OPQ$ y $\triangle OPT$ respectivamente. Entonces los $\triangle OPM$ y $\triangle OPN$ son rectángulos con ángulo recto en M y N respectivamente y con la misma hipotenusa OP. Por lo que si trazamos un círculo de diámetro OP, entonces M y N yacen sobre el círculo. Por lo tanto, el problema de la división de un ángulo en n-partes iguales se ha trasladado al siguiente problema con la salvedad:

- Primer caso)
  Dado un triángulo isósceles, cuyo ángulo opuesto a la base es θ, y cuyos lados [iguales] son iguales al radio del círculo en donde se inscribe el ángulo θ; el problema es determinar la base del triángulo isósceles cuyo ángulo opuesto es la n-esima parte del ángulo θ y cuyos lados [iguales] son iguales al radio del círculo donde se inscribe el ángulo θ.

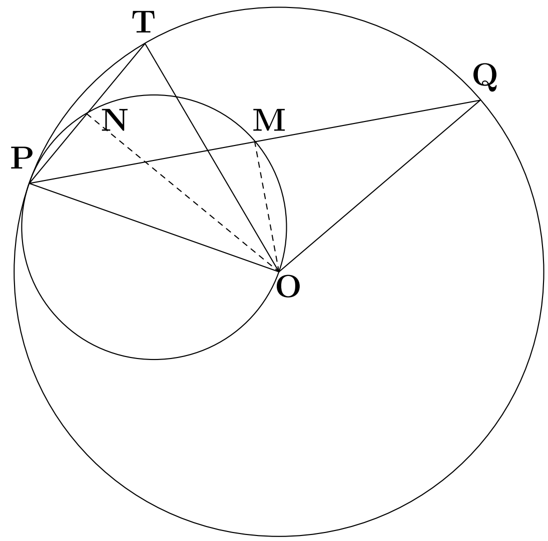

FIGURA 1. Generalización de la trisección de un ángulo

- Segundo caso)
  Dado un triángulo rectángulo cuyo ángulo opuesto a la altura del triángulo es θ, el problema es determinar la base y altura de un triángulo rectángulo cuyo ángulo opuesto a la altura es la n-esima parte del ángulo θ y cuya hipotenusa es igual a la hipotenusa del triángulo dado.

Ahora, para mostrar la identidad de D'Moivre, haremos uso del siguiente lema.

2.1. LEMA. *Si ABC_n denota un semicírculo cuyo diámetro es AB (ver Figura 2), $\triangle ABC_n$ el triángulo rectángulo cuyo $\angle C_nAB = \theta$ y $\triangle C_1AB$ el triángulo rectángulo cuyo $\angle C_1AB = \frac{\theta}{n}$. Y denotando por $AB = z$, $AC_i = x_i$ y $BC_i = y_i$ con $i \in \{1, ..., n\}$. Afirmamos que x_n cumple la siguiente relación:*
Si n es par:

$$\begin{aligned}
\frac{x_n}{z} &= x^n - C_{(n,2)}x^{n-2}y^2 + C_{(n,4)}x^{n-4}y^4 - ...(-1)^{\frac{n}{2}}x^0y^n \\
\frac{y_n}{z} &= C_{(n,1)}x^{n-1}y - C_{(n,3)}x^{n-3}y^3 - ...(-1)^{\frac{n}{2}}xy^{n-1}
\end{aligned}$$

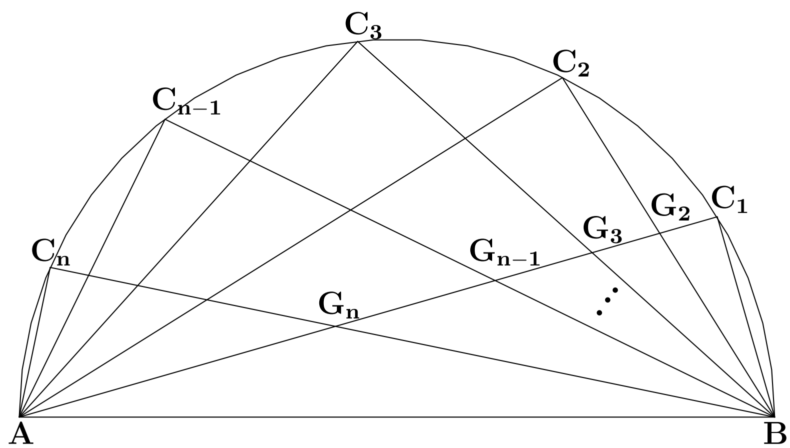

FIGURA 2

Si n es impar:

$$\begin{aligned}\frac{x_n}{z} &= x^n - C_{(n,2)}x^{n-2}y^2 + C_{(n,4)}x^{n-4}y^4 - ...(-1)^{\frac{n-1}{2}}xy^{n-1}\\ \frac{y_n}{z} &= C_{(n,1)}x^{n-1}y - C_{(n,3)}x^{n-3}y^3 - ...(-1)^{\frac{n-1}{2}}y^n\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}C_{(n,k)} &:= C_{(n-1,k)} + C_{(n-1,k-1)} \quad \forall k \in \{1, ..., n-1\}\\ C_{(n,1)} &:= C_{(n,n)} := 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}\\ \frac{x_1}{z} &:= \frac{x}{z}\\ \frac{y_1}{z} &:= \frac{y}{z}\end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. En efecto, dado que $\triangle AG_nC_n \simeq \triangle ABC_{n-1}$, entonces

$$\frac{AG_n}{AC_n} = \frac{AB}{AC_{n-1}} \tag{1}$$

y $\triangle BC_1G_n \simeq \triangle ABC_{n-1}$, entonces

$$\frac{C_1G_n}{BC_1} = \frac{BC_{n-1}}{AC_{n-1}}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} AG_n &= AC_1 - G_nC_1 \\ &= x_1 - \frac{y_1 y_{n-1}}{x_{n-1}} \\ &= \frac{x_1x_{n-1} - y_1y_{n-1}}{x_{n-1}} \end{aligned}$$

sustituyendo en (1)

$$\frac{\frac{x_1x_{n-1}-y_1y_{n-1}}{x_{n-1}}}{x_n} = \frac{z}{x_{n-1}}$$

luego

$$x_nz = x_1x_{n-1} - y_1y_{n-1}$$

análogamente se puede mostrar que si sustituimos:

$$\begin{aligned} n &\mapsto n-1 \\ n-1 &\mapsto n-2 \end{aligned}$$

se tiene

$$x_{n-1}z = x_1x_{n-2} - y_1y_{n-2},$$

por lo tanto, se tienen la siguientes relaciónes:

$$\begin{aligned} x_nz &= x_1x_{n-1} - y_1y_{n-1} \\ x_{n-1}z &= x_1x_{n-2} - y_1y_{n-2} \\ &. \\ &. \\ &. \\ x_2z &= x_1x_1 - y_1y_1 \end{aligned}$$

Dado que $\triangle ABC_{n-1} \simeq \triangle BC_1G_n$, entonces

$$\frac{AB}{BC_{n-1}} = \frac{BG_n}{C_1G_n} \tag{2}$$

y $\triangle AG_nC_n \simeq \triangle ABC_{n-1}$, entonces

$$\frac{G_nC_n}{AC_n} = \frac{BC_{n-1}}{AC_{n-1}}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} BG_n &= BC_n - G_nC_n \\ &= y_n - \frac{x_n y_{n-1}}{x_{n-1}} \\ &= \frac{y_n x_{n-1} - x_n y_{n-1}}{x_{n-1}} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} C_1G_n &= AC_1 - AG_n \\ &= x_1 - (x_1 - \frac{y_1 y_{n-1}}{x_{n-1}}) \\ &= \frac{y_1 y_{n-1}}{x_{n-1}} \end{aligned}$$

sustituyendo en (2)

$$\frac{z}{y_{n-1}} = \frac{\frac{y_n x_{n-1} - x_n y_{n-1}}{x_{n-1}}}{\frac{y_1 y_{n-1}}{x_{n-1}}}$$

luego

$$y_1 z = y_n x_{n-1} - x_n y_{n-1}$$

análogamente se puede mostrar que si sustituimos

$$\begin{aligned} n &\mapsto n-1 \\ n-1 &\mapsto n-2 \end{aligned}$$

se tiene

$$y_1 z = y_{n-1} x_{n-2} - x_{n-1} y_{n-2},$$

por lo tanto, se tienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} y_1 z &= y_n x_{n-1} - x_n y_{n-1} \\ y_1 z &= y_{n-1} x_{n-2} - x_{n-1} y_{n-2} \\ &\;. \\ &\;. \\ &\;. \\ y_1 z &= y_2 x_1 - x_2 y_1 \end{aligned}$$

Entonces

$$y_2 = \frac{y_1 z + x_2 y_1}{x_1}$$

así pues

$$y_2 z = y_1 \frac{zz + x_2 z}{x_1}$$

sustituyendo, $x_2 z = x_1^2 - y_1^2$, se tiene

$$\begin{aligned} y_2 z &= y_1 \frac{zz + (x_1^2 - y_1^2)}{x_1} \\ &= \frac{y_1}{x_1}((z^2 - y_1^2) + x_1^2) \\ &= \frac{y_1}{x_1}(2x_1^2) = 2x_1 y_1 \end{aligned}$$

Ahora bien, dado que $\triangle AG_{i+1}C_{i+1} \simeq \triangle ABC_i$, entonces

$$\frac{AC_{i+1}}{AG_{i+1}} = \frac{AC_i}{AB} \tag{3}$$

y $\triangle G_{i+1}BC_1 \simeq \triangle ABC_i$, entonces

$$\frac{G_{i+1}C_1}{BC_1} = \frac{BC_i}{AC_i},$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} AG_{i+1} &= AC_1 - G_{i+1}C_1 \\ &= AC_1 - \frac{BC_1 BC_i}{AC_i} \\ &= \frac{x_1 x_i - y_1 y_i}{x_i} \end{aligned}$$

sustituyendo en (3)

$$\frac{AC_{i+1}}{\frac{x_1 x_i - y_1 y_i}{x_i}} = \frac{AC_i}{AB}$$

luego

$$\frac{AC_{i+1} x_i}{x_1 x_i - y_1 y_i} = \frac{AC_i}{AB}$$

entonces

$$\frac{AC_{i+1}}{AB} = \frac{x_1 x_i - y_1 y_i}{AB^2}$$

por lo tanto,

$$\frac{x_{i+1}}{z} = \frac{x_1 x_i - y_1 y_i}{z^2} \quad i \epsilon \{2, ..., n-1\}$$

Ahora, dado que $\triangle AG_{i+1}C_{i+1} \simeq \triangle ABC_i$, entonces

$$\frac{G_{i+1}C_{i+1}}{AG_{i+1}} = \frac{BC_i}{AB}$$

y $\triangle BC_1G_{i+1} \simeq \triangle ABC_i$, entonces

$$\frac{BG_{i+1}}{BC_1} = \frac{AB}{AC_i}$$

luego

$$BG_{i+1} = \frac{AB.BC_1}{AC_i}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} G_{i+1}C_{i+1} &= BC_{i+1} - BG_{i+1} \\ AG_{i+1} &= \frac{AC_iAC_i - BC_1BC_i}{AC_i} \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} G_{i+1}C_{i+1} &= BC_{i+1} - \frac{AB.BC_1}{AC_i} \\ &= \frac{AC_iBC_{i+1} - AB.BC_1}{AC_i} \end{aligned}$$

sustituyendo en (3)

$$\frac{\frac{AC_iBC_{i+1}-AB.BC_1}{AC_i}}{\frac{AC_1AC_i-BC_1BC_i}{AC_i}} = \frac{BC_i}{AB}$$

entonces

$$AC_i.BC_{i+1} - AB.BC_1 = \frac{AC_1.AC_i.BC_i - BC_1.BC_i^2}{AB}$$

así pues

$$\begin{aligned} BC_{i+1} &= \frac{AC_1.AC_i.BC_i - BC_1.BC_i^2 + AB^2.BC_1}{AB.AC_i} \\ &= \frac{AC_1.AC_i.BC_i + BC_1(AB^2 - BC_i^2)}{AB.AC_i} \\ &= \frac{AC_1.AC_i.BC_i + BC_1.AC_i^2}{AB.AC_i} \\ &= \frac{AC_1BC_i + BC_1AC_i}{AB} \end{aligned}$$

luego

$$\frac{BC_{i+1}}{AB} = \frac{AC_1BC_i + BC_1AC_i}{AB^2},$$

por lo tanto,

$$\frac{y_{i+1}}{z} = \frac{x_1y_i + y_1x_i}{z^2} \quad \forall i \in \{2, ..., n-1\}$$

De lo anterior se tiene la siguiente tabla:

$$
\begin{aligned}
\frac{x_2}{z} &= \frac{x_1^2 - y_1^2}{z^2} & \frac{y_2}{z} &= \frac{2x_1y_1}{z^2} \\
\frac{x_3}{z} &= \frac{x_1x_2 - y_1y_2}{z^2} & \frac{y_3}{z} &= \frac{x_1y_2 + y_1x_2}{z^2} \\
\frac{x_4}{z} &= \frac{x_1x_3 - y_1y_3}{z^2} & \frac{y_4}{z} &= \frac{x_1y_3 + y_1x_3}{z^2} \\
&\vdots & &\vdots \\
\frac{x_{n-1}}{z} &= \frac{x_1x_{n-2} - y_1y_{n-2}}{z^2} & \frac{y_{n-1}}{z} &= \frac{x_1y_{n-2} + y_1x_{n-2}}{z^2} \\
\frac{x_n}{z} &= \frac{x_1x_{n-1} - y_1y_{n-1}}{z^2} & \frac{y_n}{z} &= \frac{x_1y_{n-1} + y_1x_{n-1}}{z^2}
\end{aligned}
$$

sustituyendo los valores del primer renglón en el segundo, los del segundo en el tercero y así sucesivamente obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{x_1}{z} &= \frac{x}{z} & \frac{y_1}{z} &= \frac{y}{z} \\
\frac{x_2}{z} &= \frac{x_1^2 - y_1^2}{z^2} & \frac{y_2}{z} &= \frac{2x_1y_1}{z^2} \\
\frac{x_3}{z} &= \frac{x_1^3 - 3x_1y_1^2}{z^3} & \frac{y_3}{z} &= \frac{3x_1^2y_1 - y_1^3}{z^3} \\
\frac{x_4}{z} &= \frac{x_1^4 - 6x_1^2y_1 + y_1^4}{z^4} & \frac{y_4}{z} &= \frac{4x_1^3y_1 - 6x_1y_1^3}{z^4} \\
\frac{x_5}{z} &= \frac{x_1^5 - 10x_1^3y_1^2 + 5x_1y_1^4}{z^5} & \frac{y_5}{z} &= \frac{5x_1^4y_1 - 10x_1^2y_1^3 + y_1^5}{z^5} \\
&\vdots & &\vdots \\
\frac{x_n}{z} &= \frac{x^n - C_{(n,2)}x^{n-2}y^2 + ...(-1)^{\frac{n}{2}}x^0y^n}{z^n} & \frac{y_n}{z} &= \frac{C_{(n,1)}x^{n-1}y - ...(-1)^{\frac{n}{2}}xy^{n-1}}{z^n} \\
\frac{x_n}{z} &= \frac{x^n - C_{(n,2)}x^{n-2}y^2 + ...(-1)^{\frac{n-1}{2}}xy^{n-1}}{z^n} & \frac{y_n}{z} &= \frac{C_{(n,1)}x^{n-1}y - ...(-1)^{\frac{n-1}{2}}y^n}{z^n}
\end{aligned}
$$

El penúltimo renglón es para el caso de n par y el último renglón es para el caso de n impar.

$\square$

Ahora bien, si retomamos el problema inicial a saber, determinar la base y altura del triángulo rectángulo cuyo ángulo opuesto a la altura es la n-esima parte del ángulo dado, y si x, y designan la base y altura del triángulo a determinar, entonces si n es par:

$$\begin{aligned} x^n - C_{(n,2)}x^{n-2}y^2 + C_{(n,4)}x^{n-4}y^4 - ...(-1)^{\frac{n}{2}}x^0y^n - A_0C_0^{n-1} &= 0 \\ C_{(n,1)}x^{n-1}y - C_{(n,3)}x^{n-3}y^3 - ...(-1)^{\frac{n}{2}}xy^{n-1} - B_0C_0^{n-1} &= 0 \end{aligned}$$

si n es impar:

$$\begin{aligned} x^n - C_{(n,2)}x^{n-2}y^2 + C_{(n,4)}x^{n-4}y^4 - ...(-1)^{\frac{n-1}{2}}xy^{n-1} - A_0C_0^{n-1} &= 0 \\ C_{(n,1)}x^{n-1}y - C_{(n,3)}x^{n-3}y^3 - ...(-1)^{\frac{n-1}{2}}y^n - B_0C_0^{n-1} &= 0 \end{aligned}$$

donde A_0, B_0, C_0 designan base, altura e hipotenusa del triángulo dado.

Veamos ahora qué semejanzas hay entre el problema de la trisección de un ángulo (visto en el Capítulo 2) y el caso $n = 3$ de la generalización del mismo:

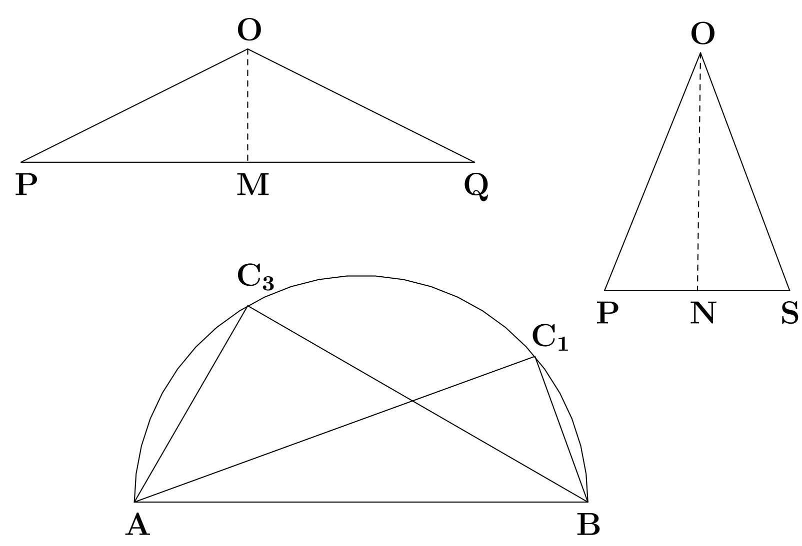

FIGURA 3

- Para su solución, la base $PQ = \alpha$ es solución de la ecuación:

$$x^3 = 3\rho^2 x + \rho^2 q$$

- Para su solución, $AC_1 = x$ y $BC_1 = y$ son solución de las ecuaciones:

$$x^3 - 3xy^2 - x_3z^2 = 0$$
$$3x^2y - y^3 - y_3z^2 = 0$$

- y tanto en el primer caso como en el segundo es la altura, luego se tiene $y = \sqrt{\rho^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}$; x_3 en el primer caso es $\frac{q}{2}$ y $\frac{\alpha}{2}$ en el segundo caso es x. Entonces

$$x^3 - 3xy^2 = x_3z^2$$
$$\Leftrightarrow$$
$$x^3 - 3xy^2 = \frac{q}{2}\rho^2$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\rho^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\right) = \frac{q}{2}\rho^2$$
$$\Leftrightarrow$$
$$8\left(\frac{\alpha}{2}\right)^3 - 6\left(\frac{\alpha}{2}\right)\rho^2 = q\rho^2$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\alpha^3 - 3\rho^2\alpha = \rho^2 q$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\alpha^3 = 3\rho^2\alpha + \rho^2 q$$

En el primer caso se demostró:

$$\left(\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{A}{3} - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}\, i\right)^3 = \frac{B}{2} + \sqrt{\frac{A}{3} - \left(\frac{B}{2}\right)^2}\, i$$

donde el doble de la parte real y la parte imaginaria de cada cantidad compleja se correspondían con la base y la altura de un triángulo isósceles cuyo ángulo adyacente a la base es $\frac{\varphi}{3}$, si la cantidad compleja es la afectada por la potencia cúbica y φ para la otra cantidad compleja. Por lo que nos preguntamos si para el segundo caso se cumple la misma relación, es decir,

$$(x + yi)^n = x_n + y_n i\ ?$$

2.2. PROPOSICIÓN. *Con las notaciones del lema 2.1, afirmamos que: si $z = 1$ entonces $(x + iy)^n = x_n + iy_n$*

Demostración. La demostración, la haremos por inducción y utilizando las identidades demostradas en el lemma 2.1:

$$\begin{aligned}
(x+yi)^2 &= x^2+2xyi-y^2 \\
&= (x^2-y^2)+(2xy)i \\
&= x_2+y_2i \\
(x+yi)^3 &= (x+yi)^2(x+yi) \\
&= (x_2+y_2i)(x_1+y_1i) \\
&= x_1x_2+x_2y_1i+x_1y_2i-y_1y_2 \\
&= (x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)i \\
&= x_3+y_3i
\end{aligned}$$

En general se puede ver que si suponemos:

$$(x+yi)^{n-1}=x_{n-1}+y_{n-1}i$$

entonces

$$\begin{aligned}
(x+yi)^n &= (x+yi)^{n-1}(x+yi) \\
&= (x_{n-1}+y_{n-1}i)(x_1+y_1i) \\
&= x_{n-1}x_1+x_{n-1}y_1i+x_1y_{n-1}i-y_1y_{n-1} \\
&= (x_1x_{n-1}-y_1y_{n-1})+(x_1y_{n-1}+y_1x_{n-1})i \\
&= x_n+y_ni
\end{aligned}$$

□

Nótese que en el primer caso $\sqrt{-1}$ es el medio por el cual podemos asociar el doble de la parte real y la parte imaginaria de una cantidad compleja, con la base y altura de un triángulo isósceles respectivamente, y en el segundo caso $\sqrt{-1}$ es el medio por el cual podemos asociar la base y la altura de un triángulo rectángulo con la parte real y la parte imaginaria de una cantidad compleja respectivamente.

3. Identidad D'Moivre

En la sección anterior se observó que en el segundo caso, es decir, en la generalización del problema de la trisección de un ángulo, se cumplía la siguiente relación:

$$(x+yi)^n=x_n+y_ni, \quad si \;\; z=1$$

Pero el segundo caso aporta algo más.

3.1. PROPOSICIÓN. *En el triángulo rectángulo $\triangle C_1AB$ (del lema 2.1) cuyo ángulo opuesto a la altura es $\frac{\theta}{n}$ se cumple la siguiente identidad:*

$$\left[\cos\left(\frac{\theta}{n}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{n}\right)i\right]^n = \cos(\theta) + i\ \sin(\theta)$$

donde $\cos(\theta),\ \sin(\theta)$ *son base y altura del triángulo del* $\triangle ABC_n$

DEMOSTRACIÓN. La demostración se hará por inducción y utilizando la notación e identidades deducidas en el lema 2.1

Haciendo

$$\cos\left(\frac{\theta}{n}\right)= \frac{x_1}{z},\ \sin\left(\frac{\theta}{n}\right)= \frac{y_1}{z}$$

Se tiene

$$\begin{aligned}
\left[\cos\left(\frac{\theta}{n}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{n}\right)i\right]^2 &= \left(\frac{x_1}{z}+\frac{y_1}{z}i\right)^2 \\
&= \frac{(x_1+y_1i)^2}{z^2} = \frac{(x_1^2-y_1^2)+(2x_1y_1)i}{z^2} \\
&= \frac{x_1^2-y_1^2}{z^2}+\frac{2x_1y_1}{z^2}i \\
&= \frac{x_2}{z}+\frac{y_2}{z}i \\
&= \cos\left(\frac{2\theta}{n}\right)+\sin\left(\frac{2\theta}{n}\right)i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[\cos\left(\frac{\theta}{n}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{n}\right)i\right]^3 &= \left(\cos\left(\frac{\theta}{n}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{n}\right)i\right)^2\left(\cos(\frac{\theta}{n}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{n}\right)i) \\
&= \left(\frac{x_2}{z}+\frac{y_2}{z}i\right)\left(\frac{x_1}{z}+\frac{y_1}{z}i\right) \\
&= \frac{(x_2+y_2i)(x_1+y_1i)}{z^2} \\
&= \frac{(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+y_1x_2)i}{z^2} \\
&= \frac{x_1x_2-y_1y_2}{z^2}+\frac{x_1y_2+y_1x_2}{z^2}i \\
&= \frac{x_3}{z}+\frac{y_3}{z}i \\
&= \cos\left(\frac{3\theta}{n}\right)+\sin\left(\frac{3\theta}{n}\right)i
\end{aligned}$$

En general si:

$$\left[\cos\left(\frac{\theta}{n}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{n})i\right]^{n-1}=\cos\left(\frac{(n-1)\theta}{n}\right)+\sin\left(\frac{(n-1)\theta}{n}\right)i$$

entonces

$$\begin{aligned}
\left[cos\left(\frac{\theta}{n}\right)+sen\left(\frac{\theta}{n}\right)i\right]^{n} &= \left(\cos(\frac{\theta}{n}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{n})i\right)^{n-1}\left(\cos(\frac{\theta}{n}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{n})i\right)\\
&= \left[\cos\left(\frac{(n-1)\theta}{n}\right)+\sin\left(\frac{(n-1)\theta}{n}\right)i\right]\times\\
&\quad \times\left[\cos\left(\frac{\theta}{n}) + \sin\left(\frac{\theta}{n}\right)i\right]\\
&= \left[\frac{x_{n-1}+y_{n-1}i}{z}\right]\left[\frac{x_1+y_1 i}{z}\right]\\
&= \frac{(x_1x_{n-1}-y_1y_{n-1})+(x_1y_{n-1}+y_1x_{n-1})i}{z^2}\\
&= \frac{x_1x_{n-1}-y_1y_{n-1}}{z^2}+\frac{x_1y_{n-1}+y_1x_{n-1}}{z^2}i\\
&= \frac{x_n}{z}+\frac{y_n}{z}i\\
&= \cos\left(\frac{n\theta}{n}\right)+\sin\left(\frac{n\theta}{n}\right)i\\
&= \cos(\theta)+i\ \sin(\theta)
\end{aligned}$$

□

4. Reflexiones sobre las cantidades imaginarias

Observar como imposible una pregunta en la cual toda la contradicción consiste en la manera que uno lo expresa algebraicamente, fue el caso, por ejemplo, del concepto de cantidad negativa asociado al movimiento de un punto sobre una línea recta:

> Suponiendo que un hombre ha avanzado o se ha movido hacia adelante (de A hacia B) 5 yardas y entonces retrocede (B hacia C) 2 yardas, si se pregunta ¿cuánto ha avanzado (sobre la marcha total) cuando esta en C? o ¿cuántas yardas esta ahora adelante de cuando el estaba en A? lo encontramos (quitando 2 de 5), esto es avanzo 3 yardas (por que +5-2=3). Pero si avanzando 5 yardas hacia B y desde allí retrocede 8 yardas hacia D. Y entonces se pregunta ¿cuánto avanzó cuando esta en D? o ¿cuánto

> hacia adelante, cuando el estuvo en A? decimos -3 yardas (porque +5-8=-3) es decir, ha avanzado 3 yardas menos que la nada. Lo cual en conveniencia del lenguaje no puede ser, y por lo tanto en cuanto a la línea AB hacia adelante, el caso es imposible. Pero si (contrario a la suposición) la línea de A se continúa hacia atrás debemos encontrar D, 3 yardas detrás de A. Así decimos que él ha avanzado -3 yardas; porque debemos decir (en la forma del lenguaje común) el esta retirado 3 yardas; o el necesita 3 yardas de ser así hacia adelante para que el este en A. Lo cual no solo soluciona la respuesta negativamente a la pregunta hecha, que él no esta (como fue supuesto) o no ha avanzado del todo. Pero decimos además, que él esta en D, más hacia atrás por 3 yardas. Y consecuentemente -3, soluciona como también designa el punto D, como $+3$ designa el punto C. No hacia adelante como fue supuesto, pero si hacia atrás de A. Así que $+3$ significa 3 yardas hacia adelante y -3 significa 3 yardas hacia atrás: pero todavía en la misma línea recta.[1]

En el problema de la división de una línea tal que el rectángulo formado por las divisiones sea igual a una área dada, cuando el área dada es mayor que el cuadrado de la mitad de la línea dada, es imposible. Pero si contrario a la suposición, la línea se prolonga continuamente en ambas direcciones la división externa permite dicha división, de esta manera las dos ecuaciones: $x^2 = ax - b^2$, $x^2 = ax + b^2$ que algebraicamente se diferencian en el signo del termino independiente, las raíces reales están asociadas con la división interna y externa respectivamente. Y en el caso de la raíz negativa de la ecuación, $x^3 + q\rho^2 = 3\rho^2 x$, raíz positiva de $x^3 = 3\rho^2 x + q\rho^2$ (ya que la suma de las tres raíces es igual cero por la ausencia de termino cuadratico) esta asociada con la trisección del ángulo $\angle OPS$ del triángulo $\triangle OPS$, y no con la trisección del ángulo $\angle POS$ opuesto a la base, ya que este esta asociado a la ecuación $x^3 + q\rho^2 = 3\rho^2 x$, es decir, la raíz negativa vuelve falsa la suposición de la trisección de un ángulo inscrito sobre un círculo cuyo vértice es centro de este, ya que las dos raíces positivas están asociadas con la trisección del arco PS y SP respectivamente, sin embargo, si se plantea el problema de trisecar no el ángulo opuesto a la base, sino el adyacente a la base como es el caso del ángulo $\angle OPS$, esta raíz falsa como la denominaron los algebristas de la época se vuelve raíz positiva de la ecuación $x^3 = 3\rho^2 x + q\rho^2$. Así el signo menos que precede a esta raíz, indica una falsa suposición que ha sido hecha en el enunciado del problema, de ahí el nombre de raíz falsa.

[1][**?**] p. 47.

Por otro lado, las raíces complejas de la ecuación, $x^2 + b^2 = ax$, asociada con el problema de la división interna muestran que el caso es imposible debido a que el punto de división de la línea no yace más sobre esta, es decir, contrario a la suposición (de que el punto yace sobre la línea) el caso es igualmente posible, no como la divsión de una línea sino como el problema de determinar la base [AB] de un triángulo cuyo uno de sus lados [AP] y el ángulo [$\angle PAC$] (o altura [PC]) son dados. En este sentido, las soluciones reales se corresponden cuando el punto B de la base del triángulo a determinar yace sobre la línea [AC] sobre la cual se levanta el triángulo y las raíces complejas cuando B esta fuera de AC.

Por lo tanto, no podemos hacer entrar en el planteamiento de un problema todas las condiciones que le pertenecen, así lo expresan la división interna-externa, movimiento hacia adelante-atrás, estar sobre-fuera de la línea y trisección del ángulo opuesto-adyacente a la base de un triángulo dado. Estos a su vez se expresan como las raíces reales de las ecuaciones: $x^2 = ax - b^2$, $x^2 = ax + b^2$, en el caso división interna-externa respectivamente, con la raíz positiva y la negativa de la ecuación $x + a = b$, en el caso del movimiento hacia adelante-atrás respectivamente, con las raíces reales y complejas de la ecuación: $x^2 + b^2 = ax$, en el caso estar sobre-fuera de la línea respectivamente, con la raíces reales positivas y la raíz negativa de la ecuación: $x^3 + q\rho^2 = 3\rho^2 x$, en el caso de la trisección del ángulo opuesto-adyacente a la base de un triángulo dado respectivamente.

La verdad no se aprende se reaprende.

Apéndice A

Los conceptos de la geometría antigua que dan fundamento a la representación de los números complejos

Si bien, la representación de los números complejos, no es propia de la geometría antigua. Debido a que, ni siquiera distinguieron una cantidad positiva de una negativa. Distinción que presupone el uso de un lenguaje simbólico como el álgebra y el álgebra no es desarrollada en la antigüedad. Mucho menos distinguieron una cantidad real de una compleja. Y menos aun, la necesidad de una representación de estas cantidades. La representación de los números complejos, encontrara su razón de ser en la geometría antigua. Como, la asociación de los números reales con un segmento de línea recta (que, de hecho, es la representación que, hoy, tenemos de los números reales), encuentra su razón de ser, también, en la geometría antigua. Por otro lado, la asociación de un número real con un segmento. Permite, primero, dar cuenta que los procedimientos que permitieron la asociación de un número real con un segmento. A su vez, no permiten asociar a los números complejos con un segmento. Debido a que, lo que se determina con esta asociación es la magnitud de la cantidad. Conocido en la antigüedad como lo dado en magnitud. Y no la posición de un segmento. Esto es, lo dado en posición, concepto con el que estara asociado la representación de los números complejos. Segundo, permite reducir el cálculo con las magnitudes de las cantidades de la geometría (que fueron: los segmentos de línea recta, ángulos rectilíneos planos, las superficies y los sólidos) a solo el cálculo con la longitud de los segmentos. Que, a su vez, da cuenta del papel que juega el desarrollo de un cálculo con las magntiudes de las cantidades en la representación de las cantidades mismas. En este sentido, será el cálculo, pero ahora de los complejos como expresiones de la forma $M + N\sqrt{-1}$, donde M y N denotan cantidades reales, y el cálculo, como cálculo con números reales, con la salvedad, de que ahora $(\sqrt{-1})^2 = 1$. El que determinara, en este caso, la representación de los números complejos.

Por otro lado, la necesidad del desarrollo de un cálculo de las cantidades (como, por ejemplo, cálculo de la longitud de segmentos de línea recta, de áreas de figuras rectilíneas, de volúmenes de sólidos rectilíneos y de la división de un ángulo). Se debe a que, los problemas en geometría, para su solución hicieron uso de este cálculo. Prueba de ello, la encontramos en los problemas de la duplicación del cuadrado, duplicación del cubo, trisección de un ángulo y cuadratura de un círculo. En los que yacen, un método para sumar áreas, sumar volúmenes, dividir ángulos y rectificar la circunferencia de un círculo respectivamente. Y a su vez, los antiguos hicieron uso de un método, para resolver problemas en geometría, conocido como el método del *análisis*. Que consistió en reducir el problema a un verdad conocida (o proposición ya demostrada) o a una construcción conocida (o construcción que podía ser exhibida). Ahora, con la reducción del cálculo de las cantidades a solo el cálculo con los segmentos, todo problema en geometría se redujo a poder exhibir la construcción de un segmento de línea recta (o cálculo de la longitud de un segmento de línea recta). Y así la posibilidad de solución quedo determinada por la posibildad de construcción de este segmento. Posibilidad que el *análisis* determino a través del concepto de *diorismos*. Esto es, el diorismos, permitió saber bajo que condiciones era posible la construcción de este segmento.

Así reducir un problema a la posibilidad de la construcción de un segmento. Redujo, el problema de determinar la desconocida o término a encontrar (Esto es, segmento a construir), a construir la proporción entre el termino a encontrar y los términos conocidos. Proporción, que permitió con el desarrollo del álgebra traducir un problema en geometría a una ecuación. Y así, trasladar la posibilidad de solución de un problema a las condiciones bajo las cuales la ecuación tiene solución. De esta forma, la teoría de proporciones, tratada en libro V de los *Elementos* de Euclides, fue el concepto de la geometría antigua, que posibilito la transformación de un problema en una ecuación. A pesar de que, el álgebra (cuyo objetivo fue resolver problemas en geometría, a través, de sus ecuaciones), no fue desarrollada en la antigüedad.

Por otro lado, teniendo en cuenta que el origen de los números complejos es la resolución de ecuaciones:

> . . .desde el tiempo en que los analistas investigaron que hay muchas ecuaciones que no tienen raíces a menos que se admitan cantidades de la forma $M+N\sqrt{-1}$ como un tipo peculiar de cantidades llamadas imaginarias distintas de las reales, estas cantidades supuestas se han estudiado y se han introducido en todo análisis;[1]

Y que el objetivo del álgebra es, resolver problemas en geometría, a través, de sus ecuaciones. Entonces, la pregunta acerca de la representación, queda acotada por los problemas, en geometría, que dan cuenta de la aparición de los números complejos. Ahora, para el caso de las ecuaciones $x^2+b^2 = ax$ y $x^3 = Ax+B$, en las que aparecen, al resolverlas, los números complejos. Asociadas con los problemas de la división de una línea tal que el rectángulo formado por dichas divisiones sea

[1] [**?**] p. 1.

igual a un cuadrado dado y la trisección de un ángulo respectivamente. Hubo dos métodos para resolverlas, primero, los métodos antiguos para construir áreas en el plano y volúmenes en el espacio permitieron asociar la raíz con un segmento de línea recta. A tráves, de la posibilidad de intersección de dos secciones cónicas. Segundo, el método que da Cardano en el *Ars Magna* para la resolución de estas ecuaciones. El método de completación de cuadrados y de completación de cubos respectivamente. Pero antes de los métodos de resolución esta el problema de asociar un problema de naturaleza geométrica a estas ecuaciones y el problema, de transformar el problema en una ecuación. Transformación que permite, como hemos ya observado, el reducir el problema de determinar la raíz a el problema de construir la proporción entre la raíz y los datos conocidos. De esta forma, ambos métodos, permiten asociar a la raíz (real) con un segmento y con una formula (expresión analítica) respectivamente. Permitiendo asociar la raíz (real) con la longitud del segmento y las raíces complejas con la posición de un segmento, determinado por el conocimiento de un ángulo y la longitud del segmento.

Por lo tanto, primero, la reducción del **cálculo** de las cantidades a solo el cálculo con los segmentos. La cual permite que, la proporción de áreas, volúmenes y ánguós se reduzca a la proporción de segmentos. Además de que, para el cálculo de longitud de una línea, del área de una figura rectilínea y del volúmen de un sólido rectilíneo. La representación de estas cantidades sea: para la longitud con un segmento, para el área con un cuadrado y para el volúmen con un cubo.[2] Segundo, la **construcción** de un segmento asociado con la solución de un problema. Esto es, la construcción de las cantidades asociada con el concepto de lo dado en magnitud.[3] Y tercero, la teoría de **proporciones** que, permite la transformación de un problema en una ecuación. Son los conceptos de la antigüedad que permiten dar sentido (o fundamento) a los números complejos en geometría.

1. El análisis en la antigüedad

> Existe una cierta forma de buscar la verdad en matemáticas que se dice fue Platón el primero en haberlo descubierto. Theon le llamo *análisis*, el cual definió como suponer lo que se busca como si fuese admitido [y trabajando] a través de las consecuencias [de esta suposición] hasta lo que es verdaderamente admitido, como opuesto la sintesis, la cual es suponer lo que es [ya] admitido [y

[2]Para mayor detalle vease el apéndice C.
[3]Para mayor detalle vease el apéndice B.

> trabajando] a través de las consecuencias [de esta suposición] hasta llegar y entender lo que se busca.[4]

Por otro lado, las proposiciones matemáticas en la antigüedad fueron caracterizadas de acuerdo a lo que se busca en teóricas y problemáticas. Así, hubo dos tipos de análisis:

> El que busca la verdad, el cual es llamado teórico; y el que obtiene [la solución de un problema] propuesto, el cual es llamado problemático. Ahora, en el tipo *teórico* postulamos la cosa buscada como existente y como verdadera y entonces, según las hipotesis, pasamos a través de las cosas las cuales siguen en orden [de este], [las postulamos] como verdaderas y existentes, hasta alguna cosa admitida: si esa cosa admitida es verdadera, la cosa buscada también sera verdadera, y la prueba seria el opuesto del análisis; pero si sucede que alguna cosa admitida es falsa, la cosa buscada también seria falsa. En el tipo *problemático* postulamos [el problema] propuesto como conocido y entonces a través de las cosas las cuales sieguen en orden [de este], [las postulamos] como verdaderas, hasta alguna cosa admitida: si las cosa admitida es posible y obtenible, lo que llamaron en matemáticas *lo dado*, el [probema] propuesto también seria posible, y otra vez la prueba seria el opuesto del análisis; pero si sucediera que alguna cosa admitida es imposible, el problema también seria imposible.[5]

En símbolos lógicos, estas definiciones se traducen en la siguiente sucesión, en la cual P representa la verdad buscada o la cosa busacada, según sea el análisis teórico o problemático respectivamente. K la cosa admitida, y P_i las proposiciones intermedias las cuales son consecuencia de P (o K):

$$P \to P_1 \to P_2 \to \cdots \to P_n \to K \qquad (\textit{análisis}),$$
$$K \to P_n \to \cdots \to P_2 \to P_1 \to P \qquad (\textit{sintesis}).$$

El proceso de reversibilidad de esta sucesión, no siempre es posible depende de la proposición teórica y problematica de la que se haga el análisis, por ejemplo, la construcción de un triángulo dado tres rectas cualesquiera, es necesario que cumplan la desigualdad del triángulo (la suma de cualesquiera dos sea mayor que la tercera). Así, distinguir cuando la cosa buscada existe (o es construible) fue la función del *diorismos*, es decir, dio las condiciones bajo las cuales es posible la

[4] [?] p. 11.
[5] [?] p. 322.

reversibilidad. Ahora, si K es falsa entonces P es falsa y si K es imposible (no se puede construir) entonces P es imposible.

En la antigüedad, la geometría trato sobre el estudio de las cantidades continuas a diferencia de la aritmética, la cual trato sobre el estudio de las cantidades discretas (los números). Las cantidades continuas fueron: la línea recta, ángulos planos, las superficies y los sólidos. Su estudio comprendió principalmente el desarrollo de un cálculo. Entendiendo por, cálculo, las operaciones que se pueden realizar como fueron: la suma, resta, multiplicación y división. Pero, la falta de una unidad en la geometría a diferencia de la unidad de la aritmética condujo a los antiguos a desarrollar algoritmos para sumar áreas y volúmenes reduciendo la proporción de áreas y vólumenes a la proporción de segmentos de línea recta. Y con respecto a los ángulos, la división de ángulos se realizo, por medio de la reducción de esta operación a la la división de segmentos de línea recta. Así, la proporción de ángulos fue reducida a la proporción de segmentos de línea recta, permitiendo, así, la división de ángulos. De esta forma, el cálculo con las cantidades continuas, propias de la geometría, descansa en el cálculo con los segmentos de línea recta. Esta reducción permitió a los antiguos reducir la solución de un problema al conocimiento de la magnitud de algún segmento de línea recta. Así, lo *dado* como, lo que es posible y obtenible (en el caso del análisis problemático), se tradujo en la geometría como la posibilidad de la construcción de algún segmento de línea recta. Ya que la mayoría de los problemas para su solución requirió del cálculo con las cantidades (continuas). Y este, a su vez, se redujo a solo el cálculo con los segmentos de línea recta.

2. La transformación de un problema en una ecuación

La posibilidad de construcción de un segmento de línea recta, la cual permite la solución de un problema. Con el desarrollo del álgebra y la traducción de un problema en una ecuación, se tradujo, en las condiciones bajo las cuales la ecuación tiene solución. Sin embargo, a pesar de que, el álgebra, no es desarrollada en la antigüedad:

> Una de las nociones matemáticas en la cual uno tiene la necesidad en la parte del saber conocido bajo el nombre de matemática es l'art de l'algèbre y d'*al-muqābala*, destinadas a determinar las desconocidas numéricas y geométricas. Contiene especies [de problemas] en los cuales uno tiene la necesidad de especies de proposiciones previas muy difíciles, y en el cual la solución ha sido inaccesible a la mayoría de los que las han examinado. En cuanto a los antiguos, ninguno de sus propósitos sobre estas proposiciones nos ha llegado; puede ser, despúes de tenerlas investigadas y

> examinadas, no las han comprendido; o puede ser que su investigación no les ha obligado a examinarlas ; en fin puede ser que nada de esto ha sido dicho ni ha sido traducido en nuestra lengua.[6]

El método de construcción de áreas:

> Estas cosas, según Eudemo, son antiguas y fueron invención de la Musa de los pitagóricos, es decir, la aplicación de áreas por yuxtaposición, por exceso y por defecto. Los geómetras posteriores tomaron estas denominaciones de los pitagóricos y las trasladaron a las líneas llamadas cónicas, de modo que una de ellas nombra la parábola, otra la hipérbola y otra la elipse, mientras que los hombres de la antigüedad, semejantes a dioses, veían que estos términos significaban la construcción de áreas, en el plano, sobre una línea recta finita. Pues cuando se tiene una línea recta finita y se extiende el área a todo lo largo de la línea, dicen que se aplica o yuxtapone el área. Pero cuando se hace la longitud del área mayor que la propia línea recta, dicen que la excede, y cuando se hace menor, en cuyo caso hay alguna parte de la línea recta que sobrepasa el área trazada, entonces dicen que es deficiente.[7]

Permite a Al-khayyām resolver las ecuaciones de segundo grado. Así, el método de aplicación de áreas (método de construcción de áreas en el plano) por yuxtaposición, por defecto y por exceso los que permiten resolver las ecuaciones: $x^2 = b$, $x^2 + b = ax$ y $x^2 = ax + b$ respectivamente. Y el método de construcción de volúmenes, le permite hacer una clasificación de las ecuaciones cubicas :$x^3 \pm ax^2 \pm bx \pm c = 0$, entendiendo por clasificación para que valores de a, b, y c es posible construir un segmento de línea recta asociado con la raíz (real) de esta ecuación. Construcción que se hace por medio de la posibilidad de intersección de dos secciones conicas, por ejemplo, la intersección de una hipérbola con una parábola para la solución de la ecuación: $x^3 + c = bx$. Así los casos posibles e imposibles se refieren a sí dicha intersección se da o no, en cuyo caso la ecuación tiene o no una solcución real. Por tanto, son los métodos antiguos de construcción de áreas y volúmenes, los que permiten la resolución de las ecuaciones de segundo y tercer grado, aunque, no se haya desarrollado el álgebra en la antigüedad.

Ahora, la traducción de un problema en una ecuación. A su vez, tiene su origen en el *análisis*:

---

[6][**?**] p. 117.

[7][**?**] p. 255.

> Aunque los antiguos propusieron solo [dos clases de] análisis, zetetica y poristica, para lo cual la definición de Theon mejor aplica, he agregado un tercero, el cual puede ser llamado retica o exegetica. La zetetica propiamente es por la cual uno establece una ecuación o proporción entre un termino que se debe encontrar y los términos dados, poristica por la cual la verdad de un teorema enunciado es probado por medio de una ecuación o proporción, y exegetica por la cual el valor del término desconocido en una ecuación dada o proporción es determinado. Por lo tanto todo el arte analítico, supone estas tres funciones por si mismas, puede ser llamado la ciencia del descubrimiento correcto en matemáticas.[8]

Así, por ejemplo, el viejo problema de la trisección de un ángulo. Con Descartes se traduce a la ecuación $x^3 + q\varrho^2 = 3\varrho^2 x$, donde ϱ es el radio del círculo donde esta inscrito el ángulo a trisecar, q la cuerda que subtiende este ángulo y x la cuerda que subtiende la tercera parte del ángulo y con Viéte a la ecuación $x^3 = q'\varrho'^2 + 3\varrho'^2 x$, donde q' es la base de un triángulo isosceles que tiene como ángulos iguales (ángulos de la base) el ángulo a trisecar, ϱ' el otro lado del triángulo isósceles y x la base del triángulo isósceles, con lados iguales a los del triángulo isósceles cuyo ángulo de la base es el ángulo a trisecar, cuyo ángulo de la base es la tercera parte del ángulo a trisecar. La diferencia es que el ángulo a trisecar en Decart es opuesto a la base de un triángulo isosceles y para Viète el ángulo a trisecar es adyacente a la base del triángulo isósceles.

3. La relación entre álgebra y análisis

Las fomulas que da Cardano en el *Ars Magna*, para la resolución de las ecuaciones cubicas, sin término cuadratico, expresan lo desconocido (lo cual se denoto con las ultimas letras del alfabeto: x, y, z) en términos de los conocido (los términos constantes de la ecuación, los cuales se denotaron con las primeras letras del alfabeto: a, b, c, etc.) Por medio de las operaciones del algebra: $+$, $-$, $\times$, $/$ y $\sqrt[n]{}$ a las cuales se les conoció con el nombre de *expresiones analiticas*. Así, estas dos maneras de resolver una ecuación: la construcción del segmento de línea recta asociada a la raíz (por medio de la intersección de dos cónicas) y la expresión analítica de la raíz. Se diferenciaron, en que para el primer caso, se daba la construcción (del segmento de línea recta) asociada a la raíz y en el segundo, se designaba mediante un símbolo (expresión analítica) la raíz de una ecuación:

[8][**?**] pp. 11-12.

> . . . pues eso que es comúnmente llamado la solución de una ecuación en realidad no es otra cosa que su reducción a ecuaciones puras. Pues la solución de ecuaciones puras no se enseña sino que se presupone; y si se expresa las raíces de una ecuación $x^m = a$ mediante $\sqrt[m]{a}$, de ninguna manera se ha resuelto, y no se ha hecho mas que si se diseñara un símbolo para denotar la raíz de una ecuación. . . y establecer la raíz igual a este. . . Y por lo tanto se tiene que censurar el que los matemáticos hayan denotado con un símbolo especial sus raíces: Pero a partir de que este símbolo es elevado a la dignidad, y comprendido bajo el nombre de **expresiones analíticas** exactamente igual que los símbolos aritméticos para la adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación. . .[9]

Cabe observar, que expresar lo deconocido en términos de lo conocido, es en parte el objetivo del *análsis*, ya que este busca reducir la verdad buscada a una verdad conocida y la cosa buscada a una ya conocida.

Por otro lado, establecer la raíz (de una ecuación) igual a este símbolo (expresión analítica), permite, por ejemplo, que ambos métodos de resolución designen las expresiones analíticas de las raíces reales con la magnitud de un segmento de línea recta y para las expresiónes analíticas asociada a los números complejos: $M + N\sqrt{-1}$, que surgen de la resolución de ecuaciones de segundo y tercer grado, con la posición de un segmento de línea recta. Así, los conceptos de lo dado en magnitud y en posición de la geometría antigua permiten dar cabida a la representación de los números complejos:

> Puntos, líneas y ángulos se dicen que son dados en posición, cuando ellos siempre ocupan el mismo lugar.

Por otro lado, esta definición, al igual que la definición de líneas paralelas,[10] no es operable en el sentido de que no nos da un criterio para saber, por ejemplo,

---

[9] [**?**] p. 13.

[10] la definición de líneas paralelas dada por Euclides en los *Elementos* reza así:

> Son rectas paralelas las que estando en el mismo plano y siendo prolongadas indefinidamente en ambos sentidos, no se encuentran una a otra en ninguno de ellos.

Esta definición no nos da un criterio practico para verificar cuando dos líneas rectas son paralelas, así el quinto postulado de Euclides que reza así:

cuando una línea es dada en posición. Determinar la posición de un segmento [AB], en la geometría antigua[11], fue equivalente al siguiente problema:

> Si de un punto dado [C] a una línea recta dada en posición [$A\alpha$] se dibuja una línea recta que haga un ángulo dado[$\angle BCA$] la línea así dibujada [AB] es dada en posición.

Así, la asociación de un número complejo con su modulo y argumento tiene su origen en el concepto de posición en la geometría antigua. Ya que es la magnitud de un segmento de línea recta [AB] y un ángulo [$\angle BCA$] las que determinaron la posición de un un segmento [AB] respecto de otra línea recta dada en posición [$A\alpha$], esta a su vez (la posición del segmento de línea recta [AB]) asociada con la posición de un punto [B] respecto de una línea dada [$A\alpha$].

> Y que si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los (ángulos) menores que dos rectos.

Nos permite tener un criterio para saber cuando dos rectas son paralelas y de esta manera de hecho construir dos rectas paralelas.

[11]En el *Data* de Euclides.

Apéndice B

El concepto de construcción en la antigüedad

Al geómetra en la antigüedad, nunca le es permitido razonar acerca de cosas que no existen o no pueden ser exhibidas. Así lo expresó el concepto de lo *dado* en matemáticas, como lo que es posible (existe) y obtenible (existe una construcción geométrica que exhibe lo dado). Por ejemplo, el problema de la trisección de un ángulo, en estos términos, se planteo de la siguiente forma: dado un ángulo trisecar el ángulo dado. La solución de este problema supuso que el ángulo se podía inscribir en un triángulo rectángulo e hizo uso del conocimiento de la posición de un segmento, que permitió trisecar el ángulo dado. Luego, la trisección es posible si el ángulo $< \frac{\pi}{2}$ y obtenible, si se puede construir este segmento. Construcción que se realizó por medio de la intersección de una hipérbola con un círculo. Por tanto, si es dado un ángulo, los antiguos encontraron bajo que condiciones, la tercera parte de este ángulo es dado, esto es, se puede construir. Por otro lado, en geometría toda magnitud es representada por una de la misma clase. Líneas son representadas por una línea, ángulos por un ángulo, espacios por un espacio. Esta representación encuentra su razón de ser, en el concepto de lo dado en magnitud: espacios, líneas y ángulos son dados en magnitud cuando podemos asignar un espacio, línea y ángulo igual a ellos. Esto es, cuando podemos construir o trasladar (copiar) estas magnitudes en el plano. Así pues, la existencia de las magnitudes esta asociada con su construcción, que a su vez esta asociada con un forma de representar a las magnitudes. En el caso de lo dado en magnitud, líneas con un segmento de línea recta, ángulos con la inclinación mutua de dos líneas rectas y espacios con figuras rectilíneas.

Ahora, con respecto a la construcción de las cantidades. Para los antiguos la construcción de los números: enteros, racionales, de $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$ y π estuvo relacionada con los siguientes problemas:

Números enteros:

> Dado un segmento de línea recta, duplicar el segmento dado.

Números racionales:

> Dado un segmento de línea recta, aplicar un rectángulo (o una figura rectilínea) igual a una área dada, a lo largo del segmento de línea recta dado.

$\sqrt{2}$:

Dado un cuadrado, duplicar el cuadrado.

$\sqrt[3]{2}$:

Dado un cubo, duplicar el cubo.

π:

Dado un círculo, encontrar un cuadrado de la misma área.

Cada uno de estos números reales requirió para la construcción del segmento de línea recta asociado a este, el conocimiento de ciertas curvas geométricas y construcciones auxiliares, mismas a las que fueron reducidos estos problemas para su solución. En el caso de $\sqrt{2}$ asociado con el problema de duplicar un cuadrado se requiere de la construcción de la media proporcional entre dos segmentos de línea recta dados:

> Si a y b representan los segmentos dados, la media proporcional entre a y b es un segmento x que cumple: $a : x :: x : b$, equivalente a $x^2 = ab$. Si $a = 2$, $b = 1$ entonces $x = \sqrt{2}$.

Para $\sqrt[3]{2}$ se requiere de la construcción de la incersión de dos medias proporcionales entre dos segmentos de recta dados.

> Si a y b representan los segmentos dados, la incersión de dos medias proporcionales x y y entre a y b satisfacen: $a : x :: x : y :: y : b$, de la cual se sigue que $x^3 = a^2 b$. Si $a = 1$, $b = 2$ entonces $x = \sqrt[3]{2}$.

Y para π se requiere del conocimiento de la espiral de Arquímedes:

> Si una línea recta es trazada en un plano y si uno de los extremos permanece en el mismo lugar, y la recta gira a una velocidad constante un número cualquiera de veces hasta regresar a la posición de donde partió; si además, durante la rotación de esta línea, un punto se mueve sobre la recta con una velocidad constante a partir del extremo fijo, el punto describirá una *spirale* en el plano. Llamaremos origen de la espiral al extremo de la línea de la recta que permanece inmóvil durante la rotación de la recta. Llamaremos origen de la revolución a la posición de la recta a partir de la cual la recta comenzó a girar.[1]

[1][**?**] vol. 2, p. 31: *Des spirales*

y la construcción de la tangente:

> Si una recta es tangente a una espiral, descrita en la primera revolución, al extremo de la espiral, y si del punto que es el origen de la espiral se levanta la perpendicular sobre el origen de revolución, esta perpendicular encontrará a la tangente, y el segmento de esta perpendicular comprendido entre la tangente y el origen de la espiral será igual a la circunferencia del primer círculo.[2]

Y así, el problema de la cuadratura del círculo:

> Todo círculo es equivalente a un triángulo rectángulo en el cual uno de sus lados del ángulo recto es igual al radio del círculo y la base (es decir el otro lado del ángulo recto) igual al perímetro del círculo.[3]

Requirió para su solución encontrar un segmento de línea recta igual a la circunferencia del círculo, este a su vez requirío trazar la tangente, en el punto extremo de la espiral cuando la recta que genera la espiral regresa al origen de revolución, a una espiral generada por un segmento de línea recta igual al radio del círculo a cuadrar.

1. La clasificación de los problemas en: planos, sólidos y lineales

Fue común en la antigüedad, asociar todo problema con una construcción. Prueba de ello, son las siglas Q.E.F. (Quod Erat Faciendum = Que es lo que había que hacer). Para terminar la demostración asociada a la solución de un problema. A diferencia de las siglas Q.E.D. (Quod Erat Demonstrandum = que es lo que había que demostrar) para terminar la demostración asociada a una proposición teorematica. Así, la construcción de las cantidades: $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$ y π, asociadas con un problema de naturaleza geométrica. Permitió a los antiguos diferenciarlas, en tanto que problemas, de acuerdo a las construcciones que requirieron:

> Los antiguos admitieron que los problemas pertenecían a tres géneros en geometría: los denominados planos, otros solidos y otros más lineales. Los planos, los que pueden ser resueltos por medio de líneas rectas y circunferencias de círculo; porque las líneas por medio de las cuales los problemas de este genero son resueltos, encuentran su origen en el plano. En cuanto a los problemas en el

[2] [**?**] vol.2 p. 41: *Des spirales*

[3] [**?**] vol.1 p. 138: *La mesure du cercle*

> cual la solución invoca una o varias secciones del cono, son denominados sólidos; porque es necesario de hacer uso de superficies de figuras solidas para su construcción, particularmente de superficies cónicas. Resta el tercer genero de problemas denominados lineales, porque admiten otras líneas para su construcción, en el cual el origen es más variado y complejo, tales como las espirales, las cuadratrices, las concoides y las cisoides que poseen numerosas y asombrosas propiedades.[4]

De esta forma $\sqrt{2}$, es de naturaleza plana, ya que la construcción de la media proporcional se realiza por medio de la intersección de una línea recta y una circunferencia. $\sqrt[3]{2}$, es de naturaleza solida, ya que el problema de la construcción de las dos medias proporcionales se realiza por medio de la intersección de dos cónicas y π, es de naturaleza lineal, ya que es la espiral de Arquímedes quien permite la rectificación de la circunferencia. Así, el problema de la *naturaleza* de los números reales esta relacionado con la forma y los medios con que la geometría aprehende a estos, como un segmento de línea recta y la construcción de curvas auxiliares son la forma y los medios respectivamente con que la geometría aprehende a los números reales. Razón por la cual el problema de asociar un objeto geométrico a los números complejos, en términos del *análisis*, esta asociado al problema de la *naturaleza* de los números complejos, éste a su vez esta asociado con los problemas de naturaleza geométrica, que dan cuenta del proceso de aprehención de los números complejos por la geometría.[5]

2. La neusis como cláusula constructiva

En los *Elementos* de Euclides los postulados que son 5, se distinguieron de las definiciones y nociones comunes, por ser clausulas constructivas. Esto es, postulaban una construcción. Por otro lado, hemos notado que la clasificación de los problemas en: planos, sólidos y lineales. Permite, diferenciar los problemas que se pueden construir con líneas rectas y circunferencias. De los que no. Los que no, como por ejemplo, el caso de las cantidades: $\sqrt[3]{2}$, π, y $\frac{\theta}{3}$ asociadas con los problemas de la duplicación del cubo, cuadratura del círculo y trisección de un ángulo respectivamente. Para su construcción fueron reducidas a un problema (o construcción) común conocido como el problema de neusis:

2.1. PROBLEMA (NEUSIS). *Dado: dos líneas rectas L y M, un punto O (referido como el "polo"de la neusis) y un segmento a (ver Figura 1); es requerido*

---

[4][**?**] pp. 38-39.

[5]Ver apéndice 1.

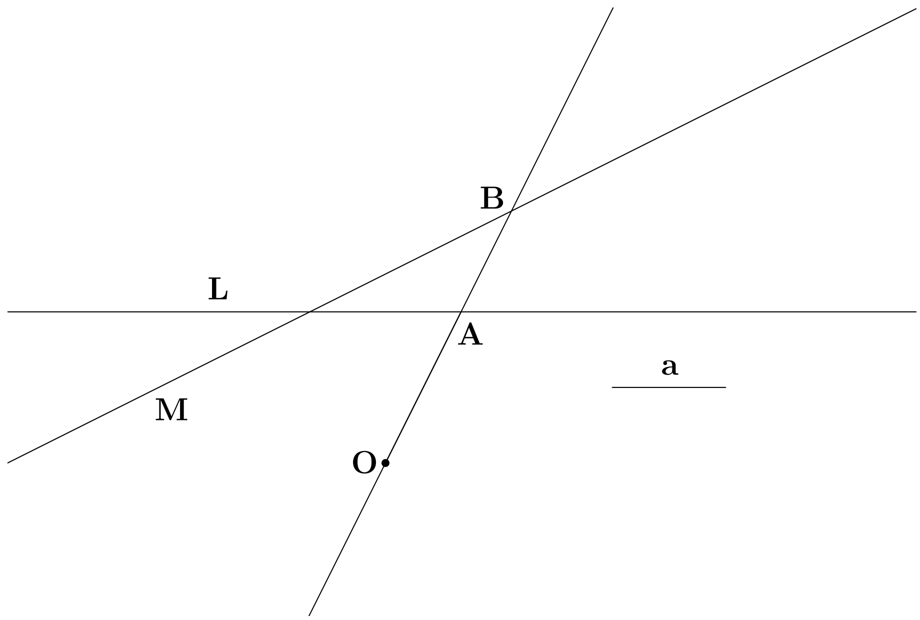

Figura 1. El problema de neusis

encontrar una linea a tráves de O, que intersecta a L y M en A y B respectivamente, tal que $AB = a$.

He aquí las tres construcciones auxiliares que utilizaron neusis:

2.2. Problema (Trisección de un ángulo — Pappus). *Dado un ángulo $\angle CAB$ (ver Figura 2 (P.1)); se requiere encontrar la tercera parte del ángulo dado.*

2.3. Construcción.

1. Completese el rectángulo $ABCD$ formado por el ángulo dado $\angle CAB$.
2. Por *neusis* tracese AF a tráves de A, intersectando a la prolongación de DC y a BC en E y F respectivamente, tal que $EF = 2AC$.
3. $\angle EAB = \angle FAB$ es la tercera parte del $\angle CAB$.

2.4. Problema (Dos medias proporcionales — Nicomedes). *Dado: Dos segmentos de linea recta a y b (ver Figura 2 (P.2)); se requiere encontrar las dos medias proporcionales entre x y y.*

2.5. Construcción.

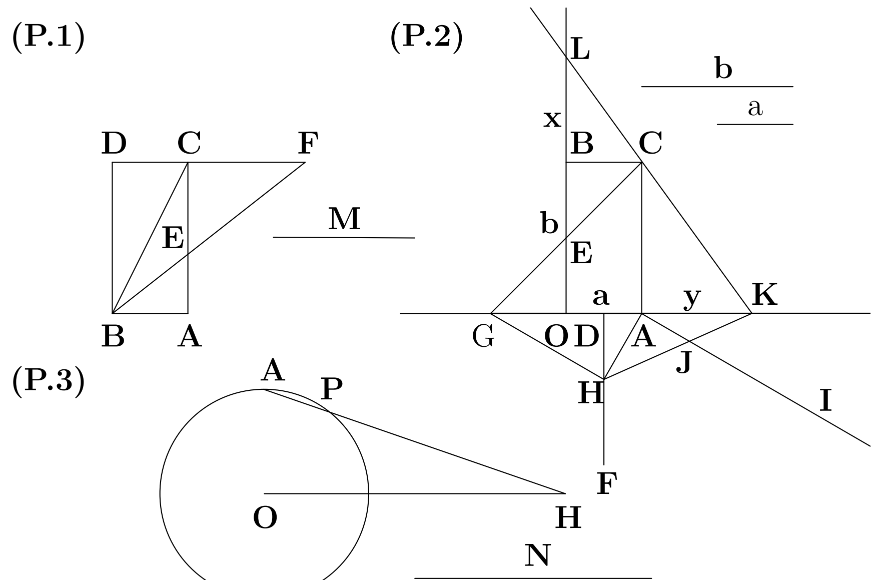

Figura 2. Construcciones que hacen uso de la neusis

1. Constrúyase el rectángulo OACB con lados $OA = a$ y $OB = b$; Prolongue OA a ambos lados y OB hacia arriba; bisecte OA y OB en D y E respectivamente; trace DF perpendicular a OA; trace CE que intersecta a la prolongación de AO en G y haciendo $GO = OA = a$.
2. Tomado H sobre DF tal que $AH = OE = \frac{1}{2}b$; trácese GH; trácese AI paralela a GH.
3. Por *neusis* trácese HJK a tráves de H, intersectando a la prolongación de AI y OA en J y K respectivamente, tal que $JK = OE = \frac{1}{2}b$.
4. Trácese KC y prolónguese, esta intersecta a la prolongación de OB en L.
5. $x = HJ$ y $y = AK$ son las proporcionales requeridas.

2.6. Problema (Lema de Arquimedes). *Dado un círculo con centro O y la tangente a este en el punto A (ver Figura 2 (P.3)), se requiere trazar la recta APH de manera que la recta PH sea igual a una recta dada (N).*[6]

A su vez, el problema de *neusis* se resolvió por medio de la curva llamada concoide:

[6]En este caso la construcción es auxiliar para demostrar la proposición 18 del libro *Des spirales* de Arquimedes, que trata sobre la rectificación de la circunferencia.

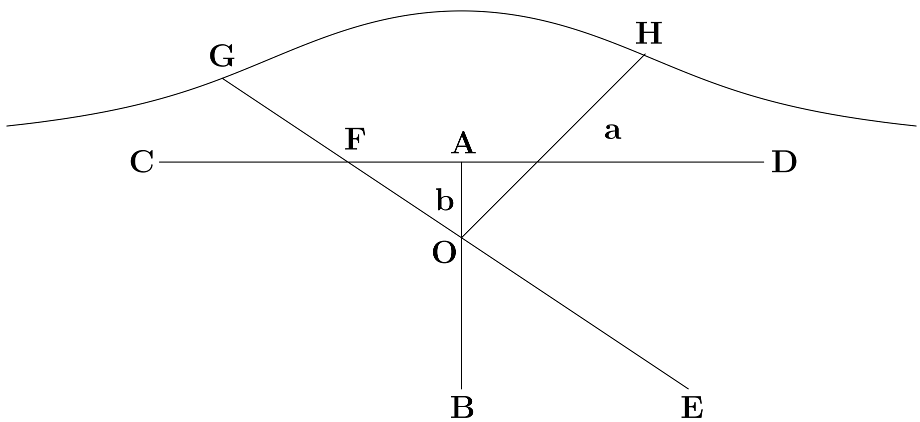

Figura 3. Concoide — Nicomedes

Eutocio describió un instrumento que Nicomedes ha planeado para trazar esta curva; este consiste de dos reglas unidas perpendicularmente AB, CD y una regla movible EG. Las reglas CD y EG tienen ranuras a lo largo de sus líneas centrales; en O sobre AB y en F sobre EG clavijas han sido fijadas, las cuales caen en las ranuras. La distancia $FG = a$ y $AO = b$ son constantes. Cuando la regla EG ha sido movida, el punto G describe la concoide (ver Figura 3).

2.7. Construcción — (Neusis por medio de una concoide).

1. Trazar (ver Figura 4)una concoide con eje a lo largo de L y polo en O (esto puede ser realizado por el instrumento descrito arriba, ajustando la ranuras O y F tal que b sea igual a la distancia de O a L y a es igual al segmento dado); la concoide iteterseca a M en B.
2. Trazar OB, este interseca a M en B.
3. OAB es la línea requerida.

Por otro lado, en la antigüedad la descripción o construcción de estas curvas (la concoide, espiral, cisoide, etc.) Les asoció una naturaleza mecánica y no geométrica. Como por ejemplo, de naturaleza geométrica fueron las secciones

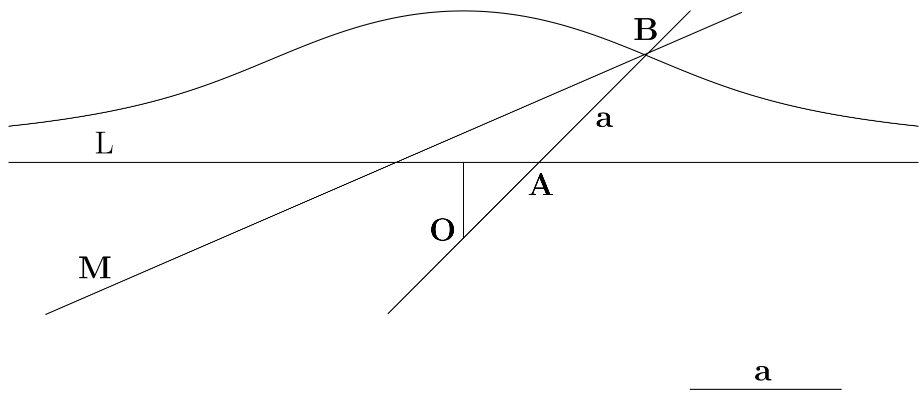

FIGURA 4. Neusis por medio de una concoide — Nicomedes

cónicas (incluyendo el círculo y la línea recta). La pregunta acerca de la naturaleza de las curvas es un pregunta que aborda Descartes en *la Geometría*. Y observa que tanto el círculo como la línea recta para su construcción hacen uso de la regla y el compás, que son aparatos mecánicos. Luego no ve en dónde radica esta distinción en la antigüedad, que no permite aceptarlas como curvas geométricas. Ya que, si las diferenciamos por los medios que nos permiten su construcción, tanto las que son consideradas mecánicas como las que no lo son, como el círculo y la línea, tendrían que consideraseles de naturaleza mecánica. Lo cual no sucedió. Así que, este no es el criterio que llevó a los antiguos a distinguir las curvas mecánicas de las geométricas. Por otro lado, Viète, agrega como un postulado de la geometría, el problema de la neusis. Permitiendo así, que las construcciones que hagan uso de esta construcción. Sean legitimamente aceptadas en la geometría. Esto es, sean consideradas construcciones geométricas, por hacer uso, sólo de principios propios de la geometría.

3. La construcción de las cantidades como condición de posibilidad para el desarrollo de un cálculo con las magnitudes de las cantidades

Vía el *análisis* este a su vez, a través del *diorismos*. Dieron cuenta que la existencia de las cantidades esta asociada con la construcción de un segmento de línea recta. Ya que fueron reducidas a construcciones auxiliares que permitieron, a su vez, dar cuenta que esta asociación con un segmento de línea recta, era *posible*. En el apéndice C veremos como esta reducción de una cantidad a la asociación de la construccion de un segmento de línea recta, permitirá reducir el cálculo de las magnitudes de las cantidades a solo el cálculo de la longitud de los segmentos de línea recta. Por tanto, su construcción (de las cantidades) permitió el desarrollo de un cálculo, es decir, permitió operar con ellas. Por otro lado, dado que la naturaleza de cada una de ellas era distinta, esto debido a la falta de una unidad en la geometría antigua.[7] Ya que la existencia de una unidad, no diferencia a una de otra.

A Descartes, la construcción de la cuarta proporcional[8] le permitió introduciendo una unidad, que el producto de segmentos estuviera bien definido, es decir, que fuera nuevamente un segmento y no un rectángulo como en el caso de la antigüedad. Permitiendo (la introducción de una unidad) reducir el cálculo con las cantidades a solo el cálculo con los segmentos de línea recta.[9] En este sentido es que, no hay diferencia entre: segmentos de línea recta (longitudes), ángulos rectilíneos planos, figuras (áreas) y sólidos (volúmenes). Pero la falta de una unidad no privó a la matemática antigua de esta reducción (el cálculo con las cantidades a solo el cálculo con segmentos de línea recta).[10]

[7]Ver apéndice C.

[8]Sí u denota la unidad, entonces la cuarta proporcional x entre u, a y b cumple: $u : a :: b : x$, es decir, $x = u \cdot x = a \cdot b$. Así, sí u, a, b y x denotan segmentos de línea recta el producto $[x = a \cdot b]$ es nuevamente un segmento de línea recta $[x]$.

[9]Ver apéndice C.

[10]Ver apéndice C.

Apéndice C

El cálculo con las magntiudes de las cantidades en la antigüedad

En la antigüedad las operaciones realizadas sobre los números en la aritmética y las operaciones realizadas sobre los segmentos de línea recta en la geometría, las de la geometría no fueron la traducción de las operaciones con números a los segmentos de línea recta. Dos segmentos de línea recta podían ser unidos (análogo a la suma de números) y un subsegmento de un segmento podía cortarse de este último (análogo a la resta de números). Dos segmentos de línea a y b pueden ser combinados para formar un rectángulo $rect(a, b)$ con lados a y b. Esta operación de alguna forma era análoga a la multiplicación de números en artitmética, sin embargo, difiere de la multiplicación en que el resultado, un rectángulo, era de dimensión diferente que los factores originales, ya que el producto de dos números es de nuevo un número. Así, el producto de segmentos es un rectángulo y no un segmento. Por lo que no hay un elemento unidad con respecto a la formación de rectángulos, en contraste a la multiplicación de números para la cual 1 fue el elemento unidad. La operación análoga de alguna forma a la división de números fue la *aplicación* de un rectángulo R a un segmento de línea recta a, es decir, la construcción de un segmento b tal que $rect(a, b) = R$. Esta operación fue semejante a la división de números en el sentido de que dado la figura R y un segmento de línea a esta provée un segmento b tal que $rect(a, b) = R$. Sin embargo, fue diferente de la división de números , ya que esta operación involucró magnitudes de diferentes dimensiones, en particular una figura dos-dimensional y un segmento de línea.

La falta de una unidad en la geometría y la falta de una multiplicación debido a que la operación producto no esta bien definida, ya que esta operación no es cerrada. Son las limitantes de la geometría con respecto a la multiplicación en la aritmética. Estas operaciones con los segmentos de línea recta: adjuntar y cortar, más que una limitante para la geometría, si las comparamos con las operaciones aritméticas, motivaron el desarrollo de algoritmos para sumar figuras (áreas) y sólidos (volúmenes), ya que si el producto de segmentos es nuevamente un segmento, la suma de figuras se reduce a la suma de segmentos: $Figura\_rectilinea(a, b) = a'$, esta igualdad a condicion de que toda figura rectilínea sea equivalente (en área) a un rectángulo.[1] entonces $rectangulo(a, b) + rectangulo(c, d) = a' + b' = c'$. Análogamente, se puede ver que la suma de sólidos se puede reducir a la suma de segmentos, ya que un sólido sería igual en volumen a $Solido(a, b, c) = abc = a'c = b'$. Así, la suma de áreas y la suma de volúmenes se reduciría a la suma de segmentos de línea recta.

1. Sobre la representación de las cantidades de la geometría

El cálculo del área de un círculo hace necesario asignar un segmento a la circunferencia del círculo. Debido a que se busco encontrar un cuadrado de área igual al círculo. Así, Arquímedes redujo el área del círculo al área de un triángulo rectángulo de altura, el radio y base la circunferencia del círculo. Por otro lado, inscribir un ángulo en un círculo pemite a Euclides, reducir la razón de ángulos a la razón de los arcos de circunferencia que subtienden. Y el problema de trisecar un ángulo, el cual es un caso particular del problema de dividir un ángulo en una razón dada, conduce a los antiguos a construir curvas como la espiral, concoide y cuadratiz. Que permiten, las dos primeras la trisección de un ángulo y la última la división de un ángulo en una razón dada. Ya que por ejemplo, esta última tiene como propiedad principal reducir la razón de ángulos a la razón de segmentos. Así, representar un ángulo como la inclinación de dos líneas rectas, un arco de circunferencia y un segmento; están asociadas con el cálculo de la división de un ángulo en una razón dada para las dos primeras y el cálculo del área de una figura no-rectilínea (el círculo) para la última.

Y el cálculo del área de una figura rectilínea y el volúmen de un solido rectilíneo, conduce a los antiguos a desarrollar métodos para construir áreas en el plano y volúmenes en el espacio. Métodos que permiten a su vez, sumar áreas y volúmenes. Reduciendo el área y volúmen al de un rectángulo y un paralelepipedo rectángular de base cuadrada respectivamente. De esta forma la construcción de la incersión de una media y dos medias proporcionales entre dos segmentos dados: $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ y $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$. Permiten a su vez, reducir el área de un rectángulo y el volúmen de un paralelepipedo rectangular de base cuadrada a la de un cuadrado y un cubo respectivamente ($\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \Rightarrow x^2 = ab$ y $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b} \Rightarrow x^3 = a^2b$). De esta forma, el área de una figura rectilínea y el volúmen de un sólido rectilíneo se reducen a conocer (determinar o construir) el segmento asociado con el cuadrado y el cubo, de área igual a la figura rectilínea y de volúmen igual al sólido rectilíneo respectivamente. La reducción del área a la de un cuadrado y del volúmen a la de un cubo se debe a que esto permite que la suma de áreas y volumenes este bien definida. Ya que, de todos los paralelogramos equivalentes

[1]Conocido como el método de aplicación de una área sobre un segmento de línea recta por yuxtaposición

en área a la figura rectilínea, se escoge el cuadrado, porque el cuadrado permite reducir la comparación de áreas a la comparación de la longitud de un segmento (el lado del cuadrado), como es el caso de los segmentos. Para saber cuando uno es mas grande que otro, superponemos ambos segmentos si coinciden son iguales (en longitud), sino uno es mayor que otro y análogamente, para los volumenes. El cubo, permite reducir la comparación de volúmenes a la comparación de la longitud de un segmento (el lado del cubo). Así, para mostrar que la suma de áreas esta bien definida, si escogemos cualesquiera dos paralelogramos equivalentes en área a la figura rectilínea, podemos suponer s.p.g. que son rectángulos. Ahora, no podemos superponerlos y decir, si no coninciden uno es mayor (en área) que otro, ya que podemos tener dos que no coincidan y sin embargo tener la misma área. Así, lo que nos permite el cuadrado, al igual que la superposición de segmentos, es utilizar el método de superposición para comparar áreas. Hacemos estos rectángulos equivalentes (en área) a un cuadrado, luego superponemos los lados; si coinciden, son iguales. Esto basta para poder mostrar que esta bien definida la suma de áreas. El caso de la suma de volumenes es análogo.

Por tanto, nuevamente el cálculo ahora del área de una figura rectilínea y del volúmen de un sólido rectilíneo. Asociaron estas magnitudes con un segmento de línea recta, que a su vez permitió la representación de estas magnitudes con un cuadrado y un cubo respectivamente. En fin, el cálculo de las magnitudes marca la pauta para el por qué (de la representación de una magnitud) y el comó (se determina la elección de una u otra representación).

Así pues la cuadratiz, la incersión de una y dos medias proporcionales entre dos segmentos dados. Permiten reducir la razón de ángulos a la razón de segmentos, la razón de áreas a la razón de segmentos ($\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \Rightarrow \frac{a^2}{x^2} = \frac{a}{b}$) y la razón de volúmenes a la razón de segmentos ($\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b} \Rightarrow \frac{a^3}{x^3} = \frac{a}{b}$) respectivamente. He ahí, la distinción de los segmentos respecto de las demás magnitudes: ángulos, superficies (áreas) y sólidos (volúmenes). Luego, el cálculo de estas magnitudes nuevamente marca la pauta, para saber por qué elegir el segmento de entre las demás magnitudes. Existen otras operaciones con las áreas y volúmenes como son la media, tercera y cuarta proporcional de áreas y volumenes, que no se sabe (es un pregunta abierta) que se puedan construir. Como la media, tercera y cuarta proporcional para segmentos, en las que se conoce cual es su construcción. La respuesta a esta pregunta es una aportación original, que nos permite ver nuevamente la distinción de los segmentos respecto de las demás magnitudes. Ya que bastan la media, tercera y cuarta proporcional para segmentos para construir las correspondientes para áreas y volúmenes. Por tanto, vemos que la reducción de estos cálculos a solo los cálculos con los segmentos marcan la pauta para saber por qué, hoy, asociamos un número real con un segmento y por qué representamos a los números reales sobre una línea recta.

2. Reducción del cálculo con las magnitudes de las cantidades a solo el cálculo con las longitudes de los segmentos

Los antiguos redujeron la razón de las áreas de las figuras rectilíneas a la razón de segmentos de línea recta:

> En la proposición 13 del libro 13 de los *Elementos*, que trata sobre el problema de inscribir una pirámide en una esfera dada, Euclides hace el uso del siguiente lema: En un triángulo rectángulo $\triangle ABC$ con ángulo recto en C y DC ortogonal a AB. Se cumple $AB : BD :: AC^2 : DC^2$.

Y la razón de volúmenes de los sólidos rectilineos a la razón de segmentos de línea recta:

> En la proposición 59 del libro III de la *La collection mathématique* de Pappus, que trata sobre la demostración y construcción de la duplicación del cubo y de las dos medias proporcionales, reza así: Sea ABC un círculo con centro D; sean ADC, BDE diámetros del círculo perpendiculares entre ellos, y trazamos transversalmente las rectas EMN, $BFGH$ de manera que $FG = GH$; afirmo que $ED^3 : DG^3 :: ED : DM$.

De esta forma, la razón de cantidades más que una cantidad, como lo es la razón de dos números que es nuevamente un número, fue una relación entre cantidades de la misma naturaleza. Es decir, razón entre segmentos de línea recta, razón entre figuras rectilíneas y razón entre sólidos rectilíneos. Por ejemplo, la *cuadratiz*:

> Una línea que extrae su denominación de su propiedad misma ha sido adoptada por Dinostrato, Nicomedes y ciertos autores recientes para efectuar la cuadratura del círculo; la han denominado *la quadratice*, y he aquí su descripción (generación). Colocamos un cuadrado $ABCD$ y trazamos el arco $\widehat{BED}$ con centro en A. Movemos la recta AB de manera que el punto A permanezca fijo, el punto B se desplace siguiendo el arco $\widehat{BED}$, y que la recta BD

permanezca siempre paralela a la recta AD, acompañando al punto B que se desplaza siguiendo la recta AB. Además, ya que la recta AB se ha movido de manera uniforme, el punto B recorre el ángulo comprendido bajo las rectas BA y AD, es decir, ya que el punto B recorre el arco $\widehat{BED}$ al mismo tiempo que la recta BC de desplaza a lo largo de la rectaBA, es decir, ya que el punto B se desplaza siguiendo la recta BA. Será evidente que las rectas AB y BC coincidirán simultáneamente la una y la otra con la recta AD en H, En consecuencia, las rectas AB y BC se cortarán mutuamente en un punto que es continuamente transportado con ellas, el cual describirá una línea cóncava de un mismo lado, BFH, en el mismo espacio comprendido entre las rectas BA, AD y el arco $\widehat{BED}$. Línea que parece cómoda para encontrar un cuadrado equivalente a un círculo dado. Su propiedad principal es tal que, si una recta cualquiera AFE es trazada transversalmente al arco, la recta BA será a la recta FG como el arco total $\widehat{BED}$ es al arco $\widehat{ED}$. Pues eso resulta evidente de la generación de la línea.[2]

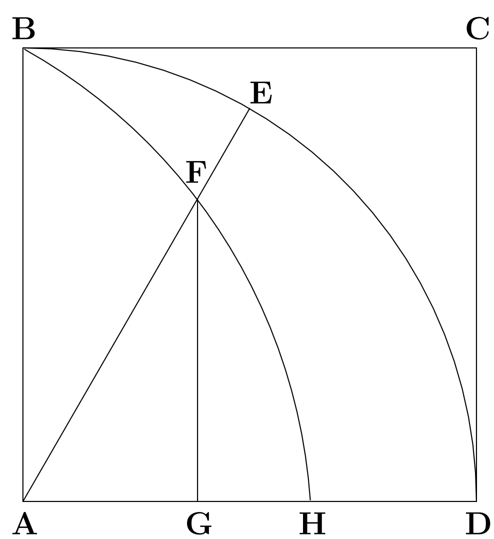

FIGURA 1. Cuadratiz — Pappus

Redujo la razón de ángulos rectilíneos a la razón de segmentos rectilíneos, esto a su vez, permitió la trisección de un ángulo. Así, el cálculo de la cantidades

[2] [**?**] pp. 191-192.

continuas (propias de la geometría) fue reducido al cálculo de los segmentos de línea recta. Ya que los problemas de la duplicación de un cuadrado, duplicación de un cubo y trisección de un ángulo, donde esta implícito el desarrollo de un cálculo de las áreas, de los volumenes y de los ángulos respectivamente. Fue reducido a la construcción de la media proporcional entre dos segmentos de línea recta dados, de la inserción de las dos medias proporcionales entre dos segmentos de línea recta dados y de la cuadratiz respectivamente. Así la media proporcional $[x]$ entre dos segmentos de línea recta $[a,\, b]$ permite reducir la razón de cuadrados a la razon de segmentos de línea recta:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \Rightarrow \left(\frac{a}{x}\right)^2 = \frac{a}{x} \cdot \frac{a}{x} = \frac{a}{x} \cdot \frac{x}{b} = \frac{a}{b} \ \therefore\ \frac{a^2}{x^2} = \frac{a}{b},$$

la inserción de las dos medias proporcionales $[x,\, y]$ entre dos segmentos de línea recta $[a,\, b]$ permite reducir la razón de cubos a la razón de segmentos de línea recta:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b} \Rightarrow \left(\frac{a}{x}\right)^3 = \frac{a}{x} \cdot \frac{a}{x} \cdot \frac{a}{x} = \frac{a}{x} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{b} = \frac{a}{b} \ \therefore\ \frac{a^3}{x^3} = \frac{a}{b}$$

y cuadratiz permite reducir la razón de ángulos a la razón de segmentos de línea recta:

$$\frac{BA}{FG} = \frac{\widehat{BED}}{\widehat{ED}}.$$

Bibliografía

[Al-khayyām 1999] Al-khayyām, *d'algèbre et d'al-muqābala* (tr. R.Rashed, B.Vahabzadeh), Paris, Blanchard, 1999.

[Arquímedes 1971] Archimède, *Archiméde* (ed. tr. Charles Mugler), 4 vols., Paris, Les Belles Letres, 1971.

[Bernoulli 1702] Bernoulli, Johannis, *Solution d'un probleme: concernat le calcul int'egral, avec quelques abreg'es par raport à ce calcul*, Paris, 1702, pp. 289-296.

[Bos 2001] Bos, Henk J.M., *Redefining Geometrical Exactness, Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction*, Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, New York, Springer, 2001.

[Cardano 1968] Cardano, Girolamo, *The great art or the rules of algebra* (ed. tr. Richard Witmer), Cambridge, MA, 1968.

[Conics 1997] Taliaferro, R. Catesby.,*Apollonius of Perga Conics, Books I-III*, Green Lion Press.

[Descartes 1954] Descartes, René, *The geometry of René Descartes* (tr. ed. D.E. Smith and M.L. Lathan), New York, Dover, 1954.

[Euclides 1980] Euclid, *The Medieval Latin Translation of the Data of Euclid.* (ed. tr. Shuntaro Ito), Tokyo, University of Tokyo Press, 1980.

[Euclides 1991] Euclides, *Elementos, libros I-IV* (tr. intr. not. María Luisa Puertas C.,Luis Vega), Madrid, Gredos, 1991.

[Euclides 1994] Euclides, *Elementos, libros V-IX* (tr. not. María Luisa Puertas C), Madrid, Gredos, 1994.

[Euclides 1996] Euclides, *Elementos, libros X-XIII* (tr. not. María Luisa Puertas C), Madrid, Gredos, 1996.

[Euler 1749] Euler, Leonhard, *De la controverse entre Mrs. leibnitz & bernoulli sur les logarithmes des nombres negatifs et imaginaires.*, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 1749, pp. 139-179.

[Euler 1751] Leonhard Euler, *Recherches sur les racines imaginaires des equations.* Mémoires de lácadémie des sciences de Berlin 5, 1751, pp. 222-288.

[Euler 1796] Euler, Léonard., *Introduction à L'Analyse Infinit'esimale* Vol.1., pp. 69-106.

[Foncenex 1760] Foncenex, M. le chev. daviet, *Reflexions sur les quantites imaginaires.*, 1760, pp. 113-146.

[Gauss 1799] Carl Friedrich Gauss, *New Proof of The Theorem That Every Algebraic Rational Integral Function In One Variable can be Resolved into Real Factors of the First or the Second Degree.* pp. 1-25.

[Kant 1992] Kant, Immanuel., *Ensayo para introducir las magnitudes negativas en la filosofia.*,(Opusculos de filosofia natural, Alianza Editorial, pp. 115-164)

[Mahoney 1968] Mahoney, Michael S., "Another look at Greek geometrical analysis,"*Archive for history of exact sciences*, 5, 1968, pp. 318-348.

[Pappus 1982] Pappus, *La Collection Mathématique* (tr. ed. Paul Ver Eecke, re), 2 vols., Paris, Blanchard, 1982.

[Playfair 1778] Playfair, John, "On the arithmetic of impossible quantities,"*Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 68, 1778, pp. 318-343.

[Smith 1959] Smith, David Eugene., *A Source Book In Mathematics*, New York, Dover, 1959, pp. 46-54.

[Viète 2006] Viète, Francois, *The Analytic Art, nine studies in algebra, geometry and trigonometry* (tr. T. Richard Witmer), New York, Dover, 2006.