UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

LOS ESPACIOS PRE–UNIFORMES Y SUS COMPLETACIONES

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:

RUBÉN SANTOS MANCIO TOLEDO

DIRECTOR DE TESIS: DR. ADALBERTO GARCÍA–MÁYNEZ CERVANTES

MÉXICO D. F. NOVIEMBRE DE 2010

Agradecimientos

Este modesto trabajo no habría sido realizado sin la guía académica y sin el valioso y desinteresado apoyo de mi asesor y amigo el Dr. **Adalberto García–Máynez C.**, *por ello le hago patente aquí todo mi agradecimiento. Expreso también mi sincero agradecimiento al Dr.* **Marcelo Aguilar** *por la deferencia con la que siempre me ha tratado y por la ayuda que me ha brindado para salvar los escollos que en mis estudios doctorales se presentaron. Agradezco a mis sinodales los doctores* **Salvador García F., Isabel Puga E., Angel Tamaríz M., Fidel Casarruvias S.** *y* **Richard Wilson R.** *sus consejos y revisión de esta tesis.*

Me considero en deuda con el Dr. **Juan José Montellano Ballesteros** *por el tiempo que invirtió en mi preparación para la acreditación del examen general de Teoría de Gráficas. Por último, a la Sra.* **Laura Herrera** *de la oficina de posgrado de la Facultad de Ciencias, mi más sincero agradecimiento por su amabilidad y su comprensión por mi particular estado de salud.*

A todos ellos ¡MIL GRACIAS!

Índice general

Capítulo 0

Introducción

Es ampliamente conocido que un espacio metrizable puede ser dotado de métricas distintas que, si bien inducen la misma topología, difieren en otros aspectos. Por ejemplo, un conjunto acotado o dos conjuntos distantes respecto a una de las métricas pueden no serlo respecto a la otra. Una forma alternativa de definir una métrica es a través de una familia de cubiertas del espacio, una por cada número positivo ε. Los elementos de la "ε–cubierta" son los "ε–discos", es decir, los abiertos que engloban a los puntos que distan de un centro en menos de ε unidades. Generalizando las propiedades de las ε–cubiertas, podemos llegar a estructuras análogas en espacios no metrizables. Así surgieron las estructuras uniformes. Véase el artículo de Weil [37] y el trabajo de Tukey [35]. Ambos trabajos son de suma importancia y cubren dos puntos de vista sobre las estructura uniformes, pues mientras que Weil lo hace mediante seudométricas, Tukey lo hace con cubiertas. La obra de Howes [21], por su parte, representa uno de las propuestas más recientes por poner al alcance de los estudiantes no graduados un libro de texto que da cabida en sus páginas a un estudio exhaustivo de las estructuras uniformes. En cuanto al problema de la completación, K. Morita presenta en [29], cinco problemas no resueltos (1970) sobre las siguientes dos preguntas:

"¿Cuál es la condición necesaria y suficiente para que un espacio uniforme tenga una completación paracompacta".

"¿Cuál es la condición necesaria y suficiente para que un espacio de Tychonoff tenga una completación topológica y de Lindelof?". [1]

[1] Aquí Morita, refiere por completación topológica de un espacio uniforme a su completación respecto a la fina uniformidad.

Por otra parte, cada estructura uniforme determina una topología, pero los conceptos de conjuntos acotados o conjuntos distantes pueden ser expresados de una manera más general. Se utilizan, en esta tarea, propiedades de las cubiertas en la propia estructura. Las topologías determinadas por las estructuras uniformes, son siempre completamente regulares, que si bien abarcan una clase considerablemente más amplia que la clase de los metrizables, pero estas topologías dejan fuera a muchos espacios importantes para los topólogos.

Las estructuras pre–uniformes presentadas en esta tesis se aplican a cualquier espacio topológico con una mínima propiedad: *Todo subconjunto abierto es la unión de subconjuntos cerrados*. Esta propiedad se denota como R_0 y es más general que la propiedad T_1: *Todo subconjunto finito es cerrado*. Por lo tanto, la clase de espacios de Hausdorff queda incluida dentro de la clase de espacios R_0.

El concepto de completitud tiene relevancia en las estructuras pre–uniformes. Asímismo, la extensión de un espacio pre–uniforme a uno completo, presenta ciertas dificultades y no es tan contundente como en espacios uniformes, en donde cualquier estructura uniforme se puede completar y de manera esencialmente única. Sin embargo, las posibilidades de que un espacio pre–uniforme pueda o no ser completado y de serlo, de más de una manera, enriquece la teoría y la vuelve más interesante.

En el capítulo primero, definimos los conceptos básicos de la teoría: *Pre–uniformidades, tipos importantes de pre–uniformidades, subespacios de espacios pre–uniformes, continuidad uniforme, filtros de Cauchy y tipos especiales de filtros de Cauchy*. En el segundo capítulo, nos concentramos en el estudio de espacios pre–uniformes completos o totalmente acotados y en el último capítulo, analizamos las completaciones y propiedades universales de los diversos espacios pre–uniformes.

Consideramos que muchos de los resultados presentados en los últimos dos capítulos son originales, y si bien, se encuentran mezclados entre resultados ya conocidos en razón del desarrollo de la teoría, pensamos que contribuyen al estudio de ciertos espacios, como los T_2–cerrados o regular–cerrados.

Finalmente incluimos dos apéndices, el primero sobre espacios T_2–cerrados y el segundo sobre la extensión de Katětov de un espacio de Hausdorff.

Agradecemos al Dr. Salvador García Ferreira sus valiosos comentarios y estamos en deuda con el Dr. Richard G. Wilson R. por hacernos ver la conveniencia de anexar ejemplos concretos sobre la extensión de un espacio T_2–pre-uniforme distinta de la extensión de Katětov.

Capítulo 1

Pre–Uniformidades y Semi–Uniformidades

1.1. Pre–Uniformidades

Definición 1.1.1

Sea X *un conjunto no vacío.*

1) *Si* α *es una cubierta de* X *y* $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{X}$, *entonces se define la* ***estrella*** *de* B *con respecto a* α *como:*

$$\mathsf{St}(\mathrm{B}, \alpha) = \cup \{\mathrm{L} \in \alpha : \ \mathrm{B} \cap \mathrm{L} \neq \varnothing\} \tag{1.1}$$

2) *Sean* α *y* β *dos cubiertas de* X. *Se dice que* α *es un* ***refinamiento*** *de* β *si para cada* $\mathrm{U} \in \alpha$ *existe* $\mathrm{V} \in \beta$ *tal que* $\mathrm{U} \subseteq \mathrm{V}$. *En símbolos se escribe* $\alpha \leq \beta$.

3) *Sea* $\mathcal{U}$ *una familia no vacía de cubiertas de* X. $\mathcal{U}$ *recibe el nombre de* ***base de pre–uniformidad*** *en* X *si cada par de elementos de la familia tiene un refinamiento común que también es miembro de la familia, es decir:*

   - *Dados* $\alpha, \beta \in \mathcal{U}$, *existe* $\gamma \in \mathcal{U}$ *tal que* $\gamma \leq \alpha$ *y* $\gamma \leq \beta$

4) *Una* ***pre–uniformidad*** *en* X *es una base de pre–uniformidad* $\mathcal{U}$ *en* X *tal que si* γ *es cubierta de* X *y existe* $\alpha \in \mathcal{U}$ *con* $\alpha \leq \gamma$, *entonces* $\gamma \in \mathcal{U}$.

5) *Un* ***espacio pre–uniforme*** *es una pareja* $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$, *en donde* X *es un conjunto no vacío y* $\mathcal{U}$ *es una pre–uniformidad en* X.

Definición 1.1.2

1) *Sea $\mathcal{U}$ una base de pre–uniformidad en X. La* ***topología generada*** *por $\mathcal{U}$, denotada $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$, se define mediante la condición:*

   - $\mathrm{L} \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ *si y sólo si para toda $p \in \mathrm{L}$, existe $\alpha_p \in \mathcal{U}$ tal que* $\mathsf{St}(p, \alpha_p) \subseteq \mathrm{L}$.

2) *Sean $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ bases de pre–uniformidad en X. Se dice que $\mathcal{B}_1$* ***precede*** *a $\mathcal{B}_2$, lo que se denota por $\mathcal{B}_1 \leq \mathcal{B}_2$, si para toda $\alpha \in \mathcal{B}_1$ existe $\beta \in \mathcal{B}_2$ tal que $\beta \leq \alpha$.*

3) *Sean $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ bases de pre–uniformidad en X. $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ se dicen* ***equivalentes****, lo que se denota: $\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2$, si para toda $\alpha \in \mathcal{B}_1$ existe $\beta \in \mathcal{B}_2$ tal que $\beta \leq \alpha$, y para toda $\beta \in \mathcal{B}_2$ existe $\gamma \in \mathcal{B}_1$ tal que $\gamma \leq \beta$.*

Observación 1.1.3

$i)$ *Si $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ son bases de pre–uniformidad en X y si $\mathcal{B}_1 \leq \mathcal{B}_2$, entonces $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_1} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{B}_2}$. También se tiene que $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$ implica $\mathcal{B}_1 \leq \mathcal{B}_2$.*

$ii)$ *De la Definición 1.1.2, se deduce que $\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2$ si sólo si $\mathcal{B}_1 \leq \mathcal{B}_2$ y $\mathcal{B}_2 \leq \mathcal{B}_1$.*

$iii)$ *El "ser equivalentes" es una* ***relación de equivalencia*** *en el conjunto de todas las bases de pre–uniformidad sobre el conjunto X.*

Definición 1.1.4

Sea $\mathcal{B}$ una base de pre–uniformidad en X. Se define:

$$\mathcal{B}^+ = \{\gamma \,:\, \gamma \text{ es cubierta de } \mathrm{X} \text{ y existe } \alpha \in \mathcal{B} \text{ tal que } \alpha \leq \gamma\}\,. \tag{1.2}$$

Observemos que $\mathcal{B}$ es pre–uniformidad si y sólo si $\mathcal{B} = \mathcal{B}^+$.

Tres resultados inmediatos de esta última observación son los siguientes:

Proposición 1.1.5

Si $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son bases de pre–uniformidad en un conjunto X, se tiene:

1) *$\mathcal{B}_1 \leq \mathcal{B}_2$ si y sólo si $\mathcal{B}_2^+ \subseteq \mathcal{B}_1^+$. Por tanto $\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2$ si y sólo si $\mathcal{B}_1^+ = \mathcal{B}_2^+$.*

2) *$\mathcal{B} \sim \mathcal{B}^+$.*

3) *Si $\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2$ con $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_1^+$ y $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_2^+$, entonces $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$*

Demostración.

1) Supongamos que $\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2$. Entonces $\mathcal{B}_2^+ \subseteq \mathcal{B}_1^+ \subseteq \mathcal{B}_2^+$ y $\mathcal{B}_1^+ = \mathcal{B}_2^+$. Recíprocamente, $\mathcal{B}_1^+ = \mathcal{B}_2^+$ implica $\mathcal{B}_2^+ \subseteq \mathcal{B}_1^+$ y $\mathcal{B}_1^+ \subseteq \mathcal{B}_2^+$ y, por tanto, $\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2$

2) Es inmediata. ■

Corolario 1.1.6

Sea X un conjunto no vacío. Sea $\mathfrak{D}$ el conjunto de todas la bases de pre–uniformidad sobre X y sea $\mathfrak{D}/\sim$ el conjunto cociente que consta de todas las clases de equivalencia de la relación dada en la Definición 1.1.2. Entonces cada clase de equivalencia contiene una sola pre–uniformidad.

Demostración. Para cada base de pre–uniformidad $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}^+$ es una pre–uniformidad equivalente a $\mathcal{B}$. Por la Proposición 1.1.5 inciso 3, dos pre–uniformidades equivalentes coinciden. ■

Por otra parte, nótese que el recíproco de la Observación 1.1.3 (i), no es válido, es decir, $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_1} = \mathcal{T}_{\mathcal{B}_2} \not\Rightarrow \mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2$.

Definición 1.1.7

1) *Sea $\mathcal{B}$ base de pre–uniformidad en el conjunto X.*

   $a)$ *$\mathcal{B}$ se dice **abierta**, si cada $\alpha \in \mathcal{B}$ está contenida en $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.*

   $b)$ *$\mathcal{B}$ se dice **admisible**, si es equivalente a una base de pre–uniformidad abierta.*

2) *La base de pre–uniformidad $\mathcal{U}$, en el espacio topológico $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$, se dice que es **compatible** si $\mathcal{T}_{\mathcal{U}} = \mathcal{T}$.*

Teorema 1.1.8

Todo espacio topológico $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ que sea R_0[1] admite una base de pre–uniformidad abierta $\mathcal{U}$ que induce la topología $\mathcal{T}$. Esto es, todo espacio topológico R_0 tiene una base de pre–uniformidad admisible y compatible.

[1] Un espacio topológico $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ se dice que cumple el axioma de separación R_0 si todo subconjunto abierto de X es unión arbitraria de subconjuntos cerrados de X.

Demostración. Sea $\mathfrak{B}$ la familia de todas las cubiertas abiertas de X. Claramente $\mathfrak{B}$ es una base de pre–uniformidad en X y $\mathcal{T}_{\mathfrak{B}} \subseteq \mathcal{T}$. Por otro lado, por ser X un espacio R_0, $p \in \mathrm{V} \in \mathcal{T}$ implica $C\ell(\{p\}) \subseteq \mathrm{V}$. Por tanto, si $\alpha = \{\mathrm{V}, \mathrm{X} \setminus C\ell(\{p\})\}$, se tiene que $\mathsf{St}(p, \alpha) = \mathrm{V}$ y por ello $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_{\mathfrak{B}}$. ∎

Es posible establecer un recíproco del Teorema 1.1.8.

Teorema 1.1.9

Si $\mathcal{B}$ *es base de pre–uniformidad abierta en* X, *entonces* $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ *es* R_0.

Demostración. Bastará con demostrar que para toda $\alpha \in \mathcal{B}$ y para todo $\mathrm{C} \subseteq \mathrm{X}$ se tiene que

$$C\ell(\mathrm{C}) \subseteq \mathsf{St}(\mathrm{C}, \alpha).$$

En efecto, si $p \in C\ell(\mathrm{C})$ y $p \in \mathrm{L} \in \alpha$, entonces $\mathrm{L} \cap \mathrm{C} \neq \varnothing$ (pues L es abierto y $p \in C\ell(\mathrm{C})$). Por tanto, $p \in \mathrm{L} \subseteq \mathsf{St}(\mathrm{C}, \alpha)$ y $C\ell(\mathrm{C}) \subseteq \mathsf{St}(\mathrm{C}, \alpha)$. ∎

Finalizamos esta sección con el siguiente resultado:

Proposición 1.1.10

Si $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$ *es un espacio pre–uniforme admisible, entonces dada* $\alpha \in \mathcal{U}$, *existe* $\beta \in \mathcal{U}$ *tal que* $\beta \leq \{\mathrm{int}_{\mathcal{T}_{\mathcal{U}}}(\mathrm{L}) \,:\, \mathrm{L} \in \alpha\}$.

1.2. Semi–Uniformidades

Comenzamos esta sección con una definición que nos ayudará a comprender los conceptos principales.

Definición 1.2.1

Sean X *un conjunto no vacío y* α *una cubierta de* X. *Se definen:*

$$\alpha^* = \{\mathsf{St}(\mathrm{A}, \alpha) \,:\, \mathrm{A} \in \alpha\} \tag{1.3}$$

y

$$\alpha^{\triangle} = \{\mathsf{St}(x, \alpha) \,:\, x \in \mathrm{X}\}. \tag{1.4}$$

Definición 1.2.2

Sea $\mathcal{B}$ una base de pre–uniformidad en X.

1) *Se dice que $\mathcal{B}$ es* ***base de semi–uniformidad*** *en X, si para toda $\alpha \in \mathcal{B}$, existe $\beta \in \mathcal{B}$ con la propiedad:*

   SU) *Para toda $\mathrm{B} \in \beta$ existe $\gamma_{\mathrm{B}} \in \mathcal{B}$ y $\mathrm{A}_{\mathrm{B}} \in \alpha$ tales que $\mathsf{St}(\mathrm{B}, \gamma_{\mathrm{B}}) \subseteq \mathrm{A}_{\mathrm{B}}$.*

2) *Se dice que $\mathcal{B}$ es* ***base de uniformidad*** *en X, si para toda $\alpha \in \mathcal{B}$, existe $\beta \in \mathcal{B}$ con la propiedad:*

   U) *Para toda $\mathrm{B} \in \beta$, existe $\mathrm{A}_{\mathrm{B}} \in \alpha$ tal que $\mathsf{St}(\mathrm{B}, \beta) \subseteq \mathrm{A}_{\mathrm{B}}$. Equivalentemente, si $\beta^* \leq \alpha$.*

3) *La Definición 1.1.4, nos permite dar dos definiciones más:*

   a) *Una* ***semi–uniformidad*** *en el conjunto X es una base de semi–uniformidad $\mathcal{B}$ tal que $\mathcal{B} = \mathcal{B}^+$.*

   b) *Una* ***uniformidad*** *en el conjunto X es una base de uniformidad $\mathcal{B}$ tal que $\mathcal{B} = \mathcal{B}^+$.*

4) *Un* ***espacio semi–uniforme*** *es una pareja $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$, en donde X es un conjunto no vacío y $\mathcal{U}$ es una semi–uniformidad en X.*

5) *Un* ***espacio uniforme*** *es una pareja $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$, en donde X es un conjunto no vacío y $\mathcal{U}$ es una uniformidad en X.*

Lema 1.2.3

Sea X un conjunto no vacío. Supongamos que para cada $x \in \mathrm{X}$ existe una base de filtro η_x en X con las siguientes propiedades:

i) *Cada $\mathrm{N} \in \eta_x$ es un subconjunto de X que contiene a x.*

ii) *Si $\mathrm{N} \in \eta_x$, existe $\mathrm{N}' \in \eta_x$ tal que para cada $y \in \mathrm{N}'$, existe $\mathrm{N}'' \in \eta_y$ tal que $\mathrm{N}'' \subseteq \mathrm{N}$.*

Definamos

$$\mathcal{T} = \{\, \mathrm{V} \subseteq \mathrm{X} : \text{ si } x \in \mathrm{V} \text{ existe } \mathrm{N} \in \eta_x \text{ tal que } \mathrm{N} \subseteq \mathrm{V} \,\}\,. \tag{1.5}$$

Entonces, $\mathcal{T}$ es una topología en X y para cada $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$, se tiene que

$$\operatorname{int}_{\mathcal{T}}(\mathrm{A}) = \{\, x \in \mathrm{A} : \text{ existe } \mathrm{N} \in \eta_x \text{ tal que } \mathrm{N} \subseteq \mathrm{A} \,\}\,. \tag{1.6}$$

Demostración. Es claro que $\mathcal{T}$ es una topología para X. Probaremos únicamente la fórmula (1.6). Llamemos B al conjunto

$$\{x \in \mathrm{A} : \text{ existe } \mathrm{N} \in \eta_x \text{ tal que } \mathrm{N} \subseteq \mathrm{A}\}.$$

Como $\mathrm{int}_{\mathcal{T}}(\mathrm{A}) \in \mathcal{T}$, es obvio que $\mathrm{int}_{\mathcal{T}}(\mathrm{A}) \subseteq \mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$. Por tanto, para probar la inclusión $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{int}_{\mathcal{T}}(\mathrm{A})$, sólo debemos demostrar que $\mathrm{B} \in \mathcal{T}$. Sea $x \in \mathrm{B}$. Por hipótesis existe $\mathrm{N} \in \eta_x$ tal que $\mathrm{N} \subseteq \mathrm{A}$. Sea $\mathrm{N}' \in \eta_x$ como en la condición (ii). Si $y \in \mathrm{N}'$, existe $\mathrm{N}'' \in \eta_y$ tal que $\mathrm{N}'' \subseteq \mathrm{N}$. Como $\mathrm{N} \subseteq \mathrm{A}$, deducimos que $\mathrm{N}' \subseteq \mathrm{B}$ y, por tanto, $\mathrm{B} \in \mathcal{T}$. ∎

Corolario 1.2.4 (Corolario 1 del Lema 1.2.3)

Sea $\mathcal{B}$ una base de semi–uniformidad en X. Para cada $x \in \mathrm{X}$, sea

$$\eta_x = \{\mathsf{St}(x,\alpha) : \alpha \in \mathcal{B}\}.$$

Si $\mathrm{N} = \mathsf{St}(x,\alpha) \in \eta_x$ y $\beta \in \mathcal{U}$ es como en la condición $\mathbf{SU}$ de la Definición 1.2.2, entonces $\mathrm{N}' = \mathsf{St}(x,\beta)$ satisface la condición (ii) del Lema 1.2.3.

Demostración. Si $y \in \mathsf{St}(x,\beta)$ y $\mathrm{B} \in \beta$ es tal que $x, y \in \mathrm{B}$, entonces existen $\gamma_{\mathrm{B}} \in \mathcal{B}$ y $\mathrm{A}_{\mathrm{B}} \in \alpha$ tales que $\mathsf{St}(\mathrm{B},\gamma_{\mathrm{B}}) \subseteq \mathrm{A}_{\mathrm{B}}$. De donde,

$$\mathsf{St}(y,\gamma_{\mathrm{B}}) \subseteq \mathsf{St}(\mathrm{B},\gamma_{\mathrm{B}}) \subseteq \mathrm{A}_{\mathrm{B}} \subseteq \mathsf{St}(x,\alpha).$$

Basta con definir $\mathrm{N}'' = \mathsf{St}(y,\gamma_{\mathrm{B}})$ para verificar la condición (ii) del lema. ∎

Corolario 1.2.5 (corolario 2 del Lema 1.2.3)

Sea X un conjunto no vacío y sea $\mathcal{B}$ una base de pre–uniformidad en X. Entonces,

$$\mathcal{B} \text{ satisface } \mathbf{U} \Rightarrow \mathcal{B} \text{ satisface } \mathbf{SU} \Rightarrow \mathcal{B} \text{ es admisible.}$$

Demostración. Si $\mathcal{B}$ satisface $\mathbf{U}$ y $\alpha \in \mathcal{B}$, la familia

$$\mathring{\alpha} = \{\mathrm{int}\,(\mathrm{L}) : \mathrm{L} \in \alpha\}$$

es también cubierta de X y

$$\mathring{\mathcal{B}} = \left\{\mathring{\alpha} : \alpha \in \mathcal{U}\right\}$$

es equivalente a $\mathcal{B}$. Por tanto, $\mathcal{B}$ es admisible. ∎

Observación 1.2.6

Todo espacio semi–uniforme $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$ *es admisible, es decir,* $\mathcal{U}$ *es equivalente a una base de semi–uniformidad abierta.*

Demostración. Es inmediata del Corolario 1.2.5 ■

Un resultado ya conocido es el siguiente:

Teorema 1.2.7

Un espacio topológico X *admite una base de semi–uniformidad compatible si y sólo si* X *es regular.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Supongamos que $p \in \mathrm{V} \in \mathcal{T}$, en donde T es la topología de X. Como $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$, existe $\alpha \in \mathcal{U}$ tal que $\mathsf{St}(p, \alpha) \subseteq \mathrm{V}$. Por la propiedad $\mathbf{SU}$, existe $\beta \in \mathcal{U}$ tal que para cada $\mathrm{B} \in \beta$, existen $\gamma_{\mathrm{B}} \in \mathcal{U}$ y $\mathrm{A_B} \in \alpha$ con la propiedad $\mathsf{St}(\mathrm{B}, \gamma_{\mathrm{B}}) \subseteq \mathrm{A_B}$. Escojamos $\mathrm{B} \in \beta$ de manera que $p \in \mathrm{int}(\mathrm{B})$ (recordemos que para cada $\beta \in \mathcal{U}$, $\overset{\circ}{\beta} = \{\mathrm{int}(\mathrm{B}) \ : \mathrm{B} \in \beta\}$ también cubre a X). Por tanto, si $\mathrm{W} = \mathrm{int}(\mathrm{B})$, tenemos:

$$p \in \mathrm{W} \subseteq C\ell(\mathrm{W}) \subseteq C\ell(\mathrm{B}) \subseteq \mathsf{St}(\mathrm{B}, \gamma_{\mathrm{B}}) \subseteq \mathrm{A_B} \subseteq \mathsf{St}(p, \alpha) \subseteq \mathrm{V}$$

y así X es un espacio regular.

$\Leftarrow$) Sea $\mathcal{U}$ la familia de todas las cubiertas abiertas de X. Si $\alpha \in \mathcal{U}$, podemos usar la regularidad de $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ y hallar $\beta \in \mathcal{U}$ tal que:

$$\{C\ell(\mathrm{B}) \ : \ \mathrm{B} \in \beta\} \leq \alpha.$$

Para cada $\mathrm{B} \in \beta$, escojamos $\mathrm{A_B} \in \alpha$ tal que $C\ell(\mathrm{B}) \subseteq \mathrm{A_B}$ y sea:

$$\gamma_{\mathrm{B}} = \{\mathrm{A_B}, \mathrm{X} \setminus C\ell(\mathrm{B})\}.$$

Claramente $\gamma_{\mathrm{B}} \in \mathcal{U}$ y $\mathsf{St}(\mathrm{B}, \gamma_{\mathrm{B}}) = \mathrm{A_B}$. Por tanto, $\mathcal{U}$ es una base de semi–uniformidad en X compatible con $\mathcal{T}$. ■

1.3. Subespacios de Espacios Pre–Uniformes

Razonando de manera semejante a los subespacios topológicos se tiene que si $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$, con $\mathrm{X} \neq \varnothing$, y $\mathcal{U}$ es base de pre–uniformidad en X, entonces

$$\mathcal{U}_{\mathrm{A}} = \{\alpha|_{\mathrm{A}} : \alpha \in \mathcal{U}\}. \tag{1.7}$$

es base de pre–uniformidad en A. La pregunta que surge de inmediato es:

$$¿\,\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathrm{A}}} = \mathcal{T}_{\mathcal{U}}|_{\mathrm{A}}\,?$$

La respuesta es la siguiente:

Teorema 1.3.1

Sea X un conjunto no vacío, $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$ y $\mathcal{U}$ base de pre–uniformidad en X. Si $\mathcal{U}$ es admisible, entonces $\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathrm{A}}} = \mathcal{T}_{\mathcal{U}}|_{\mathrm{A}}$, en donde $\mathcal{U}_{\mathrm{A}}$ está dada por la ecuación 1.7.

Demostración. Sean $\mathrm{L} \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathrm{A}}}$, $p \in \mathrm{L}$. Entonces existe una cubierta $\alpha \in \mathcal{U}$ tal que $\mathsf{St}(p, \alpha|_{\mathrm{A}}) \subseteq \mathrm{L}$. Pero

$$\mathsf{St}(p, \alpha|_{\mathrm{A}}) = (\mathsf{St}(p, \alpha)) \cap \mathrm{A}. \tag{1.8}$$

De donde $\mathsf{St}(p, \alpha)$ es vecindad de p en $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ si $\mathcal{U}$ es admisible. Por lo tanto, si $\mathcal{U}$ es admisible, $\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathrm{A}}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{U}}|_{\mathrm{A}}$. La inclusión contraria siempre se tiene usando la Ecuación 1.8. En efecto, si $\mathrm{W} \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$, entonces $\mathrm{W} \cap \mathrm{A} \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathrm{A}}}$, pues siempre que $p \in \mathrm{W} \cap \mathrm{A}$, existe $\alpha \in \mathcal{U}$ tal que $\mathsf{St}(p, \alpha) \subseteq \mathrm{W}$ de esta forma, por la ecuación 1.8, $\mathsf{St}(p, \alpha|_{\mathrm{A}}) \subseteq \mathrm{W} \cap \mathrm{A}$, por lo que $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}|_{\mathrm{A}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathrm{A}}}$. ■

1.4. Continuidad Uniforme

Definición 1.4.1

Sean $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$, $(\mathrm{Y}, \mathcal{V})$ dos espacios pre–uniformes y sea $\varphi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ una función.

1) *Se dice que φ es **uniformemente continua** si para todo $\varepsilon \in \mathcal{V}$,*

$$\delta = \left\{\varphi^{-1}(\mathrm{L}) \,:\, \mathrm{L} \in \varepsilon\right\} \in \mathcal{U}.$$

2) *Se dice que φ es un* ***unimorfismo*** *si φ es una biyección y φ y φ^{-1} son ambas uniformemente continuas. En este caso se dice que los espacios $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$ y $(\mathrm{Y}, \mathcal{V})$ son* ***unimórficos****.*

3) *Se dice que φ es un* ***encaje unimórfico*** *si φ es un unimorfismo de $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$, sobre un subespacio denso de $(\mathrm{Y}, \mathcal{V})$.*

De la Definición 1.4.1, es inmediata la siguiente relación entre continuidad uniforme y continuidad en el sentido tradicional. Esto nos recuerda a los espacios métricos.

Teorema 1.4.2

Sean $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$, $(\mathrm{Y}, \mathcal{V})$ dos espacios pre–uniformes. Si $\varphi : (\mathrm{X}, \mathcal{U}) \to (\mathrm{Y}, \mathcal{V})$ es una función uniformemente continua, entonces $\varphi : (\mathrm{X}, \mathcal{T}_{\mathcal{U}}) \to (\mathrm{Y}, \mathcal{T}_{\mathcal{V}})$ es una función continua.

Demostración. Dado $\mathrm{W} \in \mathcal{T}_{\mathcal{V}}$, debemos probar que $\varphi^{-1}(\mathrm{W}) \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$. Si $x \in \varphi^{-1}(\mathrm{W})$, $\varphi(x) \in \mathrm{W}$. Por lo anterior, existe $\varepsilon \in \mathcal{V}$ tal que $\mathsf{St}(\varphi(x), \varepsilon) \subseteq \mathrm{W}$. Ahora, por continuidad uniforme tenemos que:

$$\delta = \left\{ \varphi^{-1}(\mathrm{M}) \,:\, \mathrm{M} \in \varepsilon \right\} \in \mathcal{U}.$$

Es claro también que:

$$\mathsf{St}(x, \delta) \subseteq \varphi^{-1}(\mathsf{St}(\varphi(x), \varepsilon)) \subseteq \varphi^{-1}(\mathrm{W}).$$

Por tanto, $\varphi^{-1}(\mathrm{W}) \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ ■

1.5. Filtros

En lo que sigue haremos uso de la definición tradicional de filtro y definiremos ciertos tipos especiales de filtros.

Definición 1.5.1

Sea X cualquier conjunto infinito.

1) *Sea $\mathcal{F}$ un subconjunto de $\mathcal{P}(\mathrm{X})$. Se dice que $\mathcal{F}$ es un* ***filtro*** *en X si cumple:*

   i) $\mathrm{X} \in \mathcal{F}$ *y* $\varnothing \notin \mathcal{F}$.

$ii)$ *Si* $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subseteq \mathcal{F}$, *entonces* $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$.

$iii)$ *Si* $A \in \mathcal{F}$ *y* $B \in \mathcal{P}(X)$ *es tal que* $B \supseteq A$, *entonces* $B \in \mathcal{F}$.

2) *Un filtro* $\mathcal{G}$ *en* X *es un* ***ultrafiltro*** *o* ***filtro maximal*** *si no está contenido propiamente en ningún otro filtro. Esto es, si* $\mathcal{J}$ *es un filtro en* X *tal que* $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{J}$, *entonces* $\mathcal{J} = \mathcal{G}$.

En algunos de nuestros resultados haremos uso de los siguientes resultado sobre ultrafiltros.

Teorema 1.5.2 (Caracterización de los ultrafiltros)

Sea $\mathcal{F}$ *un filtro en* X. *Las siguientes propiedades son equivalentes:*

$i)$ $\mathcal{F}$ *es un ultrafiltro.*

$ii)$ *Si* $A, B \subseteq X$ *y* $A \cup B \in \mathcal{F}$, *entonces* $A \in \mathcal{F}$ *o* $B \in \mathcal{F}$.

$iii)$ *Si* $A \subseteq X$, *entonces o bien* $A \in \mathcal{F}$ *o bien* $(X \setminus A) \in \mathcal{F}$.

Demostración. Este es un resultado sumamente conocido, por ello no proporcionamos su demostración, pues puede ser encontrada en el Teorema 2.3, página 72 de [16]. ■

1.5.1. Algunos Tipos Especiales de Filtros

Definición 1.5.3

Sea $\mathcal{U}$ *base de pre–uniformidad en un conjunto* X, *y sea* $\mathcal{F}$ *filtro en* X. *Se dice que* $\mathcal{F}$ *es un* ***filtro*** $\mathcal{U}$***–Cauchy*** *en* X, *si* $\mathcal{F} \cap \alpha \neq \varnothing$ *para toda* $\alpha \in \mathcal{U}$. *Si no hay problema de confusión un filtro* $\mathcal{U}$*–Cauchy sera llamado simplemente* <u>*filtro de Cauchy*</u>.

Definición 1.5.4

Sea $(X, \mathcal{U})$ *un espacio pre–uniforme y sea* $\mathcal{F}$ *un filtro en* X.

1) $\mathcal{F}$ *se llama* ***minimal Cauchy*** *si* $\mathcal{F}$ *es de Cauchy y no contiene propiamente a ningún otro filtro de Cauchy.*

2) *Para cada filtro* $\mathcal{F}$ *se define:*

$$\mathcal{F}' = \{\mathrm{St}(F, \alpha) \,:\, F \in \mathcal{F},\ \alpha \in \mathcal{U}\}^{+}. \tag{1.9}$$

3) *$\mathcal{F}$ se dice que es **fuertemente Cauchy** si $\mathcal{F}'$ es un filtro de Cauchy.*

4) *$\mathcal{F}$ se dice que es **fuertemente redondo** si $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy y $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$.*

Es conveniente ahora hacer algunas observaciones básicas:

Observación 1.5.5

Si $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$ es un espacio pre–uniforme y $\mathcal{F}$ es un filtro en X, se tiene entonces:

$i)$ *Si $\mathcal{F}$ es fuertemente redondo, entonces $\mathcal{F}$ es fuertemente de Cauchy.*

$ii)$ $\mathsf{St}(\mathrm{F}_1, \alpha) \cap \mathsf{St}(\mathrm{F}_2, \beta) \supseteq \mathsf{St}(\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2, \gamma)$ *siempre que* F_1, $\mathrm{F}_2 \in \mathcal{F}$ *y* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{U}$ *con* $\gamma \leq \alpha$ *y* $\gamma \leq \beta$.

$iii)$ *$\mathcal{F}'$ es un subfiltro de $\mathcal{F}$.*

Estos filtros se relacionan de la manera siguiente:

Teorema 1.5.6

Sea $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$ un espacio semi–uniforme. Entonces.

$i)$ *Todo filtro de Cauchy $\mathcal{F}$ en X es fuertemente Cauchy.*

$ii)$ *Sea $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy en X. Si $\mathcal{G}$ es otro filtro de Cauchy en X y $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{G}$.*

Demostración.

$i)$ Supongamos que $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy en X. Probemos que $\mathcal{F}'$ es también un filtro de Cauchy en X. En efecto, sea $\alpha \in \mathcal{U}$. Puesto que $\mathcal{U}$ es semi–uniformidad en X, existe $\beta \in \mathcal{U}$ tal que para toda $\mathrm{B} \in \beta$, existe $\gamma_{\mathrm{B}} \in \mathcal{U}$ y $\mathrm{A}_{\mathrm{B}} \in \alpha$ tales que $\mathsf{St}(\mathrm{B}, \gamma_{\mathrm{B}}) \subseteq \mathrm{A}_{\mathrm{B}}$. Tomemos $\mathrm{B} \in \mathcal{F} \cap \beta$. Por tanto, $\mathsf{St}(\mathrm{B}, \gamma_{\mathrm{B}}) \subseteq \mathrm{A}_{\mathrm{B}}$, de manera que $\mathrm{A}_{\mathrm{B}} \in \mathcal{F}' \cap \alpha$. En consecuencia, $\mathcal{F}'$ es filtro de Cauchy en X y, por tanto, $\mathcal{F}$ es fuertemente Cauchy en X.

$ii)$ Sea $\mathcal{G}$ cualquier otro filtro de Cauchy en X tal que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Probaremos que $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{G}$. En efecto, bastará probar, de acuerdo con la ecuación 1.9, que para todo $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$ y para toda $\alpha \in \mathcal{U}$, $\mathsf{St}(\mathrm{F}, \alpha) \in \mathcal{G}$. Sea $\mathrm{G} \in \mathcal{G} \cap \alpha$, (tal G existe por ser $\mathcal{G}$ filtro de Cauchy en X). Como $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, $\mathrm{G} \cap \mathrm{F} \neq \varnothing$, entonces $\mathsf{St}(\mathrm{F}, \alpha) \supseteq \mathrm{G}$. Por tanto, $\mathsf{St}(\mathrm{F}, \alpha) \in \mathcal{G}$. Así pues, $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{G}$. $\blacksquare$

De hecho se tiene un resultado más fuerte.

Proposición 1.5.7

Si $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$ *es un espacio semi–uniforme y* $\mathcal{F}$ *es un filtro de Cauchy en* X*, entonces* $\mathcal{F}'$ *es fuertemente redondo.*

Demostración. Sabemos que $\mathcal{F}'' \subseteq \mathcal{F}'$. Y por el inciso (i) del Teorema 1.5.6, $\mathcal{F}$ es fuertemente Cauchy. Por ello, $\mathcal{F}'$ es un filtro de Cauchy en X. Por la misma razón $\mathcal{F}'$ es fuertemente Cauchy, es decir, $\mathcal{F}''$ es de Cauchy con $\mathcal{F}'' \subseteq \mathcal{F}$. En consecuencia, por el inciso (ii) del Teorema 1.5.6, $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}''$. Por tanto, $\mathcal{F}' = \mathcal{F}''$. Esto demuestra que $\mathcal{F}'$ es fuertemente redondo. ∎

Para continuar con los espacios pre–uniformes, es necesaria una definición previa.

Definición 1.5.8

Sean $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$ *un espacio pre–uniforme,* $\mathcal{F}$ *un filtro de Cauchy en* X *y* $\alpha \in \mathcal{U}$*. Se definen:*

$$\mathsf{St}^*(\mathcal{F}, \alpha) = \cup\{\mathrm{L} \in \alpha : \mathrm{L} \cap \mathrm{F} \neq \varnothing \text{ para todo } \mathrm{F} \in \mathcal{F}\} \tag{1.10}$$

$$\mathcal{F}^r = \{\mathsf{St}^*(\mathcal{F}, \alpha) : \alpha \in \mathcal{U}\}^+ \tag{1.11}$$

Una observación esclarecedora.

Observación 1.5.9

Para cualquier filtro de Cauchy $\mathcal{F}$ *en* X*,* $\mathcal{F}^r$ *es siempre un filtro que esta contenido en* $\mathcal{F}$*, pero* $\mathcal{F}^r$ *no necesariamente es un filtro de Cauchy.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy en el espacio pre–uniforme $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$.

$i)$ Primeramente dada cualquier $\alpha \in \mathcal{U}$, $\mathcal{F} \cap \alpha \neq \varnothing$, por ser $\mathcal{F}$ de Cauchy. Además:

$$\mathrm{L} \subseteq \mathsf{St}^*(\mathcal{F}, \alpha) \quad \text{para todo } \mathrm{L} \in \mathcal{F} \cap \alpha.$$

Por tanto, $\mathsf{St}^*(\mathcal{F}, \alpha) \neq \varnothing$ y así $\varnothing \notin \mathcal{F}^r$.

$ii)$ Si $\alpha, \beta \in \mathcal{U}$ con $\beta \leq \alpha$, entonces $\mathsf{St}^*(\mathcal{F}, \beta) \subseteq \mathsf{St}^*(\mathcal{F}, \alpha)$, y esto nos garantiza que $\mathcal{F}^r$ es filtro. ∎

Un resultado muy útil es el siguiente:

Observación 1.5.10

Dos bases de pre–uniformidad equivalentes en un conjunto X*, tienen los mismos filtros de Cauchy.*

Con el ejemplo propuesto a continuación, probamos que $\mathcal{F}^r$ no siempre es un filtro $\mathcal{U}$–Cauchy.

Ejemplo 1.5.11

Sean $\mathrm{X} = \mathbb{R}$ *y* $\mathcal{T}_{\mathrm{cof}}$ *la topología cofinita para* $\mathbb{R}$*. Sea* $\mathcal{U}$ *la familia de cubiertas finitas de* $\mathbb{R}$ *con conjuntos cofinitos y sea* $\mathcal{F} = \mathcal{T}_{\mathrm{cof}} \setminus \{\varnothing\}$*. Claramente* $\mathcal{U}$ *es una base de pre–uniformidad compatible en* $\mathbb{R}$ *y* $\mathcal{F}$ *es un filtro* $\mathcal{U}$*–Cauchy en* $\mathbb{R}$*. Sin embargo, para cada* $\alpha \in \mathcal{U}$*, tenemos que:*

$$\mathsf{St}^*(\mathcal{F}, \alpha) = \cup\{\mathrm{L} \in \alpha \,:\, \mathrm{L} \cap \mathrm{F} \neq \varnothing \text{ para todo } \mathrm{F} \in \mathcal{F}\} = \mathbb{R}.$$

Por tanto,

$$\mathcal{F}^r = \{\mathsf{St}^*(\mathcal{F}, \alpha) \,:\, \alpha \in \mathcal{U}\}^+ = \{\mathbb{R}\}$$

y $\mathcal{F}^r$ *no es un filtro* $\mathcal{U}$*–Cauchy.* ∎

Estamos ahora preparados para introducir un nuevo tipo de filtro.

Definición 1.5.12

Sea $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$ *un espacio pre–uniforme y sea* $\mathcal{F}$ *un filtro de Cauchy en* X*.* $\mathcal{F}$ *se llama* ***redondo*** *si* $\mathcal{F} = \mathcal{F}^r$*.*

El siguiente lema proporciona una relación entre los filtros hasta ahora definidos y ayudará a probar un resultado más general.

Lema 1.5.13

Sea $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$ *un espacio pre–uniforme y sea* $\mathcal{F}$ *un filtro de Cauchy en* X*. Entonces.*

$$\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}^r \subseteq \mathcal{F}. \tag{1.12}$$

Demostración. Sean $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$, $\alpha \in \mathcal{U}$. Entonces $\mathsf{St}(\mathrm{F}, \alpha) \in \mathcal{F}'$. Debemos probar que $\mathsf{St}(\mathrm{F}, \alpha) \supseteq \mathsf{St}^*(\mathcal{F}, \alpha)$. En efecto, sea $\mathrm{L} \in \alpha$ tal que $\mathrm{L} \cap \mathrm{H} \neq \varnothing$, para todo $\mathrm{H} \in \mathcal{F}$. En particular, $\mathrm{L} \cap \mathrm{F} \neq \varnothing$, es decir, $\mathrm{L} \subseteq \mathsf{St}(\mathrm{F}, \alpha)$ y, en consecuencia, $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}^r$. ■

Corolario 1.5.14

Todo filtro fuertemente redondo es redondo

Demostración. Si $\mathcal{F}$ es un filtro fuertemente redondo, entonces $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ y por el Lema 1.5.13, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^r$. Por tanto, $\mathcal{F}$ es redondo. ■

Introduciremos ahora más notación para continuar con nuestro estudio de filtros.

Definición 1.5.15

Sea $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$ *un espacio pre–uniforme. Sea* $\mathcal{F}$ *un filtro de Cauchy en* X*. Se define:*

$$\mathcal{F}^{rr} = \{\mathrm{H}(\alpha) : \alpha \in \mathcal{U}\}^+, \tag{1.13}$$

$$\textit{en donde} \quad \mathrm{H}(\alpha) = \cup \{\mathrm{L} : \mathrm{L} \in \alpha \cap \mathcal{F}\}. \tag{1.14}$$

Necesitamos aclarar ciertas cuestiones sobre $\mathcal{F}^{rr}$.

Observación 1.5.16

Sean $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$ *un espacio pre–uniforme y* $\mathcal{F}$ *un filtro de Cauchy en* X*.*

$i)$ *Si* $\alpha, \beta \in \mathcal{U}$ *son tales que* $\beta \leq \alpha$*, entonces* $\mathrm{H}(\beta) \subseteq \mathrm{H}(\alpha)$*. Lo que garantiza:*

$ii)$ $\mathcal{F}^{rr}$ *es un subfiltro de* $\mathcal{F}$*.*

Definición 1.5.17

Sean $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$ *un espacio pre–uniforme admisible y sea* $\mathcal{F}$ *un filtro* $\mathcal{U}$*–Cauchy en* X*. Definimos:*

$$\mathcal{F}^{\mathsf{C}} = \{\mathrm{int}_{\mathcal{T}_\mathcal{U}}(\mathrm{L}) : \mathrm{L} \in \alpha \in \mathcal{U},\ \mathrm{int}_{\mathcal{T}_\mathcal{U}}(\mathrm{L}) \in \mathcal{F}\}^+. \tag{1.15}$$

Observación 1.5.18

Sea $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$ *un espacio pre–uniforme admisible y* $\mathcal{F}$ *un filtro* $\mathcal{U}$*–Cauchy en* X*. Entonces:*

$i)$ $\mathcal{F}^{\mathsf{C}}$ *es un subfiltro de* $\mathcal{F}$*.*

ii) $\mathcal{F}^{\mathsf{C}}$ *es también un filtro* $\mathcal{U}$*–Cauchy en* X*.*

Demostración.

i) Es inmediata.

ii) Bastará con probar que para toda $\alpha \in \mathcal{U}$ existe $\mathrm{L} \in \alpha$ tal que $\mathrm{int}_{\mathcal{T}_{\mathcal{U}}}(\mathrm{L}) \in \mathcal{F}$. En efecto, como $\mathcal{U}$ es admisible, por la Proposición 1.1.10, existe $\beta \in \mathcal{U}$ tal que $\beta \leq \{\mathrm{int}_{\mathcal{T}_{\mathcal{U}}}(\mathrm{L}) : \mathrm{L} \in \alpha\}$. Puesto que $\mathcal{F}$ es $\mathcal{U}$–Cauchy, existe $\mathrm{M} \in \beta \cap \mathcal{F}$ con $\mathrm{M} \subseteq \mathrm{int}_{\mathcal{T}_{\mathcal{U}}}(\mathrm{L})$, para $\mathrm{L} \in \alpha$. Por tanto, $\mathrm{int}_{\mathcal{T}_{\mathcal{U}}}(\mathrm{L}) \in \mathcal{F}$, lo cual implica que $\mathcal{F}^{\mathsf{C}}$ es $\mathcal{U}$–Cauchy en X. ■

Proposición 1.5.19

Sea $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$ *un espacio pre–uniforme admisible y* $\mathcal{F}$ *un filtro de Cauchy en* X*. Entonces,*

$$\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}^{r} \subseteq \mathcal{F}^{rr} \subseteq \mathcal{F}^{\mathsf{C}} \subseteq \mathcal{F}. \tag{1.16}$$

Demostración. La inclusión $\mathcal{F}^{r} \subseteq \mathcal{F}^{rr}$ es trivial, pues dada $\mathrm{St}^{*}(\mathcal{F}, \alpha) \in \mathcal{F}^{r}$, claramente se tiene que $\mathrm{St}^{*}(\mathcal{F}, \alpha) \supseteq \mathrm{H}(\alpha) \in \mathcal{F}^{r}$. Por tanto, $\mathrm{St}^{*}(\mathcal{F}, \alpha) \in \mathcal{F}^{rr}$.

La inclusión $\mathcal{F}^{rr} \subseteq \mathcal{F}^{\mathsf{C}}$ se deduce de la demostración del inciso (ii) de la Observación 1.5.18. ■

Continuamos estableciendo diversos tipos de filtros.

Definición 1.5.20

Sea $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$ *un espacio pre–uniforme y sea* $\mathcal{F}$ *un filtro de Cauchy en* X*. Decimos que* $\mathcal{F}$ *es* ***débilmente redondo*** *si* $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{rr}$*.*

Definición 1.5.21

Sean $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$ *un espacio pre–uniforme admisible y sea* $\mathcal{F}$ *un filtro* $\mathcal{U}$*–Cauchy en* X*.* $\mathcal{F}$ *se dice* $\mathcal{U}$*–**concreto** en* X *(o simplemente **concreto**) si* $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{\mathsf{C}}$*.*

Lo demostrado anteriormente nos permite establecer la siguiente:

Observación 1.5.22

Sean $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$ *un espacio pre–uniforme admisible y* $\mathcal{F}$ *un filtro de Cauchy en* $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$*.*

$i)$ *Si $\mathcal{F}$ es redondo, entonces $\mathcal{F}$ es débilmente redondo.*

$ii)$ *Si $\mathcal{F}$ es débilmente redondo y $\mathcal{G}$ es otro filtro Cauchy en X, entonces o bien $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ ó bien $\mathcal{F} \setminus \mathcal{G} \neq \varnothing \neq \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$.*

$iii)$ *Si $\mathcal{F}$ es débilmente redondo en X, entonces $\mathcal{F}$ es minimal.*

Demostración.

$i)$ Es inmediata a partir de las inclusiones 1.16, de la Proposición 1.5.19.

$ii)$ Supongamos que $\mathcal{F}$ es un filtro débilmente redondo en X y sea $\mathcal{G}$ otro filtro Cauchy en X. Si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ es falso, existe $\mathrm{F} \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{G}$. Así que

$$\mathrm{F} \supseteq \mathrm{H}(\alpha) = \cup\{\mathrm{L} : \mathrm{L} \in \mathcal{F} \cap \alpha\}, \quad \text{para alguna } \alpha \in \mathcal{U}.$$

Sea ahora $\mathrm{M} \in \mathcal{G} \cap \alpha$. Necesariamente $\mathrm{M} \notin \mathcal{F}$ pues si $\mathrm{M} \in \mathcal{F}$, se tendría que

$$\mathrm{M} \subseteq \mathrm{H}(\alpha) \subseteq \mathrm{F}$$

y así $\mathrm{F} \in \mathcal{G}$, lo que contradice la elección de F. Por lo tanto, si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ es falso, entonces $\mathcal{F} \setminus \mathcal{G} \neq \varnothing \neq \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$.

$iii)$ Es una consecuencia directa de (ii). ∎

Ejemplo 1.5.23

Si X es un espacio pre–uniforme admisible y si $p \in \mathrm{X}$, entonces el filtro de vecindades η_p es débilmente redondo.

Demostración. Si $\mathrm{H} \in \eta_p$ y $\alpha \in \mathcal{U}$ es tal que $\mathsf{St}(p, \alpha) \subseteq \mathrm{H}$, entonces

$$\mathrm{H}(\alpha) \subseteq \mathsf{St}(p, \alpha) \subseteq \mathrm{H}.$$

Por tanto η_p es débilmente redondo. ∎

1.6. Espacios T_1, T_2 y T_3

Definición 1.6.1

Sean $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ filtros en X. Decimos que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ ***se mezclan****, en símbolos $\mathcal{F} \leftrightarrow \mathcal{G}$, si $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} \neq \varnothing$ para todo $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$ y para todo $\mathrm{G} \in \mathcal{G}$. Equivalentemente*

$$\mathcal{F} \leftrightarrow \mathcal{G} \text{ si y sólo si existe } \mathcal{H} \text{ filtro en } \mathrm{X} \text{ tal que } \mathcal{F} \text{ y } \mathcal{G} \text{ son subfiltros de } \mathcal{H}. \tag{1.17}$$

Observación 1.6.2

Sea $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$ un espacio pre–uniforme admisible. Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos filtros redondos en X. Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ se mezclan, entonces son iguales.

Demostración. Por contrarecíproca supongamos que $\mathcal{F} \neq \mathcal{G}$ con $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ filtros redondos en X. Como todo filtro redondo es minimal, por la Observación 1.5.22, se tiene que $\mathcal{F} \setminus \mathcal{G} \neq \varnothing \neq \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$. Por ello, existe $\mathrm{F}_0 \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{G}$. Como $\mathcal{F}$ es redondo, existe $\alpha \in \mathcal{U}$ tal que

$$\mathrm{F}_0 \supseteq \mathsf{St}^*(\mathcal{F}, \alpha) = \cup \{\mathrm{L} \in \alpha \,:\, \mathrm{L} \cap \mathrm{F} \neq \varnothing \;\text{ para todo }\; \mathrm{F} \in \mathcal{F}\}.$$

Por otra parte, ya que $\mathcal{G}$ es Cauchy en X, podemos tomar algún $\mathrm{G}_0 \in \mathcal{G} \cap \alpha$. Si G_0 intersecará a todos los elementos de $\mathcal{F}$, tendríamos que $\mathrm{G}_0 \subseteq \mathsf{St}^*(\mathcal{F}, \alpha) \subseteq \mathrm{F}_0$ por lo que $\mathrm{F}_0 \in \mathcal{G}$, lo cual no es cierto. Por tanto, G_0 no interseca a algún elemento de $\mathcal{F}$, es decir $\mathcal{G} \not\leftrightarrow \mathcal{F}$. ■

Lema 1.6.3

Sea $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$ un espacio pre–uniforme con $\mathcal{U}$ pre–uniformidad admisible sobre X, es decir, existe una base de pre–uniformidad $\mathcal{U}_0$ abierta en X tal que $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0^+$. Entonces, $\mathcal{F}$ es $\mathcal{U}$–Cauchy en X si y sólo si $\mathcal{F}$ es $\mathcal{U}_0$–Cauchy en X.

Demostración. Basta con observar que dos bases de pre–uniformidad equivalentes tienen los mismos filtros de Cauchy (Observación 1.5.10). ■

Para continuar es necesario recordar algunos conceptos acerca de filtros en espacios topológicos.

Definición 1.6.4

Sea $\mathcal{F}$ un filtro en un espacio topológico $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$.

1) *El conjunto:*

$$\mathfrak{adh}\,(\mathcal{F}) := \cap\,\{\,C\ell\,(\mathrm{F})\;:\;\mathrm{F}\in\mathcal{F}\}$$

recibe el nombre de ***adherencia*** *del filtro* $\mathcal{F}$.

2) *Si* $x \in \mathfrak{adh}\,(\mathcal{F})$, x *recibe el nombre de punto* ***adherente*** *a* $\mathcal{F}$.

3) *Se dice que el filtro* $\mathcal{F}$ ***converge*** *a un punto* $p \in \mathrm{X}$, *si* $\mathcal{F} \supseteq \eta_p$.

4) *El conjunto:*

$$\mathfrak{conv}\,(\mathcal{F}) := \{p \in \mathrm{X}\;:\;p \text{ es punto de convergencia de } \mathcal{F}\}$$

recibe el nombre de ***convergencia*** *del filtro* $\mathcal{F}$.

Utilizaremos las siguientes notaciones:

Notación 1

$i)$ *Si* $p \in \mathfrak{adh}\,(\mathcal{F})$, *entonces escribimos*

$$\mathcal{F} \longmapsto p\,.$$

$ii)$ *Si* $p \in \mathfrak{conv}\,(\mathcal{F})$, *entonces escribimos*

$$\mathcal{F} \longrightarrow p\,.$$

Observación 1.6.5

Si X *es un espacio topológico, es un hecho muy conocido que:*

$$\mathfrak{adh}\,(\mathcal{F}) \supseteq \mathfrak{conv}\,(\mathcal{F}),\ \textit{es decir, } \mathcal{F}\to p\,,\ \textit{entonces } \mathcal{F}\mapsto p\,.$$

Además ambos conjuntos son cerrados en X.

Teorema 1.6.6

Sea $(\mathrm{X},\mathcal{U})$ *un espacio pre–uniforme admisible. Si* $\mathcal{F}$ *es un filtro en* X *tal que* $\mathcal{F} \to x$ *con* $x \in \mathrm{X}$, *entonces* $\mathcal{F}$ *es un filtro* $\mathcal{U}$*–Cauchy y* η_x *(filtro de vecindades de* x*) es un filtro débilmente redondo contenido en* $\mathcal{F}$.

Demostración. La primera afirmación es inmediata del Lema 1.6.3, mismo que nos permite suponer, sin pérdida de generalidad, que $\mathcal{U}$ es una base de pre-uniformidad abierta.

Ahora tomemos $\alpha \in \mathcal{U}$. Si $x \in A \in \alpha$, entonces $A \in \eta_x \subseteq \mathcal{F}$. Por tanto, $A \in \mathcal{F} \cap \alpha$, es decir, $\mathcal{F}$ es $\mathcal{U}$–Cauchy. Por otra parte siempre se tiene que $\eta_x^{rr} \subseteq \eta_x$, según el inciso (ii) de la Observación 1.5.16. Así que sólo resta probar la inclusión contraria.

Sea $F \in \eta_x$ y sea $\beta \in \mathcal{U}$ tal que $\mathsf{St}(x,\beta) \subseteq F$. Pero,

$$\mathsf{St}(x,\beta) = \cup\{L : L \in \eta_x \cap \beta\} = H(\beta).$$

Esto demuestra que $F \in \eta_x^{rr}$. Por tanto, $\eta_x \subseteq \eta_x^{rr}$. ■

Sin embargo, en los espacios uniformes sucede que la adherencia y la convergencia de filtros coinciden. En efecto.

Teorema 1.6.7

Sean $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme y sea $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy en X. Si existe $p \in X$ tal que $\mathcal{F} \mapsto p$, entonces $\mathcal{F} \to p$. Por tanto, en todo espacio uniforme $\mathcal{F} \mapsto p$ si y sólo si se cumple que $\mathcal{F} \to p$.

Demostración. Sean $V \in \eta_p$, $\alpha \in \mathcal{U}$ tal que $\mathsf{St}(p,\alpha) \subseteq V$. Por el inciso (i) del Teorema 1.5.6, $\mathcal{F}'$ es de Cauchy en X y por ello podemos encontrar $A \in \alpha \cap \mathcal{F}'$. Entonces, existen $B \in \mathcal{F}$ y $\beta \in \mathcal{U}$ tales que $\mathsf{St}(B,\beta) \subseteq A$. Puesto que $x \in C\ell(B)$ y $C\ell(B) \subseteq \mathsf{St}(B,\beta)$, se tiene que $p \in A$. Por lo cual,

$$B \subseteq C\ell(B) \subseteq A \subseteq \mathsf{St}(p,\alpha) \subseteq V$$

y en consecuencia $V \in \mathcal{F}$. Esto demuestra que $\mathcal{F} \to p$. ■

Definición 1.6.8

*Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico y $\mathcal{F}$ un filtro en X. $\mathcal{F}$ se dice $\mathcal{T}$–**balanceado** o simplemente **balanceado**, si siempre que $\mathcal{F} \mapsto p$, entonces $\mathcal{F} \to p$.*

Ejemplo 1.6.9

Todo ultrafiltro en un espacio topológico $(X,\mathcal{T})$ es un filtro balanceado.

En efecto, si $\mathcal{F}$ es un filtro, entonces es claro que $\mathcal{F} \mapsto p$ si y sólo si $\mathcal{F} \leftrightarrow \eta_p$ si y sólo si $\mathcal{F}$ y η_p están contenidos en un mismo filtro. Si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro en X tal que $\mathcal{F} \mapsto p$ y si $\mathcal{G}$ es un filtro en X tal que $\eta_p \subseteq \mathcal{G}$ con $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Entonces $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. Por tanto, $\eta_p \subseteq \mathcal{F}$ por lo cual $\mathcal{F} \to p$. ■

En el ejemplo siguiente observaremos lo que sucede cuando $\mathcal{F}$ es únicamente filtro.

Ejemplo 1.6.10

En el espacio topológico $(\mathbb{R}, \xi)$ *con* ξ *la topología euclidiana de* $\mathbb{R}$*, es decir, la inducida por el valor absoluto, la sucesión* $(a_n)_n$ *con término general* $a_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)$*, genera un filtro que no converge, pero que tiene a* 1 *y* -1 *en su adherencia. En otras palabras,* $\mathfrak{adh}\,(\mathcal{F}) = \{1, -1\}$ *y* $\mathfrak{conv}\,(\mathcal{F}) = \varnothing$*.* ■

Teorema 1.6.11

Todo filtro redondo en un espacio pre–uniforme admisible es balanceado.

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ un filtro redondo en X tal que $\mathcal{F} \mapsto x$ y fijemos $\mathrm{V} \in \eta_x$. Debemos probar que $\mathrm{V} \in \mathcal{F}$. Sea $\beta \in \mathcal{U}$ tal que $\mathsf{St}(x, \beta) \subseteq \mathrm{V}$ y sea $\mathrm{M} \in \beta \cap \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ es redondo $\mathrm{M} \supseteq \mathsf{St}^*(\mathcal{F}, \gamma)$ para cierta $\gamma \in \mathcal{U}$. Afirmamos que $\mathsf{St}^*(\mathcal{F}, \gamma) \supseteq \mathfrak{adh}\,(\mathcal{F})$. En efecto, si no es así, existe $y \in \mathfrak{adh}\,(\mathcal{F}) \setminus \mathsf{St}^*(\mathcal{F}, \gamma)$. De donde, existen $\mathrm{C} \in \gamma$, $\mathrm{L} \in \mathcal{F}$ tales que $y \in \mathrm{C}$ y $\mathrm{C} \cap \mathrm{L} = \varnothing$. Puesto que $\mathcal{U}$ es admisible, podemos suponer que $\mathrm{C} \in \eta_y$. Entonces $y \notin C\ell\,(\mathrm{L})$, es decir, $y \notin \mathfrak{adh}\,(\mathcal{F})$, lo cual es una contradicción. Por ello,

$$x \in \mathfrak{adh}\,(\mathcal{F}) \subseteq \mathsf{St}^*(\mathcal{F}, \gamma) \subseteq \mathrm{M} \subseteq \mathsf{St}(x, \beta) \subseteq \mathrm{V}.$$

Por tanto, $\mathrm{V} \in \mathcal{F}$. Así queda probado que $\eta_x \subseteq \mathcal{F}$, es decir, $\mathcal{F} \to x$. ■

Teorema 1.6.12

Si $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$ *es un espacio semi–uniforme y* $\mathcal{F}_1$ *y* $\mathcal{F}_2$ *son filtros de Cauchy en* X*, entonces* $\mathcal{F}_1' = \mathcal{F}_2'$ *si y sólo si* $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ *es un filtro de Cauchy en* X*.*

Demostración.

$\underline{\underline{\Rightarrow)}}$ Si $\mathcal{F}_1' = \mathcal{F}_2'$, entonces por la Proposición 1.5.19, $\mathcal{F}_1' \subseteq \mathcal{F}_2$ y, por tanto,

$$\mathcal{F}_1' \subseteq \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2,$$

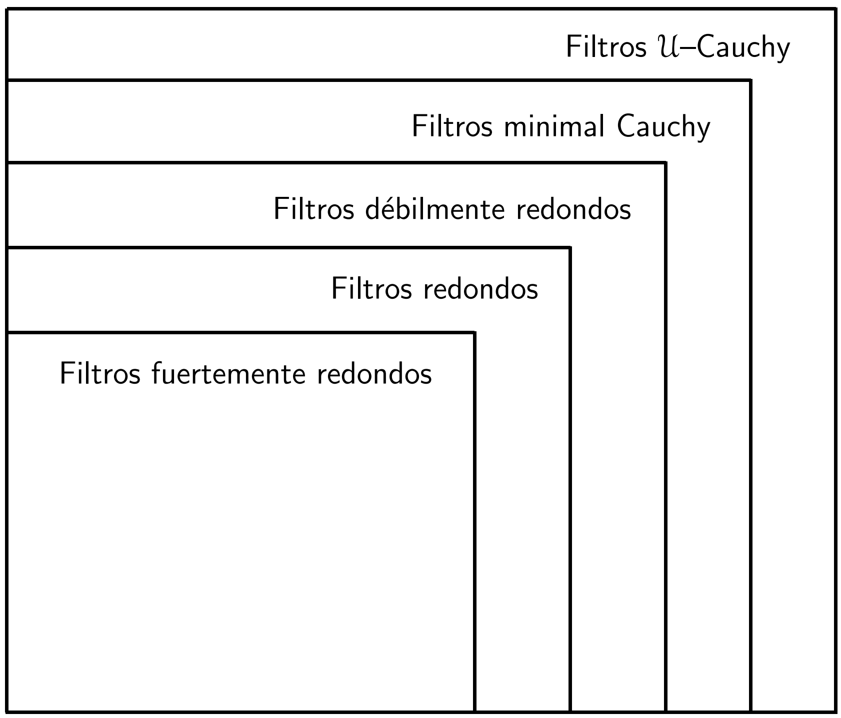
por lo que $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ es Cauchy.

$\underline{\underline{\Leftarrow)}}$ Por el Teorema 1.5.6 inciso (iii), tenemos lo siguiente:

$$\mathcal{F}_2' \subseteq \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_2,$$
$$\mathcal{F}_1' \subseteq \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1,$$

por tanto, $\mathcal{F}_2' \subseteq \mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_1' \subseteq \mathcal{F}_2$. Nuevamente por el Teorema 1.5.6, $\mathcal{F}_1' \subseteq \mathcal{F}_2'$ y $\mathcal{F}_2' \subseteq \mathcal{F}_1'$. En consecuencia, $\mathcal{F}_1' = \mathcal{F}_2'$. ∎

Si $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$ es un espacio pre–uniforme las clases de filtros establecidas anteriormente siguen el siguiente esquema de inclusiones:



Adviértase que si $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$ es un espacio semi–uniforme, entonces las clases de filtros anteriores coinciden.

Capítulo 2

Espacios Completos y Totalmente Acotados

2.1. Definiciones y Resultados Previos

Definición 2.1.1

Sea $\mathcal{U}$ una base de pre–uniformidad en X.

1) $\mathcal{U}$ *es* T_1–***base de pre–uniformidad*** *en* X *si:*

   $i)$ $\mathcal{U}$ *es admisible.*

   $ii)$ *Cada filtro* $\mathcal{U}$*–concreto se mezcla con un filtro débilmente redondo.*

2) $\mathcal{U}$ *es* T_2–***base de pre–uniformidad*** *en* X *si:*

   $i)$ $\mathcal{U}$ *es admisible.*

   $ii)$ *Cada filtro* $\mathcal{U}$*–Cauchy contiene un filtro redondo.*

3) $\mathcal{U}$ *es* T_3–***base de pre–uniformidad*** *en* X *si:*

   $i)$ $\mathcal{U}$ *es admisible.*

   $ii)$ *Cada filtro* $\mathcal{U}$*–Cauchy contiene un filtro fuertemente redondo.*

Definición 2.1.2

Sea $\mathcal{U}$ una pre–uniformidad en X.

1) *Se dice que $\mathcal{U}$ es* ***completa*** *si todo filtro $\mathcal{U}$–concreto en X tiene adherencia.*

2) *Se dice que $\mathcal{U}$ es* ***completa por convergencia*** *si todo filtro $\mathcal{U}$–Cauchy en X es convergente.*

Notemos primeramente que en los espacios semi–uniformes ambas definiciones coinciden. (Úsese la Proposición 1.5.7 y el Teorema 1.6.11).

Proposición 2.1.3

Sea $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ un espacio topológico T_0 y sea $\mathcal{U}$ la familia de cubiertas abiertas de X. Entonces, $\mathcal{U}$ es una T_i–base de pre–uniformidad en X compatible con $\mathcal{T}$ si y sólo si $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ es T_i, $i = 1, 2, 3$. Además si $i = 2, 3$, entonces $\mathcal{U}$ es completa por convergencia.

Demostración.

$\underline{i = 2)}$ Nos basaremos en el siguiente hecho:

Hecho 1

Sea X es un espacio T_2 y sea $\mathcal{F}$ un filtro en X tal que $\mathfrak{conv}(\mathcal{F}) \neq \varnothing$. Entonces $|\,\mathfrak{conv}(\mathcal{F})| = 1$ y en este caso $\mathfrak{conv}(\mathcal{F}) = \mathfrak{adh}(\mathcal{F})$, es decir, $\mathcal{F}$ es balanceado.[1]

$\underline{\underline{\Leftarrow)}}$ Probaremos primero que en los espacios T_2 todo filtro de vecindades es redondo. En efecto, sean $p \in \mathrm{X}$ y $\mathrm{V} \in \eta_p$. Probaremos que existe $\alpha \in \mathcal{U}$ tal que:

$$\mathrm{V} \supseteq \mathsf{St}^*(\eta_p, \alpha) = \cup\{\mathrm{L} \in \alpha \,:\, \mathrm{L} \cap \mathrm{N} \neq \varnothing, \text{ para todo } \mathrm{N} \in \eta_p\}.$$

Elijamos $\mathrm{A} \in \alpha$ tal que $p \in \operatorname{int}(\mathrm{A})$. Si $x \in \operatorname{Fr}(\operatorname{int}(\mathrm{A}))$. Entonces existe un conjunto abierto W_x tal que

$$x \in \mathrm{W}_x \subseteq C\ell(\mathrm{W}_x) \subseteq \mathrm{X} \setminus \{p\}.$$

Tomemos la cubierta

$$\alpha = \{\operatorname{int}(\mathrm{H}), \mathrm{X} \setminus C\ell(\mathrm{H})\} \cup \{\mathrm{W}_x \,:\, x \in \operatorname{Fr}(\mathrm{H})\}.$$

Claramente $\alpha \in \mathcal{U}$ y cubre *punto por punto* a X. Como

$$\mathrm{W}_x \cap (\mathrm{X} \setminus C\ell(\mathrm{W}_x)) = \varnothing,$$

[1] Véase por ejemplo [16] ó bien [31].

entonces $\text{St}^*(\eta_p, \alpha) = \text{int}(\mathrm{H})$. Por tanto cada filtro de vecindades en X espacio topológico T_2 es redondo.

Sea ahora, $\mathcal{F}$ un filtro $\mathcal{U}$–Cauchy en X. Si $\mathfrak{adh}(\mathcal{F}) = \varnothing$, entonces

$$\alpha = \{\mathrm{X} \setminus C\ell(\mathrm{F}) : \mathrm{F} \in \mathcal{F}\}$$

es una cubierta abierta de X y, por tanto, pertenece a $\mathcal{U}$. Sin embargo, $\mathcal{F} \cap \alpha = \varnothing$ pues $\mathcal{F} \cap \alpha \neq \varnothing$ implicaría la existencia de un elemento $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$ tal que $\mathrm{X} \setminus C\ell(\mathrm{F}) \in \mathcal{F}$ en contradicción con la propiedad de la intersección finita de $\mathcal{F}$. Tenemos entonces que $\mathcal{F} \cap \alpha = \varnothing$ lo cual contradice al hecho de que $\mathcal{F}$ es $\mathcal{U}$–Cauchy. Así hemos demostrado que $\mathfrak{adh}(\mathcal{F}) \neq \varnothing$. Fijemos ahora $x \in \mathfrak{adh}(\mathcal{F})$. Para completar la demostración de que $\mathcal{F}$ contiene un filtro $\mathcal{U}$–redondo, bastará con probar que $\mathcal{F} \to x$. Sea $\mathrm{V} \in \eta_x$. Para cada $y \neq x$, sea V_y un abierto tal que

$$y \in \mathrm{V}_y \subseteq C\ell(\mathrm{V}_y) \subseteq \mathrm{X} \setminus \{x\},$$

y definamos

$$\beta = \{\mathrm{V}\} \cup \{\mathrm{V}_y : y \in \mathrm{X} \setminus \{x\}\}.$$

Como $\mathcal{F}$ es $\mathcal{U}$–Cauchy, existe $\mathrm{L} \in \beta \cap \mathcal{F}$. Necesariamente $\mathrm{L} = \mathrm{V}$, pues si $\mathrm{L} = \mathrm{V}_y$ para alguna $y \neq x$, tendríamos $x \in C\ell(\mathrm{L}) = C\ell(\mathrm{V}_y) \subseteq \mathrm{X} \setminus \{x\}$, una contradicción. Por tanto, $\mathrm{V} \in \mathcal{F}$. Esto demuestra que $\mathcal{F} \to x$.

$\underline{\underline{\Rightarrow)}}$ Supóngase ahora que la familia de cubiertas abiertas de X es T_2–pre–uniformidad en X. Probaremos que X es T_2. Para ello recordemos primeramente dos hechos importantes:

Hecho 2

X *es* T_2 *si y sólo si para todo* $x, y \in \mathrm{X}$ *distintos existe* $\mathrm{U} \subseteq \mathrm{X}$ *abierto, tal que* $x \in \mathrm{U}$ *con* $y \notin C\ell(\mathrm{U})$.

Hecho 3

En todo espacio pre–uniforme admisible dos filtros redondos distintos no se mezclan.

Sean $p, q \in \mathrm{X}$ dos puntos distintos y supongamos que existe un abierto $\mathrm{T} \subseteq \mathrm{X}$ tal que $p \in \mathrm{T}$, con $q \notin \mathrm{T}$. (propiedad T_0 de X). Puesto que $p \neq q$, los filtros η_p y η_q son distintos, además por hipótesis ambos filtros son redondos, por ser filtros de vecindades y, por el Hecho 3, no se mezclan. Existen entonces $\mathrm{L} \in \eta_p$ y $\mathrm{M} \in \eta_q$ tales que $\mathrm{L} \cap \mathrm{M} = \varnothing$. Por tanto, X es T_2.

$\underline{i=3)}$

$\underline{\underline{\Leftarrow)}}$ Probemos primero que cada filtro de vecindades es fuertemente redondo. En efecto, sean $p \in \mathrm{X}$ y $\mathrm{H} \in \eta_p$. Como X es regular, existe $\mathrm{W} \subseteq \mathrm{X}$ abierto, tal que $p \in \mathrm{W} \subseteq C\ell\,(\mathrm{W}) \subseteq \operatorname{int}(\mathrm{H})$. Tomemos

$$\beta = \{\operatorname{int}(\mathrm{H}), \mathrm{X} \setminus C\ell\,(\mathrm{W})\}.$$

β es una cubierta abierta de X y además

$$\mathsf{St}(\mathrm{W}, \beta) = \operatorname{int}(\mathrm{H}).$$

Por lo tanto, η_p es fuertemente redondo. Razonamos ahora como en el caso $(i=2)$ y deducimos que todo filtro $\mathcal{U}$–Cauchy es convergente. Como los filtros de vecindades son fuertemente redondos, deducimos que cada filtro $\mathcal{U}$–Cauchy contiene un filtro fuertemente redondo.

$\underline{\underline{\Rightarrow)}}$ Las hipótesis implican que cada filtro de vecindades es fuertemente redondo. Tomemos $p \in \mathrm{X}$ y sea $\mathrm{H} \in \eta_p$. Entonces $\mathrm{H} \supseteq \mathsf{St}(\mathrm{K}, \beta)$ para algún $\mathrm{K} \in \eta_p$ y algún $\beta \in \mathcal{U}$. Entonces $C\ell\,(\mathrm{K}) \subseteq \mathsf{St}(\mathrm{K}, \beta)$, de manera que X es regular. Como además X es T_0, entonces X es T_3. ■

Para el caso $\underline{(i=1)}$, se tiene lo siguiente:

Proposición 2.1.4

Sea $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ *un espacio topológico* T_0 *y sea* $\mathcal{U}$ *la familia de cubiertas abiertas de* X*. Entonces* $\mathcal{U}$ *es una* T_1*–base de pre–uniformidad en* X *compatible con* $\mathcal{T}$ *si y sólo si* $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ *es* T_1*. Además* $\mathcal{U}$ *es completa.*

Demostración.

$\underline{\underline{\Rightarrow)}}$ Por ser $\mathcal{U}$ admisible, $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ es una topología R_0. Como $\mathcal{U}$ es compatible, tenemos que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ y ya que $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ es T_0 concluimos que $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ es T_1.

$\underline{\underline{\Leftarrow)}}$ Del Ejemplo 1.5.23 sabemos que cada filtro de vecindades es débilmente redondo. Probaremos ahora que cada filtro $\mathcal{U}$–concreto se mezcla con un filtro débilmente redondo. En efecto, cada filtro $\mathcal{U}$–Cauchy tiene adherencia y, por tanto, se mezcla con un filtro de vecindades, el cual es débilmente redondo. ■

Finalizaremos esta sección con un teorema sumamente importante en la Teoría de Extensiones de Espacios Uniformes.

Teorema 2.1.5

Sean $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$ *y* $(\mathrm{Y}, \mathcal{V})$ *dos espacios uniformes, sea* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *una función uniformemente continua y sea* $\mathcal{F}$ *un filtro* $\mathcal{U}$*–Cauchy. Entonces la familia*

$$f(\mathcal{F}) = \{ f(\mathrm{F}) : \mathrm{F} \in \mathcal{F} \}$$

es una base de filtro $\mathcal{V}$*–Cauchy.*

Demostración. Recordemos que $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ es uniformemente continua si para todo $\beta \in \mathcal{V}$ existe $\alpha \in \mathcal{U}$ tal que si $\mathrm{A} \in \alpha$, existe $\mathrm{B} \in \beta$ con la propiedad $f(\mathrm{A}) \subseteq \mathrm{B}$. Ahora debemos probar que

$$f(\mathcal{F})^{+} = \{ f(\mathrm{F}) : \mathrm{F} \in \mathcal{F} \}^{+}$$

es un filtro $\mathcal{V}$–Cauchy. En efecto, probaremos que para todo $\beta \in \mathcal{V}$, $\beta \cap f(\mathcal{F})^{+} \neq \varnothing$. Primeramente, es inmediato comprobar que la familia $f(\mathcal{F})$ es base de filtro en Y. Sea $\beta \in \mathcal{V}$. Puesto que f es uniformemente continua, existe $\alpha \in \mathcal{U}$ tal que si $\mathrm{A} \in \alpha$, existe $\mathrm{B} \in \beta$ que cumple que $f(\mathrm{A}) \subseteq \mathrm{B}$. Puesto que $\mathcal{F}$ es $\mathcal{U}$–Cauchy, $\alpha \cap \mathcal{F} \neq \varnothing$. Sea $\mathrm{C} \in \alpha \cap \mathcal{F}$, entonces $\mathrm{C} \in \alpha$, por lo que existe $\mathrm{D} \in \beta$ tal que $f(\mathrm{C}) \subseteq \mathrm{D}$, pero $f(\mathrm{C}) \in f(\mathcal{F})^{+}$, el cual es un filtro, por lo que $\mathrm{D} \in f(\mathcal{F})^{+}$ y esto implica que $\beta \cap f(\mathcal{F})^{+} \neq \varnothing$, es decir, $f(\mathcal{F})^{+}$ es un filtro $\mathcal{V}$–Cauchy. ■

Este último teorema, puede ser extendido fácilmente a espacios pre–uniformes admisibles.

Es de notarse además, que el recíproco del Teorema 2.1.5 no es verdadero, como se observa en el siguiente:

Ejemplo 2.1.6

Puesto que en los espacios métricos es suficiente trabajar con sucesiones de Cauchy, orientaremos nuestro ejemplo en este sentido.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la función definida por la regla de correspondencia* $f(x) = x^2$*. Sea* $(a_n)_n$ *cualquier sucesión de Cauchy en* $\mathbb{R}$*, esto implica que la sucesión es acotada y, por tanto, existe* $c \in \mathbb{R}^{+}$ *tal que* $a_n \in [-c, c]$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Pero además,* f *es una función de clase* $\mathcal{C}^1$ *en* $\mathbb{R}$ *y en consecuencia,* f *es de Lipschitz en* $[-c, c]$*, por lo que la sucesión de* *imágenes* $(f(a_n))_n$ *es de Cauchy en* $\mathbb{R}$*, sin embargo es bien conocido el hecho de que* f *no es uniformemente continua.* ■

Para finalizar, mencionemos que el Teorema 2.1.5, da lugar a un resultado muy importante en cuanto a los espacios totalmente acotados, (Teorema 2.5.11) que estableceremos en la sección correspondiente.

2.2. El Operador $\widehat{\ }$

Teorema 2.2.1

Sean $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ *un espacio topológico* T_0 *y* $\mathcal{U}$ *una base de pre–uniformidad admisible en* X *y compatible con* $\mathcal{T}$.

1) *Construyamos:*

$$\widehat{\mathrm{X}} = \{\xi \,:\, \xi \text{ es filtro débilmente redondo en } \mathrm{X}\,\}. \tag{2.1}$$

2) *Para cada* $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$ *sea:*

$$\widehat{\mathrm{A}} = \{\xi \in \widehat{\mathrm{X}} \,:\, \mathrm{A} \in \xi\}. \tag{2.2}$$

3) *Para cada* $\alpha \in \mathcal{U}$*, pongamos:*

$$\widehat{\alpha} = \{\widehat{\mathrm{L}} \,:\, \mathrm{L} \in \alpha\}. \tag{2.3}$$

Se afirma lo siguiente:

$i)$ *El operador* $\widehat{\ }$ *es monótono. Esto es, si* $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{X}$ *son tales que* $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$*, entonces* $\widehat{\mathrm{A}} \subseteq \widehat{\mathrm{B}}$.

$ii)$ *Para cada* $p \in \mathrm{X}$ *el filtro de vecindades* η_p *es un elemento de* $\widehat{\mathrm{X}}$.

$iii)$ *Para cada* $\alpha \in \mathcal{U}$, $\widehat{\alpha}$ *es cubierta de* $\widehat{\mathrm{X}}$.

$iv)$ *La familia* $\widehat{\mathcal{U}} = \{\widehat{\alpha} \,:\, \alpha \in \mathcal{U}\}$ *forma una base de pre–uniformidad abierta para* $\widehat{\mathrm{X}}$.

Demostración.

i) Sean A, $\mathrm{B} \in \mathrm{X}$ tales que $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$. Debemos probar que $\widehat{\mathrm{A}} \subseteq \widehat{\mathrm{B}}$. En efecto, si $\xi \in \widehat{\mathrm{A}}$, entonces $\mathrm{A} \in \xi$ y ya que ξ es filtro, se tiene que $\mathrm{B} \in \xi$. Por lo que $\xi \in \widehat{\mathrm{B}}$. Con esto demostramos que $\widehat{\mathrm{A}} \subseteq \widehat{\mathrm{B}}$.

ii) Ya se trató en el Ejemplo 1.5.23.

iii) Sean $\alpha \in \mathcal{U}$ y $\xi \in \widehat{\mathrm{X}}$. Puesto que ξ es débilmente redondo, ξ es Cauchy en X. Así que $\alpha \cap \xi \neq \varnothing$. Tomemos $\mathrm{A} \in \alpha \cap \xi$. Entonces $\xi \in \widehat{\mathrm{A}} \in \widehat{\alpha}$. Por ello $\widehat{\alpha}$ es cubierta de $\widehat{\mathrm{X}}$.

iv) Usando (i) y (iii), hallamos que α, $\beta \in \mathcal{U}$ y $\alpha \leq \beta$ por ello $\widehat{\alpha} \leq \widehat{\beta}$. Por tanto, $\widehat{\mathcal{U}}$ es una base de pre–uniformidad en X.

Probemos finalmente que para toda $\alpha \in \mathcal{U}$ y para toda $\mathrm{A} \in \alpha$, se tiene que $\widehat{\mathrm{A}} \in \mathcal{T}_{\widehat{\mathcal{U}}}$. En efecto, si $\xi \in \widehat{\mathrm{A}}$, entonces $\mathrm{A} \in \xi$ y por tanto, existe $\beta \in \mathcal{U}$ tal que

$$\mathrm{A} \supseteq \cup\{\mathrm{M} : \mathrm{M} \in \beta \cap \xi\}.$$

Escojamos $\xi' \in \mathsf{St}(\xi, \widehat{\beta})$. Entonces existe $\mathrm{B} \in \beta$ tal que $\xi, \xi' \in \widehat{\mathrm{B}}$. Por lo tanto, $\mathrm{B} \in \xi \cap \xi'$, así que $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$. En consecuencia $\mathrm{A} \in \xi'$ y, por tanto, $\xi' \in \widehat{\mathrm{A}}$. Lo anterior demuestra que

$$\mathsf{St}(\xi, \widehat{\beta}) \subseteq \widehat{\mathrm{A}},$$

por lo cual $\widehat{\mathrm{A}} \in \mathcal{T}_{\widehat{\mathcal{U}}}$. ∎

El inciso (i) del Teorema 2.2.1 permite establecer el siguiente:

Teorema 2.2.2

i) *La función* $\varphi : \mathrm{X} \to \widehat{\mathrm{X}}$ *con regla de correspondencia* $\varphi(x) = \eta_x$ *es una función inyectiva de* $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$ *en* $(\widehat{\mathrm{X}}, \widehat{\mathcal{U}})$.

ii) *Para todo* $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$, $\widehat{\mathrm{A}} \cap \varphi(\mathrm{X}) = \varphi(\mathrm{int}(\mathrm{A}))$.

iii) *La función* $\varphi : (\mathrm{X}, \mathcal{U}) \to (\widehat{\mathrm{X}}, \widehat{\mathcal{U}})$ *es uniformemente continua.*

iv) *La función* $\varphi^{-1} : \left(\varphi(\mathrm{X}), \widehat{\mathcal{U}}|_{\varphi(\mathrm{X})}\right) \to (\mathrm{X}, \mathcal{U})$ *es uniformemente continua.*

v) *El conjunto* $\varphi(\mathrm{X})$ *es denso en* $\widehat{\mathrm{X}}$

vi) *La función* $\varphi : \mathrm{X} \to \widehat{\mathrm{X}}$ *es un encaje unimórfico*[2] *de* $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$ *en* $(\widehat{\mathrm{X}}, \widehat{\mathcal{U}})$.

[2]Véase la Definición 1.4.1

vii) *Si $\mathcal{U}$ es una T_1–base de pre–uniformidad, entonces $(\widehat{\mathrm{X}}, \widehat{\mathcal{U}})$ es completo.*

Demostración.

i) Sean x, $x' \in \mathrm{X}$ tales que $x \neq x'$. Puesto que X es T_0, existe un abierto $\mathrm{V} \subseteq \mathrm{X}$ que sólo contiene a uno de los puntos x, x', y por ello $\eta_x \neq \eta_{x'}$. Esto demuestra lo afirmado.

ii) *a*) Tomemos $\xi \in \widehat{\mathrm{A}} \cap \varphi(\mathrm{X})$. Entonces $\xi = \eta_x = \varphi(x)$ para alguna $x \in \mathrm{X}$. $\varphi(x) \in \mathrm{A}$ implica $\mathrm{A} \in \eta_x$, por lo que $x \in \operatorname{int}(\mathrm{A})$. Por tanto,

$$\xi = \eta_x \in \varphi(\operatorname{int}(\mathrm{A})).$$

b) Sea ahora $x \in \operatorname{int}(\mathrm{A})$. Por tanto, $\mathrm{A} \in \varphi(x) = \eta_x$ y $\varphi(x) \in \widehat{\mathrm{A}} \cap \varphi(\mathrm{X})$. De aquí deducimos que para todo $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$, $\varphi^{-1}(\widehat{\mathrm{A}}) = \operatorname{int}(\mathrm{A})$. En efecto,

$$\varphi^{-1}(\widehat{\mathrm{A}}) = \varphi^{-1}(\widehat{\mathrm{A}} \cap \varphi(\mathrm{X})) = \varphi^{-1}(\varphi(\operatorname{int}(\mathrm{A}))) = \operatorname{int}(\mathrm{A})$$

por la inyectividad de φ.

iii) Sea $\alpha \in \mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ es admisible, existe $\beta \in \mathcal{U}$ tal que

$$\beta \leq \{\operatorname{int}(\mathrm{A}) : \mathrm{A} \in \alpha\}$$

y por (ii) tenemos que

$$\varphi^{-1}(\widehat{\alpha}) = \{\operatorname{int}(\mathrm{A}) : \mathrm{A} \in \alpha\}.$$

Por tanto, $\beta \leq \varphi^{-1}(\widehat{\alpha})$, es decir, φ es uniformemente continua.

iv) Tomemos $\alpha \in \mathcal{U}$. Por el inciso (ii) se tiene que para cualquier $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$:

$$\widehat{\mathrm{A}} \cap \varphi(\mathrm{X}) = \varphi(\operatorname{int}(\mathrm{A})) \subseteq \varphi(\mathrm{A}),$$

lo que demuestra que φ^{-1} es uniformemente continua.

v) Sea $\mathrm{T} \subseteq \widehat{\mathrm{X}}$ abierto no vacío y elijamos $\xi \in \mathrm{T}$. Puesto que el conjunto $\{\widehat{\mathrm{A}} : \mathrm{A} \in \alpha\}$ es una base para la topología de $\widehat{\mathrm{X}}$, existen $\alpha \in \mathcal{U}$ y $\mathrm{A} \in \alpha$ tales que

$$\xi \in \widehat{\mathrm{A}} \subseteq \mathrm{T},$$

lo que implica que $\mathrm{A} \in \xi$. Si elegimos $x \in \operatorname{int}(\mathrm{A})$, entonces por el inciso (ii), $\mathrm{A} \in \varphi(x)$ por lo tanto, $\varphi(x) \in \widehat{\mathrm{A}}$. Todo esto implica que $\widehat{\mathrm{A}} \cap \varphi(\mathrm{X}) \neq \varnothing$ y así $\mathrm{T} \cap \varphi(\mathrm{X}) \neq \varnothing$. En consecuencia, $\varphi(\mathrm{X})$ es denso en $\widehat{\mathrm{X}}$.

vi) Se sigue de los incisos anteriores.

vii) Sea $\mathcal{F}$ un filtro concreto y de Cauchy en $(\widehat{\mathrm{X}}, \widehat{\mathcal{U}})$. Sea

$$\eta = \{\mathrm{int}\,(\mathrm{L}) \,:\, \mathrm{L} \in \alpha \in \mathcal{U},\ \widehat{\mathrm{L}} \in \mathcal{F}\}^{+}.$$

Claramente η es un filtro concreto y de Cauchy en $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$ y

$$\mathcal{F} = \{\widehat{\mathrm{N}} \,:\, \mathrm{N} \in \eta\}^{+}.$$

Por hipótesis, existe $\xi \in \widehat{\mathrm{X}}$ tal que $\eta \leftrightarrow \xi$. Probaremos que $\mathcal{F} \leftrightarrow \widehat{\eta}_{\xi}$, en donde $\widehat{\eta}_{\xi}$ denota el filtro de vecindades de ξ en $(\widehat{\mathrm{X}}, \mathcal{T}_{\widehat{\mathcal{U}}})$. Si $\mathrm{N} \in \eta$ y $\xi \in \widehat{\mathrm{A}}$, en donde $\mathrm{A} \in \alpha$ para alguna $\alpha \in \mathcal{U}$, entonces $\mathrm{N} \cap \mathrm{A} \neq \varnothing$ (pues $\eta \leftrightarrow \xi$). Como los conjuntos de la forma $\widehat{\mathrm{A}}$, en donde $\mathrm{A} \in \xi \cap \alpha$ para alguna $\alpha \in \mathcal{U}$ constituyen una base local del filtro de vecindades $\widehat{\eta}_{\xi}$, basta probar que $\widehat{\mathrm{N}} \cap \widehat{\mathrm{A}} \neq \varnothing$ para cada $\widehat{\mathrm{A}}$ en esta base local y cada $\mathrm{N} \in \eta$. Pero $\widehat{\mathrm{N}} \cap \widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{N} \cap \mathrm{A}} \neq \varnothing$. ξ es entonces, un punto de adherencia del filtro concreto $\mathcal{F}$. ■

2.3. El Teorema de Extensión

Primeramente, de la teoría de espacios métricos recordemos uno de sus más importantes Teoremas.

Teorema 2.3.1

Sean (X, d), (Y, ρ) *espacios métricos. Supóngase que* $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$, *es denso en* X, *que* (Y, ρ) *es completo y que* $\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{Y}$ *es uniformemente continua. Entonces existe* $\widehat{\varphi} : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *tal que:*

i) $\widehat{\varphi}$ *es uniformemente continua.*

ii) $\widehat{\varphi}$ *extiende a* φ, *es decir,* $\widehat{\varphi}|_{\mathrm{A}} = \varphi$.

iii) $\widehat{\varphi}$ *es la única extensión*[3] *continua de* φ.

[3]Veáse el Apéndice B. Extensiones de Espacios Topológicos.

Demostración. Véase por ejemplo [16] o bien [21]. ∎

En el caso de espacios pre–uniformes, el Teorema 2.3.1 se expresa de la siguiente manera.

Teorema 2.3.2

Sean $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$ *un espacio pre–uniforme admisible y* $(\mathrm{Y}, \mathcal{V})$ *un espacio semi–uniforme completo y* T_0*. Supóngase que* $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$*, es denso en* X *y que* $\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{Y}$ *es una función uniformemente continua. Entonces existe una función* $\widehat{\varphi} : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *tal que:*

$i)$ $\widehat{\varphi}$ *es uniformemente continua.*

$ii)$ $\widehat{\varphi}$ *extiende a* φ*, es decir,* $\widehat{\varphi}|_{\mathrm{A}} = \varphi$*.*

$iii)$ $\widehat{\varphi}$ *es la única extensión continua de* φ*.*

Demostración.
Existencia de $\widehat{\varphi}$.

Para un filtro de Cauchy η en $(\mathrm{A}, \mathcal{U}|_{\mathrm{A}})$ definamos:

$$\varphi(\eta)^{+} = \{\varphi(\mathrm{N}) \, : \, \mathrm{N} \in \eta\}^{+} .$$

Por la continuidad uniforme de φ y el Teorema 2.1.5, $\varphi(\eta)^{+}$ es un filtro $\mathcal{V}$–Cauchy en Y. Sea ahora $x \in \mathrm{X} = C\ell(\mathrm{A})$ y sea

$$\zeta = \{\mathrm{A} \cap \mathcal{O} \, : \, \mathcal{O} \text{ es vecindad de } x \text{ en } \mathrm{X}\, \}$$

el filtro de vecindades de x relativo a A. ζ es un filtro en A y una base de filtro en X. Más aún $\zeta \to x$ en X. Probemos ahora que ζ es $\mathcal{U}|_{\mathrm{A}}$–Cauchy. En efecto, debemos probar que $(\alpha|_{\mathrm{A}}) \cap \zeta \neq \varnothing$ para toda $\alpha \in \mathcal{U}$. Sea $\mathrm{L} \in \alpha$ tal que $x \in \mathrm{L}$. Puesto que $\mathcal{U}$ es admisible, podemos suponer que L es vecindad de x. Por tanto, $\mathrm{A} \cap \mathrm{L} \in \zeta$; es decir, $\mathrm{A} \cap \mathrm{L} \in (\alpha|_{\mathrm{A}}) \cap \zeta$. Por tanto, ζ es $\mathcal{U}|_{\mathrm{A}}$–Cauchy. De lo dicho en la primera parte de la demostración deducimos que $\varphi(\zeta)^{+}$ es $\mathcal{V}$–Cauchy y por tanto existe $y \in \mathrm{Y}$ tal que $\varphi(\zeta)^{+} \to y$. Por otra parte Y es semi–uniforme, así que la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{V}}$ es regular, y como por hipótesis es T_0, se tiene que Y es un espacio topológico T_2. Por el Hecho 1, de la demostración de la Proposición 2.1.3, y es el único punto de convergencia de $\varphi(\zeta)$, lo que permite definir la función:

$$\widehat{\varphi} : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$$
$$x \mapsto y .$$

Además, si $x \in \mathrm{A}$, necesariamente $\widehat{\varphi}(x) = \varphi(x)$. Esto demuestra la existencia de $\widehat{\varphi}$.

Continuidad Uniforme de $\widehat{\varphi}$.

Sea $\varepsilon \in \mathcal{V}$. Como $(\mathrm{Y}, \mathcal{V})$ es semi–uniforme, existe $\varepsilon_1 \in \mathcal{V}$ tal que para todo $\mathrm{B} \in \varepsilon_1$ existe $\gamma_{\mathrm{B}} \in \mathcal{V}$ y $\mathrm{L}_{\mathrm{B}} \in \varepsilon$ con la propiedad de que

$$\mathsf{St}(\mathrm{B}, \gamma_{\mathrm{B}}) \subseteq \mathrm{L}_{\mathrm{B}}. \tag{2.4}$$

Puesto que $\mathcal{U}$ es admisible y φ es uniformemente continua, existe $\delta \in \mathcal{U}$ tal que

$$\delta|_{\mathrm{A}} \leq \left\{\varphi^{-1}(\mathrm{B}) \,:\, \mathrm{B} \in \varepsilon_1\right\}.$$

Probaremos que

$$\delta \leq \left\{\widehat{\varphi}^{-1}(\mathrm{L}) \,:\, \mathrm{L} \in \varepsilon\right\}.$$

En efecto, sea $\mathrm{D} \in \delta$. Sabemos que $\varphi(\mathrm{D} \cap \mathrm{A}) \subseteq \mathrm{B}$ para alguna $\mathrm{B} \in \varepsilon_1$. Por la ecuación 2.4, será suficiente con demostrar que $\widehat{\varphi}(\mathrm{D}) \subseteq \mathrm{L}_{\mathrm{B}}$. En efecto, sea $x \in \mathrm{D}$. Por lo probado en la parte de existencia de la existencia de $\widehat{\varphi}$, se tiene que $\widehat{\varphi}(x)$ es el único punto de convergencia del filtro $\varphi(\mathrm{A} \cap \eta_x)^+$, que además es $\mathcal{V}$–Cauchy, lo que implica que $\widehat{\varphi}(x)$ es también punto de adherencia del filtro, por lo que

$$\widehat{\varphi}(x) \in C\ell(\varphi(\mathrm{A} \cap \mathrm{L})) \quad \text{para toda} \;\; \mathrm{L} \in \eta_x.$$

En particular, para D tenemos que

$$\widehat{\varphi}(x) \in C\ell(\varphi(\mathrm{A} \cap \mathrm{D})) \subseteq C\ell(\mathrm{B}) \subseteq \mathsf{St}(\mathrm{B}, \gamma_{\mathrm{B}}) \subseteq \mathrm{L}_{\mathrm{B}}.$$

Por tanto, $\widehat{\varphi}$ es uniformemente continua.

Unicidad de $\widehat{\varphi}$.

Si existiese $\psi : (\mathrm{X}, \mathcal{T}_{\mathcal{U}}) \to (\mathrm{Y}, \mathcal{T}_{\mathcal{V}})$ continua tal que $\psi|_{\mathrm{A}} = \varphi$, entonces $\psi = \varphi$. Lo que se deduce del siguiente:

Hecho 4

Sean X y Y dos espacios topológicos con Y un espacio T_2 y sean $f, g : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ funciones continuas. Entonces el conjunto $\mathrm{D} = \{x \in \mathrm{X} \,:\, f(x) = g(x)\}$ es cerrado en X. Si además D es denso en X, entonces $f(x) = g(x)$ para toda $x \in \mathrm{X}$. ■

Corolario 2.3.3

Dos completaciones semi–uniformes de un mismo espacio semi–uniforme y T_0 $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$ son unimórficas.

2.4. Filtros Abiertos y Filtros Regulares

Definición 2.4.1

Sean $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ *espacio topológico y* $\mathcal{F}$ *un filtro en* X.

1) $\mathcal{F}$ *se dice* ***regular*** *si para cada* $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$ *existe* $\mathrm{G} \in \mathcal{F}$ *tal que* $C\ell\,(\mathrm{G}) \subseteq \operatorname{int}(\mathrm{F})$.

2) $\mathcal{F}$ *se dice* ***regular maximal*** *si:*

   $i)$ $\mathcal{F}$ *es regular.*

   $ii)$ $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ *para todo filtro regular tal que* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$.

3) $\mathcal{F}$ *se dice* ***abierto***[4] *si para cada* $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$ *también* $\operatorname{int}(\mathrm{F}) \in \mathcal{F}$. *Equivalentemente, si* $\mathcal{F} \cap \mathcal{T}$ *es una base del filtro* $\mathcal{F}$.

4) $\mathcal{F}$ *se dice* ***abierto maximal*** *si:*

   $i)$ $\mathcal{F}$ *es abierto.*

   $ii)$ $\mathcal{F} = \mathcal{G}$, *para todo filtro abierto tal que,* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$

Sobre la existencia de filtros maximales regulares y abiertos maximales hacemos una observación en el capítulo siguiente.

Los resultados propuestos a continuación son obvios y por ello no daremos ninguna demostración.

Proposición 2.4.2

Sea $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ *espacio topológico.*

$i)$ *Si* $\mathcal{F}$ *es un filtro regular, entonces* $\mathcal{F}$ *es un filtro abierto.*

$ii)$ *Si* $\mathrm{V} \subseteq \mathrm{X}$ *es abierto y no vacío, entonces el conjunto*

$$\mathcal{F} = \{\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X} \,:\, \mathrm{V} \subseteq \mathrm{A}\}$$

es un filtro abierto en X.

[4] Nótese que estamos estableciendo una definición de filtro abierto algo distinta a la tratada en algunos textos como por ejemplo, [14] ó bien [33]. También véase la Definición A.1.2 del apéndice A.

$iii)$ *Sea* $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una familia de abiertos de* X *tales que*

$a)$ $V_n \neq \varnothing$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

$b)$ $C\ell\,(V_{n+1}) \subseteq V_n$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$.

Entonces el conjunto

$$\mathcal{F} = \{\, A \subseteq X \,:\, V_n \subseteq A \ \ \textit{para algún } n \in \mathbb{N} \,\}$$

es un filtro regular en X.

$iv)$ *Si en* (ii) *suponemos que* V *es abierto–cerrado, es decir,* $\mathrm{Fr}\,(V) = \varnothing$*, entonces el conjunto:*

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq X \,:\, \mathcal{V} \subseteq A\}$$

es un filtro regular en X.

2.5. Espacios Totalmente Acotados

Comenzaremos esta sección con un resultado básico que será de suma utilidad en el Capítulo siguiente.

Teorema 2.5.1

Dos uniformidades compatibles en un espacio compacto y regular X*, son equivalentes.*

Demostración. Como sabemos toda uniformidad es equivalente a una uniformidad abierta (véase Teorema 7.5, pág., 353 de [16] o bien Observación 1.2.6). Por todo lo anterior, será suficiente demostrar el teorema para uniformidades abiertas. Sea $\mathfrak{U}$ cualquier uniformidad abierta y compatible en X. Bastará con probar que $\mathfrak{U}$ es equivalente a la uniformidad en X que consiste de todas las cubiertas abiertas finitas de X. Supongamos que esto no es así, esto es, existe una cubierta finita $\lambda = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ de X, que no es refinada por ninguna cubierta $\alpha \in \mathfrak{U}$. Para cada $\alpha \in \mathfrak{U}$ pongamos:

$$L_\alpha = \cup\{\, A \in \alpha \,:\, A \not\subseteq V_i, \ \text{para todo} \ \ \mathcal{V}_i \in \lambda \,\}\,.$$

Claramente la familia: $\{L_\alpha \,:\, \alpha \in \mathfrak{U}\}$ es una base de filtro en X. Como X es compacto, existe un punto $x \in C\ell\,(L_\alpha)$ para cada $\alpha \in \mathfrak{U}$, pero ya que λ es cubierta de X, debe existir un índice i tal que $x \in \mathrm{V}_i$. Tomemos $\alpha \in \mathfrak{U}$ tal que $\mathsf{St}(x,\alpha) \subseteq \mathrm{V}_i$ y sea $\beta \in \mathfrak{U}$ tal que $\beta^* < \alpha$.[5] Puesto que $x \in C\ell(\mathrm{L}_\beta)$, existe un punto $y \in \mathsf{St}(x,\beta) \cap \mathrm{L}_\beta$. De aquí existe un elemento $\mathrm{B} \in \beta$ tal que $y \in \mathrm{B}$ y $\mathrm{B} \setminus \mathrm{V}_j \neq \varnothing$ para cada j y además $x \in \mathsf{St}(\mathrm{B},\beta)$. Como $\beta^* < \alpha$, debe existir $\mathrm{A} \in \alpha$ tal que $\mathsf{St}(\mathrm{B},\beta) \subseteq \mathrm{A}$. En consecuencia, $\mathrm{B} \subseteq \mathsf{St}(x,\alpha) \subseteq \mathrm{V}_i$, lo cual es una contradicción. ■

Continuaremos esta sección con un resultado sumamente importante sobre los espacios métricos y que esta íntimamente relacionado con la compacidad. Lo incluimos por las generalizaciones a las estructuras uniformes que admite, algunas de las cuales incluimos en esta sección.

Definición 2.5.2

Un espacio métrico X *se dice* ***totalmente acotado*** *si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe una familia finita* $\mathfrak{F}$ *de abiertos de* X *tales que*

$i)$ $\mathrm{X} = \cup\mathfrak{F}$.

$ii)$ $\mathrm{diám}(\mathrm{U}) < \varepsilon$ *para todo* $\mathrm{U} \in \mathfrak{F}$.

Teorema 2.5.3

Un espacio métrico (X, d) *es totalmente acotado si y sólo si toda sucesión* $(a_n)_n$ *de puntos de* X *tiene una subsucesión de Cauchy.*

La propiedad de ser totalmente acotado caracteriza en parte a los espacios métricos compactos en el sentido de que *un espacio métrico es compacto si y sólo si es completo y totalmente acotado* de donde se deduce el Teorema de Heine–Borel–Lebesgue: *Los subespacios compactos de un espacio euclidiano de dimensión finita son exactamente los cerrados y acotados.*

Enseguida generalizaremos este concepto a las estructuras uniformes.

Definición 2.5.4

Un subconjunto A *de un espacio uniforme, pre–uniforme o semi–uniforme* $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$ *es* ***totalmente acotado*** *si para cada* $\alpha \in \mathcal{U}$ *existe una familia finita* $\mathcal{G} \subset \alpha$ *tal que* $\mathrm{A} \subseteq \cup\mathcal{G}$.

[5] véase la Definición 1.2.1.

Teorema 2.5.5

En todo espacio pre–uniforme $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$ *las siguientes condiciones son equivalentes:*

$i)$ $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$ *es totalmente acotado.*

$ii)$ *Todo ultrafiltro en* X *es* $\mathcal{U}$*–Cauchy.*

$iii)$ *Todo filtro en* X *está contenido en un filtro* $\mathcal{U}$*–Cauchy.*

Demostración.

$\underline{i) \Rightarrow ii)}$ Es inmediato del Teorema 1.5.2.

$\underline{ii) \Rightarrow iii)}$ Es a consecuencia del Teorema 1.5.2.

$\underline{iii) \Rightarrow i)}$ Supongamos que todo filtro en X está contenido en un filtro $\mathcal{U}$–Cauchy. Sea $\alpha \in \mathcal{U}$. Afirmamos que existe una familia finita $\mathcal{G}$ con $\mathcal{G} \subseteq \alpha$ y tal que $\mathrm{X} = \cup \mathcal{G}$. En efecto, si así no fuese, entonces la familia

$$\mathcal{L} = \{ \mathrm{X} \setminus \cup \mathcal{G} \, : \, \mathcal{G} \text{ es finito, } \mathcal{G} \subseteq \alpha \}^{+}$$

es un filtro en X. Por hipótesis, existe $\widehat{\mathcal{L}}$ filtro $\mathcal{U}$–Cauchy tal que $\mathcal{L} \subseteq \widehat{\mathcal{L}}$. Por tanto, $\widehat{\mathcal{L}} \cap \alpha \neq \varnothing$, por lo que existe $\mathrm{A} \in \widehat{\mathcal{L}} \cap \alpha$. Pero por otra parte, $(\mathrm{X} \setminus \mathrm{A}) \in \mathcal{L} \subseteq \widehat{\mathcal{L}}$, lo cual es una contradicción. ∎

Antes de continuar la teoría es necesario establecer la siguiente definición:

Definición 2.5.6

Un espacio pre–uniforme (semi–uniforme o uniforme) $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$ *es* ***compacto*** *si el espacio topológico* $(\mathrm{X}, \mathcal{T}_{\mathcal{U}})$ *es compacto.*

El Teorema siguiente es la versión en las estructuras uniformes, de la caracterización mencionada en el comentario previo a la Definición 2.5.4.

Teorema 2.5.7

Sea $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$ *un espacio uniforme. Entonces* $(\mathrm{X}, \mathcal{T}_{\mathcal{U}})$ *es compacto si y sólo si es completo y totalmente acotado.*[6]

[6]Estamos aquí, haciendo alusión a la completez tradicional, es decir, la completez por convergencia, que hemos establecido en la Definición 2.1.2.

Demostración.

$\underline{\underline{\Rightarrow)}}$ Supongamos que $(\mathrm{X}, \mathcal{T}_{\mathcal{U}})$ es compacto y probemos que $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$ es completo y totalmente acotado. Primeramente, para probar que $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$ es totalmente acotado, utilizaremos el Teorema 2.5.5. Es decir, bastará con probar que todo ultrafiltro en X es $\mathcal{U}$–Cauchy. Sea $\mathcal{J}$ un ultrafiltro en X. Puesto que X es compacto se tiene que $\mathfrak{conv}(\mathcal{J}) \neq \varnothing$. Entonces existe $p \in \mathrm{X}$ tal que $\mathcal{J} \to p$, lo que implica que $\eta_p \subseteq \mathcal{J}$. Ahora, como $\mathcal{U}$ es admisible, dada $\alpha \in \mathcal{U}$ existe $\mathrm{A} \in \alpha$ tal que $p \in \operatorname{int}(\mathrm{A})$. Por ello $\mathrm{A} \in \eta_p$ y así $\alpha \cap \mathcal{J} \neq \varnothing$. Por tanto, el ultrafiltro $\mathcal{J}$ es $\mathcal{U}$–Cauchy en X. Esto demuestra que X es totalmente acotado.

Por otra parte, supongamos que $\mathcal{F}$ es cualquier filtro $\mathcal{U}$–Cauchy en X. Puesto que $(\mathrm{X}, \mathcal{T}_{\mathcal{U}})$ es compacto $\mathfrak{adh}(\mathcal{F}) \neq \varnothing$. Entonces existe $p \in \mathrm{X}$ tal que $\mathcal{F} \mapsto p$ y del Teorema 1.6.11, se tiene que $\mathcal{F} \to p$. Por lo tanto, $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$ es completo.

$\underline{\underline{\Leftarrow)}}$ Si ahora suponemos que $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$ es completo y totalmente acotado, debemos probar que $(\mathrm{X}, \mathcal{T}_{\mathcal{U}})$ es compacto; para ello será suficiente con probar que todo ultrafiltro en X converge. Pero esto último es consecuencia inmediata del Teorema 2.5.5 y de la completez de X. Por consiguiente X es compacto. ■

Este último Teorema tiene un corolario de suma importancia, pero antes de establecerlo y demostrarlo daremos la siguiente:

Definición 2.5.8

Sea X un espacio topológico.

$i)$ $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$ *es* ***nulo*** *en X, si existe una función continua $\varphi : \mathrm{X} \to [0,1]$ tal que $\mathrm{A} = \varphi^{-1}(\{0\})$.*

$ii)$ $\mathrm{U} \subseteq \mathrm{X}$ *es* ***cocero*** *en X, si $\mathrm{X} \setminus \mathrm{U}$ es nulo en X.*

$iii)$ *La familia $\alpha \subseteq \mathcal{P}(\mathrm{X})$ es una* ***cubierta cocero*** *para X, si α es una cubierta para X y cada elemento de α es un conjunto cocero en X.*

Algunas propiedades de los conjuntos cocero y las cubiertas cocero se resumen a continuación:

Observación 2.5.9

1) *Un espacio topológico X es completamente regular si y sólo si la familia*

$$\mathcal{C}_0(\mathrm{X}) = \{\, \mathrm{U} \subseteq \mathrm{X} : \ \mathrm{U} \text{ es un conjunto cocero en } \mathrm{X} \,\} \tag{2.5}$$

es base para la topología de X.

2) *Si* X *es un espacio topológico, entonces la familia*

$$\mathcal{U}_0 = \{\alpha : \alpha \text{ es cubierta cocero de } \mathrm{X}\} \tag{2.6}$$

es base de uniformidad en X.

Corolario 2.5.10 (Corolario del Teorema 2.5.7)

Sea $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ *un espacio completamente regular. Entonces* $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ *es compacto si y sólo si todas la uniformidades en* X *compatibles con* $\mathcal{T}$ *son completas.*

Demostración. Por el Teorema 2.5.7, será suficiente con probar que si $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ no es compacto, debe existir una uniformidad compatible $\mathcal{U}$ que no es completa. En efecto, elijamos $\mathcal{U}$ como la uniformidad generada por la familia de cubiertas cocero finitas de X. Claramente tenemos que $\mathcal{U}$ es totalmente acotada y, en consecuencia, $\mathcal{U}$ no puede ser completa. ∎

Teorema 2.5.11

Toda función $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *uniformemente continua entre espacios uniformes* X, Y, *manda subespacios totalmente acotados de* X *en subespacios totalmente acotados de* Y.

Demostración. Es inmediata de los Teoremas 2.1.5 y 2.5.5. ∎

En los espacios uniformes es posible además, dar una definición equivalente para la propiedad de ser totalmente acotado.

Definición 2.5.12

Un subconjunto A *de un espacio uniforme* $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$ *es* ***precompacto*** *si para todo* $\varepsilon \in \mathcal{U}$ *existe un conjunto finito* $\mathrm{F}_\varepsilon = \{a_1, a_2, \ldots, a_t\} \subseteq \mathrm{X}$, *tal que* $\mathrm{A} \subseteq \bigcup_{i=1}^{t} \mathsf{St}(a_i, \varepsilon)$.

Teorema 2.5.13

Un espacio uniforme $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$ *es precompacto si y sólo si es totalmente acotado.*

Demostración.

$\underline{\underline{\Rightarrow)}}$ Supongamos que X es precompacto. Sea $\alpha \in \mathcal{U}$, como $\mathcal{U}$ es uniformidad, existe $\beta \in \mathcal{U}$ tal que $\beta^{\triangle} \leq \alpha$. Ya que X es precompacto, existe un conjunto $F \subseteq X$ finito, $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ tal que $\mathsf{St}(F, \beta) = X$. Para cada $i = 1, \ldots, n$, tomemos $A_i \in \alpha$ tal que $\mathsf{St}(x_i, \beta) \subseteq A_i$. Todo lo anterior implica que $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Por tanto X es totalmente acotado.

$\underline{\underline{\Leftarrow)}}$ Supongamos que X es totalmente acotado y sea $\alpha \in \mathcal{U}$. Entonces existe una familia finita $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subseteq \alpha$, tal que $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Elijamos, para cada $i = 1, \ldots, n$, $x_i \in A_i$, de esta forma $A_i \subseteq \mathsf{St}(x_i, \alpha)$ y así $X = \bigcup_{i=1}^{n} \mathsf{St}(x_i, \alpha)$ y, por tanto, X es precompacto. ■

Capítulo 3

Completaciones y Propiedades Universales

3.1. Resultados Importantes

Teorema 3.1.1

Sean $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ *espacio topológico,* $\mathcal{F}$ *un filtro abierto maximal en* X *y* $\mathrm{V} \subseteq \mathrm{X}$ *un abierto no vacío. Entonces* $\mathrm{V} \in \mathcal{F}$ *si y sólo si* $\mathrm{V} \cap \mathrm{F} \neq \varnothing$ *para todo* $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$*.*

Demostración.

$\underline{\underline{\Rightarrow)}}$ Obvia.

$\underline{\underline{\Leftarrow)}}$ Sea $\mathcal{G}$ el filtro de superconjuntos de V. La hipótesis $\mathrm{V} \cap \mathrm{F} \neq \varnothing$ para todo $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$ implica que $\mathcal{G} \leftrightarrow \mathcal{F}$, es decir $\mathcal{G}$ y $\mathcal{F}$ se mezclan, y ello sucede si y sólo si existe un filtro $\mathcal{H}$ tal que $\mathcal{F}$, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$.[1] Además, en este caso, $\mathcal{H}$ es también abierto, pues $\operatorname{int}(\mathrm{G} \cap \mathrm{F}) = \operatorname{int}(\mathrm{G}) \cap \operatorname{int}(\mathrm{F})$ para todo $\mathrm{G} \in \mathcal{G}$, $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$. Pero $\mathcal{F}$ es maximal, de modo que $\mathcal{F} = \mathcal{H}$ y $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$. Por tanto $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ y así $\mathrm{V} \in \mathcal{F}$. ■

Notemos que si $\{\mathcal{F}_i : i \in \mathrm{J}\}$ es una cadena de filtros abiertos, (respectivamente, regulares) en un espacio topológico X, entonces $\bigcup\limits_{i \in \mathrm{J}} \mathcal{F}_i$ es un filtro abierto, (respectivamente regular) en X. Usando el *Lema de Zorn* deducimos que existen elementos maximales en la *familia de filtros abiertos* y en la *familia de filtros regulares* en X, lo que permite establecer el siguiente:

[1] Véase Definición 1.6.1

Corolario 3.1.2

Sea $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ *un espacio topológico. Entonces cada filtro abierto (regular) está contenido en un filtro abierto maximal (regular maximal).*

Teorema 3.1.3

Sean $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ *espacio topológico,* $\mathcal{F}$ *un filtro regular maximal en* X *y sea* $\mathrm{V} \subseteq \mathrm{X}$ *un abierto no vacío. Entonces* $\mathrm{V} \in \mathcal{F}$ *si y sólo si existe una sucesión* $\{\mathrm{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de abiertos no vacíos en* X *tales que*

$i)$ $\mathrm{V} \supseteq C\ell\,(\mathrm{V}_1)$.

$ii)$ $C\ell\,(\mathrm{V}_{n+1}) \subseteq \mathrm{V}_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

$iii)$ $\mathrm{V}_n \cap \mathrm{F} \neq \varnothing$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y para todo* $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$.

Demostración.

$\Rightarrow)$ Trivial. En efecto, supongamos $\mathrm{V} \in \mathcal{F}$. Por la regularidad de $\mathcal{F}$ existe $\mathrm{O}_1 \in \mathcal{T}$, tal que

$$\mathrm{O}_1 \subseteq C\ell\,(\mathrm{O}_1) \subseteq \operatorname{int}(\mathrm{V}).$$

Tomemos $\mathrm{V}_1 = \operatorname{int}(\mathrm{O}_1)$ y apliquemos nuevamente la regularidad. De esta manera inductiva construimos una sucesión de abiertos V_n de X, los cuales satisfacen (i), (ii) y (iii).

$\Leftarrow)$ Tomemos

$$\mathcal{G} = \{\mathrm{G} \subseteq \mathrm{X} : \mathrm{V}_n \subseteq \mathrm{G} \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}.$$

Claramente $\mathcal{G}$ es un filtro regular en X. Además $\mathcal{G} \leftrightarrow \mathcal{F}$ por lo que existe un filtro $\mathcal{H}$ tal que $\mathcal{G}, \mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$. De hecho $\mathcal{H} = \{\mathrm{G} \cap \mathrm{F} : \mathrm{G} \in \mathcal{G},\ \mathrm{F} \in \mathcal{F}\}$. Probemos que $\mathcal{H}$ es regular. Fijemos $\mathrm{G} \in \mathcal{G}$, $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$ y tomemos $\mathrm{G}_1 \in \mathcal{G}$ y $\mathrm{F}_1 \in \mathcal{F}$ de manera que $C\ell\,(\mathrm{G}_1) \subseteq \operatorname{int}(\mathrm{G})$ y $C\ell\,(\mathrm{F}_1) \subseteq \operatorname{int}(\mathrm{F})$. Ahora bien $\mathrm{G}_1 \cap \mathrm{F}_1 \in \mathcal{H}$ y además se cumple que

$$C\ell\,(\mathrm{G}_1 \cap \mathrm{F}_1) \subseteq C\ell\,(\mathrm{G}_1) \cap C\ell\,(\mathrm{F}_1) \subseteq \operatorname{int}(\mathrm{G}) \cap \operatorname{int}(\mathrm{F}) = \operatorname{int}(\mathrm{G} \cap \mathrm{F}).$$

Esto demuestra que $\mathcal{H}$ es regular. Por tanto, $\mathcal{F} = \mathcal{H}$, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ y $\mathrm{V} \in \mathcal{F}$. ∎

Teorema 3.1.4

Sean $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ *espacio topológico regular y* $\mathcal{F}$ *un filtro regular en* X *con la propiedad de que* $\mathfrak{adh}\,(\mathcal{F}) = \varnothing$. *Sea* $p \notin \mathrm{X}$ *y sea* $\mathrm{Y} = \mathrm{X} \cup \{p\}$. *Entonces, las siguientes condiciones:*

- $\eta_p = \{F \cup \{p\} : F \in \mathcal{F}\}$.
- *Para cada* $x \in X$, η_x *es el filtro de vecindades de* x *en* X.
- $A \subseteq Y$ *es abierto en* Y *si para todo* $z \in A$, $A \cap X \in \eta_z$.

definen una topología $\mathcal{T}^*$ *para* Y *tal que* $(Y, \mathcal{T}^*)$ *es regular,* X *es un subespacio abierto y denso de* Y *y* $\mathcal{T}^*|_X = \mathcal{T}$.

Demostración. Primeramente nótese que si $x \in X$, el filtro de vecindades η_x de x en X es una base de filtro en Y. Sea $y \in W \in \mathcal{T}^*$. Si $y \in X$, existe $V_y \in \eta_y$ (filtro de vecindades de y en X) tal que $V_y \subseteq W$. Como $\mathfrak{adh}(\mathcal{F}) = \varnothing$ existen $F_y \in \mathcal{F}$ y $T_y \in \eta_y$ tales que $F_y \cap T_y = \varnothing$. Sea ahora $U_y \in \mathcal{T}$ tal que

$$y \in U_y \subseteq C\ell_X(U_y) \subseteq T_y \cap V_y.$$

Afirmación: $C\ell_X(U_y)$ es cerrado en Y. En efecto, como $(\{p\} \cup F_y) \cap U_y = \varnothing$ se tiene que $p \notin C\ell_Y(U_y)$, por lo que

$$C\ell_X(U_y) = C\ell_Y(\mathcal{U}_y).$$

Así vemos que $C\ell_X(U_y)$ es cerrado en Y. Por tanto, Y es regular en cada punto de X.

Ahora si $y = p$ con $p \in W \in \mathcal{T}^*$, entonces por definición $\{p\} \cup F \subseteq W$ para algún $F \in \mathcal{F}$. Por ello existe $G \in \mathcal{F}$ tal que $C\ell_X(G) \subseteq \mathrm{int}_X(F)$. Finalmente notemos que:

$$C\ell_Y(\{p\} \cup G) = \{p\} \cup C\ell_X(G),$$

pues $C\ell_Y(G) \subseteq C\ell_X(G) \cup \{p\}$. De donde, $C\ell_Y(\{p\} \cup G) = \{p\} \cup C\ell_X(G) \subseteq \{p\} \cup F$. Por lo cual Y es regular en p. ■

3.2. Sobre la Unicidad de las completaciones

Es natural preguntarse si las completaciones tienen alguna propiedad de unicidad o si cumplen alguna propiedad universal a semejanza de la compactación de Stone-Čech.

Una primera respuesta la damos en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 3.2.1 (Espacio Arco iris)

Tomemos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} \mathrm{X} &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\right\} \\ \mathrm{X}^+ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\right\} \end{aligned}$$

y definamos en X *dos topologías de la manera siguiente:*

Para cada $(x,y) \in \mathrm{X}^+$, *sea* $\mathcal{B}_{(x,y)}$ *la familia de discos abiertos en la topología euclidiana de* $\mathbb{R}^2$ *con centro en* (x,y) *y radio* $r < y$ *(esto es posible, pues nótese que* X^+ *es un subconjunto abierto de* $\mathbb{R}^2$ *con la topología tradicional). Para cada* $(x,0) \in \mathrm{X}$, *sea* $\mathcal{B}_{(x,0)}$ *la familia de intersecciones* $\mathrm{X} \cap \mathcal{V}_\varepsilon((x,0))$, *en donde* $\mathcal{V}_\varepsilon((x,0))$ *es el disco abierto en la topología euclidiana de* $\mathbb{R}^2$ *de centro* $(x,0)$ *y radio* $\varepsilon > 0$. *Tomemos ahora la familia:*

$$\mathcal{B}'_{(x,0)} = \left\{\left(\mathrm{X}^+ \cup \{(x,0)\}\right) \cap \mathcal{V}_\varepsilon((x,0)) : \varepsilon > 0\right\}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} &= \cup \left\{\mathcal{B}_{(x,y)} : (x,y) \in \mathrm{X}\right\} \quad \textit{y} \\ \mathfrak{B}' &= \cup \left(\left\{\mathcal{B}_{(x,y)} : (x,y) \in \mathrm{X}^+\right\}\right) \cup \left(\cup \left\{\mathcal{B}'_{(x,0)} : x \in \mathbb{R}\right\}\right) \end{aligned}$$

son bases de topologías $\mathcal{T}$ *y* $\mathcal{T}'$ *para* X. *Además nótese que* $\mathcal{T}$ *es una topología metrizable, pues* $\mathcal{T} = \xi|_{\mathrm{X}}$, *en donde* ξ *es la topología tradicional de* $\mathbb{R}^2$. *Por otro lado* $\mathcal{T}'$ *es una topología de Hausdorff, pero que no es regular. Definamos ahora las familias siguientes:*

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \{\alpha : \alpha \text{ es cubierta de } \mathrm{X},\ \alpha \subseteq \mathfrak{B}\} \quad \textit{y} \\ \mathcal{V}' &= \{\gamma : \gamma \text{ es cubierta de } \mathrm{X},\ \gamma \subseteq \mathfrak{B}'\}. \end{aligned}$$

$\mathcal{V}$ *es una base de uniformidad en* X *y* $\mathcal{U} = \mathcal{V}|_{\mathrm{X}^+}$, $\mathcal{U}' = \mathcal{V}'|_{\mathrm{X}^+}$ *son bases de uniformidad equivalentes en* X^+. *De hecho* $(\mathrm{X},\mathcal{V})$ *es la única completación uniforme de* $(\mathrm{X}^+,\mathcal{U})$. *Por otro lado* $\mathcal{V}'$ *es una base de pre-uniformidad en* X *equivalente a la* T_2*–pre-uniformidad de* X *determinada por todas las cubiertas abiertas del espacio* arco iris $(\mathrm{X},\mathcal{T}')$. *Por tanto,* $\mathcal{V}'$ *es también completa y ambos espacios* $(\mathrm{X},\mathcal{V})$ *y* $(\mathrm{X},\mathcal{V}')$ *son completaciones de* $(\mathrm{X}^+,\mathfrak{U})$. *Sin embargo las bases de pre-uniformidad* $\mathcal{V}$ *y* $\mathcal{V}'$ *no pueden ser equivalentes pues la topología* $\mathcal{T}_{\mathcal{V}}$ *es regular y* $\mathcal{T}_{\mathcal{V}'}$ *no lo es.*

La situación se describe en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathrm{X},\mathcal{V}) \arrow[dd, dotted, "\nexists \text{ unimorfismo}"] \\
(\mathrm{X}^+,\mathcal{U}) \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & \\
 & (\mathrm{X},\mathcal{V}')
\end{tikzcd}$$

en donde φ y ψ son encajes unimórficos. ■

3.3. Espacios T_2 y T_3–cerrados

Definición 3.3.1

Sea $(\mathrm{X},\mathcal{T})$ un espacio topológico.

1) X *es un* ***espacio topológico*** T_3***–cerrado*** *si* X *es* T_3 *y siempre que exista* $\varphi : \mathrm{X} \to \mathrm{Z}$ *homeomorfismo, en donde* Z *es un subespacio de un espacio* Y *el cual es* T_3*, entonces* Z *es cerrado en* Y.

2) X *es un* ***espacio topológico*** T_2***–cerrado***[2] *si* X *es* T_2 *y siempre que exista* $\varphi : \mathrm{X} \to \mathrm{Z}$ *homeomorfismo, en donde* Z *es un subespacio de un espacio* Y *el cual es* T_2*, entonces* Z *es cerrado en* Y.

Teorema 3.3.2

En todo espacio topológico T_3 X*, las siguientes condiciones son equivalentes:*

$i)$ X *es* T_3*–cerrado.*

[2]Estos espacios también reciben el nombre de **Hausdorff–cerrados** ó simplemente H**–cerrados**, lo cual es más común en la literatura. Sin embargo, en este trabajo utilizamos el término T_2**–cerrado** para tener concordancia con el término T_3**–cerrado**. En el ápendice A, demostramos algunas propiedades de estos espacios.

ii) *Todo filtro regular* $\mathcal{F}$ *en* X *es tal que* $\mathfrak{adh}(\mathcal{F}) \neq \varnothing$.

iii) *Toda semi–uniformidad compatible en* X *es completa.*

Demostración. Procederemos de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c} i) \Leftrightarrow \ ii) \\ \Updownarrow \\ iii) \end{array}$$

$\underline{i) \Rightarrow ii)}$ Por el Teorema 3.1.4, si $\mathcal{F}$ fuera un filtro regular en X sin puntos de adhe–rencia, entonces X tiene una extensión propia T_3. De manera que X no podría ser T_3–cerrado.

$\underline{ii) \Rightarrow i)}$ Si X no fuera T_3–cerrado, X tendría alguna extensión T_3 agregando un único punto cerrado $\mathrm{Y} = \mathrm{X} \cup \{p\}$. Es decir,

$$\mathrm{X} \hookrightarrow \mathrm{Y} \text{ con } \mathrm{Y} \text{ espacio topológico } \mathrm{T}_3 \text{ y } C\ell_{\mathrm{Y}}(\mathrm{X}) \setminus \mathrm{X} = \{p\}.$$

Sea

$$\mathcal{F} = \{\mathrm{V} \cap \mathrm{X} \,:\, \mathrm{V} \in \eta_p\}.$$

$\mathcal{F}$ es una base de filtro en Y y el filtro que genera converge a p. Por tanto, $\mathcal{F}$ es un filtro en X que por ser Y espacio T_2 debe cumplir con que $\mathfrak{adh}_{\mathrm{X}}(\mathcal{F}) = \varnothing$. Para terminar esta parte, probemos que $\mathcal{F}$ es un filtro regular en X. Sean V y W vecindades abiertas de p en Y tales que $C\ell_{\mathrm{Y}}(\mathrm{W}) \subseteq \mathrm{V}$. Entonces, $C\ell_{\mathrm{X}}(\mathrm{W} \cap \mathrm{X}) = C\ell_{\mathrm{Y}}(\mathrm{W}) \cap \mathrm{X} \subseteq \mathrm{V} \cap \mathrm{X}$, lo que demuestra que $\mathcal{F}$ es regular en X.

$\underline{i) \Rightarrow iii)}$ Sea $\mathcal{U}$ una semi–uniformidad compatible en X. (Existe por ser X un espacio T_3) Si $\mathcal{U}$ no fuera completa, la completación $(\widehat{\mathrm{X}}, \widehat{\mathcal{U}})$ sería una extensión propia de X. Así que existe η filtro $\mathcal{U}$–Cauchy en X tal que $\mathfrak{adh}(\eta) = \varnothing$ (ó bien, $\mathfrak{conv}(\eta) = \varnothing$ en virtud de que X es T_2 por ser T_3). Entonces, por la Proposición 1.5.7,

$$\eta' = \{\mathsf{St}(\mathrm{N}, \alpha) \,:\, \mathrm{N} \in \eta,\ \alpha \in \mathcal{U}\}^+$$

es un filtro fuertemente redondo contenido en η, que además no converge en X. Así que X no es cerrado en $\widehat{\mathrm{X}}$. Por tanto, X no sería T_3–cerrado.

$\underline{iii) \Rightarrow i)}$ Supongamos que X no es T_3–cerrado. Sea Y una extensión unipuntual T_3 de X. La familia $\mathcal{U}$ de cubiertas abiertas de Y es una base de semi–uniformidad compatible y completa en Y. Por otra parte, $(\mathrm{Y}, \mathcal{U})$ es una completación de $(\mathrm{X}, \mathcal{U}|_{\mathrm{X}})$ (si bien, $\mathcal{U}|_{\mathrm{X}}$ no necesariamente incluye todas la cubiertas abiertas de X). En efecto, ya que Y es una extensión de X la función inclusión $j : \mathrm{X} \hookrightarrow \mathrm{Y}$ es uniformemente continua. Entonces, por el Teorema 3.1.4, $\mathcal{U}|_{\mathrm{X}}$ no puede ser completa, pues si lo fuese X tendría dos completaciones, a saber $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}|_{\mathrm{X}}$. ∎

Teorema 3.3.3

Todo espacio T_3 $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ *tiene una extensión* T_2 Y *con las siguientes propiedades:*

$i)$ *Todo filtro regular en* Y *tiene al menos un punto de adherencia en* Y.

$ii)$ X *es abierto en* Y.

Demostración. Si X es T_3–cerrado, el Teorema es obvio. Si esto no sucede, la familia

$$\{\xi_i \, : \, i \in \mathrm{J}\}$$

de filtros regulares maximales de X sin puntos de adherencia en X no es vacía. Para cada $i \in \mathrm{J}$, tomemos un punto $p_i \notin \mathrm{X}$, de tal forma que $i, j \in \mathrm{J}$, $i \neq j$ implica que $p_i \neq p_j$ y definamos

$$\mathrm{Y} = \mathrm{X} \cup \{p_i \, : \, i \in \mathrm{J}\}.$$

Para cada $i \in \mathrm{J}$, sea

$$\eta_{p_i} = \{\widehat{\mathrm{V}} \, : \mathrm{V} \in \xi_i\}, \quad \text{en donde} \quad \widehat{\mathrm{V}} = \mathrm{V} \cup \{\xi_j \, : \, \mathrm{V} \in \xi_j\}.$$

Claramente cada η_{p_i} es una base de filtro en Y formada por subconjuntos de Y que contienen a p_i. Además, para cada $x \in \mathrm{X}$ sea η_x el filtro de vecindades de x en el espacio X. Con todas estas bases de filtro construimos una topología $\mathcal{T}^*$ (véase el lema 1.2.3) para Y tal que $\left(\mathrm{Y}, \mathcal{T}^*\right)$ resulte ser una extensión T_2 de $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$. En efecto, primeramente es claro que cualesquiera dos puntos distintos de X tienen $\mathcal{T}^*$–vecindades ajenas. Ahora consideremos $x \in \mathrm{X}$ e $i \in \mathrm{J}$. Existen W vecindad de x y $\mathrm{V} \in \xi_i$ tales que $\mathrm{W} \cap \mathrm{V} = \varnothing$ (esto por no tener ξ_i puntos de adherencia). Por tanto, $\mathrm{W} \cap \widehat{\mathrm{V}} = \varnothing$. Para terminar, dados $i, j \in \mathrm{J}$ tales que $i \neq j$. Sabemos que existe $\mathrm{V} \in \xi_i \setminus \xi_j$ y por el Teorema 3.1.3, existe un abierto $\mathrm{W} \subseteq \mathrm{X}$ y un elemento $\mathrm{F} \in \xi_j$ tales que $C\ell(\mathrm{W}) \subseteq \mathrm{V}$ y $\mathrm{W} \cap \mathrm{F} = \varnothing$. Por tanto $\widehat{\mathrm{W}} \cap \widehat{\mathrm{F}} = \varnothing$. De esta manera hemos probado que Y es T_2.

Tomemos ahora un filtro regular $\mathcal{G}$ en Y. Entonces $\mathcal{G}|_{\mathrm{X}}$ es también un filtro regular. Por el Corolario 3.1.2, existe ξ filtro regular maximal en X tal que $\mathcal{G}|_{\mathrm{X}} \subseteq \xi$. Si ξ tiene un punto de adherencia $x_0 \in \mathrm{X}$, entonces claramente x_0 es punto de adherencia de $\mathcal{G}$. Si ξ carece de puntos de adherencia, entonces $\xi = \xi_i$, para algún $i \in \mathrm{J}$ y, por tanto, p_i es punto de adherencia de $\mathcal{G}$. Por otra parte se sigue de la definición de Y que X es abierto en Y. ■

Observación 3.3.4

La extensión Y *del espacio* X *descrita en el teorema anterior nunca es regular, a menos, que* $\mathrm{Y} = \mathrm{X}$*, es decir,* Y *es regular únicamente si* X *mismo es* T_3*–cerrado.*

Demostración. En efecto, si $y \in \mathrm{Y} \setminus \mathrm{X}$ y si η_y es el filtro de vecindades de y, la regularidad de Y implicaría que el filtro η_y es regular maximal así como su restricción $\eta_y|_{\mathrm{X}}$. No obstante η_y no es abierto maximal, pues X interseca a cada elemento de η_y pero $\mathrm{X} \notin \eta_y$. ■

Sin embargo, tenemos:

Teorema 3.3.5

Sea $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ *un espacio* T_3*. Entonces* $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ *tiene una extensión* T_3*–cerrada si y sólo si* $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ *tiene una semi–uniformidad compatible* $\mathcal{U}_0$ *tal que cada filtro regular maximal en* X *es* $\mathcal{U}_0$*–Cauchy.*

Demostración.

$\underline{\underline{\Rightarrow)}}$ Sea Y una extensión T_3–cerrada de X y sea $\mathcal{U}$ la familia de cubiertas abiertas de Y. Claramente $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}|_{\mathrm{X}}$ es una base de semi–uniformidad compatible de X. Si η es un filtro regular maximal en X, entonces la familia

$$\mathfrak{m} = \{\, \mathrm{L} \subseteq \mathrm{Y} \,:\, (\mathrm{L} \cap \mathrm{X}) \in \eta \}$$

es claramente un filtro regular en Y. Además, si $\mathfrak{m}_0$ es un filtro regular maximal en Y que contiene a $\mathfrak{m}$, entonces $\mathfrak{m}_0|_{\mathrm{X}}$ es un filtro regular en X que contiene a η y, por tanto, $\mathfrak{m}_0|_{\mathrm{X}} = \eta$. En consecuencia, $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$ y así $\mathfrak{m}$ es regular maximal en Y. Como Y es T_3–cerrado, $\mathfrak{m}$ converge a un punto $y \in \mathrm{Y}$ y, por tanto, $\mathfrak{m}$ es de Cauchy respecto a la semi–uniformidad $\mathcal{U}$. $\eta = \mathfrak{m}|_{\mathrm{X}}$ es entonces de Cauchy respecto a la semi–uniformidad $\mathcal{U}_0$.

$\underline{\underline{\Leftarrow)}}$ Sea $\mathcal{U}_0$ una semi–uniformidad compatible en $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ tal que cada filtro regular maximal en X es $\mathcal{U}_0$–Cauchy. Sea $\mathfrak{m}$ un filtro regular maximal en la completación $\mathrm{Y} = \widehat{\mathrm{X}}$. Como por hipótesis $\mathfrak{m}|_{\mathrm{X}}$ es $\mathcal{U}_0$–Cauchy, $\mathfrak{m}$ debe ser $\mathcal{U}_0$–Cauchy y, por tanto, $\mathfrak{m}$ es convergente. El espacio $\left(\mathrm{Y}, \mathcal{T}_{\widehat{\mathcal{U}}_0}\right)$ es entonces T_3–cerrado. ■

Observación 3.3.6

$a)$ *Todo espacio* T_3*–cerrado de Tychonoff es compacto.*

$b)$ *Todo espacio* T_3 *que admita una semi–uniformidad compatible y totalmente acotada es de Tychonoff.*

$c)$ *Todo espacio* T_3*–cerrado que admita una semi–uniformidad compatible y totalmente acotada es compacto.*

$d)$ *Si* Z *es* T_3*–cerrado pero no es compacto, entonces* Z *no es de Tychonoff.*

$e)$ *Existen espacios* T_3*–cerrados que no son compactos.*

$f)$ *Existen espacios* T_3 *los cuales no tienen extensiones* T_3*–cerradas.*

Demostración.

$a)$ Sea $\mathcal{U}_0$ la familia de las cubiertas cocero finitas de X. Por el Teorema 3.3.2, $\mathcal{U}_0$ es completa. Como también $\mathcal{U}_0$ es totalmente acotada, el Teorema 2.5.7, implica que $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ es compacto.

$b)$ Sea $\mathcal{U}_0$ una semi–uniformidad compatible y totalmente acotada en X. El espacio $(\widehat{\mathrm{X}}, \widehat{\mathcal{U}}_0)$ es entonces completo y totalmente acotado. Por el mismo teorema, $(\widehat{\mathrm{X}}, \widehat{\mathcal{U}}_0)$ es una compactación T_2 de X y, por tanto, X es de Tychonoff.

$c)$ y $d)$ son consecuencias inmediatas de $a)$ y $b)$.

$e)$ y $f)$ (Véanse [5], [4], [19] y [20]). ■

3.4. Existencia de la Completación de todo Espacio T_2–Pre–Uniforme

En está sección plantearemos y demostraremos el resultado principal de esta tesis. Se trata de un resultado original sobre la existencia de la completación de un espacio T_2–Pre–Uniforme y lo que es muy importante la diferencia entre esta completación y la extensión de Katětov, la cual estableceremos vía cierta caracterización.

Definición 3.4.1

Una cubierta abierta α *de un espacio topológico* $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ *es* ***densamente finita*** *si existen* $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n \in \alpha$ *tales que*

$$\mathrm{X} = C\ell\,(\mathrm{A}_1) \cup C\ell\,(\mathrm{A}_2) \cup \cdots \cup C\ell\,(\mathrm{A}_n)\,.$$

Teorema 3.4.2

En todo espacio T_2 X*, las siguientes condiciones son equivalentes:*[3]

$i)$ X *es* T_2*–cerrado.*

$ii)$ *Todo filtro abierto en* X *tiene al menos un punto de adherencia.*

$iii)$ *Todo filtro abierto maximal en* X *tiene al menos un punto de adherencia.*

$iv)$ *Todo filtro abierto maximal es convergente.*

$v)$ *Toda cubierta abierta de* X *es densamente finita.*[4]

Demostración. $\underline{i) \Rightarrow ii)}$ Demostraremos que si $\mathcal{F}$ es un filtro abierto en X sin puntos de adherencia, entonces X tiene una extensión T_2 Y a un sólo punto cerrado p (y, por tanto, X no sería T_2–cerrado). En efecto, escojamos $p \notin \mathrm{X}$ y pongamos $\mathrm{Y} = \mathrm{X} \cup \{p\}$. Enseguida definamos una topología en Y como sigue:

$$\eta_p = \{\mathrm{F} \cup \{p\} \,:\, \mathrm{F} \in \mathcal{F}\}$$

y para cada $x \in \mathrm{X}$, sea

$$\eta_x = \{\mathrm{H} \,:\, \mathrm{H} \text{ es vecindad de } x \text{ en } \mathrm{X}\}^+\,.$$

Afirmamos que la topología $\mathcal{T}^*$ inducida en Y por todos estos filtros de vecindades es T_2. En efecto, si $x \in \mathrm{X}$, existen $\mathrm{V} \in \eta_x$ y $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$ tales que $\mathrm{V} \cap \mathrm{F} = \varnothing$. Por tanto, V y $\mathrm{F} \cup \{p\}$ son vecindades ajenas de x y p, respectivamente. Además X es un subespacio abierto y denso de Y, lo cual demuestra que Y es la extensión buscada.

---

[3] Compárese con la Proposición A.1.4 del apéndice A.

[4] Los espacios en los que toda cubierta abierta es densamente finita son conocidos en la literatura por **espacios casi–compactos** (almost–compact spaces). Aunque en un principio Porter y Thomas les dieron el nombre de **espacios cuasi–**H**–cerrados** (quasi–H–closed spaces).

$ii) \Rightarrow iii)$ Obvio.

$iii) \Rightarrow iv)$ Sea $\mathcal{F}$ un filtro abierto maximal en X y sea $p \in \mathfrak{adh}(\mathcal{F})$. Si ahora $\mathrm{V} \subseteq \mathrm{X}$ es abierto y $p \in \mathrm{V}$, tenemos que $\mathrm{V} \cap \mathrm{F} \neq \varnothing$ para todo $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$, pero según el Teorema 3.1.1, $\mathrm{V} \in \mathcal{F}$. Por tanto, $\mathcal{F} \to p$.

$iv) \Rightarrow ii)$ Úsese el hecho de que todo filtro abierto está contenido en un filtro abierto maximal.

$ii) \Rightarrow v)$ Sea $\alpha = \{\mathrm{V}_i : i \in \mathrm{J}\}$ una cubierta por abiertos para X. Si α no fuese densamente finita, para cada $\mathrm{J}_0 \subseteq \mathrm{J}$ finito, el conjunto $\mathrm{T}(\mathrm{J}_0) = \mathrm{X} \setminus \cup\{C\ell(\mathrm{V}_i) : i \in \mathrm{J}_0\}$ sería un abierto no vacío de X y el conjunto

$$\mathcal{F} = \{\mathrm{T}(\mathrm{J}_0) : \mathrm{J}_0 \subseteq \mathrm{J},\ \mathrm{J}_0 \text{ finito}\}^+$$

sería un filtro abierto en X sin puntos de adherencia.

$v) \Rightarrow i)$ Procediendo por contradicción, supongamos que X no es T_2–cerrado. Entonces X tiene una extensión T_2 Y a un sólo punto p. Es decir, $\mathrm{Y} \setminus \mathrm{X} = \{p\}$. Para cada $x \in \mathrm{X}$, usemos la propiedad T_2 de Y y encontremos un abierto U_x en Y tal que $x \in \mathrm{U}_x$ pero $p \notin C\ell_{\mathrm{Y}}(\mathrm{U}_x)$.[5] La familia $\{\mathrm{U}_x : x \in \mathrm{X}\}$ es entonces una cubierta abierta de X. Por hipótesis, existen $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{X}$ tales que $\mathrm{Y} = C\ell_{\mathrm{Y}}(\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{U}_{x_i})$. Pero esto contradice al hecho de que $p \notin C\ell_{\mathrm{Y}}(\mathrm{U}_{x_i})$ para cada $i = 1, \ldots, n$. ■

Teorema 3.4.3 (Resultado Principal)

Sea $\mathcal{U}$ la familia de cubiertas densamente finitas de un espacio topológico T_2 $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$. Entonces:

i) *$\mathcal{U}$ es base de pre–uniformidad compatible en X.*

ii) *$\mathcal{U}$ es una T_2–base de pre-uniformidad en X.*

iii) *La completación $(\widehat{\mathrm{X}}, \widehat{\mathcal{U}})$ es una extensión T_2–cerrada de X. Es decir, $(\widehat{\mathrm{X}}, \mathcal{T}_{\widehat{\mathcal{U}}})$ es una extensión T_2–cerrada de $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$.*

iv) *$(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ es T_2–cerrado si y sólo si $\mathcal{U}$ es completa por convergencia.*

[5] Esto es posible, porque un espacio topológico Z es Hausdorff si y sólo si para todo $z \in \mathrm{Z}$ se tiene que $\cap\{\mathrm{F} \in \eta_z : \mathrm{F} \text{ es cerrado}\} = \{z\}$.

Demostración.

$i)$ Sean $\alpha, \beta \in \mathcal{U}$ cubiertas densamente finitas de X. Sean $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n \in \alpha$ y $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \ldots, \mathrm{B}_m \in \beta$ tales que $\mathrm{X} = C\ell\,(\mathrm{A}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{A}_n) = C\ell\,(\mathrm{B}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{B}_m)$. Puesto que la intersección de dos abiertos densos es otro abierto denso, deducimos que

$$\mathrm{X} = C\ell\,(\bigcup_{\substack{i \in \{1,2,\ldots,n\} \\ j \in \{1,2,\ldots,m\}}} (\mathrm{A}_i \cap \mathrm{B}_j)).$$

Por lo cual, la cubierta $\alpha \wedge \beta = \{\mathrm{A} \cap \mathrm{B} : \mathrm{A} \in \alpha,\ \mathrm{B} \in \beta\}$[6] es densamente finita. Además $\alpha \wedge \beta \leq \alpha$ y $\alpha \wedge \beta \leq \beta$. Por tanto, $\mathcal{U}$ es una base de pre–uniformidad en X. Por otra parte es claro que $\mathcal{T}_{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{T}$. Para la inclusión contraria utilizaremos un procedimiento ya utilizado en la demostración del teorema anterior. Sea $\mathrm{V} \in \mathcal{T}$ y sea $p \in \mathrm{V}$. Para cada $y \in \mathrm{Fr}\,(\mathrm{V})$, sea W_y un abierto tal que:

$$y \in \mathrm{W}_y \subseteq C\ell\,(\mathrm{W}_y) \subseteq \mathrm{X} \setminus \{p\}.$$

Esto hace que

$$\alpha = \{\mathrm{V}, \mathrm{X} \setminus C\ell\,(\mathrm{V})\} \cup \{\mathrm{W}_y : y \in \mathrm{Fr}\,(\mathrm{V})\}$$

sea una cubierta abierta densamente finita de X. Es inmediato comprobar que $\alpha \in \mathcal{U}$ y $\mathsf{St}\,(p, \alpha) = \mathrm{V}$. Por tanto, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ y así $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$.

$ii)$ De (i) se deduce que $\mathcal{U}$ es admisible. Nos falta probar que cada filtro $\mathcal{U}$–Cauchy contiene un filtro redondo. Para ello comencemos por demostrar que cada filtro de vecindades η_p, para cada $p \in \mathrm{X}$, es redondo. En efecto, sea $p \in \mathrm{X}$ y sea $\mathrm{V} \in \eta_p$. Entonces $p \in \mathrm{int}\,(\mathrm{V}) = \mathrm{V}_1 \in \mathcal{T}$. Procedamos ahora como en (i). Para todo $y \in \mathrm{Fr}\,(\mathrm{V}_1)$ sea W_y un abierto tal que $y \in \mathrm{W}_y \subseteq C\ell\,(\mathrm{W}_y) \subseteq \mathrm{X} \setminus \{p\}$ y tomemos la cubierta:

$$\alpha = \{\mathrm{V}_1, \mathrm{X} \setminus C\ell\,(\mathrm{V}_1)\} \cup \{\mathrm{W}_y : y \in \mathrm{Fr}\,(\mathrm{V}_1)\}.$$

[6] En realidad, se puede definir, en general la *cuña* de una familia de cubiertas, de la siguiente manera:

Sea $\mathcal{S}$ una familia de cubiertas de X. Se define la ***cuña*** *de la familia $\mathcal{S}$ como el conjunto:*

$$\wedge \mathcal{S} = \{\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n : \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{S},\ n \in \mathbb{N}\},$$

en donde, $\alpha_i \wedge \alpha_j = \{\mathrm{A} \cap \mathrm{B} : \mathrm{A} \in \alpha_i,\ \mathrm{B} \in \alpha_j\}$.

Afirmamos que $\alpha \in \mathcal{U}$ pues $\mathrm{V}_1 \cup (\mathrm{X} \setminus C\ell(\mathrm{V}_1)) = \mathrm{X} \setminus \mathrm{Fr}(\mathrm{V}_1)$ es denso en X. Por otra parte, es obvio que

$$\mathsf{St}^*(\eta_p, \alpha) = \cup\{\mathrm{L} : \mathrm{L} \in \alpha,\ \mathrm{L} \cap \mathrm{H} \neq \varnothing \text{ para todo } \mathrm{H} \in \eta_p\} = \mathrm{V}_1 \subseteq \mathrm{V}.$$

En consecuencia, $\eta_p \subseteq \eta_p^r$, así que por el Lema 1.5.13, $\eta_p = \eta_p^r$. Además, por el Teorema 1.6.6, cada filtro de vecindades en una pre–uniformidad admisible es de Cauchy. Por tanto, η_p es redondo en $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$. Ahora demostraremos que todo filtro $\mathcal{U}$–Cauchy contiene un filtro redondo. En efecto, sea η un filtro $\mathcal{U}$–Cauchy. Si η es convergente, entonces es evidente que η contiene un filtro redondo, a saber, el filtro de vecindades η_p tal que $\eta \to p$. Por ello supongamos que η es un filtro $\mathcal{U}$–Cauchy no convergente y sea

$$\mathcal{F} = \{\mathrm{A} \in \eta : \mathrm{A} \in \mathcal{T}\}^+.$$

Claramente $\mathcal{F}$ es un subfiltro de η y por la parte (i) tampoco es convergente. Además afirmamos que $\mathfrak{adh}(\mathcal{F}) = \cap\{C\ell(\mathrm{F}) : \mathrm{F} \in \mathcal{F}\} = \varnothing$. Si no fuera así, existiría $x \in C\ell(\mathrm{F})$ para todo $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$, y si O es una vecindad abierta de x tomemos la cubierta:

$$\alpha = \{\mathrm{O}, \mathrm{X} \setminus C\ell(\mathrm{O})\} \cup \{\mathrm{W}_y : y \in \mathrm{Fr}(\mathrm{O}),\ x \notin C\ell(\mathrm{W}_y),\ \mathrm{W}_y \in \eta_y \text{ abierto}\}.$$

Claramente $\alpha \in \mathcal{U}$. Como η es $\mathcal{U}$–Cauchy, $\eta \cap \alpha \neq \varnothing$. Pero

$$\eta \cap \alpha = \mathcal{F} \cap \alpha = \{\mathrm{O}\} \tag{3.1}$$

y por tanto $\mathrm{O} \in \mathcal{F}$. Es decir, $\mathcal{F} \to x$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $\mathfrak{adh}(\mathcal{F}) = \varnothing$. Ahora probaremos que $\mathcal{F}$ es redondo. Primeramente, de la Ecuación 3.1, obtenemos que $\mathcal{F} \cap \alpha \neq \varnothing$ para todo $\alpha \in \mathcal{U}$, por lo que $\mathcal{F}$ es $\mathcal{U}$–Cauchy. Sea ahora $\mathrm{A} \in \mathcal{F} \cap \alpha$ un elemento fijo y sea

$$\alpha = \{\mathrm{int}(\mathrm{A})\} \cup \{\mathrm{X} \setminus C\ell(\mathrm{F}) : \mathrm{F} \in \mathcal{F}\}.$$

Afirmamos que α es una cubierta densamente finita. En efecto, primeramente, por construcción todos los elementos de α son abiertos y cubren a X pues

$$\mathrm{X} = \mathrm{X} \setminus \varnothing = \mathrm{X} \setminus \bigcap_{\mathrm{F} \in \mathcal{F}} C\ell(\mathrm{F}) = \bigcup_{\mathrm{F} \in \mathcal{F}} (\mathrm{X} \setminus C\ell(\mathrm{F})).$$

Por otra parte, sabemos que

$$(\mathrm{X} \setminus C\ell(\mathrm{A})) \in \alpha,$$

con $\mathrm{int}\,(\mathrm{A}) \cup (\mathrm{X} \setminus C\ell\,(\mathrm{int}\,(\mathrm{A}))) = \mathrm{X} \setminus \mathrm{Fr}\,(\mathrm{int}\,(\mathrm{A}))$, el cual es un conjunto denso en X. En consecuencia, $\alpha \in \mathcal{U}$, como afirmamos. Pero además

$$\mathsf{St}^*(\mathcal{F}, \alpha) = \cup\{\mathrm{L} : \mathrm{L} \in \alpha,\ \mathrm{L} \cap \mathrm{H} \neq \varnothing \ \text{ para todo } \ \mathrm{H} \in \mathcal{F}\} = \mathrm{int}\,(\mathrm{A}) \subseteq \mathrm{A}.$$

Así pues, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^r$ lo que implica que $\mathcal{F} = \mathcal{F}^r$. Por tanto, $\mathcal{F}$ es redondo y $\mathcal{U}$ es una T_2–base de pre–uniformidad.

$iii)$ Por el inciso (iii) del Teorema 3.4.2, será suficiente demostrar que todo filtro abierto maximal en $\widehat{\mathrm{X}}$ converge. Sea η un filtro abierto maximal en $\widehat{\mathrm{X}}$ y sea $\mathcal{F} = \eta|_{\mathrm{X}}$. Entonces $\mathcal{F}$ es un filtro abierto maximal en X. Si $\mathcal{F}$ no fuese $\mathcal{U}$–Cauchy, existiría $\alpha \in \mathcal{U}$ tal que $\alpha \cap \mathcal{F} = \varnothing$. Dado que α es densamente finita, existen $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n \in \alpha$ tales que $\mathrm{X} = C\ell(\bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i)$. Puesto que $\mathcal{F}$ es abierto maximal y $\mathrm{A}_i \notin \mathcal{F}$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, deben existir $\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_n \in \mathcal{F}$ tales que $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{F}_i = \varnothing$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Pero $\mathrm{F} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathrm{F}_i \in \mathcal{F}$ con $\mathrm{F} \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i) = \varnothing$. Como $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i$ es un abierto denso en X, resulta que $\mathrm{int}\,(\mathrm{F}) = \varnothing$ lo cual es una contradicción. Así hemos probado que $\mathcal{F}$ es un filtro $\mathcal{U}$–Cauchy y ya que $\mathcal{F} = \eta|_{\mathrm{X}}$, se tiene que η es $\widehat{\mathcal{U}}$–Cauchy. Por tanto, η converge en $\widehat{\mathrm{X}}$.

$iv)$ Es inmediato. ■

Teorema 3.4.4

Un espacio T_2 $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ es T_2–cerrado si y sólo si toda T_2–pre–uniformidad compatible con $\mathcal{T}$ es completa por convergencia.

Demostración.

$\Rightarrow)$ Sea $\mathcal{U}$ una T_2–pre–uniformidad compatible en $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ y sea $\mathcal{F}$ un filtro $\mathcal{U}$–redondo. Afirmamos que $\mathcal{F}$ es abierto, pues si $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$ y $\alpha \in \mathcal{U}$ es tal que $\mathsf{St}^*(\mathcal{F}, \alpha) \subseteq \mathrm{F}$, entonces $\mathrm{L} \in \mathcal{F} \cap \alpha$ implicaría que $\mathrm{L} \subseteq \mathsf{St}^*(\mathcal{F}, \alpha) \subseteq \mathrm{F}$. Como, por definición, $\mathcal{U}$ es admisible, existe $\beta \in \mathcal{U}$ tal que $\beta \leq \{\mathrm{int}\,(\mathrm{L}) : \mathrm{L} \in \alpha\}$. Si ahora $\mathrm{M} \in \beta \cap \mathcal{F}$ y $\mathrm{L} \in \alpha$ es tal que $\mathrm{M} \subseteq \mathrm{int}\,(\mathrm{L})$, entonces $\mathrm{M} \subseteq \mathrm{int}\,(\mathrm{L}) \subseteq \mathrm{int}\,(\mathrm{F})$ e $\mathrm{int}\,(\mathrm{F}) \in \mathcal{F}$, lo cual demuestra que $\mathcal{F}$ es abierto. Por otra parte, ya que $\mathcal{U}$ es compatible, $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ y $(\mathrm{X}, \mathcal{T}_{\mathcal{U}})$ es T_2–cerrado, existe $p \in \mathrm{X}$ tal que $\mathcal{F} \mapsto p$, pero por ser $\mathcal{F}$ un filtro $\mathcal{U}$–redondo, $\mathcal{F} \to p$. Por tanto, $\mathcal{U}$ es completa por convergencia.

$\underline{\underline{\Leftarrow)}}$ Sea $\mathcal{U}$ la T_2–pre-uniformidad que consiste de todas las cubiertas abiertas de X que son densamente finitas. Por hipótesis $\mathcal{U}$ es completa por convergencia. Por tanto, $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$ coincide con su completación canónica $(\widehat{\mathrm{X}}, \widehat{\mathcal{U}})$ y por el inciso (iii) del Teorema 3.4.3, $(\widehat{\mathrm{X}}, \widehat{\mathcal{U}})$ es T_2–cerrado. Por tanto, $(\mathrm{X}, \mathcal{T}_{\mathcal{U}})$ es T_2–cerrado. ∎

Notación 2

Sea $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ *un espacio topológico* T_2 *y sea* $\mathcal{U}$ *la base de pre–uniformidad de todas la cubiertas abiertas densamente finitas de* X. *Denotaremos por* $\mathfrak{d}\mathrm{X}$ *la extensión* $(\widehat{\mathrm{X}}, \mathcal{T}_{\widehat{\mathcal{U}}})$ T_2*–cerrada de* X, *obtenida en el Teorema 3.4.3.*

3.4.1. ¿Qué distingue a $\mathfrak{d}\mathrm{X}$ de $\kappa\mathrm{X}$?

En esta parte de la tesis, habiendo demostrado la existencia de la extensión T_2–cerrada $\mathfrak{d}\mathrm{X}$ de un espacio T_2–pre–uniforme X, exhibiremos la diferencia fundamental que existe entre $\mathfrak{d}\mathrm{X}$ y la extensión de Katětov $\kappa\mathrm{X}$ y daremos además, algunos ejemplos. La idea fue sugerida por el hecho de que el subespacio $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$ no es abierto en ningún espacio compacto que lo contenga como subespacio. Véase por ejemplo [15]

Definición 3.4.5

Un subespacio A *de un espacio topológico* X *es* F_σ***–estricto*** *si existe una sucesión estrictamente creciente de subconjuntos cerrados de* X, $\{\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2, \dots\}$ *tal que*

$$\mathrm{A} = \cup\,\{\mathrm{K}_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$$

y $\mathrm{K}_n \subseteq \mathrm{int}\,(\mathrm{K}_{n-1})$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 3.4.6

Cualquier subespacio F_σ *no cerrado en un espacio normal o cualquier conjunto cocero no cerrado o cualquier conjunto abierto infinito numerable no cerrado en un espacio localmente compacto y* T_2 *es* F_σ*–estricto. También es* F_σ*–estricto cualquier abierto–cerrado infinito en un espacio Lindelöf,* T_3 *y* 0*–dimensional.*

Teorema 3.4.7

Sea X *un espacio* T_2*, no* H*–cerrado en el que cada punto tiene una base local formada por subconjuntos* F_σ*–estrictos. Sea* $\mathfrak{d}\mathrm{X}$ *la completación de la* T_2*–pre–uniformidad de* X *que consiste de todas las cubiertas abiertas densamente finitas de* X *y sea* $\kappa\mathrm{X}$ *la extensión de Katětov de* X*. Entonces* $\mathfrak{d}\mathrm{X}$ *y* $\kappa\mathrm{X}$ *son extensiones* H*–cerradas de* X *las cuales no son equivalentes.*

Demostración. Sabemos que $\mathfrak{d}\mathrm{X}$ y $\kappa\mathrm{X}$ son extensiones H–cerradas de X y también sabemos que $\kappa\mathrm{X} \setminus \mathrm{X}$ es un subespacio cerrado y discreto de $\kappa\mathrm{X}$ (véase el Teorema B.2.6, inciso (i)). Bastará probar entonces que $\mathfrak{d}\mathrm{X} \setminus \mathrm{X}$ es un subespacio denso en sí mismo de X. Tomemos $\xi \in \mathfrak{d}\mathrm{X} \setminus \mathrm{X}$ y sea U un subconjunto abierto de X tal que $\xi \in \widehat{\mathrm{U}}$ con $\widehat{\mathrm{U}}$ el abierto en $\mathfrak{d}\mathrm{X}$ correspondiente a U. Como $\mathrm{U} \neq \widehat{\mathrm{U}}$, U no puede ser finito. Tomemos pues dos puntos distintos $p, q \in \mathrm{U}$ y sean $\mathrm{V}, \mathrm{W} \subseteq \mathrm{X}$ abiertos ajenos y F_σ–estrictos tales que $p \in \mathrm{V}$, $q \in \mathrm{W}$. V y W existen por hipótesis y por ser X un espacio T_2. Más aún $\mathrm{V} = \cup\{\mathrm{H}_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\mathrm{W} = \cup\{\mathrm{K}_n : n \in \mathbb{N}\}$ con H_n y K_n como en la Definición 3.4.5. Sean ξ_1, ξ_2 ultrafiltros de abiertos en X tales que $\mathrm{V} \setminus \mathrm{H}_n \in \xi_1$ y $\mathrm{W} \setminus \mathrm{K}_n \in \xi_2$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por contener elementos ajenos ($\mathrm{V} \in \xi_1$, $\mathrm{W} \in \xi_2$), los ultrafiltros ξ_1 y ξ_2 son distintos. Además ξ_1, ξ_2 son no convergentes pues $\cap\{\, C\ell\,(\mathrm{V} \setminus \mathrm{H}_n) : n \in \mathbb{N}\} = \varnothing$ y $\cap\{\, C\ell\,(\mathrm{W} \setminus \mathrm{K}_n) : n \in \mathbb{N}\} = \varnothing$. Alguno de los ultrafiltros ξ_1, ξ_2 debe ser distinto de ξ, digamos que $\xi \neq \xi_1$. En consecuencia, $\xi_1 \in \widehat{\mathrm{U}} \cap (\mathfrak{d}\mathrm{X} \setminus \mathrm{X})$ y así $\mathfrak{d}\mathrm{X} \setminus \mathrm{X}$ es denso en si mismo. ■

Con este Teorema podemos dar ejemplos de espacios topológicos Hausdorff X, cuyas extensiones $\mathfrak{d}\mathrm{X}$ y $\kappa\mathrm{X}$ no sean equivalentes. Sin embargo, debe notarse que como conjuntos los complementos $\mathfrak{d}\mathrm{X} \setminus \mathrm{X}$, $\kappa\mathrm{X} \setminus \mathrm{X}$ son idénticos.

Ejemplo 3.4.8

1) *Si* $\mathbb{R}_u$ *es la recta de Sorgenfrey, entonces* $\mathfrak{d}\mathbb{R}_u$ *y* $\kappa\mathbb{R}_u$ *no son equivalentes.*

2) *Si* X *es un espacio* $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$ *conexo y no compacto, entonces las extensiones* $\mathfrak{d}\mathrm{X}$ *y* $\kappa\mathrm{X}$ *no son equivalentes.*

3) *Si* $\mathbb{Q}$ *tiene la topología euclidiana heredada de* $\mathbb{R}$*, entonces las extensiones* $\mathfrak{d}\mathbb{Q}$ *y* $\kappa\mathbb{Q}$ *no son equivalentes.*

Observación 3.4.9

Si X es un espacio discreto, entonces las extensiones $\mathfrak{d}\mathrm{X}$ y $\kappa\mathrm{X}$ no son equivalentes, pues si X es discreto sucede que $\mathfrak{d}\mathrm{X} = \beta\mathrm{X}$. En particular, para el espacio discreto $\mathbb{N}$ se tiene que $\mathfrak{d}\mathbb{N} = \beta\mathbb{N}$ con lo cual $\mathfrak{d}\mathbb{N}$ y $\kappa\mathbb{N}$ no son equivalentes pues $\kappa\mathbb{N}$ no es compacto. Véase el Ejemplo B.2.7.

3.4.2. Un Teorema de Existencia

Lema 3.4.10

Sean X, Y espacios topológicos y sea $\psi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ una función continua. Si $\mathcal{F}$ es un filtro abierto en Y, entonces

$$\psi^{-1}(\mathcal{F}) := \left\{ \psi^{-1}(\mathrm{F}) : \mathrm{F} \in \mathcal{F} \right\}^{+}$$

es un filtro abierto en X.

Demostración. Primeramente observamos que, $\psi^{-1}(\mathcal{F})$ es un filtro en X independientemente de la continuidad de ψ. Ahora, para cada $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$, $\psi^{-1}(\mathrm{F}) \in \psi^{-1}(\mathcal{F})$; pero el filtro $\mathcal{F}$ es abierto, así que $\operatorname{int}(\mathrm{F}) \in \mathcal{F}$ y, por tanto, $\psi^{-1}(\operatorname{int}(\mathrm{F})) \in \psi^{-1}(\mathcal{F})$. Como ψ es continua, se tiene que $\psi^{-1}(\operatorname{int}(\mathrm{F})) \subseteq \operatorname{int}(\psi^{-1}(\mathrm{F}))$ y en consecuencia, por la primera parte de la demostración se tiene que $\operatorname{int}(\psi^{-1}(\mathrm{F})) \in \psi^{-1}(\mathcal{F})$. Todo esto implica que $\psi^{-1}(\mathcal{F})$ es un filtro abierto en X. ■

Teorema 3.4.11

Sean X, Y espacios topológicos T_2 y sean

$i)$ $\varphi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *una función continua y abierta sobre su imagen y tal que $C\ell(\varphi(\mathrm{X})) = \mathrm{Y}$.*

$ii)$ $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ T_2*–bases de pre-uniformidad consistentes de todas las cubiertas abiertas densamente finitas de X e Y, respectivamente.*

$iii)$ $h : (\mathrm{X}, \mathcal{U}) \to (\widehat{\mathrm{X}}, \widehat{\mathcal{U}})$, $k : (\mathrm{Y}, \mathcal{V}) \to (\widehat{\mathrm{Y}}, \widehat{\mathcal{V}})$ *encajes canónicos.*

$iv)$ $\mathrm{W} = h(\mathrm{X}) \cup \left\{ \eta \in \widehat{\mathrm{X}} : \ \varphi(\eta)^{+} \text{ no tiene puntos de adherencia en } \mathrm{Y} \right\}$.

Entonces existe una función continua y suprayectiva $\widehat{\varphi} : \mathrm{W} \to k(\varphi(\mathrm{X})) \cup (\widehat{\mathrm{Y}} \setminus k(\mathrm{Y}))$ tal que $\widehat{\varphi} \circ h = k \circ \varphi$.

La situación se muestra en el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{X} \arrow[rrr, "\varphi"] \arrow[dr, "h"] \arrow[ddd, "h"'] & & & \mathrm{Y} \arrow[ddl, "k"'] \arrow[ddd, "k"] \\
& \mathrm{W} \arrow[dr, "\widehat{\varphi}"] \arrow[ddl, "j"] & & \\
& & k\left(\varphi\left(\mathrm{X}\right)\right) \cup \left(\widehat{\mathrm{Y}} \setminus k\left(\mathrm{Y}\right)\right) \arrow[dr, "i"] & \\
\widehat{\mathrm{X}} & & & \widehat{\mathrm{Y}}
\end{tikzcd}$$

Aquí las funciones i, j son las inclusiones.

Demostración. Notemos primeramente que $(\widehat{\mathrm{X}}, \mathcal{T}_{\widehat{\mathcal{U}}})$ y $(\widehat{\mathrm{Y}}, \mathcal{T}_{\widehat{\mathcal{V}}})$ son las extensiones T_2–cerradas de X y Y respectivamente, que se han establecido en el Teorema 3.4.3, y que de acuerdo a la Notación 2, $\mathfrak{d}\mathrm{X} = (\widehat{\mathrm{X}}, \mathcal{T}_{\widehat{\mathcal{U}}})$ y $\mathfrak{d}\mathrm{Y} = (\widehat{\mathrm{Y}}, \mathcal{T}_{\widehat{\mathcal{V}}})$.

Pasemos ahora a la demostración. Si elegimos $\eta \in \mathrm{W}$, entonces se cumplen las implicaciones siguientes:

$$\eta \in \mathrm{W} \Rightarrow \eta \text{ es } \mathcal{U}\text{–redondo } \Rightarrow \varphi(\eta) \text{ es } \mathcal{V}|_{\varphi(\mathrm{X})}\text{–Cauchy} \Rightarrow \varphi(\eta)^{+} \text{ es } \mathcal{V}\text{–Cauchy.}$$

Como $\eta \in \mathrm{W}$, tenemos dos posibilidades, a saber,

$$\varphi(\eta)^{+} = \eta_{\varphi(\mathrm{X})} \quad \text{ó} \quad \varphi(\eta)^{+} \in \widehat{\mathrm{Y}} \setminus k(\mathrm{Y}),$$

las cuales se deducen de los Teoremas 2.2.1 y 3.4.3. Definamos ahora la función:

$$\widehat{\varphi} : \mathrm{W} \to k(\varphi(\mathrm{X})) \cup (\widehat{\mathrm{Y}} \setminus k(\mathrm{Y}))$$

mediante la regla de correspondencia:

$$\widehat{\varphi}(\eta) = \varphi(\eta)^{+}.$$

Demostraremos que $\widehat{\varphi}$ es continua. En efecto, sean $\eta \in \mathrm{W}$, $\widehat{\varphi}(\eta) = \mathfrak{m}$ y supongamos que $\mathfrak{m} \in \widehat{\mathrm{T}}$, con $\mathrm{T} \subseteq \mathrm{Y}$ abierto. Por lo tanto, $\mathrm{T} \in \mathfrak{m} = \varphi(\eta)^+$, así que debe existir $\mathrm{N} \in \eta$ tal que $\varphi(\mathrm{N}) \subseteq \mathrm{T} \cap \varphi(\mathrm{X})$. De donde, $\varphi^{-1}(\mathrm{T}) \supseteq \mathrm{N}$ y de esta manera $\varphi^{-1}(\mathrm{T}) \in \eta$, y en consecuencia, $\eta \in \widehat{\varphi^{-1}(\mathrm{T})}$. Ahora afirmamos que $\widehat{\varphi}(\mathrm{W} \cap \widehat{\varphi^{-1}(\mathrm{T})}) \subseteq \widehat{\mathrm{T}}$ y con esto habremos demostrado la continuidad de $\widehat{\varphi}$. En efecto, si tomamos $\eta' \in \mathrm{W} \cap \widehat{\varphi^{-1}(\mathrm{T})}$, entonces $\varphi^{-1}(\mathrm{T}) \in \eta'$ y en consecuencia $\mathrm{T} \cap \varphi(\mathrm{X}) \in \varphi(\eta')$. De todo lo anterior tenemos que $\mathrm{T} \in \varphi(\eta')^+ = \widehat{\varphi}(\eta')$ y esto último implica que $\widehat{\varphi}(\eta') \in \widehat{\mathrm{T}}$, por consiguiente, $\widehat{\varphi}(\mathrm{W} \cap \widehat{\varphi^{-1}(\mathrm{T})}) \subseteq \widehat{\mathrm{T}}$.

Para concluir con la demostración mostraremos la suprayectividad de la función $\widehat{\varphi}$. Fijemos $\mathfrak{m} \in k(\varphi(\mathrm{X})) \cup (\widehat{\mathrm{Y}} \setminus k(\mathrm{Y}))$. Si $\mathfrak{m} = \eta_{\varphi(x)}$ para algún $x \in \mathrm{X}$, entonces claramente $\mathfrak{m} = \widehat{\varphi}(h(x)) = \widehat{\varphi}(\eta_x)$. Si $\mathfrak{m} \in (\widehat{\mathrm{Y}} \setminus k(\mathrm{Y}))$, entonces $\mathfrak{m}$ es un filtro abierto maximal en Y sin puntos de adherencia en Y. Por lo tanto, la familia:

$$\mathcal{S} = \{ \widehat{\varphi^{-1}(\eta)} : \ \eta \in \mathfrak{m} \}^+$$

es un filtro abierto en $\widehat{\mathrm{X}}$. Como $\widehat{\mathrm{X}}$ es T_2–cerrado, por el Teorema 3.4.2 inciso (ii), el filtro $\mathcal{S}$ tiene un punto de adherencia $\eta \in \widehat{\mathrm{X}}$. Es decir, $\eta \in C\ell_{\widehat{\mathrm{X}}}(\widehat{\varphi^{-1}(\mathrm{M})})$ para toda $\mathrm{M} \in \mathfrak{m}$ y, por tanto, $\eta \leftrightarrow \varphi^{-1}(\mathfrak{m})$. Lo que implica que $\varphi(\eta) \leftrightarrow \mathfrak{m}|_{\varphi(\mathrm{X})}$, así que $\varphi(\eta)^+ \leftrightarrow \mathfrak{m}$ y en consecuencia $\varphi(\eta)^+ = \mathfrak{m}$. Así obtenemos que $\widehat{\varphi}(\eta) = \mathfrak{m}$ y $\widehat{\varphi}$ es suprayectiva. La demostración de la ecuación $\widehat{\varphi} \circ h = k \circ \varphi$ es inmediata. ∎

Corolario 3.4.12

Sean X, Y *espacios topológicos* T_2, *y sean*

$i)$ $\varphi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *una función continua, abierta y suprayectiva.*

$ii)$ $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ T_2*–bases de pre-uniformidad consistentes de todas las cubiertas abiertas densamente finitas de* X *e* Y *respectivamente.*

$iii)$ $h : (\mathrm{X}, \mathcal{U}) \to (\widehat{\mathrm{X}}, \widehat{\mathcal{U}})$, *y* $k : (\mathrm{Y}, \mathcal{V}) \to (\widehat{\mathrm{Y}}, \widehat{\mathcal{V}})$ *los encajes canónicos.*

Entonces, existe una función continua y suprayectiva $\widehat{\varphi} : \widehat{\mathrm{X}} \to \widehat{\mathrm{Y}}$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{X} \arrow[r, two heads, "\varphi"] \arrow[d, hook, "h"'] & \mathrm{Y} \arrow[d, hook, "k"] \\
\widehat{\mathrm{X}} \arrow[r, two heads, "\widehat{\varphi}"'] & \widehat{\mathrm{Y}}
\end{tikzcd}$$

conmuta, es decir, $\widehat{\varphi} \circ h = k \circ \varphi$.

3.5. Propiedad Universal

Definición 3.5.1

Sea X *un espacio* T_2*;* $\mathfrak{L}$ *una subclase de la clase de espacios topológicos* T_2 *y* $\mathcal{O}$ *una subclase de la clase*

$$\{\lambda : \mathrm{X} \to \mathrm{Z} \,:\, \lambda \text{ es función continua}, \, \mathrm{Z} \in \mathfrak{L}\},$$

la cual contiene a todos los encajes de X *en elementos de* $\mathfrak{L}$*. Sea* (h, Y) *una extensión de* X *con* $\mathrm{Y} \in \mathfrak{L}$*. Decimos que* (h, Y) *satisface la* ***propiedad universal*** *respecto a la terna* $(\mathrm{X}, \mathfrak{L}, \mathcal{O})$ *si para cada función* $\varphi : \mathrm{X} \to \mathrm{Z}$*, con* $\mathrm{Z} \in \mathfrak{L}$*,* $\varphi \in \mathcal{O}$ *y* $\varphi(\mathrm{X})$ *denso en* Z*, existe un espacio* $\mathrm{X}_1 \in \mathfrak{L}$ *tal que*

$$h(\mathrm{X}) \subseteq \mathrm{X}_1 \subseteq \mathrm{Y}$$

y existe $\varphi_1 : \mathrm{X}_1 \to \mathrm{Z}$ *función suprayectiva y continua tal que* $\varphi_1 \circ h = \varphi$.

$$\begin{tikzcd}
& & \mathrm{X}_1 \arrow[dd, "\varphi_1"] \\
& h(\mathrm{X}) \arrow[ur, "j"] & \\
\mathrm{X} \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "\varphi"'] & & \mathrm{Z}
\end{tikzcd}$$

en donde la función j *es la inclusión.*

Nótese la similitud con la propiedad universal de la compactación de Stone-Čech.

Teorema 3.5.2

Si (h_1, Y_1) *y* (h_2, Y_2) *son extensiones de* X *que satisfacen la propiedad universal respecto a la terna* $(\mathrm{X}, \mathfrak{L}, \mathcal{O})$*, entonces* (h_1, Y_1) *y* (h_2, Y_2) *son equivalentes,*[7] *es decir, existe un homeomorfismo* $\alpha : \mathrm{Y}_1 \to \mathrm{Y}_2$ *tal que* $\alpha \circ h_1 = h_2$.

[7] Véase la Definición B.1.1 inciso (3) del Apéndice B.

Demostración. Observemos primeramente que la situación se muestra en el diagrama siguiente:

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Y}_1 \arrow[rrrrrrrr, "\alpha \quad (\approx)"] & & & & & & & & \mathrm{Y}_2 \\
& & \mathrm{W}_1 \arrow[ull, "j"] \arrow[urrrrrr, "\varphi"] & & & & \mathrm{W}_2 \arrow[urr, "j"'] \arrow[ullllll, "\psi"'] & & \\
& & & h_1(\mathrm{X}) \arrow[ul, "j"] & & h_2(\mathrm{X}) \arrow[ur, "j"'] & & & \\
& & & & \mathrm{X} \arrow[ul, "h_1"] \arrow[ur, "h_2"'] & & & &
\end{tikzcd}
$$

Por hipótesis existen espacios W_1 y W_2 tales que

$$h_1(\mathrm{X}) \subseteq \mathrm{W}_1 \subseteq \mathrm{Y}_1 \quad \text{y} \quad h_2(\mathrm{X}) \subseteq \mathrm{W}_2 \subseteq \mathrm{Y}_2$$

y existen funciones continuas y suprayectivas

$$\varphi : \mathrm{W}_1 \to \mathrm{Y}_2 \quad \text{y} \quad \psi : \mathrm{W}_2 \to \mathrm{Y}_1$$

tales que $\varphi \circ h_1 = h_2$, $\psi \circ h_2 = h_1$. Sea $\mathrm{T} = \varphi^{-1}(\mathrm{W}_2)$. Por tanto,

$$\psi \circ (\varphi|_{\mathrm{T}}) : \mathrm{T} \to \mathrm{Y}_1$$

es una función continua y suprayectiva que extiende a la inclusión $j : h_1(\mathrm{X}) \hookrightarrow \mathrm{Y}_1$. En consecuencia, $\psi \circ (\varphi|_{\mathrm{T}})$ coincide con la inclusión $j : \mathrm{T} \hookrightarrow \mathrm{Y}_1$ y debe tenerse que $\mathrm{T} = \mathrm{Y}_1$ pues Y_1 es el codominio de $\psi \circ (\varphi|_{\mathrm{T}})$. Así pues $\mathrm{W}_2 = \mathrm{Y}_2$ y $\mathrm{W}_1 = \mathrm{Y}_1$ (pues $\mathrm{W}_1 \supseteq \mathrm{T} = \mathrm{Y}_1$). De aquí se deduce que

i) $\psi \circ \varphi = id_{\mathrm{Y}_1}$.

ii) $\varphi \circ \psi = id_{\mathrm{Y}_2}$-

Por tanto, φ es un homeomorfismo de Y_1 en Y_2 con inverso ψ. ∎

3.5.1. Casos especiales de la Propiedad Universal

1) Si

   i) X es $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$.

   ii) $\mathfrak{L}$ es la clase de los espacios compactos T_2.

   iii) $\mathcal{O} = \{\lambda : \mathrm{X} \to \mathrm{Z} \,:\, \lambda$ es continua, $\mathrm{Z} \in \mathfrak{L}\}$.

   Entonces $(h, \beta\mathrm{X})$ satisface la propiedad universal respecto a la terna $(\mathrm{X}, \mathfrak{L}, \mathcal{O})$.

2) Si

   i) X es T_2.

   ii) $\mathfrak{L}$ es la clase de los espacios T_2.

   iii) $\mathcal{O} = \{\lambda : \mathrm{X} \to \mathrm{Z} \,:\, \lambda$ es continua, $\mathrm{Z} \in \mathfrak{L}\}$.

   Entonces $(h, \kappa\mathrm{X})$[8] satisface la propiedad universal respecto a la terna $(\mathrm{X}, \mathfrak{L}, \mathcal{O})$.

3) Si

   i) X es T_2.

   ii) $\mathfrak{L}$ es la clase de los espacios T_2.

   iii) $\mathcal{O} = \{\lambda \in \mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Z}) : \lambda$ es abierta sobre su imagen, $C\ell(\lambda(\mathrm{X})) = \mathrm{Z}$, $\mathrm{Z} \in \mathfrak{L}\}$.

   Entonces $(h, \mathfrak{d}\mathrm{X})$ satisface la propiedad universal respecto a la terna $(\mathrm{X}, \mathfrak{L}, \mathcal{O})$, en donde $\mathfrak{d}\mathrm{X}$ es la completación del espacio T_2 pre–uniforme $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$, con $\mathcal{U}$ la base de pre–uniformidad que consiste de las cubiertas densamente finitas de X y $h : \mathrm{X} \to \mathfrak{d}\mathrm{X}$ es el encaje canónico. Veáse la Definición 3.4.1, el Teorema 3.4.3 y la Notación 2.

[8] $\kappa\mathrm{X}$ es la extensión de Katětov de X.

Conclusiones

Hemos demostrado en esta tesis que todo espacio T_2 X admite una T_2–pre–uniformidad $\mathcal{U}$ tal que la completación canónica $(\widehat{\mathrm{X}}, \widehat{\mathcal{U}})$ es T_2–cerrada y la cual en general, no es equivalente a la extensión de Katětov de X. La diferencia es más evidente si notamos que X es siempre abierto en su extensión de Katětov $\kappa\mathrm{X}$, más no en $\widehat{\mathrm{X}}$. Existe además una función continua y suprayectiva $\varphi : \kappa\mathrm{X} \longrightarrow \widehat{\mathrm{X}}$ que extiende a la identidad de X, pero en general φ no es un homeomorfismo. También hemos descrito una propiedad universal de la completación $\widehat{\mathrm{X}}$.

Apéndices

Apéndice A

Espacios T_2–Cerrados

A.1. Espacios T_2–Cerrados

En éste y en el siguiente apéndice nos basaremos principalmente en [14], [33] y [39]. Un punto de vista diferente sobre los espacios T_2–cerrados se encuentra en [19] y también en [36].

Definición A.1.1

Un espacio topológico Hausdorff X*, es* ***Hausdorff–cerrado*** *o* T_2***-cerrado*** *o simplemente* H***–cerrado*** *si* X *es un subespacio cerrado de cualquier otro espacio topológico Hausdorff que lo contenga. Lo que equivale a decir que siempre que exista* $\varphi : \mathrm{X} \to \mathrm{Z}$ *homeomorfismo, en donde* Z *es un subespacio de un espacio* Y *el cual es* T_2*, entonces* Z *es cerrado en* Y*.*

Por lo tanto, todo espacio compacto y Hausdorff es H–cerrado.

Definición A.1.2

1) *Un* ***"filtro de abiertos"*** *en el espacio topológico* $(\mathrm{X}, \mathfrak{T})$ *es una familia* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{T}$ *que cumple:*

   $i)$ $\varnothing \notin \mathfrak{F}$.

   $ii)$ *Si* $\{\mathrm{A}_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathfrak{F}$*, entonces* $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i \in \mathfrak{F}$.

iii) Si $\mathrm{A} \in \mathfrak{F}$ *y* $\mathrm{B} \in \mathcal{T}$ *es tal que* $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$*, entonces* $\mathrm{B} \in \mathfrak{F}$*.*

2) *Un* ***ultrafiltro de abiertos*** *en el espacio topológico* $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ *es un filtro de abiertos maximal.*

3) *Un filtro de abiertos* $\mathfrak{F}$ *en el espacio topológico* $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ *es* ***libre*** *si* $\mathfrak{F}$ *es un filtro de abiertos y* $\cap\mathfrak{F} = \cap\{\mathrm{F} : \mathrm{F} \in \mathfrak{F}\} = \varnothing$*.*

Observación A.1.3

En la definición anterior, entrecomillamos filtro de abiertos porque formalmente hablando no se trata de un filtro en X*, sino de un filtro sobre una subfamilia de* $\mathcal{P}(\mathrm{X})$*.*

Definamos estos filtros.[1] *Sean* X *un conjunto no vacío y* $\varnothing \neq \mathfrak{G} \subseteq \mathcal{P}(\mathrm{X})$*. Un* ***$\mathfrak{G}$–filtro*** *en* X *es una familia* $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{G}$ *que cumple las siguientes condiciones:*

- $\varnothing \notin \mathcal{F}$*.*
- *Si* $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2 \in \mathcal{F}$*, entonces* $\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2 \in \mathcal{F}$*.*
- *Si* $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$ *y* $\mathrm{A} \supseteq \mathrm{F}$ *es tal que* $\mathrm{A} \in \mathfrak{G}$*, entonces* $\mathrm{A} \in \mathcal{F}$*.*

De esta manera, un filtro de abiertos en el espacio topológico $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ *es simplemente un* $\mathcal{T}$*–filtro en* X*. Por tanto, de acuerdo a la Definición 2.4.1 inciso* (3)*, tenemos el siguiente resultado:*

Si $\mathcal{F}$ *es un ultrafiltro abierto, entonces la familia*

$$\mathcal{F}_0 = \{\mathrm{int}(\mathrm{F}) : \mathrm{F} \in \mathcal{F}\}$$

es un ultrafiltro de abiertos.

Proposición A.1.4 (Caracterización de los Espacios H–cerrados)

Sea X *un espacio topológico* T_2*. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) X *es* H*–cerrado.*

ii) Toda cubierta abierta de X *es densamente finita.*

iii) Todo filtro de abiertos en X *tiene adherencia.*

[1] Véase, por ejemplo, [39], o bien [31].

$iv)$ *Todo ultrafiltro de abiertos en* X *converge.*

Demostración. Es semejante a la demostración del Teorema 3.4.2. ■

Corolario A.1.5

Sea X *un espacio topológico* T_2*. Entonces* X *es compacto si y sólo si* X *es* H*–cerrado y regular.*

Demostración.

$\Rightarrow)$ Claramente todo espacio compacto y T_2 es H–cerrado y regular.

$\Leftarrow)$ Supongamos ahora que X es H–cerrado y regular. Sea α una cubierta abierta de X. Para cada $x \in \mathrm{X}$ existe $\mathrm{V}_x \in \alpha$ tal que $x \in \mathrm{V}_x$. Puesto que X es regular existe O_x vecindad abierta de x tal que $C\ell\,(\mathrm{O}_x) \subseteq \mathrm{V}_x$. Por la Proposición A.1.4, la familia $\{\mathrm{O}_x \,:\, x \in \mathrm{X}\}$ es densamente finita, esto es, existe $\mathrm{A} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ subconjunto finito de X, tal que

$$\mathrm{X} = C\ell\,(\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{O}_{x_i}) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{V}_{x_i}.$$

Por tanto, la familia $\{\mathrm{V}_{x_i} \,:\, x_i \in \mathrm{A}\}$ es una subcubierta finita de la cubierta α. En consecuencia X es compacto. ■

También es posible caracterizar a lo espacios compactos Hausdorff en términos de H–cerrados.

Teorema A.1.6

Sea X *un espacio topológico* T_2*. Entonces* X *es compacto si y sólo si todos los subespacios cerrados de* X *son* H*-cerrados.*

Demostración. Véase [33] ■

El ejemplo propuesto a continuación muestra que existen espacios H–cerrados que no son compactos.

Ejemplo A.1.7

Sea $\mathbb{R}^2$ *el plano con la topología euclidiana usual y sea*

$$\mathrm{Y} = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m} \right) \in \mathbb{R}^2 \,:\, n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\} \cup \left\{ \left(\frac{1}{n}, 0 \right) \in \mathbb{R}^2 : n \in \mathbb{N} \right\}$$

subespacio de $\mathbb{R}^2$*, con la topología heredada. Sea* $\mathrm{X} = \mathrm{Y} \cup \{p^+, p^-\}$*, con* $p^+, p^- \notin \mathrm{Y}$ *Sea* $\mathcal{T}$ *la familia de subconjuntos de* X*, definida como sigue:*

$\mathrm{O} \subseteq \mathrm{X}$ *es un elemento de la familia* $\mathcal{T}$ *si y solamente si* $\mathrm{O} \cap \mathrm{Y}$ *es abierto en* Y *y si* $p^+ \in \mathrm{O}$ *(respectivamente,* $p^- \in \mathrm{O}$*) implica que existe* $r \in \mathbb{N}$ *tal que:*

$$\left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) : \ n \geq r, \ m \in \mathbb{N}\right\} \subseteq \mathrm{O}$$

(respectivamente,

$$\left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) : \ n \geq r, \ -m \in \mathbb{N}\right\} \subseteq \mathrm{O}).$$

Se demuestra fácilmente que $\mathcal{T}$ *es una topología Hausdorff para* X*. Demostraremos que* X *no es compacto, pero sí es* H*–cerrado. En efecto, sea* α *una cubierta abierta de* X*. Por ser* α *cubierta existen* O^+*,* $\mathrm{O}^- \in \alpha$ *tales que* $p^+ \in \mathrm{O}^+$ *y* $p^- \in \mathrm{O}^-$*. Si* $C\ell\,(\mathrm{O}^+ \cup \mathrm{O}^-) \neq \mathrm{X}$ *(de otra manera* α *sería densamente finita) existe* $r \in \mathbb{N}$ *tal que* $\mathrm{X} \setminus C\ell\,(\mathrm{O}^+ \cup \mathrm{O}^-) \subseteq \mathrm{K}$ *con:*

$$\mathrm{K} = \left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) : \ n \leq r, \ m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\} \cup \left\{\left(\frac{1}{n}, 0\right) : \ n \leq r\right\}.$$

Pero ya que K *es compacto debe existir una subfamilia finita* $\mathcal{A}$ *de* α *tal que* $\mathrm{K} \subseteq \cup\mathcal{A}$*. Por tanto,*

$$\mathrm{X} = C\ell\left(\mathrm{O}^+ \cup \mathrm{O}^-\right) \cup (\cup\mathcal{A}) = C\ell\left[\mathrm{O}^+ \cup \mathrm{O}^- \cup (\cup\mathcal{A})\right].$$

Así que X *es* H*–cerrado por la Proposición A.1.4. Ahora bien,* X *no puede ser compacto, pues el conjunto:*

$$\left\{\left(\frac{1}{n}, 0\right) \in \mathbb{R}^2 : \ n \in \mathbb{N}\right\}$$

es un subespacio cerrado, discreto e infinito de X*.* ■

Proposición A.1.8

Si X *es un espacio* H*–cerrado y si* $\mathrm{O} \subseteq \mathrm{X}$ *es abierto, entonces* $C\ell\,(\mathrm{O})$ *es* H*–cerrado.*

Demostración Pongamos $\mathsf{A} = C\ell\,(\mathrm{O})$ y sea $\mathcal{F}$ un filtro de abiertos en A, de manera que:

$$\mathfrak{F} = \{\mathrm{F} \cap \mathrm{O} : \ \mathrm{F} \in \mathcal{F}\}^+ \cap \mathcal{T}$$

es un filtro de abiertos en X que, por la Proposición A.1.4, cumple con $\varnothing \neq \mathfrak{adh}_{\mathrm{X}}(\mathfrak{F})$. Por otra parte:

$$\begin{aligned}\varnothing \neq \mathfrak{adh}_{\mathrm{X}}(\mathfrak{F}) &= \cap\{\, C\ell_{\mathrm{X}}(\mathrm{G}) : \mathrm{G} \in \mathfrak{F}\} \\ &\subseteq \cap\{\, C\ell_{\mathrm{X}}(\mathrm{F} \cap \mathrm{O}) : \mathrm{F} \in \mathcal{F}\} \\ &= \cap\{\, C\ell_{\mathsf{A}}(\mathrm{F} \cap \mathrm{O}) : \mathrm{F} \in \mathcal{F}\} \\ &\subseteq \cap\{\, C\ell_{\mathsf{A}}(\mathrm{F}) : \mathrm{F} \in \mathcal{F}\} = \mathfrak{adh}_{\mathsf{A}}(\mathcal{F}) .\end{aligned}$$

Y aplicando nuevamente la Proposición A.1.4, se tiene que A es H–cerrado. ■

Sorprendentemente resulta que la propiedad de ser H–cerrado no es heredable a los subespacios cerrados, como se observa en el siguiente:

Ejemplo A.1.9

En el Ejemplo A.1.7, el subespacio

$$\mathrm{A} = \left\{ \left(\frac{1}{n}, 0 \right) \in \mathbb{R}^2 : n \in \mathbb{N} \right\}$$

de X*, como ya se dijo es cerrado, infinito y discreto, así que es regular, pero debido a que no es compacto,* A *no es* H*-cerrado por la Proposición A.1.4.* ■

Apéndice B

Extensiones de Espacios Topológicos

B.1. Definiciones y Algunos Resultados

Definición B.1.1

1) *Una* ***extensión*** *del espacio topológico* X *es una pareja* (h, Y)*, en donde* Y *es un espacio topológico y* h *es un homeomorfismo de* X *sobre un subespacio denso de* Y*.*

2) *Si* (h_1, Y_1)*,* (h_2, Y_2) *son dos extensiones del espacio* X*, se dice que* (h_1, Y_1) ***domina*** *a* (h_2, Y_2) *(en símbolos escribimos* $(h_1, \mathrm{Y}_1) \geq (h_2, \mathrm{Y}_2)$*) si existe una función continua* $\varphi : \mathrm{Y}_1 \to \mathrm{Y}_2$ *tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "h_2"'] & \mathrm{Y}_1 \arrow[dl, "\varphi"] \\ \mathrm{Y}_2 & \end{tikzcd}$$

conmuta, es decir, $\varphi \circ h_1 = h_2$*.*

3) *Dos extensiones* (h_1, Y_1) *y* (h_2, Y_2) *del espacio* X *se dicen* ***equivalentes*** *si existen homeomorfismos* $\varphi : \mathrm{Y}_1 \to \mathrm{Y}_2$*,* $\psi : \mathrm{Y}_2 \to \mathrm{Y}_1$ *tales que* $\varphi \circ h_1 = h_2$ *y* $\psi \circ h_2 = h_1$*.*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "h_2"'] & \mathrm{Y}_1 \arrow[dl, "\varphi"'] \\ \mathrm{Y}_2 \arrow[ur, bend right, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

4) *Si* Y *es una extensión de* X *llamaremos* ***residuo*** *al conjunto* $\mathrm{Y} \setminus f(\mathrm{X})$.

Si Y es una extensión de X, escribiremos: $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathrm{Y}$ y para simplificar conside–raremos que $\mathrm{X} \subseteq \mathrm{Y}$.

Las compactificaciones,[1,2] las conectificaciones y las completaciones, son ejem–plos de extensiones. En este trabajo una extensión muy importante que tratamos, es la de *Katětov* para espacios H–cerrados.

Existen ejemplos de extensiones ¡ **homeomorfas** pero no **equivalentes**! Como se observa en el siguiente:

Ejemplo B.1.2

Sea $\mathfrak{K}$ *el conjunto de Cantor ternario en* $[0,1]$ *y sea* $\mathrm{X} = \mathfrak{K} \times \mathbb{N}$. *Sean* $\alpha\mathrm{X}$ *y* $\alpha\mathbb{N}$ *las compactificaciones de Alexandroff de* X *y* $\mathbb{N}$ *respectivamente. Claramente* $\mathfrak{K} \times \alpha\mathbb{N}$ *es otra extensión de* $\alpha\mathrm{X}$. *Ahora* $\alpha\mathrm{X}$ *y* $\mathfrak{K} \times \alpha\mathbb{N}$ *son homeomorfos, pero sin embargo como extensiones no son equivalentes.*

Definición B.1.3

Sean Z, W *extensiones de* X *y* Y *respectivamente. Sean* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$, $\widehat{f} : \mathrm{Z} \to \mathrm{W}$. *Se dice que* $\widehat{f}$ ***extiende*** *a* f *o que* $\widehat{f}$ *es una* ***extensión*** *de* f *si* $\widehat{f}|_{\mathrm{X}} = f$.

Para funciones cuyo codominio es de Hausdorff, tenemos la siguiente:

Proposición B.1.4

Sean Z, W *extensiones de* X *y* Y *respectivamente, y sea* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *una función continua. Si* W *es* T_2, *entonces* f *tiene a lo más una extensión continua* $\widehat{f} : \mathrm{Z} \to \mathrm{W}$.

Demostración Se deduce del siguiente:

[1] En efecto una compactación es una extensión (h, Y) con Y compacto, análogamente para las conectificaciones y completaciones.

[2] La **compactación de Stone-Čech** $\beta\mathrm{X}$ de un espacio de Tychonoff X es la completación de X respecto a la β–uniformidad. (Uniformidad generada por la familia de todas las cubiertas normales finitas). Véase por ejemplo [21]. Pero, la β–uniformidad es equivalente a la uniformidad $\mathcal{U}_0$, generada por la familia $\mathcal{U}_0(\mathrm{X}) = \{\alpha : \alpha \text{ es cubierta cocero finita de } \mathrm{X}\}$, por tanto, $\beta\mathrm{X}$ es también la completación de X respecto a la uniformidad $\mathcal{U}_0$. En este aspecto, véase [16].

Hecho 5

Sean X, Y *espacios topológicos y* $f, g : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *funciones continuas. Si* Y *es un espacio* T_2 *y el conjunto:*

$$\{x \in \mathrm{X} : f(x) = g(x)\}$$

es denso en X*, entonces* $f = g$ *en* X. ∎

Teorema B.1.5

Sean X, Y *espacios* T_2. *Si* Y *es una extensión de* X *entonces* $|\mathrm{Y}| \leq 2^{2^{|\mathrm{X}|}}$.

Demostración Para cada $p \in \mathrm{Y}$ sea

$$\mathcal{O}_p = \{\mathrm{U} \cap \mathrm{X} : \mathrm{U} \text{ es abierto en } \mathrm{Y},\, p \in \mathrm{U}\}.$$

Claramente $\mathcal{O}_p$ es un filtro de abiertos en X para cada p. Demostraremos ahora, que la correspondencia $p \overset{\varphi}{\mapsto} \mathcal{O}_p$ es inyectiva. En efecto, sean $p, q \in \mathrm{Y}$ con $p \neq q$. Puesto que Y es de Hausdorff los filtros $\mathcal{O}_p$ y $\mathcal{O}_q$ no se mezclan y en vista de que X es denso en Y existen abiertos no vacíos $\mathrm{U} \in \mathcal{O}_p$ y $\mathrm{V} \in \mathcal{O}_q$ tales que $p \in \mathrm{U}$, $q \in \mathrm{V}$ y $\mathrm{U} \cap \mathrm{V} = \varnothing$. Por tanto la correspondencia $p \overset{\varphi}{\mapsto} \mathcal{O}_p$ es inyectiva. En consecuencia existe una función inyectiva $\varphi : \mathrm{Y} \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathrm{X}))$ y, por tanto, $|\mathrm{Y}| \leq 2^{2^{|\mathrm{X}|}}$. ∎

En el caso de los espacios métricos la unicidad de la completación debe ser entendida *"salvo isometrías"* así como, en los espacios pre–uniformes, semi–uniforme, o uniformes *"salvo unimorfismos"*.

Estamos ahora en condiciones de construir una extensión sumamente importante de un espacio T_2–cerrado.

B.2. La Extensión de Katětov

En cuanto se han definido los espacios T_2–cerrados, la pregunta natural que surge es: ¿Cuándo un espacio T_2 tiene una extensión T_2–cerrada? Además se espera que las propiedades que cumpla tal extensión sean semejantes a las propiedades de la compactación de Stone-Čech, es decir, tenga una *propiedad universal.*[3]

[3] Si X es un espacio Tychonoff, entonces X admite una compactación T_2 $(h, \beta\mathrm{X})$, que no es otra que la *compactación de Stone-Čech*, la cual hemos tratado en páginas anteriores, esta compactación tiene la

Comenzaremos por dar una:

Notación 3

Sea X *un espacio* T_2. *Se define la clase siguiente:*

$$\mathcal{H}(\mathrm{X}) = \{\mathrm{Y} : \mathrm{Y} \text{ es una extensión } \mathrm{T}_2\text{–cerrada de } \mathrm{X}\}. \tag{B.1}$$

La clase $\mathcal{H}(\mathrm{X})$ no es vacía por el Teorema 3.4.3. Además en esta sección probaremos que admite un elemento maximal.

Definición B.2.1

Sea X *un espacio* T_2. *Se define el conjunto siguiente:*

$$\kappa\mathrm{X} = \mathrm{X} \cup \{\mathcal{F} : \mathcal{F} \text{ es un ultrafiltro de abiertos libre en } \mathrm{X}\} \tag{B.2}$$

Construiremos una topología en $k\mathrm{X}$. Para ello notemos primeramente lo siguiente:

Observación B.2.2

La familia:

$$\mathfrak{B}_\kappa = \{\mathrm{U} : \mathrm{U} \text{ es abierto en } \mathrm{X}\} \cup \{\mathrm{U} \cup \{\mathcal{F}\} : \mathrm{U} \in \mathcal{F},\ \mathcal{F} \in \kappa\mathrm{X} \setminus \mathrm{X}\} \tag{B.3}$$

es base para una topología de $\kappa\mathrm{X}$.

Demostración. Es inmediata. ■

Teorema B.2.3

Sea $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ *un espacio* T_2. *Entonces:*

---

siguiente **propiedad universal**: Si $\varphi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ es una función continua de X en cualquier espacio compacto y T_2 Y, entonces existe una única función $\psi : \beta\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ tal que $\psi \circ h = \varphi$.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\varphi"'] & \beta\mathrm{X} \arrow[dl, "\psi"] \\ \mathrm{Y} & \end{tikzcd}$$

Es decir, $\beta\mathrm{X}$ es la compactación T_2 más grande que admite X.

$i)$ X *es abierto y denso en* κX.

$ii)$ $\kappa\mathrm{X} \in \mathcal{H}(\mathrm{X})$.

$iii)$ *Si* $\mathrm{Y} \in \mathcal{H}(\mathrm{X})$ *es cualquier extensión* T_2*–cerrada de* X*, entonces existe una única función continua* $\psi : \kappa\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *tal que* $\psi|_{\mathrm{X}} = id_{\mathrm{X}}$.

Demostración.

$i)$ Por la Observación B.2.2, $\mathfrak{B}_k$, es base para una topología en κX y, por tanto, X es un subespacio abierto y denso de κX trivialmente.

$ii)$
- $a)$ Como X es Hausdorff y por el inciso (i) es abierto en κX, para cualesquiera dos puntos $p, q \in \mathrm{X}$ distintos, existen O_p, O_q abiertos de κX tales que $p \in \mathrm{O}_p$, $q \in \mathrm{O}_q$ con $\mathrm{O}_p \cap \mathrm{O}_q = \varnothing$.
- $b)$ Si ahora $x \in \mathrm{X}$ y $\mathcal{F} \in \kappa\mathrm{X} \setminus \mathrm{X}$, deben existir U, V abiertos en X tales que $\mathrm{U} \in \mathcal{F}$, $x \in \mathrm{V}$, $\mathrm{U} \cap \mathrm{V} = \varnothing$. Por tanto, V y $\mathrm{U} \cup \{\mathcal{F}\}$ son vecindades abiertas y ajenas de x y $\mathcal{F}$ en κX, respectivamente.
- $c)$ Por último sean $\mathcal{F}$, $\mathcal{G} \in \kappa\mathrm{X} \setminus \mathrm{X}$ tales que $\mathcal{F} \neq \mathcal{G}$. Entonces deben existir U, V abiertos ajenos de X tales que $\mathrm{U} \in \mathcal{F}$, $\mathrm{V} \in \mathcal{G}$, pues de no ser así, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ se mezclarían y al ser ultrafiltros serían iguales. Así pues, $\mathrm{U} \cup \{\mathcal{F}\}$ y $\mathrm{V} \cup \{\mathcal{G}\}$ son vecindades abiertas y ajenas en κX de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$, respectivamente.

Estos tres incisos en conjunto demuestran que κX es Hausdorff. Nos falta demostrar que κX es una extensión T_2–cerrada de X.

- $a)$ X es denso en κX. En efecto, siempre que $\mathcal{F} \in \kappa\mathrm{X} \setminus \mathrm{X}$, sus vecindades básicas son de la forma: $\mathrm{U} \cup \{\mathcal{F}\}$ con $\mathrm{U} \in \mathcal{F}$. Por tanto, $\mathrm{X} \cap [\mathrm{U} \cup \{\mathcal{F}\}] = \mathrm{U}$. Como $\mathcal{F}$ es arbitrario se sigue que X es denso en κX.
- $b)$ κX es T_2–cerrado. En efecto, sea $\mathcal{J}$ un ultrafiltro de abiertos libre en κX. Puesto que X es abierto en κX, se tiene que $\mathrm{X} \in \mathcal{J}$. Por otra parte, como X es denso en κX la familia $\mathcal{G} = \{\mathrm{J} \cap \mathrm{X} : \mathrm{J} \in \mathcal{J}\}$ es un ultrafiltro de abiertos libre en X. Pero además $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{J}$ y si $\mathrm{O} \in \mathcal{G}$, entonces $\mathrm{O} \subseteq \mathrm{O} \cup \{\mathcal{G}\}$. Por tanto, $\mathrm{O} \cup \{\mathcal{G}\} \in \mathcal{J}$. En consecuencia, por la Observación B.2.2, $\mathcal{J} \to \mathcal{G}$, lo que contradice la elección de $\mathcal{J}$ como ultrafiltro de abiertos libre en κX. Esto demuestra que κX es T_2–cerrado.

Así hemos demostrado que $\kappa X \in \mathcal{H}(X)$.

iii) Supongamos que $Y \in \mathcal{H}(X)$ es cualquier otra extensión T_2–cerrada de X.

Existencia de ψ. Sea $\mathcal{F} \in \kappa X \setminus X$ y pongamos

$$\mathcal{G} = \{W \subseteq Y : W \text{ es abierto en } Y,\ W \cap X \in \mathcal{F}\}. \tag{B.4}$$

Claramente $\mathcal{G}$ es un filtro de abiertos en Y. Probaremos que $\mathcal{G}$ es además, un ultrafiltro de abiertos en Y. En efecto, tomemos $\mathcal{N} \subseteq Y$ abierto tal que $\mathcal{N} \notin \mathcal{G}$ y sea

$$\mathcal{S} = X \setminus C\ell_X(\mathcal{N} \cap X).$$

Afirmamos que $\mathcal{S} \in \mathcal{F}$.[4] Por otra parte,

$$C\ell_Y(\mathcal{N} \cap X) \cap \mathcal{S} = C\ell_X(\mathcal{N} \cap X) \cap \mathcal{S} = \varnothing,$$

de manera que

$$\mathcal{S} \subseteq Y \setminus C\ell_Y(\mathcal{N} \cap X) = Y \setminus C\ell_Y(\mathcal{N}).$$

En consecuencia, $Y \setminus C\ell_Y(\mathcal{N}) \in \mathcal{F}$ y como $\mathcal{N} \cap X \notin \mathcal{F}$, de donde se sigue que $Y \setminus C\ell_Y(\mathcal{N}) \in \mathcal{G}$. Por tanto, $\mathcal{G}$ es un ultrafiltro de abiertos en Y. Como $Y \in \mathcal{H}(X)$ por la Proposición A.1.4, existe $a_{\mathcal{F}} \in Y$ único, tal que $\mathcal{G} \to a_{\mathcal{F}}$. Definamos ahora la función $\psi : \kappa X \to Y$, como sigue

$$\psi(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in X \\ a_{\mathcal{F}} & \text{si } \mathcal{F} \in \kappa X \setminus X \end{cases} \tag{B.5}$$

Claramente ψ es una función tal que $\psi|_X = id_X$. Demostraremos, que además ψ es continua. Para ello observemos primeramente que $\psi|_X : X \subseteq \kappa X \to Y$ es continua por ser X abierto en κX. Solo resta investigar la continuidad en $\kappa X \setminus X$. Sean $\mathcal{F} \in \kappa X \setminus X$ y sea V una vecindad abierta de $a_{\mathcal{F}}$. Puesto que $\mathcal{F} \to a_{\mathcal{F}}$ se tiene que $\eta_{a_{\mathcal{F}}} \subseteq \mathcal{F}$ y por tanto, $V \in \mathcal{F}$. Así $V \cap X \in \mathcal{F}$ por la Ecuación B.4. De la Observación B.2.2, se deduce que $\{\mathcal{F}\} \cup (V \cap X)$ es una vecindad abierta de $\mathcal{F}$ en κX que cumple:

$$\psi(\{\mathcal{F}\} \cup (V \cap X)) = \{a_{\mathcal{F}}\} \cup (V \cap X) \subseteq V.$$

[4] De acuerdo con la Observación A.1.3, los $\mathcal{T}$–ultrafiltros de abiertos se comportan tal cual los ultrafiltros, es decir, si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{T}$–filtro en X, entonces $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{T}$–ultrafiltro si y sólo si para todo $A \in \mathcal{T}$, $A \in \mathcal{F}$ o $X \setminus C\ell(A) \in \mathcal{F}$.

Así pues ψ es continua en $\kappa\mathrm{X} \setminus \mathrm{X}$ y por tanto, es continua en todo $\kappa\mathrm{X}$.

Unicidad de ψ. La unicidad es una consecuencia de la Proposición B.1.4.

Por otra parte, puesto que Y y $k\mathrm{X} \in \mathcal{H}(\mathrm{X})$, escribamos de acuerdo a la definición (h, Y) y $(k, \kappa\mathrm{X})$. Entonces la situación se muestra en el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} & k\mathrm{X} \arrow[dd, "\psi"] \\ \mathrm{X} \arrow[ur, "k"] \arrow[dr, "h"'] & \\ & \mathrm{Y} \end{tikzcd}$$

En donde $\psi|_{\mathrm{X}} = id_{\mathrm{X}}$. ■

Observación B.2.4

Si X es un espacio topológico T_2, el Teorema anterior B.1.5, nos permite afirmar que $\kappa\mathrm{X}$ es la extensión T_2–cerrada más grande que admite X.[5]

Es el momento de dar un nombre a la extensión $\kappa\mathrm{X}$ de un espacio T_2 X, cons–truida antes.

Definición B.2.5

Sea X un espacio T_2. Entonces:

$i)$ *La extensión T_2–cerrada $\kappa\mathrm{X}$ del espacio X de la Definición B.2.1, recibe el nombre de* ***extensión de Katětov*** *del espacio X*

$ii)$ *Si (h, Y) es otra extensión T_2–cerrada de X, entonces la función ψ del inciso (iii) del Teorema B.2.3, recibe el nombre de* ***función de Katětov*** *del espacio Y.*

Terminamos esta Tesis enunciando otras propiedades de la extensión de Katětov:

[5] En otro contexto $k\mathrm{X}$ recibe el nombre de **máximo proyectivo**.

Teorema B.2.6

Si X *es un espacio* T_2*, entonces:*

$i)$ *El residuo* $k\mathrm{X} \setminus \mathrm{X}$ *es un subespacio cerrado y discreto de* $\kappa\mathrm{X}$*.*

$ii)$ *Si* $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$ *es abierto, entonces* $C\ell_{\kappa\mathrm{X}}(\mathrm{A}) = C\ell_{\mathrm{X}}(\mathrm{A}) \cup \{\mathcal{F} \in \kappa\mathrm{X} \setminus \mathrm{X} : \mathrm{A} \in \mathcal{F}\}$*.*

$iii)$ *Si* $\mathrm{A}, \mathrm{B} \subseteq \mathrm{X}$ *son abiertos en* X *y tales que* $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$*, entonces*

$$[\,C\ell_{\kappa\mathrm{X}}(\mathrm{A}) \cap C\ell_{\kappa\mathrm{X}}(\mathrm{B})] \setminus \mathrm{X} = \varnothing.$$

$iv)$ *Si* $\mathrm{A}, \mathrm{B} \subseteq \mathrm{X}$ *son abiertos en* X*, tales que* $C\ell_{\mathrm{X}}(\mathrm{A}) \cap C\ell_{\mathrm{X}}(\mathrm{B}) = \varnothing$*, entonces*

$$C\ell_{\kappa\mathrm{X}}(\mathrm{A}) \cap C\ell_{\kappa\mathrm{X}}(\mathrm{B}) = \varnothing.$$

En particular, si A *es abierto–cerrado en* X*, entonces* $C\ell_{\kappa\mathrm{X}}(\mathrm{A})$ *es abierto–cerrado en* $\kappa\mathrm{X}$*.*

$v)$ X *está* c^**–encajado en* $\kappa\mathrm{X}$*.*[6]

$vi)$ *Si* $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$ *es denso en ninguna parte de* X*, entonces* A *es cerrado en* $\kappa\mathrm{X}$*.*

Demostración. Es rutinaria y puede ser consultada en [33]. ■

A cambio daremos un ejemplo muy ilustrativo y que esta relacionado con el Ejemplo B.1.2.

Ejemplo B.2.7

Claramente el espacio discreto $\mathbb{N}$ *admite las extensiones* $\kappa\mathbb{N}$ *y* $\beta\mathbb{N}$*. Afirmamos que* $\kappa\mathbb{N}$ *no puede ser compacto. En efecto* $\mathbb{N}$ *admite una partición* P *con las siguientes propiedades:*

$i)$ P $= \{\mathrm{A}_n : \mathrm{A}_n$ es infinito, $n \in \mathbb{N}\}$.

$ii)$ *Cada* A_n *esta contenido en algún ultrafiltro libre* $\mathcal{F}_n$ *sobre* $\mathbb{N}$*.*

[6] Si $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ es un espacio topológico y $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$, entonces:

$i)$ Se dice que A está c–**encajado** en X si toda función continua $\varphi : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ tiene extensión continua a todo X.

$ii)$ Se dice que A está c^*–**encajado** en X si toda función continua y acotada $\varphi : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ tiene extensión continua a todo X.

Esto implica que $\mathrm{card}\,(\kappa\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}) \geq c$. *Por tanto, del inciso* (i) *del Teorema B.2.6, concluimos que* $\kappa\mathbb{N}$ *no es compacto. Así que* $\kappa\mathbb{N}$ *y* $\beta\mathbb{N}$ *no son extensiones equivalentes, más aún, como* $\beta\mathbb{N}$ *es compacto y* T_2, $\beta\mathbb{N} \in \mathcal{H}\,(\mathbb{N})$, *por lo que* $\kappa\mathbb{N}$ *es una extensión de* $\mathbb{N}$ *más grande que* $\beta\mathbb{N}$. ■

Bibliografía

[1] M. Atsuji, *Uniform Continuity of Continuous Functions on a Uniform Spaces*, Can. J. Math., $\mathbf{13}(1961)$, $657-663$.

[2] M. Atsuji, *Uniform Extensions of Uniformly Continuous Functions*, Proc. Jap. Acad., $\mathbf{37}(1961)$, $10-13$.

[3] J. P. Aubin, *Applied Abstract Analysis*, New York, John Wiley & Sons. Inc., 1977.

[4] M. P. Berri, J. R. Porter, R. M. Stephenson, *A Survey of Minimal Topological Spaces*, General Topology and its Relations to Moderm Analysis and Algebra, III (Proc. Conf., Kanpur, 1968), (1971), $93-114$ Academia, Prague kcv.

[5] M. P. Berri, R. H. Sorgenfrey, *Minimal Regular Spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., $\mathbf{14}(1963)$, $454-458$.

[6] N. Bourbaki, *General Topology*, Parts I and II, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1966.

[7] H. Cartan *Théorie des Filtres*, Comptes Rendus, $\mathbf{205}$(1937), Paris, $595-598$.

[8] H. Cartan *Filtres et Ultrafiltres*, Comptes Rendus, $\mathbf{205}$(1937), Paris. $777-779$.

[9] E. Čech, *Topological spaces*, London, Intercience Publishers. A Division of John Wiley & Sons., Inc. 1966.

[10] L. W. Cohen *On Imbedding a Space in a Complete Space*, Duke. Math. J., $\mathbf{5}(1939)$, $174-183$.

[11] W. W. Comfort and S. Negrepontis, *The Theory of Ultra filters*, New York, Springer-Verlag, 1974.

[12] A. Császár, *General Topology*, Budapest, Akadémiai Kiadó, 1978.

[13] J. Dieudonné *Un example d'space normal non susceptible d'une structure uniforme d'espace complet* Comptes Rendus, **209**(1939), Paris. 145 – 147.

[14] R. Engelking, *General Topology*, Warszawa., PWN - Polish Scientific Publishers., 1977.

[15] R. Engelkind, *General Topology*, Berlin, Heldermann Verlag, 1989.

[16] A. García–Máynez, A. Támariz, *Topología General*, México, Porrúa, 1988.

[17] S. Ginsberg and J. I. Isbell, *Some Operators on Uniform Spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **93**(1959), 145 – 168

[18] L. M. Graves *On the Completing of a Hausdorff Space*, Annals of Math., **38**(1937), 61 – 64.

[19] D. Harris, *Structures in Topology* (Tesis Doctoral), Memoirs of the American Mathematical Society No. 115, Providence, Rhode Island, American Mathematical Society, 1971.

[20] H. Herrlich, *T_v–Abgeschlossenheit und T_v–Minimalität*, Math. Z., **88**(1965), 285 – 294.

[21] N. R. Howes, *Modern Analysis and Topology*, Universitext Series, New York, Springer–Verlag New York Inc., 1995.

[22] J. R. Isbell, *Uniform Spaces*, Mathematical Surveys No 12, Rhode Island, American Mathematical Society, 1964.

[23] E. J. James, *A Note on Completely Hausdorff–Closed Spaces*, Bollettino U. M. I., **16**–A(1979), No. 5, 341 – 343.

[24] E. J. James, *On minimal Hausdorff spaces*, J. Austral. Math. Soc. Ser. **23**–A(1977), No. 4, 476 – –480.

[25] E. J. James, *More characterizations of H-closed spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **63**(1977), No. 1, 160 – –164.

[26] I. M. James, *Topologies and Uniformities*, London, Springer–Verlag London Ltd., 1999.

[27] K. Kuratowski, *Topology*, Tomo I, New York, Academic Press, 1966.

[28] E. L. Lima, *Espacos Métricos*, Brasilia, Instituto de Matemática Pura e Aplicada (Conselho Nacional de Desenvolvimiento Cientifico e Tecnológico), 1983.

[29] K. Morita *Topological Completions and M-Spaces*, Tokio Kyoiku Daigak, Section A **10**(1970) No. 271, 271 – 288.

[30] K. Morita, J. Nagata, *Topics in General Topology*, Amsterdam, Elsevier Science Publishers B. V., 1989.

[31] M. G. Murdeshwar, *General Topology*, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1983.

[32] W. Page, *Topological Uniform Structures*, New York, John Willey & Sons., 1978.

[33] R. J. Porter, G. R. Woods, *Extensions and Absolutes of Hausdorff Spaces*, New York, Springer–Verlag New York Inc., 1988.

[34] J. R. Porter and R. G. Woods *Extensions of Hausdorff spaces*, Pacific J. Math. **103**(1982) vol. 1, 111 – 134.

[35] J. W. Tukey *Convergence and Uniformity in Topology*, Ann. Math. Studies No. 1, Princenton, Princenton University Press, 1940

[36] N. V. Veličko, H–*Closed Topological Spaces*, Mat. Sb., **70**(1966), 98 – 112. English translation, Amer. Math. Soc. Transl., **78**(1968), 103 – 118.

[37] A. Weil, *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale*, Actualités Sci. Indus., **551**, Paris, 1937.

[38] A. Wilansky, *Topology for Analysis*, Waltham Mass., Ginn and company, 1970.

[39] S. Willard, *General Topology*, London, Addison–Weesley Publishing company. Inc., 1970.

Índice alfabético