



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

REVISIÓN DEL PROGRAMA
DE PROBABILIDAD Y
ESTADÍSTICA DE LA SEP,
NIVEL BACHILLERATO.

REPORTE DE ACTIVIDAD DOCENTE

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIA

P R E S E N T A :

ANDREA TAVERA MARÍN

TUTOR

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO

2008



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno

Tavera
Marín
Andrea
53531460
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Actuaría
400091989

2. Datos del tutor

Mat.
Margarita Elvira
Chávez
Cano

3. Datos del sinodal 1

Dra.
Mayra
Elizondo
Cortés

3. Datos del sinodal 2

Dra.
Ruth Selene
Fuentes
García

4. Datos del sinodal 3

Act.
Jaime
Vázquez
Alamilla

5. Datos del sinodal 4

M. en A. P.
María del Pilar
Alonso
Reyes

7. Datos del trabajo escrito.

Revisión del programa de Probabilidad y Estadística de la SEP, nivel Bachillerato.
41 páginas
2008

Agradecimientos.

A la alegría de la vida por permitirme compartir momentos precisos y darme oportunidades cada día.

A Dolores por otorgarme el regalo de la vida, por guiarme, acompañarme, enseñarme a ser fuerte y creer en mí.

Con gratitud y admiración a las mujeres que han llenado mi vida: Gloria Acosta, Alecita, Melissa, Susana, Mari Carmen, Josefina, Nadia Ibarra, Mayra, Bibiana y Geraldine.

A Jorge por ser la rosa de los vientos cuando no quería literalmente, ni mirarme al espejo, por enseñarme a cerrar ciclos y a no tener miedo.

Porque hacer lo que uno desea trae paz al corazón, por tu paciencia para conversar, tu hiperactividad y por compartirme tu mundo, gracias Sam.

A Teresa, Felipe, Miguel Ángel, Leticia, Agustín, Gloria, Genaro, Tonia, Noe, Erandi, Xóchitl, Daniel, Tzayhri y Xanat por hacerme sentir querida y acompañada.

Finalmente, con mucho cariño y agradecimiento a Margarita Chávez Cano por su disponibilidad, las amenas conversaciones y el apoyo que me dio para hacer este trabajo.

Índice

Agradecimientos.	2
Índice	3
Introducción.	4
1 Planteamiento del problema.	5
1.1 Las ideas probabilísticas de los estudiantes	6
1.1.1 Principales líneas de investigación para la enseñanza probabilística de los adolescentes	8
1.2 Necesidades y dificultades de un modelo de desarrollo conceptual probabilístico	9
2 Enseñanza de la teoría de la Probabilidad y la Estadística.	11
2.1 Elementos básicos de una educación probabilística	11
2.1.1 Análisis histórico y epistemológico de la Probabilidad y la Estadística.	12
2.1.2 La existencia de conocimiento previo de carácter específico	15
2.1.3 Razonamiento probabilístico activado en situaciones engañosas	16
2.1.4 El desarrollo de las operaciones (lógico - matemáticas) del conocimiento	16
2.1.5 Diferencias individuales	16
2.1.6 El dominio afectivo	17
2.2 Un enfoque cuasi empírico para el cambio conceptual	17
2.3 Recomendaciones adicionales	18
3 El programa de estudios de la SEP para bachillerato	19
3.1 ¿Por qué aprender Probabilidad y Estadística en el bachillerato	19
3.2 Enfoque del programa de estudios	20
3.3 Objetivo del programa de estudios	22
3.4 Estructura del programa de estudios	23
3.4.1 Conceptos fundamentales	23
3.4.2 Conexión entre los contenidos	24
3.4.3 Bibliografía propuesta	24
3.5 Observaciones del programa de estudios	25
4 Una propuesta para el programa de estudios y recomendaciones	28
4.1 Enfoque	30
4.1.1 ¿Cómo lograr impacto a partir de ideas previas	31
4.1.2 Contenidos	31
4.2 Diseño o propuesta de: actividades, problemas y tareas que deben enfatizarse en el curso	32
4.2.1 Sobre el contenido	33
4.2.2 Sobre las actividades, problemas y tareas	35
4.3 Material de apoyo y recursos tecnológicos	35
Conclusiones.	37
Anexos.	38
Bibliografía.	42

Introducción.

Las Matemáticas reflejan importantes y diversas formas de pensamiento con las que se adquiere la capacidad de enfrentar diferentes clases de conocimiento, además son aptas para cualquier individuo y logran el desarrollo, refinamiento y extensión del pensamiento analítico. Enseñar Matemáticas es mostrar una forma de pensamiento que ha permitido a otros descubrir o inventar hechos o ideas.

Por eso, la enseñanza de la Probabilidad y Estadística requiere entrenar una forma distinta de pensamiento, para ello es necesario ejemplificar conceptos y procedimientos. Durante las clases pueden ejercitarse los conceptos recién adquiridos con problemas propuestos y resueltos, pero no es suficiente, es importante que el alumno resuelva problemas fuera del horario de clase para ejercitarse y resolver problemas más complicados; de esa manera logra establecer las conexiones entre los conceptos que le permiten el aprendizaje.

Los actuales profesores están presentes como instructores y evaluadores, las nuevas técnicas pedagógicas recomiendan presentarlos como guías que faciliten las herramientas para que el alumno viva la experiencia del aprendizaje como actor y no como espectador. Para entender el pensamiento de los estudiantes de niveles de enseñanza básica, media y media superior, es importante describir cómo piensan esos alumnos, unificar el lenguaje de comunicación entre profesores y alumnos y trazar un camino adecuado para el proceso de enseñanza - aprendizaje.

El presente trabajo tiene como objetivo analizar el plan de estudios vigente, para la materia de Probabilidad y Estadística, a nivel medio superior en el programa de la Secretaría de Educación Pública (SEP). Además hace un análisis de los elementos que bajo las consideraciones del autor son las más influyentes y da una serie de recomendaciones que podrán orientar en el proceso de enseñanza - aprendizaje.

Este trabajo consta de cuatro capítulos. El primero señala la familiaridad del concepto de probabilidad y estadística en nuestra vida diaria, ejemplifica algunas aplicaciones en nuestra sociedad y hace referencia a la problemática a la que se han enfrentado aquellos que han enseñado la teoría sobre todo de la Probabilidad, especialmente a una audiencia joven. El segundo capítulo recopila los elementos básicos que deben considerarse durante la enseñanza de la Probabilidad y la Estadística de acuerdo a estudios que han realizado psicólogos orientados a la enseñanza, matemáticos, aquellas consideraciones que a pesar de parecer lógicas facilitan el camino de enseñanza-aprendizaje tanto al que enseña el conocimiento como al que lo recibe. El tercer capítulo revisa el programa de estudios propuesto por la SEP, el enfoque, objetivos y estructura del programa de estudios. Finalmente el cuarto capítulo plantea una propuesta para facilitar el alcance del enfoque y los objetivos y la utilidad de percibirla como una herramienta cotidiana

Capítulo 1

Planteamiento del problema.

Las matemáticas dan al alumno la libertad de responder a las preguntas que necesita, le dan independencia de aprendizaje que sirve más allá de la clase de Matemáticas.

PAUL GOLDENBERG

En nuestro lenguaje habitual nos encontramos expresiones como las siguientes: “Llegué a esa dirección por casualidad”, “Se notaba tan sano que fue inesperado verlo enfermo”, “Por suerte obtuve el premio que se rifó en la kermés”, “El descubrimiento de la penicilina se debió a un hecho accidental”, “Le ganamos al equipo campeón de casualidad”, “Hay poca probabilidad de lluvia”, “Habrá lluvias ocasionales” o “Hay alta probabilidad de lluvia”. En los noticieros que se transmiten por radio y televisión se ofrecen reportes sobre el estado del tiempo, en los principales diarios nacionales se proporcionan descripciones detalladas sobre el clima. Existen muchas situaciones en la vida cotidiana cuyos resultados se manifiestan de manera fortuita. Una gran cantidad de nuestras experiencias de carácter aleatorio están relacionadas con los juegos de azar.

Nuestra vida está rodeada por la presencia de fenómenos imprevisibles que aparecen en los campos biológico (la fracción de insectos que mueren por la acción de un pesticida), médico (un tratamiento es mejor que otro), agrícola (la cantidad de un fertilizante para mejorar la producción de un fruto), social (número de errores en un inventario), político (la preferencia de un votante por un candidato) y físico, entre muchos otros más. Vivimos en un mundo donde la naturaleza está gobernada por la incertidumbre, y la probabilidad es una herramienta para medirla. Los modelos de probabilidad son parte fundamental de un segmento de la teoría que intenta explicar la realidad, por eso aprender y practicar probabilidad es necesario e importante.

Además, como en la actualidad estamos rodeados por cifras y gráficas que nos indican la calidad del aire, la preferencia de un producto sobre otro, la ventaja de un equipo deportivo respecto a sus rivales, el porcentaje de éxito de aplicar ideas que mejoren un sistema, el número de individuos que fallecen de cáncer, el descenso en las tasas de natalidad alrededor del mundo, el cambio de los índices financieros a lo largo del tiempo, porcentajes de una votación, números que se obtienen al aplicar encuestas, etc. Ya sea en los negocios, la medicina, la educación, las ciencias sociales o la física, por mencionar algunas disciplinas, es cada vez más necesaria la habilidad para leer, entender e interpretar los datos que nos rodean. La comprensión de las cifras, los datos y las gráficas se logra mediante el

uso de la Estadística. Por ejemplo: los datos que se generan al experimentar con diferentes variedades en plantas requieren de análisis estadístico, los efectos de la penicilina y otros antibióticos en seres humanos se estudian con métodos estadísticos, los estudios sobre medicamentos para enfermos mentales se realizan comparando el efecto con grupos de control y experimentales, también haciendo experimentos con grupos de control se prueban nuevos medicamentos y las llamadas pruebas de inteligencia se analizan con técnicas estadísticas. La Estadística es una materia que ha adquirido una importante presencia durante las últimas décadas en diferentes áreas del quehacer industrial, en el desarrollo tecnológico, en el diseño de nuevos productos y nuevos descubrimientos científicos.

Las teorías de la Probabilidad y la de la Estadística facilitan el quehacer científico, industrial, social y profesional.

1.1 Las ideas probabilísticas de los estudiantes.

Lo importante es apostarle a la transferencia de hábitos mentales.

JUAN MANUEL ESTRADA

Las posturas que se dan en relación a la didáctica de las matemáticas responden a las diversas concepciones que se tienen de la disciplina. Una concepción dominante entre los estudiosos y profesores de Matemáticas, es que la consideran como una teoría ideal construida por un sistema deductivo, un conjunto de proposiciones verdaderas como punto de partida y que transmite la verdad mediante reglas de inferencia lógica. En 1981, Lakatos criticó el modelo de teoría ideal, argumentando que la tesis de la verdad absoluta no se sostiene, hace esa afirmación siguiendo la filosofía de Russell, defienden un modelo cuasi empírico donde los axiomas son explicados por el resto del sistema, con esa afirmación admiten que las matemáticas están basadas y contrastadas en la práctica, esa nueva caracterización tiene profundas implicaciones didácticas, por necesitar la experiencia práctica.

La otra corriente a considerar para una propuesta didáctica es el enfoque constructivista del aprendizaje. “El factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe, averíguese eso y enséñese en consecuencia”, pero intentar profundizar en lo que el alumno sabe, lleva a distintas opciones de programas de estudios. Según el constructivismo dinámico, el aprendizaje es siempre el producto de la interacción de la idea previa y la nueva información proporcionada por la actividad de aprendizaje. Por otro lado el cambio conceptual es un cambio progresivo, gradual que utiliza contraejemplos y datos para ayudar a tomar conciencia de las debilidades de las concepciones de los alumnos y presentar la teoría explicativa para conseguir un verdadero cambio conceptual. Si somos concientes de nuestra resistencia emocional a cambios bruscos en nuestro estatus cotidiano, tendremos que reconocer la resistencia emocional de los estudiantes a un cambio conceptual que exige

el abandono de ideas, quizás erróneas desde la perspectiva científica, pero funcionales fuera del aula.

La causalidad es mucho más confortable y el pensamiento lógico mucho más claro pero el azar es una realidad. El pensamiento causal tiene raíces muy profundas y con frecuencia su activación dificulta la percepción probabilística de una situación. El solapamiento del pensamiento probabilístico con el pensamiento lógico es una paradoja en sí misma. La formación del concepto de probabilidad dentro de una teoría matemática, lógicamente organizada, no significa que el razonamiento probabilístico en sí mismo (como un tipo teórico de razonamiento) siga la estructura de la lógica. En particular, observamos que no está garantizada la transitividad de conclusiones probabilísticas cuando, sin embargo, estamos acostumbrados a aceptar la propiedad transitiva de las relaciones causales. ¿Estamos dispuestos y están los alumnos dispuestos a dejarse guiar por el cálculo matemático incluso cuando entra en conflicto con nuestras intuiciones y las de los alumnos?

En definitiva, aceptamos nuestras intuiciones sólo después de tener argumentos y datos que puedan influir en ellas. La intuición primaria, no educada, puede llevar a errores. No conocemos ningún método alternativo al razonamiento riguroso para resolver problemas difíciles y consideramos un hecho favorable que el conflicto entre intuición y cálculo normativo señale esa necesidad de comprensión profunda de los principios probabilísticos. La causalidad es mucho más confortable y el pensamiento lógico mucho más claro pero el azar es una realidad. El pensamiento causal tiene raíces muy profundas¹ y con frecuencia su activación dificulta la percepción probabilística de una situación. El solapamiento del pensamiento probabilístico con el pensamiento lógico es una paradoja en sí misma. La formación del concepto de probabilidad dentro de una teoría matemática, lógicamente organizada, no significa que el razonamiento probabilístico en sí mismo (como un tipo teórico de razonamiento) siga la estructura de la lógica. En particular, observemos que no está garantizada la transitividad de conclusiones probabilísticas cuando, sin embargo, estamos acostumbrados a aceptar la propiedad transitiva de las relaciones causales. ¿Estamos dispuestos y están los alumnos dispuestos a dejarse guiar por el cálculo matemático incluso cuando entra en conflicto con nuestras intuiciones y las de los alumnos?

En definitiva, aceptamos nuestras intuiciones sólo después de tener argumentos y datos que puedan influir en ellas. La intuición primaria, no educada, puede llevar a errores. No conocemos ningún método alternativo al razonamiento riguroso para resolver problemas difíciles y consideramos un hecho favorable que el conflicto entre intuición y cálculo normativo señale esa necesidad de comprensión profunda de los principios probabilísticos.

¹ Ausubel, Novak y Hanesian (1978, p. 1).

1.1.1 Principales líneas de investigación para la enseñanza probabilística de los adolescentes.

En el desarrollo histórico de la disciplina aparece el proceso de aprendizaje individual, las concepciones previas a veces son obstáculos para comprender y aceptar las ideas normativas. Para los procesos de aprendizaje sobre la teoría de las probabilidades ha habido diferentes líneas de investigación:

- En 1975, Fischbein publicó un libro para estudiar la evolución de la cognición probabilística.
- En 1981, Pollastek y sus colegas (Lima y Well) hicieron una investigación sobre la relación entre los conceptos media muestral y media poblacional; explicó cómo asimilan esa diferencia los alumnos.
- En 1982, Green hizo un estudio de conceptos probabilísticos a tres mil adolescentes ingleses. Su estudio estaba enfocado sobre todo al concepto de probabilidad a priori, y entre sus conclusiones encontró que tenían pobre habilidad verbal, que resolvían mejor los problemas de tipo combinatorio que aquellos donde hubiera que emplear nociones de proporción, pobre aplicación de diagramas de árbol y de la ley de multiplicación de probabilidades, mostró que era complicado realizar inferencias desde un muestreo, con la tendencia a confiar en la idea abstracta de equiprobabilidad. Cabe señalar que su grupo de estudio eran jóvenes entre once y dieciséis años de edad.
- En 1984, Fischbein y Gazil hicieron un estudio exploratorio donde encontraron que la probabilidad mejora algunas intuiciones probabilísticas (el efecto de representatividad).
- Durante 1985 y 1992, Shaughnessy analizó las concepciones erróneas en probabilidad y diseñó metodologías de enseñanza para adolescentes con el objetivo de superar errores conceptuales.
- En los años 1983, 1986 y 1989, siguiendo la misma línea de investigación, Falk trabajó sobre las dificultades de los estudiantes para comprender los conceptos de independencia y probabilidad condicional y la diferencia que existe entre ellos.
- En 1991 Fischbein junto con Nello y Marino identificaron algunos factores que afectan positiva o negativamente los juicios probabilísticos en niños y adolescentes.
- En 1991, Borovonik y Bentz hicieron una revisión de la investigación empírica, dicho trabajo donde enfatizaban la complejidad de alguna de las tareas utilizadas en la investigación empírica; analizaron cómo cambios leves en el enunciado de tareas provoca soluciones muy diferentes por parte de los alumnos. Borovonik y Bentz argumentaron que la comunicación en clase es similar a la situación experimental y por tanto su análisis mejora la enseñanza real. Señalaron dificultades de comunicación, entre el investigador y el sujeto, con implicaciones educativas para servir de guía para la enseñanza. Entre ellas:
 - reconstrucción del problema y su verbalización
 - tipo de situaciones aleatorias implicadas (tareas artificiales o pseudo reales)
 - espectro limitado de conceptos de probabilidad

- patrones de explicación de las concepciones erróneas Reconstrucción del problema y su verbalización.

y afirmaron que no hay evidencia directa para las conclusiones alcanzadas en las investigaciones empíricas que revisaron, argumentaron que las respuestas obtenidas con una metodología pueden no representar los procesos de pensamiento de los estudiantes (el lenguaje puede confundirlos o porque no saben bastante acerca de la probabilidad o porque hay una interpretación alternativa de los datos que el investigador tiene en cuenta).

- Payne, Bettman y Johnson en 1993 expusieron la necesidad y dificultades de establecer un modelo de desarrollo conceptual probabilístico y las aportaciones posibles. Esta problemática comparte con el trabajo de Anderson (hecho en 1990 que estudia el pensamiento desde el carácter adaptativo) y con la reflexión de Penrose² (1991), la naturaleza no algorítmica de ciertos aspectos del conocimiento.

1.2 Necesidades y dificultades de un modelo de desarrollo conceptual probabilístico.

Después de analizar las investigaciones de tipo empírico que hasta ahora han sido realizadas sobre el proceso enseñanza - aprendizaje de la teoría probabilística, podemos definir los aspectos a evaluar:

- Información sobre la naturaleza y el origen de las dificultades que tienen los estudiantes para comprender y aplicar los conceptos y leyes de la Probabilidad.
- Tareas y actividades de tipo exploratorio para el pensamiento de los estudiantes, pesar de las carencias y límites de la metodología de la investigación utilizada. Después de analizar las investigaciones de tipo empírico que hasta ahora han sido realizadas sobre el proceso enseñanza - aprendizaje de la teoría probabilística, podemos definir los aspectos a evaluar:

y la problemática a la que nos enfrentamos:

- La naturaleza contingente del razonamiento probabilístico del sujeto sobre diferentes actividades y tareas.
- Incertidumbre en relación a las técnicas heurísticas del razonamiento probabilístico.

Por otro lado, los juicios o decisiones que sirven para solucionar un problema no son generados por un algoritmo consistente e invariable y se llaman juicios de probabilidad constructivos. Parece que el sujeto tiene un “repertorio” de conocimientos y métodos para

² Penrose, 1991.

identificar sus preferencias y desarrollar sus creencias, ese repertorio se forma con la experiencia, el conocimiento adquirido y el entrenamiento.

Bajo ese razonamiento, aclaramos que el conocimiento humano no tiene una naturaleza algorítmica porque de ser así no sería posible aceptar algunas verdades matemáticas que no son demostrables. Por lo tanto la forma en la que buscamos solución a un problema de decisión, muestra que la información y estrategias utilizadas para construir preferencias o creencias es altamente contingente, poco predecible y depende de factores de tarea, contexto y diferencias individuales, como conocimiento previo, pericia, forma de asimilar la información y conocimiento. Además las concepciones estocásticas de los alumnos están determinadas en parte por su propia experiencia y en parte por la enseñanza que han recibido. Las habilidades para resolver problemas de azar van desde la carencia de herramienta y comprensión para entender el problema planteado hasta la completa comprensión de sucesos aleatorios.

El hecho de que los procesos de decisión no sean invariantes, complica la búsqueda de un pequeño conjunto de principios subyacentes que pueda describir la conducta de decisión. Por eso es que hay pocos modelos formales de desarrollo en el campo de la Probabilidad y la Estadística. Cuando un modelo intenta incorporar todos los diferentes resultados de los estudios hasta ahora hechos por psicólogos y educadores matemáticos, corre el riesgo de ser tan complicado que resulte de poca o ninguna utilidad para profesores e investigadores. Por otra parte, si no se centra en investigación estocástica y construye un modelo simplificado, pierde importantes perspectivas de contenido teórico y pedagógico. Por eso es importante construir un modelo completo, que no resulte complejo, que vaya siendo ajustado para que tenga utilidad.

De acuerdo a la investigación que realiza Sáenz³ las necesidades de los alumnos pueden darse a partir de los siguientes problemas:

1. El razonamiento probabilístico tiene una naturaleza altamente contingente y los razonamientos de los estudiantes no son invariantes.
2. De forma individual influye la instrucción escolar, el año y el nivel de aptitud matemática.
3. Existen diferentes grados de aceptación intuitiva de las ideas formales probabilísticas: intuitivas, contra intuitivas e internamente contradictorias.
4. Existe un conjunto de ideas en los estudiantes, que logra integrar un sistema de azar y probabilidad en torno a la naturaleza, lenguaje y métrica del azar y asignación de probabilidades.

³ Sáenz, César, 1991

Capítulo 2

Enseñanza de la teoría de la Probabilidad y la Estadística.

Una de las principales razones para enseñar matemáticas es la importancia que tiene como poderoso medio de comunicación y el ofrecer estructuras para pensar. Los primeros enfoques para diseñar planes de estudio, a través de la aritmética y la geometría, educaban el pensamiento causal y determinista. Un enfoque reciente pero igualmente importante es el de los “esfuerzos para domesticar el azar”. La teoría de las probabilidades es un tema difícil para aprender y para enseñar, el concepto de probabilidad no es ni natural ni intuitivo sino que es fruto de una progresiva reflexión y de un prolongado contraste con la realidad. La causalidad es mucho más confortable y el pensamiento lógico mucho más claro pero el azar es una realidad. La probabilidad puede ser estudiada como el enfoque matemático para la cuantificación del azar del mismo modo que la geometría mide distancias. La probabilidad entra en nuestras vidas de manera continua. El azar juega un papel fundamental en la sociedad moderna, por ejemplo: el diseño de seguros y el control de calidad llevan incorporados principios probabilísticos; la medicina, biología, farmacéutica, investigaciones de nuevas tecnologías tienen a los métodos estadísticos como instrumento de toma de decisiones. El uso de las teorías de Probabilidad y Estadística refleja una presencia creciente de la teoría de probabilidades dentro de los programas escolares en la mayoría de los países.

2.1 Elementos básicos de una educación probabilística.

El pensamiento estadístico será tan necesario para ser eficiente como la habilidad para leer y escribir lo es para cualquier persona.

HERBERT GEORGE WELLS

Nos interesa entender las dificultades de aprendizaje sobre la teoría de las probabilidades. Existen tres líneas de investigación:

1. Enfoque historicista: las concepciones de los alumnos participan de las falacias y paradojas surgidas en el desarrollo histórico de la teoría de las probabilidades.

2. Enfoque psicológico: no existe una teoría cognitiva del aprendizaje aplicada a la teoría de las probabilidades.
3. Enfoque didáctico: el problema es más bien de enseñanza, el profesor no necesita tener en cuenta las teorías cognitivas del aprendizaje.

Sin embargo no existe relación entre estos tres enfoques, a pesar de abordar el mismo tema. Tampoco existe relación o influencia de las investigaciones realizadas bajo un enfoque sobre las otras líneas de análisis.

Si estas desconexiones se pueden justificar en la investigación básica donde cada línea es cerrada en su metodología y conceptualización, la falta de relación e influencia dificulta la formulación de implicaciones didácticas y de aprendizaje de la teoría de las probabilidades.

Los investigadores han logrado identificar los factores que influyen en una educación probabilística eficaz. Podemos hacer referencia a los seis que nos parecen más determinantes.

2.1.1 Análisis histórico y epistemológico de la Probabilidad y la Estadística.

El enfoque matemático de la probabilidad surgió hace aproximadamente tres siglos, mucho después del azar. Una fundamentación matemática sólida fue establecida por Kolmogorov en 1933, pero no clarificó su naturaleza ni su lógica completamente. Las explicaciones de por qué no hubo teoría de probabilidad en Occidente antes de Pascal (siglo diecisiete) a pesar de que en todas las civilizaciones se utilizaban aparatos y juegos de azar, son:

1. La existencia de una visión determinista del mundo excluye el pensamiento probabilístico; sin embargo una mejor conjetura es que el pensamiento determinista es esencial para la formación de los conceptos de azar y probabilidad.
2. La utilización de loterías y juegos con dados eran considerados “una buena forma de consultar a los dioses, sin sacerdotes intermediarios”, pero entonces tratar de registrar, medir y predecir el resultado era falta de respeto a lo sagrado. Sin embargo, mucha gente poderosa y culta era aficionada a los juegos de azar.
3. Para concebir leyes de probabilidad es necesaria tecnología del azar, aparatos aleatorios que generen ejemplos empíricos fácilmente comprensibles. Las primeras experiencias aleatorias siempre emplean espacios muestrales equiprobables, sólo después de que el individuo comprende esta noción puede trabajar conceptos en espacios que no sean equiprobables.
4. Una ciencia se desarrolla en respuesta a problemas que ella misma crea y en respuesta a problemas que le son propuestos desde afuera. Sólo muy recientemente la teoría de las probabilidades ha sido capaz de crear sus propios problemas; históricamente, el estímulo vino de otras disciplinas.
 - (a) En el siglo diecisiete el establecimiento de seguros y anualidades impulsaron a la estadística.

- (b) En el siglo diecinueve se creo la biometría para análisis de datos biológicos.
- (c) En el siglo veinte la agricultura y medicina motivaron el desarrollo de la teoría probabilística.
- (d) La matemática occidental no era suficientemente rica y capaz para generar matemática del azar.

De acuerdo a la leyenda, la probabilidad comenzó en 1654 cuando Pascal resolvió dos célebres problemas propuesta por el Caballero de Méré y le envió la solución a Fermat. En 1657, Huygens escribió el primer libro de texto sobre Probabilidad publicado.

Los fundamentos de la Estadística matemática aparecen entre 1890 y 1930 y las técnicas más importantes para el análisis de datos numéricos fueron establecidas en el mismo período. Entre los pioneros encontramos a Pearson, Spearman, Yule, Gosset, Fisher y otros. La teoría de la Estadística surgió de la necesidad de estudiar los fenómenos de masa. La mayor parte de ese conocimiento había estado disponible por casi un siglo desde el tiempo de Laplace y Gauss, quienes comenzaron con el análisis de datos numéricos de manera más sofisticada, aplicados inmediatamente en geodesia y astronomía observacional. Al mismo tiempo que se desarrollaron las matemáticas para la Estadística, de forma complementaria lo hicieron las aplicaciones estadísticas y los estudios sobre la teoría de la Probabilidad.

La Probabilidad sin embargo, se vio como una importante área de desarrollo matemático desde sus inicios, comprendida como un enfoque puramente técnico y los primeros logros fueron realmente impresionantes en los tiempos de Montmort y De Moivre. De aquellos que trabajaban en la teoría de los errores, como Augustin Cauchy y James Ivory quienes aceptaron el método de mínimos cuadrados pero se negaron a quedar satisfechos con los supuestos probabilísticos. El mismo Laplace estaba inspirado por sus ambiciones de marcar claramente el conocimiento e insistía en que cada uno de los eventos que ocurre está determinado por causas preexistentes, sin embargo, nuestro conocimiento del resultado de cada evento es ciertamente sujeto de error. La aplicación estadística presentó controversia en las leyes de termodinámica y la introducción de los conceptos probabilísticos en la física causó incertidumbre. Desde el enfoque de las ciencias sociales, los métodos estadísticos se convirtieron en sinónimo de cuantificación y mientras unos cuantos se mostraron escépticos de las aplicaciones como herramienta de la sociología, muchos otros creyeron en ella para dar exactitud y certeza científica a sus estudios. Fue en manos de Quetelet y sus seguidores, que la Estadística se convirtió en ciencia social. Finalmente podemos decir que fueron las aplicaciones las que llevaron el avance de la teoría estadística, ya que la estadística “pura” fue planteada a partir de las aplicaciones. Las técnicas estadísticas y aplicaciones creadas por Lexis, Edgeworth, Galton, Pearson y sus sucesores, reflejan claramente los problemas particulares a los que fueron aplicados y el contexto ideológico y actitud filosófica.

Durante el siglo diecinueve, por Estadística podía entenderse una disciplina empírica, cuantitativa y social. Antes de eso, era una metodología mal definida de estados y condiciones. El término fue llevado a las Matemáticas hasta el siglo veinte. Obtuvo un amplio significado, que podía ser utilizado para referirse a fenómenos de masas,

principalmente por analogía con su objeto social. Desde mediados del siglo diecinueve, se había dedicado a investigar fenómenos colectivos bajo “un análisis diferente”, con énfasis en el razonamiento sobre eventos en gran número sin la problemática de abordarlos de manera individual.

Hasta el siglo diecinueve el estudio de la teoría de la Probabilidad era poco complicado y fue hasta después que recibió jerarquía como rama de las Matemáticas puras. La teoría de la probabilidad cambió de ser conocida como “doctrina de las oportunidades o suertes” a “cálculo de probabilidades” hasta el siglo dieciocho. A mediados del siglo diecinueve se adoptó el concepto de “determinístico”, un significado diferente a la teoría donde domina el destino, donde la libertad del hombre es nula. En gran parte, como resultado de discusión estadística, asumió su significado moderno y más general (durante las décadas de 1850 y 1860) mediante el cual, el futuro del mundo está sostenido para ser determinado de forma absoluta por su configuración actual. Este enfoque es diferente al fatalismo porque está regido por las leyes naturales de causa y efecto, en lugar de descansar sobre una fuerza trascendental. La frase “ley de los grandes números” es de Poisson del año 1835, él hizo referencia a la proposición de que la frecuencia de eventos debe, a largo plazo, converger a la media de sus probabilidades, cuando esas probabilidades oscilan aleatoriamente alrededor de algún valor.

Existen, además un gran número de términos para nombrar a la distribución normal, pero afortunadamente, existe poca oportunidad para la confusión. Durante el siglo diecinueve, frases como curva de error fue sustituida por el término distribución gaussiana (a finales del siglo diecinueve) y ley normal, utilizada en 1894 por Parsoll, así como el término desviación estándar. El estudio de la variación dentro de diferentes campos de estudio, es la fuente directa de la Estadística matemática moderna, que de hecho, avanzó gracias a los estudios sobre genética hechos alrededor de 1900.

Lo que es más importante, epistemológicamente¹ hablando, es que por primera vez el concepto de probabilidad encontró una aplicación en las ciencias exactas. El estudio de juegos de azar ayudó a clarificar el concepto de Probabilidad. Estos se convirtieron en modelos mediante lo cuales los teoremas de Probabilidad fueron explicados. Incluso el día de hoy los juegos de azar son significativos en los cálculos matemáticos de probabilidad porque representan aplicaciones comprensibles de las leyes probabilísticas.

Bajo el enfoque epistemológico de la probabilidad existen dos escuelas de pensamiento.

1. la probabilidad conferida a una hipótesis por algún tipo de evidencia es una relación lógica entre dos proposiciones (Jeffreys 1933).
2. la probabilidad subjetiva donde cada quien asigna una proposición particular dependiendo de un juicio personal (De Finetti).

¹ La Epistemología es la rama de la filosofía que estudia la producción y validación del conocimiento científico.

En el enfoque aleatorio de la Probabilidad hay una familia de teorías estadísticas centradas en el estudio de la tendencia, que muestran algunos fenómenos experimentales o naturales que producen frecuencias estables a largo plazo en ensayos repetidos.

Para el caso de Jacques Bernoulli (1654-1705):

- Subjetivista, para algunos, porque introdujo el término de probabilidad subjetiva al reflexionar sobre la naturaleza de la probabilidad.
- Lógico, para unos cuantos, por anticipar la teoría de probabilidades lógicas.
- Frecuentista, para otros, por ser el precursor de la ley de los grandes números.

Puede decirse que se sintió atraído por cada idea de probabilidad, pero la verdad cada idea es una interpretación de la probabilidad. Durante el Renacimiento la probabilidad era un atributo de opinión y se contraponía al conocimiento adquirido por demostración, así surgió la diferencia entre “altas ciencias” y “bajas ciencias” las primeras buscaban verdades absolutas y las otras producen opiniones basadas en evidencia empírica y así la probabilidad se clasificó en la categoría de ciencia baja.

Antes del siglo diecisiete se consideró a la probabilidad como una materia de aprobación más que un cálculo matemático. La idea de evidencia experimental ganó respetabilidad en el siglo diecisiete gracias a Pascal y Huygens.

Otra característica, que puede haber sido un obstáculo, es que ante una situación de incertidumbre el hombre no puede conseguir alguna predicción definitiva y sólo le queda especular o partir de patrones de resultados previos o confiar en la divina voluntad.

Según los estudios de génesis psicológica de la idea de azar, el concepto de probabilidad emerge muy tarde en el desarrollo intelectual del niño. El niño necesita un pensamiento causal desarrollado y necesita agregar los conceptos de la proporcionalidad y de la combinatoria para comprender y aplicar las leyes formales de la probabilidad.

2.1.2 La existencia de conocimiento previo de carácter específico.

Sólo cuando existe en la conciencia del sujeto algún concepto relevante para la información nueva, el aprendizaje es significativo. Lo que se sabe (ideas, creencias, intuiciones, estrategias de razonamiento, procedimientos, conceptos formales, etc.) es base de lo que se “puede” aprender. Este conocimiento puede ser erróneo, incompleto científicamente hablando, pero funcional y se construye en la experiencia cotidiana y permanece por tener utilidad en la vida diaria.

Los conceptos probabilísticos pueden ser de tres tipos: intuitivos, internamente contradictorios y contra intuitivos. Los intuitivos no causarán dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje; los internamente contradictorios causarán dificultades mediante una

buena estrategia didáctica y son los contra intuitivos los que definitivamente causarán mayores dificultades de aprendizaje.

Es importante que el alumno sea conciente de las ideas que constituyen su pensamiento y de las limitaciones del mismo, así como el profesor que debe conocer los conocimientos intuitivos de sus alumnos y a partir de ellos para que el aprendizaje sea significativo.

2.1.3 Razonamiento probabilístico activado en situaciones engañosas.

La gente se basa en un conjunto de principios heurísticos (representatividad, accesibilidad y ajuste, entre otros) para convertir las tareas complejas de evaluar y predecir probabilidades en operaciones más simples. La confianza en esos principios heurísticos no es algo único de los sujetos inexpertos, también los expertos son propensos a razonamientos engañosos cuando ejercitan el pensamiento intuitivo, y esos principios heurísticos son los que engañan al razonamiento probabilístico. Para evitar esa clase de confusiones es necesario:

1. Enseñar las reglas estadísticas básicas porque esas no se aprenden con la experiencia y el ejercicio, a pesar que todos están expuestos a ellas a lo largo de su vida.
2. Conocer las ideas intuitivas de los estudiantes para conocer sus principios de razonamiento.

Sólo la enseñanza hace posible el enfrentamiento de los alumnos con situaciones engañosas.

2.1.4 El desarrollo de las operaciones lógico - matemáticas del conocimiento.

Una creencia frecuente es que los sujetos con un nivel de desarrollo lógico-formal tienen un rendimiento elevado en el área matemática. Sin embargo, sólo un bajo porcentaje de adolescentes alcanza el nivel formal completo. Es necesario fomentar el desarrollo de operaciones generales de procesamiento para la asimilación de conceptos matemáticos. Esto quiere decir: brindar los elementos para enfrentarse con la realidad y que permita construir estrategias particulares para enfrentarse a los problemas que les planteen.

2.1.5 Diferencias individuales.

¿Por qué algunos alumnos tienen mejor desempeño que otros? Algunos contextos de tarea y actividad serán más atractivos para algunos y no lo serán para otros. Ciertos alumnos, a pesar de que encuentren interesante el contexto, no serán capaces de resolver el problema, los mejor capacitados podrán utilizar diferentes métodos de resolución. Son esas diferencias las que deben valorarse en el proceso de aprendizaje.

La elección del método de solución depende de las capacidades, preferencias, actitudes y motivación. De acuerdo a Sáenz (1995) la variable que más influye en el aprendizaje, es la existencia de instrucción de probabilidades.

2.1.6 El dominio afectivo.

De acuerdo a algunos investigadores los factores afectivos juegan un papel importante en el proceso enseñanza-aprendizaje. El papel del afecto parece tener importancia en el desarrollo de destrezas del pensamiento. Aunque las teorías de educación matemática no han puesto énfasis en el papel del afecto.

2.2 Un enfoque cuasi empírico para el cambio conceptual.

El método de enseñanza sobre la teoría de probabilidades y estadística deberá tener las siguientes características.

1. Basarse en una rigurosa fundamentación epistemológica.
2. Contener estrategias de enseñanza dirigidas al cambio conceptual y al desarrollo del pensamiento intuitivo correcto.
3. Incorporar diagnóstico y metodología para eliminar errores en el razonamiento probabilístico.
4. Dar entrenamiento específico en estrategias cognitivas.
5. Considerar las diferencias individuales de los alumnos.

El enfoque tradicional de la enseñanza se basa en el carácter hipotético-deductivo de la teoría, a partir de ahí propone una enseñanza que se ajusta a la estructura lógica de la materia, de manera lineal. Permanece a pesar de los malos resultados porque:

1. Existe profunda coherencia entre la epistemología y los métodos de enseñanza.

Los profesores están identificados por educación y tradición y por tanto encuentran naturales los métodos típicos y no consideran posibles alternativas para los contenidos propuestos. A veces, los enfoques didácticos pretenden superar bajos rendimientos con una serie de innovaciones metodológicas (uso de computadoras, resolución de problemas, etc.), que tratan de tener en cuenta el proceso de aprendizaje del alumno. Pero estas innovaciones fracasan porque las nuevas propuestas se limitan a ser meras reformas puntuales de las actividades tradicionales mas no cuestionan la naturaleza hipotética-deductiva de la teoría. Las nuevas propuestas incluyen actividades de aula que remarcan la importancia de hacer explícitas las conexiones matemáticas, sin embargo cuando los profesores se enfrentan con el desajuste epistemológico-didáctico y tienen dificultades en el proceso educativo vuelven a las actividades tradicionales.

2.3 Recomendaciones adicionales.

A continuación se presentan aspectos básicos que deben respetarse en el proceso de enseñanza de las Matemáticas. Por lo tanto también funcionan como lineamientos básicos en la enseñanza de la Probabilidad y la Estadística:

- Pensar el significado de las palabras: Crear, pensar, ajustar y trabajar con definiciones es la mayor parte de las matemáticas. Una definición puede ser difícil de elaborar porque debe incluir todos los posibles casos de la cuestión por definir sin permitir agregar algo extra. Tratar de que los alumnos hagan sus definiciones puede ayudar a entender el grado de dificultad. Lo importante es aprender a utilizar las palabras, estar atentos a ellas, expresarse claramente. Así, es posible pensar y jugar sobre la definición. La forma no matemática de escribir de los alumnos se debe al uso inadecuado de las palabras, lo que dificulta la escritura y la vuelve muchas veces incomprensible. Las definiciones matemáticas no deben ser demasiado exclusivas, ni inclusivas para hacer que las categorías y definiciones sean útiles. También deben ser sujetos de prueba. Una buena definición facilita comprobar si un objeto se ajusta a ella. Un buen ejercicio para aclarar el pensamiento y lograr que los alumnos puedan expresarse correctamente es inventar definiciones que capturen las instancias correctas, excluyan al resto y que puedan ser examinadas, así los alumnos tienen mayor asimilación que cuando sólo usan definiciones. Para evitar ambigüedad nos restringimos al uso de palabras que todos conozcan en el contexto matemático. De esta forma el conocimiento previo va ligado a todo lo que esta en construcción.
- Justificar, reclamar y probar conjeturas: Si no examinamos que es lo que los alumnos van aprendiendo, el conocimiento permanece como un conjunto de hechos memorizados y patrones: pequeñas cajas negras donde las matemáticas permanecen como un misterio. Cuando los patrones son visibles y son suficientemente interesantes, los alumnos encuentran altamente satisfactorio explicar cómo funciona el patrón y por qué las cosas funcionan en la manera en que lo hacen. Hacer una demostración matemática depende enteramente de la lógica aplicada a verdades previamente acordadas, mientras que fuera de ella, la prueba requiere evidencia, datos numéricos y precedentes. La formación matemática no debe reemplazar la lógica de los alumnos, sino aumentarla, es fundamental que necesiten desarrollar un pensamiento inquisitivo, buscar razones, probar una cadena lógica de ellas, sin dejar de lado la explicación y un sano escepticismo que les ayude a encontrar contraejemplos.
- Analizando respuestas, problemas y métodos: Revisar una respuesta tiene un amplio significado, es buscar el ejercicio de la razón implícito en una respuesta. Cuando el alumno ha encontrado, justificado y dado sentido a su respuesta, es el momento de retroceder y buscar cómo el problema se adapta a un hecho mucho más grande. Involucrar al alumno en las preguntas de tipo inquisitivo, planteando diferentes escenarios, es una parte fundamental del proceso enseñanza - aprendizaje.

Capítulo 3

El programa de estudios de la SEP para bachillerato.

El bachillerato general tiene entre sus propósitos, cubrir las necesidades académicas de los jóvenes en el marco del contexto actual, al proporcionarles una “formación básica” que les ayude a comprender e incidir en su entorno de manera propositiva y fundamentada; una “formación para el trabajo” que los prepare para insertarse en una cultura laboral a través del desarrollo de capacidades prácticas y actitudes positivas que promuevan su participación social, el autoempleo, el empleo formal y finalmente, considerando las aspiraciones personales y vocacionales de los estudiante, se les ofrece una “formación propedéutica” que fortalezca sus conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes preparándolos para su ingreso a la educación superior.

3.1 ¿Por qué aprender Probabilidad y Estadística en el bachillerato?

El propósito de los programas de estudio para bachillerato es enlazar a los alumnos con la educación superior; haciendo énfasis en una profundización de los conocimientos que favorezcan el manejo pluridisciplinario e interdisciplinario, de tal modo que se logre una mejor incorporación a los estudios superiores, independientemente del área de conocimiento elegida por el estudiante. Para la materia de Probabilidad y Estadística, el objetivo es formar al alumno en el manejo de los datos y el cálculo de las probabilidades como un fundamento para comprender los diversos fenómenos o situaciones que existen en: la economía, la administración e inclusive otros campos profesionales tales como la sociología, la medicina, la ingeniería, el diseño, la química, la física y en general en cualquier otra actividad.

Para dicha formación propedéutica, la materia de Probabilidad y Estadística, considera la necesidad casi instintiva del ser humano de tomar en cuenta datos de diversos hechos que por situaciones cotidianas resultan esenciales en su vida, por otra parte, la necesidad de convivencia y organización entre los individuos nos lleva a considerar que es difícil imaginar un organismo social sin datos con propósitos estadísticos. Se tienen registros del uso de la estadística en un nivel rudimentario por organizaciones sociales antiguas como, los egipcios, los chinos, los israelitas, los aztecas, por mencionar algunos, con diferentes propósitos: registrar los movimientos de la población mediante censos, o levantar un

recuento agrícola, industrial y comercial como lo hicieron los chinos: de esta manera podemos decir que para los gobernantes obtener el número de súbditos y conocer su riqueza se convirtió en una aritmética estatal, con fines de recaudación de impuestos o para presupuestar la guerra.

Los métodos estadísticos han demostrado ser útiles en una amplia gama de disciplinas: sociología, mercadotecnia, economía, administración, ingeniería, ya sea para determinar características de una población y definir sus tendencias; decidir si la venta de un producto será exitosa, predecir variables económicas, contabilizar las ventas y preverlas; controlar la variabilidad en los procesos tanto productivos como administrativos e inclusive pronosticar resultados en su deporte favorito.

En este sentido, la importancia de la Estadística se aprecia desde épocas ancestrales, ésta se ha desarrollado y actualmente se clasifica en dos tipos, la estadística descriptiva y la estadística inferencial, que desempeñan funciones distintas, pero complementarias en el análisis estadístico. La estadística descriptiva se refiere al resumen y descripción de los datos y el análisis se limita a los datos coleccionados, sin realizar inferencia alguna o generalizaciones acerca de la totalidad de donde provienen dichos datos. En cambio, la estadística inferencial trata de los procesos que van más allá de la información o los datos mismos, al permitir hacer predicciones acerca de un todo o tomar decisiones al basarnos en la información contenida en una muestra; este proceso es apoyado por la Probabilidad, medio por el cual se realizan predicciones acerca de la población estudiada, a partir de la información obtenida.

3.2 Enfoque del programa de estudios.

Cabe resaltar que el enfoque metodológico del programa, corresponde al que plantea la reforma curricular del bachillerato general, es decir, una educación encaminada a desarrollar aprendizaje significativo, entendiéndose como un proceso individual y subjetivo que debe estar contextualizado para recuperar su sentido objetivo el cual debe promoverse de manera socializada para intercambiar y validar significados que permitan desarrollar un trabajo en colaboración. Tiene un componente afectivo, donde se mezclan factores que influyen en el aprendizaje como el autoconocimiento, metas y motivación, que debe partir de los conocimientos previos del estudiante y de su nivel de desarrollo, tomando en cuenta las etapas: cognitiva, emocional y social para establecer vínculos significativos entre las estructuras cognitivas y socio-afectivas del estudiante, así como las del contenido por aprender. Por lo anterior, se requiere que en el proceso de enseñanza-aprendizaje el profesor cumpla sus funciones como mediador entre la cultura y el individuo; en cuanto al estudiante, se propone que no sea solamente un receptor de información sino que interactúe con los contenidos programáticos y logre desarrollar aprendizajes significativos que lo vinculen con su diario acontecer.

El programa tiene un enfoque teórico-práctico, orientado a que el alumno proponga sus conclusiones y visualice la forma en que lo aprendido se aplica en su vida cotidiana y

escolar, quedando demostrada su utilidad; por ello, las estrategias de enseñanza, que son el conjunto de actividades y técnicas que aplica el docente para facilitar el aprendizaje de los alumnos, están diseñadas en función de situaciones de interés para los alumnos, y las estrategias de aprendizaje, que corresponden al conjunto de actividades que realiza el estudiante para procesar información pertenecen a la vida cotidiana, los ejercicios deben permitir el fácil acceso a los datos para aplicar los conocimientos adquiridos. El fácil acceso a los datos sugiere ejercicios referentes a obtener datos, por ejemplo, de sus propios compañeros: edades, pesos, número de amigos, tiempo de traslado de casa a la escuela, gasto diario, ejercicios de sus actividades recreativas, resultados en el fútbol, básquetbol, fútbol americano, así como situaciones ambientales como cantidad de basura generado por casa, cantidad de basura de materiales inorgánicos, etc.

Se recomienda que la participación del profesor como expositor sea mínima, y ocupe la mayor parte de su tiempo para guiar los trabajos que elaboran los alumnos, ya sean individuales o en grupos, fomentando que el alumno participe activamente en las actividades propuestas y construya su aprendizaje. Cabe mencionar que las actividades descritas aquí son propuestas, corresponde a cada profesor decidir con base en las necesidades de sus alumnos, su conocimiento, recursos y sobre todo creatividad e imaginación el desarrollo de sus actividades. Cabe resaltar que el enfoque metodológico del programa, corresponde al que plantea la reforma curricular del bachillerato general, es decir, una educación encaminada a desarrollar aprendizaje significativo, entendiéndose como un proceso individual y subjetivo que debe estar contextualizado para recuperar su sentido objetivo que debe promoverse de manera socializada para intercambiar y validar significados que permitan desarrollar un trabajo en colaboración. Tiene un componente afectivo donde se mezclan factores que influyen en el aprendizaje como el autoconocimiento, metas y motivación, que debe partir de los conocimientos previos del estudiante y de su nivel de desarrollo, tomando en cuenta las etapas: cognitiva, emocional y social para establecer vínculos significativos entre las estructuras cognitivas y socio-afectivas del estudiante así como las del contenido por aprender. Por lo anterior, se requiere que en el proceso de enseñanza-aprendizaje el profesor cumpla sus funciones como mediador entre la cultura y el individuo; en cuanto al estudiante, se propone que no sea solamente un receptor de información sino que interactúe con los contenidos programáticos y logre desarrollar aprendizajes significativos que lo vinculen con su diario acontecer.

El programa tiene un enfoque teórico-práctico, orientado a que el alumno proponga sus conclusiones y visualice la forma en que lo aprendido se aplica en su vida cotidiana y escolar, quedando demostrada su utilidad; por ello las estrategias de enseñanza, que son el conjunto de actividades y técnicas que aplica el docente para facilitar el aprendizaje de los alumnos, están diseñadas en función de situaciones de interés para los alumnos, y las estrategias de aprendizaje, que corresponden al conjunto de actividades que realiza el estudiante para procesar información pertenecen a la vida cotidiana, los ejercicios deben permitir el fácil acceso a los datos para aplicar los conocimientos adquiridos. El fácil acceso a los datos sugiere ejercicios referentes a obtener datos, por ejemplo, de sus propios compañeros: edades, pesos, número de amigos, tiempo de traslado de casa a la escuela, gasto diario, ejercicios de sus actividades recreativas, resultados en el fútbol, básquetbol, fútbol americano, así como situaciones ambientales como cantidad de basura generado por casa, cantidad de basura de materiales inorgánicos, etc.

Se recomienda que la participación del profesor como expositor sea mínima, y ocupe la mayor parte de su tiempo para guiar los trabajos que elaboran los alumnos, ya sean individuales o en grupos de trabajo. Fomentando que el alumno participe activamente en las actividades propuestas y construya su aprendizaje. Cabe mencionar que las actividades descritas aquí son propuestas, corresponde a cada profesor decidir con base en las necesidades de sus alumnos, su conocimiento, recursos y sobre todo creatividad e imaginación el desarrollo de sus actividades.

3.3 Objetivo del programa de estudios.

De acuerdo con los propósitos de la reforma curricular, la formación del estudiante no puede delimitarse únicamente a la adquisición de conocimientos, de manera memorística o “enciclopédica”, es por eso que se han establecido siete Líneas de Orientación Curricular, con el objetivo de desarrollar las capacidades básicas que fortalezcan las estructuras de pensamiento y acción esenciales para la formación integral del estudiante, lográndose a través de la selección de actividades didácticas que se manejarían en diversos momentos acordes a la asignatura. Las capacidades básicas son:

1. **Habilidades de pensamiento:** estas habilidades se presentan al establecer conceptos con palabras, presentar ejemplos y argumentar su selección, relacionándolo con lo aprendido: comparar conceptos, jerarquizar u ordenar información; razonamiento lógico y analógico al plantear situaciones de su propio interés para aplicar los conocimientos y presentar resultados y conclusiones.
2. **Habilidades de comunicación:** el alumno debe de exponer, explicar, comentar y discutir los resultados obtenidos así como argumentar sus conclusiones, en trabajos individuales y en grupo, de esta forma también el alumno comunica el tema que ha seleccionado no solamente en forma oral o escrita, sino también a través del uso del lenguaje gráfico.
3. **Metodología:** está se aplica en los trabajos presentados, el profesor orienta sobre la forma en que se aplica el conocimiento de los diferentes temas y el alumno con base en esta experiencia lo traslada al trabajo escolar requerido, a través de ejercicios referentes a aplicar distintas técnicas para obtener, recolectar, organizar, medir y representar datos y resultados; utilizando métodos de muestreo, encuestas, censos; distribución de frecuencias para datos agrupados y sin agrupar; la representación tabular y gráfica, con simbología y diagramas, por ejemplo el árbol de probabilidad; las técnicas de conteo; la aplicación de medidas de tendencia central y variabilidad en el análisis descriptivo e inferencial de los datos; el cálculo de probabilidades, entre las más destacadas.
4. **Calidad:** se entiende como el creciente perfeccionamiento en el proceso educativo, al fomentar en el alumno una habilidad permanente para trabajar y actuar para mejorar el desempeño en todos los ámbitos. El profesor que imparte la materia tiene como compromiso solicitar a sus alumnos trabajos de calidad, basándose en criterios objetivos, y proponer al alumno el ejercicio constante de la auto evaluación

para que reconozca sus errores, sus áreas de oportunidad, y se motive a superarse a sí mismo, con el propósito de ir alcanzando las metas que él mismo se plantee.

5. Valores: son el punto de partida para la realización armónica del individuo, por ello es importante promover y facilitar la adquisición y el fortalecimiento de actitudes con el fin de asumir y vivenciar la lealtad, libertad, honestidad, respeto, disciplina y responsabilidad, para lograr el enriquecimiento de nuestros alumnos. En toda sesión se indican los valores que se pretende cultivar y que están inmersos en el desarrollo de las actividades individuales y de grupo, ya que se interactúa con los compañeros en todo momento, se discute y comentan los trabajos escolares.
6. Educación ambiental: se aplica generalmente en aquellas actividades que buscan que el alumno adopte una actitud ante el medio ambiente, fomentándole una conciencia de corresponsabilidad entre las acciones que contribuyen a la conservación del equilibrio ecológico y el uso de los recursos naturales. En toda sesión se establecen las reglas del ambiente, esto es, la limpieza, el orden en el salón de clase y la disciplina para el logro de los objetivos. El orden, la limpieza y disciplina son fundamentales en toda actividad humana.
7. Democracia y derechos humanos: se promueve el respeto, la tolerancia, la capacidad de solidarizarse frente a las necesidades de los otros, por medio del trabajo grupal en exposiciones, y la libertad de tratar los temas que se consideran de interés. Esto se aplica generalmente en aquellas actividades que se relacionan con el trabajo cooperativo de los alumnos y también en aquellas situaciones cotidianas o extraordinarias en las cuales se presente alguna problemática relacionada con la equidad de género, las capacidades diferentes, la tolerancia, el respeto y la solidaridad, donde el docente promueva alguna dinámica de grupo a favor de su incorporación.

3.4 Estructura del programa de estudios.

En virtud de la importancia de la Probabilidad y Estadística, se han considerado los programas de Probabilidad y Estadística I y II, para el quinto y sexto semestre de bachillerato general en el componente de formación propedéutica, los cuales tienen como antecedentes directos los cuatro cursos de matemáticas del componente de formación básica.

3.4.1 Conceptos fundamentales.

La asignatura de Probabilidad y Estadística I, introduce al alumno al conocimiento y necesidad de interpretar datos y el cálculo de sus posibilidades de ocurrencia. Está estructurada en las siguientes unidades: Recolección de datos, que considera los términos básicos utilizados en la estadística y la forma en que se recolectan a partir de una necesidad específica. Representación tabular y gráfica, muestra la forma en que se pueden organizar los datos para que su comprensión sea mayor. Medidas de tendencia central y variabilidad, expone cómo los datos se caracterizan por medio de dos tipos de medidas: de tendencia central y de variabilidad, las cuales nos indican su comportamiento, y finalmente

Probabilidad, donde a partir de elementos básicos de la teoría de conjuntos y probabilidades, se realizan el cálculo de contingencias, eventuales, sucesos, casos, etc.

Estos temas permitirán al estudiante tener acceso al mundo significativo de los datos: la forma de recolectarlos, organizarlos, medirlos, representarlos y determinar la posibilidad de que sucedan, de tal manera que con la información generada lleve a cabo un análisis, obtenga conclusiones y se prepare para la predicción, es decir, la inferencia estadística.

3.4.2 Conexión entre los contenidos.

El contenido del programa es:

- Unidad I: Recolección de datos.
- Unidad II: Representación tabular y gráfica.
- Unidad III: Medidas de tendencia central y variabilidad.
- Unidad IV: Probabilidad.

El programa desarrollado por la SEP, divide al curso en dos bloques principales, el primero que aborda es el de Estadística. El objetivo es que el estudiante tenga la capacidad de emplear las herramientas de Probabilidad y Estadística en situaciones de su vida cotidiana o escolar, tras conocer el comportamiento de un conjunto de datos, así como sus posibilidades de ocurrencia y el análisis de los resultados obtenidos en una situación de su interés; mediante la recolección de datos, la representación y medición de los mismos y el cálculo de probabilidades mostrando una actitud reflexiva y crítica.

3.4.3 Bibliografía propuesta.

El programa de estudios que tiene la SEP para impartir la materia de Probabilidad y Estadística hace referencia a la bibliografía al final de cada unidad. Aparece una leyenda (en total cuatro veces en el documento) que dice: “Consultar el documento “Títulos sugeridos para los programas de estudio de la Reforma Curricular” del Componente de Formación Propedéutico, en la siguiente página de Internet: <http://www.dgb.sep.gob.mx/>”.

Sin embargo realizando la página de Internet indicada no aparece ninguna referencia bibliográfica.

3.5 Observaciones del programa de estudios.

El programa de estudios que este documento revisa es el de la materia de Probabilidad y Estadística 1 que aparece como componente de Formación Propedéutica para el quinto semestre del bachillerato. El curso está organizado en 4 unidades:

1. Recolección de datos.
2. Representación tabular y gráfica.
3. Medidas de tendencia central y variabilidad.
4. Probabilidad.

Visto de otra forma el curso está dividido en dos partes: la primera parte consta de tres unidades dedicadas a Estadística descriptiva y la segunda que consta de una unidad es una introducción a la teoría de la Probabilidad. El enfoque que da el programa de estudios para el estudio de la estadística es predominantemente práctico; la conexión entre los temas y el orden, indican que busca desarrollar las habilidades para:

- Analizar un conjunto de datos e interpretarlos.
- Entender y construir gráficas y tablas.
- Obtener las medidas de tendencia central y dispersión de ese conjunto de datos.

Los temas incluidos en la primera parte (Estadística descriptiva) se muestran en el siguiente esquema.

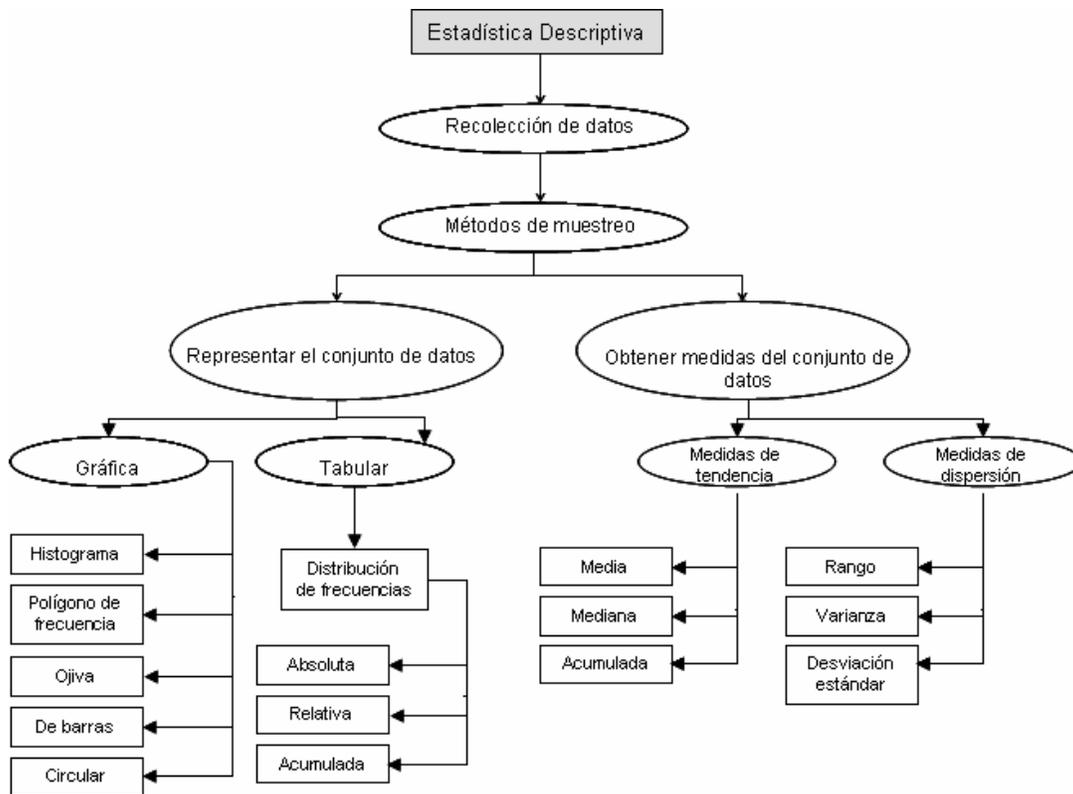


Figura 3.1: Estadística Descriptiva. Fuente: [http://www.dgb. sep.gob.mx/](http://www.dgb.sep.gob.mx/)

Algunas observaciones son que el programa de estudios propuesto:

- No profundiza en el desarrollo de la teoría de la Estadística matemática.
- Utiliza fórmulas y enseña metodologías para la construcción de las tablas.
- Los temas sobre estadística paramétrica y no paramétrica no están incluidos.

Así, que la utilidad e importancia de las pruebas de hipótesis, tan usadas actualmente en las ciencias médico - biológicas, económicas y sociales no son mostradas.

Por otro lado los temas abordados en la segunda parte del curso, que corresponden a la teoría de Probabilidad son:

- Nociones básicas de la teoría probabilística.
- Introducción a la teoría de conjuntos.
- Técnicas de conteo y cálculo combinatorio.
- Cálculo de las probabilidades de eventos simples.

A continuación se muestra un esquema con los temas incluidos en el programa de estudios.

Los temas que siguen en el estudio de la teoría de la Probabilidad: probabilidad condicional, teorema de Bayes, variables aleatorias, probabilidades conjuntas y análisis de datos bivariados; aparecen en el programa de estudios de la materia Probabilidad y Estadística II, indicada para el sexto semestre del bachillerato.

Cabe señalar que el programa de estudios fue recientemente modificado en el semestre en curso 2007-1. Antes de este semestre la materia de Probabilidad y Estadística incluía todos los temas que ahora están distribuidos en las materias de Probabilidad y Estadística 1 y Probabilidad y Estadística II.

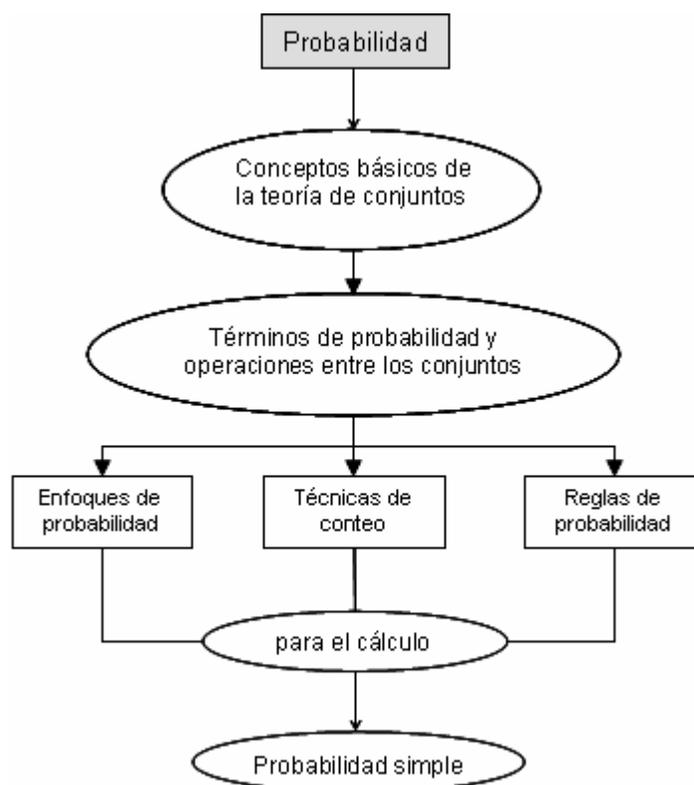


Figura 3.2: Probabilidad. Fuente: <http://www.dgb.sep.gob.mx/>

Capítulo 4

Una propuesta para el programa de estudios y recomendaciones.

En las décadas de los años sesenta y setenta, durante el siglo veinte, hubo gran actividad para la reforma de los programas de estudios de Matemáticas, sin embargo trascendió sin hacer alguna modificación o dejar un verdadero cambio.

Dentro de los esquemas de educación no podemos ignorar las estructuras sociales y económicas de la sociedad, como el desarrollo de nuevas tecnologías y el avance del conocimiento. Cada vez que se elabora un programa de estudios se evalúa el desarrollo, desempeño y resultados y se da mayor atención a aquellos aspectos que faciliten el aprendizaje, se estudian los procesos de enseñanza - aprendizaje para lograr un método eficiente. Finalmente, mediante una actitud crítica durante el período de reforma se observan elementos claves que necesitan más atención en los cambios de propósitos y objetivos. A continuación se enumeran esos elementos:

1. Definición de currículo. Es difícil definir qué es un programa de estudios o currículo y es necesario entender que refleja una limitada visión si sólo se entiende como un conjunto de texto. No es posible hablar de un sólo currículo porque depende de cada profesor, de los métodos de enseñanza, de la comprensión, la interpretación de los objetivos y textos, las técnicas de motivación, material de apoyo y personalidad; no sólo del profesor sino del alumno.
2. Presiones para desarrollar un currículo. Para implementar una innovación en los sistemas de enseñanza, es necesario poder dar respuesta a las presiones relevantes. Algunas de esas presiones son:
 - a. Sociales y políticas La educación es constantemente un medio a través del cual los sistemas de valores existentes pueden cambiar. Ocasionalmente las demandas de la sociedad pueden ser bastante específicas para preparar alumnos que puedan desempeñar tareas específicas.
 - b. Matemáticas Las muchas aplicaciones y necesidades de cuantificación en diferentes disciplinas como: economía, geografía, biología, demografía. Estas han permitido el gran avance que ha logrado el área de las Matemáticas.
 - c. Educación Las presiones provocadas por el quehacer psicopedagógico: las aplicaciones, estudios, las nuevas teorías educacionales o el desarrollo del trabajo individual.
 - d. Desarrollar un nuevo currículo es emocionante, estimulante y atrae a otros a buscar nuevas formas para problemas aparentemente difíciles, lo importante es mantenerlo como un proceso dinámico.

3. Barreras para el desarrollo de currículos. En ocasiones los cambios o innovaciones tienen repercusiones directas sobre la enseñanza, por eso deben llevarse a cabo con precaución y sin miedo. Entre esas barreras podemos encontrar:
 - a. *Barreras de valor* Las diferencias culturales y sobre todo las de formación matemática, dificultan la enseñanza. Además de las distintas percepciones sobre lo que es necesario enseñar y enfatizar.
 - b. *Barreras de poder* Establecer un esquema de enseñanza es una forma de obtener cierta jerarquía o autoridad o al menos así ha sido considerado, por eso a veces los organismos reguladores no son eficientes.
 - c. *Barreras prácticas* No es sencillo llevar a cabo, las modificaciones hechas a los programas, representan gastos: cursos de actualización al grupo docente y los nuevos libros de texto.
 - d. *Barreras psicológicas* La gente teme al cambio, se siente aparentemente cómoda y segura haciendo lo que hace.
4. Tipos de desarrollo de currículos. Es necesario analizar la población en la que habrán de aplicarse las modificaciones curriculares. Por ejemplo, en un sistema centralizado las ideas y trabajo de desarrollo están concentrados, sólo un pequeño grupo de personas participa. Además el nivel de enseñanza donde se aplican las modificaciones, los profesores del nivel básico algunas veces carecen de conocimientos profundos, justificaciones y dominio matemático; por ello las nuevas técnicas no resultan tan exitosas.
5. Estrategias a emplear. Es fundamental intentar cambiar actitudes, habilidades y valores del sistema educativo y los que están dentro de él. Quizá entre las estrategias más utilizadas para impulsar nuevas formas de sistemas educativos está: permitir la opinión y discusión en la construcción de los nuevos programas e impulsar los incentivos económicos para los profesores que pongan en práctica nuevas estrategias. Es importante hacer sentir al maestro como un individuo con libertad y autoridad en la forma de enseñanza, para poder incorporar nuevas ideas, técnicas y estrategias.
6. ¿Quiénes están involucrados? Para llevar a cabo un desarrollo curricular debemos considerar las opiniones de los muchos y diferentes grupos que tienen una opinión al respecto y los grupos cuyas exigencias educativas se ven afectadas. También es necesario ponderar las opiniones y evaluar el peso de cada grupo.
7. Para poder llevar a cabo un adecuado y exitoso desarrollo curricular, algunos autores proponen una serie de pasos ordenados. Uno de esos listados es el siguiente¹:
 1. Identificación de una necesidad.
 2. Formulación del curso de acción, se necesita persuadir a los grupos interesados para que participen activamente.
 3. Desarrollo que incluya una investigación concisa que aclare los objetivos al resto de la audiencia.

¹ Osborn, 2006.

4. Diseminación es el período que inicia una vez que la innovación ha sido aceptada, requiere tiempo para sustentarse.
5. Implementación del programa, incluyendo las estrategias que ayuden a traspasar las barreras existentes, a cambiar y a vencer paradigmas.
6. Evaluación durante esta fase se detectan nuevas problemáticas y se mide el impacto en la práctica. Un currículo no puede, ni debe ser estático, es importante analizarlo, actualizarlo y adaptarlo a través del tiempo a la par del avance de la humanidad y el conocimiento.

4.1 Enfoque.

La teoría de las probabilidades, como rama de las Matemáticas, tiene un carácter de aprendizaje no sólo teórico, sino empírico y por ello genera profundas implicaciones didácticas. Los alumnos deben comprobar que las teorías matemáticas tienen historia, que esa historia puede volver a repetirse cuando la reconstruyen para lograr el aprendizaje.

La existencia en los alumnos de concepciones espontáneas y erróneas con respecto a los fenómenos científicos, ha permitido que surjan diversas teorías del aprendizaje sobre conceptos científicos comprendidos como un proceso de transformación, partiendo de esos conceptos espontáneos hasta lograr conceptos científicos. A pesar de ser teorías cognitivas del aprendizaje sobre conceptos científicos, las teorías tienen una perspectiva clara para la identificación de estrategias didácticas que fomentan el cambio conceptual desde la ciencia intuitiva o natural a la ciencia formal.

Los autores preocupados por el aprendizaje suponen necesario un cambio conceptual y proponen el planteamiento constructivista del aprendizaje. Cuando se enfrentan con una situación problemática nueva, utilizan sus esquemas para comprenderla, explicarla y resolverla, entendida como un proceso de interacción entre el medio (físico, social) y las características del que aprende.

El aprendizaje sólo se logra a partir de las ideas previas existentes en la mente de los alumnos, sin embargo en muchos casos las ideas construidas espontáneamente a través de las experiencias personales de interacción con el medio, no corresponden a las ideas científicas sobre los fenómenos o situaciones que las ha originado. Las ideas previas deben ser:

- Funcionales.
- Espontáneas y personales.
- Compartidas por un gran número de individuos.
- Científicamente incorrectas muchas veces.

- Implícitas (no existe plena conciencia de la existencia de estas ideas por parte del individuo.)
- Resistentes al cambio.
- El orden que existe entre ellas es relativo por pertenecer a teorías que carecen de carácter científico.

4.1.1 ¿Cómo lograr impacto a partir de ideas previas?

Debemos considerar que existen dos formas de adquirir el conocimiento:

1. Asimilación: cuando existen conceptos que enfrentan la situación.
2. Acomodación: cuando los conceptos no permiten comprender satisfactoriamente la situación y deben reorganizar sus ideas.

El conjunto de conocimientos que posee un individuo es como el disco duro de una computadora; las personas tienden a aplicarlos a los fenómenos sin discutirlos, cuando ese conjunto deja de ser útil ocurre el fenómeno de acomodación. Las condiciones para que se produzca son:

- Los conceptos existentes no son satisfactorios.
- La nueva concepción es difícil de entender.
- La nueva concepción es posible.
- El nuevo concepto sugerirá un programa de investigación.

4.1.2 Contenidos.

Deben adecuarse como proceso de cambio conceptual. Situando el razonamiento y el cálculo probabilístico en un contexto que sirva para que el alumno mejore sus destrezas, resuelva problemas interesantes, desarrolle un esquema combinatorio y elabore representaciones gráficas.

La instrucción probabilística deberá incluir:

1. Análisis epistemológico del conocimiento, orientaciones, principios y materiales para adquirir el conocimiento estocástico.
2. Paradojas que muestran contradicciones entre el cálculo matemático y la representación del sistema.

3. Entrenamiento de reconocimiento de la estructura profunda de los problemas probabilísticos.
4. Entrenamiento en construcción de modelos diagramáticos de los problemas.
5. Simulación, que es un método esencial ya que proporciona una solución y su ejecución requiere un modelo del sistema, proporciona un resultado numérico y una comprensión conceptual de la problemática a resolver.
6. Planteamiento de situaciones aleatorias en forma de juegos y apuestas².

El profesor es responsable de entender las concepciones de los alumnos y enseñarles de manera apropiada para facilitar el cambio conceptual.

4.2 Actividades, problemas y tareas que deben enfatizarse en el curso.

Para construir el currículo debe considerarse la siguiente información:

1. Ideas previas de los alumnos.
2. Dominio del conocimiento.
3. Proceso de aprendizaje.
4. Medio o entorno educativo.

Considerando la información necesaria para construir un currículo sabemos que el objetivo de diseñar programas de estudio es brindar las herramientas necesarias o la instrucción que los alumnos han de recibir siguiendo un orden lógico. En el caso particular del bachillerato, el plan de estudios de la SEP divide el contenido en semestres con cargas académicas obligatorias y da libertad para anexar materias de acuerdo al perfil que el estudiante desea desarrollar. Para el área de Matemáticas, el plan incluye como materias obligatorias a partir del primer semestre:

1. Álgebra, partiendo de nociones de conjuntos durante los dos primeros semestres o primer año del bachillerato.
2. Trigonometría para el tercer semestre.
3. Geometría Analítica para el cuarto semestre.
4. Cálculo diferencial e integral que puede impartirse durante quinto y sexto semestre.

De esta forma la materia de Probabilidad y Estadística 1 se propone para el quinto semestre a la par de Cálculo, cuando los alumnos ya han cursado cuatro semestres de Matemáticas, de esa manera se puede confiar en que los alumnos tienen conciencia o por lo menos idea

² La simulación es un método esencial porque proporciona una solución y su ejecución requiere un modelo del sistema, proporciona un resultado numérico y una comprensión conceptual de la problemática a resolver.

de las nociones básicas de conjuntos y técnicas de conteo. También sabemos que la notación de funciones no es nueva para ellos y el objetivo será entrenar una forma de pensamiento que sirva para resolver problemas de azar. Además es posible garantizar que los alumnos asimilen las nociones básicas porque las materias están secuenciadas y debieron haber acreditado los cursos anteriores.

Respecto al proceso de aprendizaje, es necesario hacer una evaluación sobre el desempeño y la comunicación del grupo, buscando las habilidades de cada miembro y la apertura de un canal de comunicación libre entre profesor y alumnos. Lo cierto es que así como cada persona es diferente, cada grupo también lo es y requerirá de la habilidad del profesor identificar las necesidades del grupo y las estrategias a seguir. Por ello, es importante partir de que todos los alumnos han recibido la misma instrucción o por lo menos los mismos contenidos teóricos y que todos son capaces de interesarse en la Probabilidad y la Estadística, si logran identificarla con la realidad en la que están inmersos. Finalmente, es posible corroborar que la información sobre el medio o entorno educativo es común para todos y será necesario fomentar un ambiente agradable de trabajo en el salón de clases, donde los alumnos se sientan motivados y participen en el proceso de aprendizaje del grupo.

4.2.1 Sobre el contenido.

Bajo dichas premisas y en consideración al material revisado, a la experiencia de impartir la materia y al programa de estudios de la SEP, se propone el siguiente contenido ordenado:

1. Introducción a la Probabilidad y Estadística.
2. Conjuntos de datos.
3. Exploración y análisis de datos.
4. Estadística descriptiva.
5. Experimentos aleatorios y deterministas.
6. Estadística inferencial.
7. Muestreo.
8. Interpretación de un conjunto de datos.
9. Gráficas de datos y su utilidad.
10. Espacio muestral.
11. Eventos y relación con teoría de conjuntos.
12. Frecuencia absoluta y relativa.

13. Propiedades de las frecuencias relativas.
14. Leyes de los grandes números.
15. Probabilidad clásica.
16. Probabilidad subjetiva.
17. Probabilidad geométrica.
18. Concepto de probabilidad.
19. Propiedades de la probabilidad.
20. Regla de Laplace.
21. Asignación de probabilidades a sucesos equiprobables.
22. Experimentos compuestos.
23. Cálculo combinatorio.
24. Tablas de contingencia.
25. Diagramas de árbol.
26. Probabilidad compuesta.
27. Eventos dependientes.
28. Independencia de eventos.
29. Probabilidad condicional.
30. Generación de números aleatorios.
31. Tablas de números aleatorio.
32. Variables aleatorias.
33. Esperanza de variables aleatorias.
34. Varianza de una variable aleatoria.

El contenido sobre diferentes tipos de variables aleatorias y sus aplicaciones podría quedar incluido en el segundo curso de Probabilidad, así como distribuciones conjuntas, covarianza, estadística paramétrica (estimación de parámetros y aplicaciones) y estadística no paramétrica (pruebas de hipótesis, su utilidad e importancia).

4.2.2 Sobre las actividades, problemas y tareas.

Es necesaria la práctica continua del raciocinio aleatorio, por ello la instrucción básica que incluye el contenido teórico de la Probabilidad y la Estadística, deberá ser clara, específica y breve durante la clase, para poner en práctica ejercicios y evaluaciones orales sobre el nivel de avance y comprensión que vaya teniendo el grupo. La práctica fuera del salón es obligatoria a través de tareas y trabajos. Para ello se sugiere:

1. Mostrar una amplia bibliografía y diversas fuentes de consulta.
2. Contar con un material de apoyo de texto, que funcione como fuente bibliográfica.
3. Dejar continuamente lecturas breves que den una idea de lo que será expuesto en clase para formar lluvias de ideas durante las clases y permitir que el grupo construya los conceptos bajo un común acuerdo y la dirección del profesor. Aunque debe considerarse la falta de interés por la lectura fuera del aula, profesor puede y debe encontrar la manera de motivar al grupo e ingeniárselas para que el material de lectura cumpla con su objetivo.
4. Los ejercicios presentados en el salón de clases y la tarea, deben adecuarse a la realidad de los alumnos para captar su atención y motivar el interés.
5. Es importante señalar el origen y contexto histórico de los conceptos, para que los alumnos entiendan el proceso de avance de la materia de acuerdo a las necesidades de la sociedad ubicadas en el tiempo.
6. Los problemas, actividades de clase y tareas deben estimular al alumno, avanzando en el grado de dificultad, cada vez que haya sido confirmada la asimilación del contenido previo.
7. Se proponen evaluaciones o pequeños exámenes que fortalezcan el espíritu de estudio y mantengan al alumno interesado, o por lo menos preocupado por el contenido del curso.
8. Se proponen actividades (trabajos por equipos, debates, exposiciones), que vayan ligadas a juegos de azar y apuestas, motivando con una recompensa a los vencedores.

4.3 Material de apoyo y recursos tecnológicos.

El material bibliográfico es la fuente principal de apoyo para impartir el curso. Si nos apoyamos en recursos tecnológicos, como el uso de computadoras, el material presentado en clase puede resultar agradable (que estimule la vista y el oído, mediante imágenes, sonidos) y facilita la asimilación de los contenidos formales.

Algunos padres de familia se sienten ansiosos si sus hijos no tienen acceso a las computadoras en la escuela, porque piensan que la computadora es un instrumento poderoso; y están convencidos de que al usarla, están mejor preparados para el futuro. Por

este motivo, las escuelas hacen esfuerzos, para adquirir computadoras y tener acceso a INTERNET, con la esperanza de que los alumnos se beneficien con ello.

Al mismo tiempo, a pesar de las grandes dificultades para conseguir o desarrollar programas educativos, la computadora es un instrumento valioso para apoyar los procesos de enseñanza-aprendizaje y cada día hay más aplicaciones en Informática Educativa como Enciclopedias Interactivas, programas para hacer mapas conceptuales, programas para desarrollar habilidades en pensamiento estratégico y programas multimedia interactivos para la enseñanza de Matemáticas.

El apoyo de software especializado facilita enormemente el análisis estadístico, los alumnos son capaces de elaborar gráficas con un esfuerzo mínimo, estimulando la revisión de los diferentes tipos de gráficas y el análisis de sus aplicaciones. También reduce el trabajo aritmético en los cálculos de medidas de tendencia central y de dispersión. Lo anterior es aplicable siempre y cuando la teoría haya quedado asimilada.

Conclusiones.

La enseñanza de la teoría de la Probabilidad y la Estadística ha recorrido ya, un largo camino debido a la naturaleza de la materia, siendo capaz de captar el interés de matemáticos, especialistas en enseñanza y analistas del aprendizaje.

Este documento considera necesario que en la práctica docente se integren resultados y propuestas de investigaciones para facilitar el proceso de enseñanza y aprendizaje. Si bien es cierto que resulta más complicado tratar de aplicar todas y cada una de las propuestas o recomendaciones, también lo es la constante participación del profesor en la dirección del curso es determinante en el desempeño del grupo. De acuerdo a la experiencia del autor, la actividad de un profesor no consiste en transmitir definiciones, sino educar y orientar el razonamiento. Por ello su labor, no está limitada al salón de clases, para cumplir con la enseñanza deberá desarrollar la capacidad de entender al grupo y sus necesidades, exigiéndoles siempre el mejor desempeño. **No es válido un desempeño pobre sólo por lograr la simpatía del grupo, una actitud de sincero interés por el bienestar del grupo ayudará a lograr un ambiente agradable.**

Los programas de estudios y currículos deben servir como una guía durante el proceso, darle libertad al profesor para desarrollarse libremente sintiéndose motivado para seguir su instinto de enseñanza y tenga confianza para abordar los temas bajo su perspectiva animando a los alumnos.

Por eso la propuesta de este documento finaliza en el cuarto capítulo con una serie de recomendaciones y sólo el contenido ordenado de la materia de acuerdo al criterio del autor, para no caer en la rigidez de algunos programas de estudio.

Anexos.

Personajes que aparecen en la Historia de la Probabilidad y la Estadística y su enseñanza.

- **Bernoulli, Jacob.** Conocido también como James, o Jacques Bernoulli. Matemático suizo nacido en 1654, es considerado el iniciador de la teoría de la Probabilidad, que hasta entonces sólo se había ocupado de fenómenos experimentales con resultados equiprobables, motivados, aparte de los juegos de azar, por problemas de las ciencias sociales, temas financieros, seguros, meteorología y medicina.
- **Bernoulli, Johann.** Nació en Basilea, Suiza el 27 de julio de 1667 y murió en la misma ciudad el 11 de enero de 1748. También conocido como Jean o John, fue un matemático, médico y filólogo suizo. Discípulo de su hermano Jacob. Se enfocó en el cálculo infinitesimal y resolvió la ecuación diferencial de Bernoulli, propuesta por su hermano.
- **De Moivre, Abraham.** Matemático francés nacido en 1667, que vivía en Londres, refugiado de la persecución religiosa, publicó tres obras de contenidos sobre el tema de la probabilidad, entre 1718 y 1730. Contribuyó efectuando estudios sobre la ley de probabilidad binomial, y formuló una aproximación para muestras grandes, que es considerada por estadísticos de este siglo, entre ellos Karl Pearson, como la primera formulación de la ley de probabilidad normal.
- **de Montmort, Pierre Rémond,** matemático francés, miembro de una noble familia, su padre quería que estudiara Derecho por tradición familiar, sin embargo se fue a los dieciocho años y no fue hasta los veintidós que comenzó a estudiar, bajo la tutoría de Malebranche, quien le enseñó filosofía y física de Descartes. La reputación que Montmort logró se debió a su libro de probabilidad, sobre el análisis de juegos de azar, que apareció en el año de 1708. El libro que es una colección de problemas combinatorios es un estudio sistemático de los juegos de azar y muestra su importancia matemática.
- **Edgeworth, Francis Ysidro,** se educó en literatura clásica, luego estudio derecho comercial. Pero después se interesó en aplicar los métodos estadísticos previamente aplicados en astronomía y geodesia, a la economía y sociología. Contribuyó al desarrollo de la regresión y la correlación, trabajó en otra área fundamental de la Estadística, que estudia las aproximaciones que se obtienen cuando los conjuntos de datos crecen ilimitadamente (teorema del límite central). Edgeworth es famoso por desarrollar la serie de Edgeworth, una expansión del teorema del límite central, un desarrollo mejorado de las series de Gram - Charlier A. La ventaja de las series de Edgeworth es que el error está controlado, así que podemos decir que es una verdadera expansión asintótica.
- **Fermat, Pierre.** Matemático francés, nacido en Beaumont-de-Lomagne en 1601. En su juventud, con su amigo el científico y filósofo Blaise Pascal, realizó una serie de investigaciones sobre las propiedades de los números, las cuales nunca quiso publicar. Este

matemático contribuyó notablemente a la teoría de la Probabilidad, al Cálculo y a la teoría de Números.

- **Fisher, Ronald**, matemático inglés (1890-1962) cuyas contribuciones incluyen el desarrollo de métodos adecuados para analizar información derivada de muestras pequeñas, el descubrimiento de las distribuciones precisas de muchos estadísticos muestrales y la invención del Análisis de Varianza.

- **Galton, Francis**. Nació en 1822, investigó el carácter hereditario de la genialidad, utilizando curvas normales inversas, que llamó “ojivas”, término que tomó de la arquitectura, y que aun se utiliza. Fue pionero en el tema de la regresión lineal simple, como él la llamó. Utilizó la ley de probabilidad normal, en su versión bivariada, para describir el comportamiento probabilístico de los errores de dos características que varían en forma conjunta. La ley normal bivariada daría origen a la ley normal multivariada. Esta es fundamental en la rama de la estadística denominada análisis multivariado.

- **Gauss, Frederic**. Junto con Arquímedes y Newton, es sin duda uno de los tres genios de la historia de las Matemáticas. Las aportaciones de Gauss que hizo fueron para todos los campos: Teoría de números, Astronomía, Magnetismo, Geometría, Análisis. Desde la más pura teoría de números hasta los problemas prácticos de astronomía, magnetismo y topografía. Realizó aportaciones en todas las ramas de las matemáticas en las que trabajó. Llegó a publicar alrededor de 155 títulos, sin embargo se caracterizó por no presentar los trabajos que no creyera haber pulido hasta la perfección.

- **Gombaud, Antoine** (mejor conocido como el caballero de Méré), escritor francés nacido en Poitou en 1607, y murió el 29 de diciembre de 1684. Conocido como un noble interesado en los juegos de azar, escribió ensayos sobre la honestidad del hombre. Como contemporáneo de Pascal, ambos están involucrados en el cálculo de probabilidades, permitiendo la fundación de la teoría de las probabilidades por Pascal y Fermat.

- **Gosset, William Sealy**. (13 de junio de 1876 - 16 de octubre de 1937) fue un estadístico, mejor conocido por su sobrenombre literario Student. Su logro más famoso se conoce ahora como la distribución t de Student. Usando este pseudónimo, Pearson publicó “El error probable de una media” y casi todos sus artículos en la publicación Biometrika. Sin embargo, fue R.A. Fisher quien apreció la importancia de los trabajos de Gosset sobre muestras pequeñas, tras recibir correspondencia de Gosset en le envió una copia de las Tablas de Student. Fisher creyó que Gosset había efectuado una “revolución lógica”. Irónicamente la estadística t por la que Gosset es famoso fue realmente creación de Fisher. Quien introdujo la forma t debido a que se ajustaba a su teoría de grados de libertad. Los residuos estudentizados reciben su nombre en honor a Student porque la idea de ajustar usando las desviaciones estándar estimadas fue de Gosset.

- **Laplace, Pierre Simon**. Nació el 28 de Marzo de 1749 en Beaumont-en-Auge, Francia y murió el 5 de marzo de 1827 en París. Tuvo relevancia en: astronomía, física, química, matemáticas y probabilidad. Dio una definición de probabilidad y la llamada posteriormente regla de Bayes, encontró métodos para calcular la probabilidad de sucesos compuestos conocidas las probabilidades de sus componentes simples, en una de sus

publicaciones apareció la ley de Laplace, que asigna probabilidades a sucesos equiprobables, aplicó la probabilidad a la mortalidad, la esperanza de vida, la duración de los matrimonios, a los sucesos legales, a los errores en las observaciones, la determinación de las masas de Júpiter, Saturno y Urano, métodos de triangulación y problemas de geodesia.

- **Neyman, Jerzy.** En 1934, el polaco publicó en la Royal Statistical Society, de Londres, lo que puede ser considerado el primer trabajo científico sobre el muestreo de poblaciones finitas. Estableció, sin lugar a dudas, que la selección aleatoria es la base de una teoría científica que permite predecir la validez de las estimaciones muestrales. También dejó establecida toda una filosofía sobre la eficiencia de la estrategia muestral. Neyman y Egon Pearson, hijo de Karl Pearson, presentaron en 1936 una teoría sobre la forma de probar hipótesis estadísticas, con base en la serie de datos. Esta presentación promovió mucho interés, estimuló una considerable investigación, y muchos de los resultados hasta hoy aún se usan. Ellos resolvieron dificultades fundamentales para la comprensión de las pruebas de hipótesis, introduciendo las nociones de hipótesis alternativa, y los dos tipos de error, el de rechazar una hipótesis que es verdadera, y el de no rechazar una hipótesis que es falsa. En las décadas de los años 30 y 40 se centra el desarrollo de la técnica del muestreo estratificado, que supone que existen segmentos distintos, o estratos, en la población, que pueden ser identificados previamente, los cuales se muestrean separadamente.

- **Pascal, Blaise** (Nació el 19 de junio de 1623 y murió el 19 de agosto de 1662), matemático, físico y filósofo religioso francés. Sus contribuciones a las ciencias naturales y aplicadas incluyen la invención y construcción de calculadoras mecánicas, estudios sobre la teoría de probabilidad, investigaciones sobre los fluidos y la aclaración de conceptos tales como la presión y el vacío. Después de una experiencia religiosa profunda en 1654, Pascal abandonó las matemáticas y la física para dedicarse a la filosofía y a la teología, publicando en este periodo sus dos obras más conocidas: “*Las Lettres provinciales y Pensées*”.

- **Pearson, Karl.** (27 de Marzo de 1857- 27 de Abril de 1936) fue un prominente científico, matemático y pensador británico, que estableció la disciplina de la estadística matemática. Desarrolló una intensa investigación sobre la aplicación de los métodos estadísticos en la biología y fue el fundador de la bioestadística.

- **Poisson, Siméon Denis.** (1781-1840), fue un físico y matemático francés al que se le conoce por sus diferentes trabajos en el campo de la electricidad, también hizo publicaciones sobre la geometría diferencial y la teoría de probabilidades. En 1837 publicó en “*Recherchés sur la probabilité des jugermerits*”, un trabajo importante en la probabilidad, en el cual describe la probabilidad como un acontecimiento fortuito ocurrido en un tiempo o intervalo de espacio bajo las condiciones que la probabilidad de un acontecimiento ocurre es muy pequeña, pero el número de intentos es muy grande, entonces el evento ocurre algunas veces.

- **Quetelet, Lambert Adolphe Jacques.** (1796-1874), astrónomo, meteorólogo, estadístico y sociólogo belga. Nacido en Gantes, en 1796, interesado en las bellas artes. Se dedicó a la pintura, escribió poesías, e incluso escribió una ópera. Pero después desarrolló una inclinación a las matemáticas, que lo llevó a interesarse por el estudio de la teoría de la

probabilidad y su aplicación a los fenómenos sociales. Es así como contribuyó a impulsar la realización del primer censo nacional en Bélgica y Holanda. Así, muchos lo consideran ser el fundador de la ciencia social cuantitativa moderna. Precursor de la escuela cartográfica, llamada también Estadística Moral. A Quetelet se le ha llamado el “padre de la Estadística moderna”, por una publicación suya, de 1835, en que observa la extraordinaria regularidad con que se reproducían ciertos fenómenos sociales, como crímenes o suicidios, y argumenta que esas regularidades sólo pueden ser encontradas mediante el uso de técnicas estadísticas, las que incluso pueden llevar a conocer sus causas. Quetelet pensaba que casi todos los fenómenos pueden ser representados probabilísticamente mediante la ley normal, siempre que el número de casos estudiados fuese suficientemente grande.

- **Russell, Bertrand** (1872-1970), filósofo, matemático y premio Nobel británico, nacido en Trelleak (Gales) y fallecido en Penhyndendraeth. Se educó en el seno de una familia tradicionalmente liberal, de la que heredó la rebeldía natural contra el orden establecido; familia que jugó un papel importante en Inglaterra, desde el siglo XVI, en la lucha contra la realeza por la conquista de libertades constitucionales. Muy influido inicialmente por Kant, Hegel y Bradley, alcanza lo que él llamaría su verdadera liberación en el Congreso Internacional de Filosofía de París, en 1900, donde conoce a Peano y se interesa por su lógica simbólica, que le parece un excelente instrumento de análisis, que permite alcanzar la precisión matemática en terrenos en que reinaba la confusión del lenguaje filosófico. Escribe en 1903, bajo la influencia de esa aportación a la que concede gran importancia, su primera obra en el campo que le haría mundialmente famoso, con el título de “*Principles of Mathematics*”, que es una exposición y una discusión de los fundamentos de la lógica, que para Bertrand Russell no pueden ser separados de los fundamentos de las matemáticas más que artificialmente.

- **Spearman, Charles.** (10 de septiembre de 1863 -7 de septiembre 1945), psicólogo inglés, nació y murió en Londres. Realizó importantes aportes a la psicología y a la estadística, desarrollando el Análisis de Factores. Él propuso la existencia de un factor general de la inteligencia, que subyace a las habilidades para la ejecución de las tareas intelectuales. A esta teoría de la inteligencia la denominó Teoría Bifactorial, ya que la inteligencia se compondría tanto del factor general, que sería hereditario, e intentó comprobar que correspondía a una propiedad específica del cerebro, una clase de energía mental a nivel de la corteza cerebral, que varía de un individuo a otro, pero se mantiene estable a través del tiempo; así como del factor, que representa a habilidad específica de un sujeto frente a determinada tarea, que también tendría una localización específica en el cerebro.

- **Yule, George Udny.** (18 de febrero de 1871 - 26 de junio de 1951), inglés con estudios de ingeniería y física, fue un colaborador de Pearson, que hizo algunos aportes a la obra de este último. Trabajó en correlación, y también en curvas asimétricas, como su predecesor. Colaboró en la publicación de Pearson, proporcionando un ejemplo de la aplicación de ajuste de una curva asimétrica a datos sobre distribución de pobreza en Inglaterra y Gales. Pero luego se movió en direcciones independientes. Relacionó la regresión con el método de los mínimos cuadrados, proporcionando un gran conjunto de algoritmos que habían desarrollado los astrónomos, para la solución de las ecuaciones normales, asociadas al cálculo de la regresión. Los trabajos publicados por Yule cubren hasta la primera década de este siglo.

Bibliografía

- [1] Albert, Jim. *Teaching Statistics using Baseball*. The Mathematical Association of America, USA, 2003.
- [2] Anderson & Loynes. *The teaching of practical statistics*. Ed. John Wiley & sons, Great Britain, 1982
- [3] Gattegno, C., Fletcher, T.J., Biguenet, A., Servais, W., Motard, L., Peskett, J. W., Castelnuovo, E., Campedelli, L., Puig Adam, P., y Nicolet, J. L. *El material para la enseñanza de las Matemáticas*. Ed. Aguilar, Madrid, España.1964.
- [4] Estrada, Juan Manuel. *Reflexiones sobre la Revisión de Programas*. Sin publicar, México, 2007.
- [5] Feeldman & Fox. *Probability: The Mathematics of Uncertainty*. Ed. Dekker. Vol. 9, New York, USA, 1991.
- [6] Ed. by Gal & Garfield. *The Assessment challenge in Statistics Education*. International Statistical Institute, TOS Press, Amsterdam, Netherlands, 1997.
- [7] Goldenberg, Paul. *Mathematical habits of mind for young children*. Educational Development Center, Inc. 2002.
- [8] Osborn. *Changing the context of teachers. Work and professional development: An European perspective*. International Journal of Education Research. Vol. 45, 2006, p.p. 242-253.
- [9] Howson, Keitel & Kilpatrick. *Curriculum development in Mathematics*. Cambridge University Press, GB, 1981.
- [10] Pérez & Fazeli. *Problemas resueltos de análisis de datos*. Ed. Psicología Pirámide, Madrid, 1998.
- [11] Porter, Theodore M. *The rise of Statistical thinking 1820-1900*. Princeton University Press, UK, 1986.
- [12] Sáenz, César. *Materiales para la enseñanza de la teoría de probabilidades. Propuesta de un modelo teórico*. Ed. Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, 1999.
- [13] Shafer & Vovk. *Probability of finance: It only a game*. Ed. John Wiley & sons, USA, 2001.

[14] Stigler, Stephen. *The History of Statistics. The Measurement of Uncertainty before 1900*. The Belknap Press of Harvard University Press, USA, 1986, 8ava imp.