UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TEORÍAS DE TORSIÓN Y CLASES NATURALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

GUILLERMO ANDRÉS LÓPEZ CAFAGGI

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ALEJANDRO ALVARADO GARCÍA

2010

1. Datos del alumno
   López
   Cafaggi
   Guillermo Andrés
   56683292
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   303060082
2. Datos del tutor
   Dr.
   Alejandro
   Alvarado
   García
3. Datos del sinodal 1
   Dr.
   Hugo Alberto
   Rincón
   Mejía
4. Datos del sinodal 2
   Dr.
   José
   Ríos
   Montes
5. Datos del sinodal 3
   Dr.
   Alejandro
   Alvarado
   García
6. Datos de sinodal 4
   M.en C.
   Iván Fernando
   Vilchis
   Montalvo
7. Datos del sinodal 7
   Mat.
   Alma Violeta
   García
   López
8. Datos del trabajo escrito
   Teorías de torsión y clases naturales
   65 p
   2010

Teorías de Torsión y Clases Naturales

Guillermo Andrés López Cafaggi

Índice general

Introducción

Este trabajo busca principalmente explicar las relaciones entre ciertas clases de módulos. Las clases naturales son clases cerradas bajo submódulos, sumas directas y cápsulas inyectivas y las teorías de torsión hereditarías son parejas ordenadas de clases $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ cuya clase de torsión $\mathcal{T}$ es cerrada bajo submódulos, sumas directas, cocientes y extensiones y cuya clase libre de torsión $\mathcal{F}$ es cerrada bajo submódulos, cápsulas inyectivas, productos directos y extensiones, a partir de esto resulta natural buscar relaciones entre los dos conceptos. Es claro que la clase libre de torsión de una teoría de torsión hereditaría es una clase natural; aquí se buscarán condiciones para que una clase natural $\mathcal{K}$ junto con su clase complemento $c(\mathcal{K})$ determinen un teoría de torsión, en particular si $\mathcal{K}$ es cerrada bajo cocientes se tiene que $(\mathcal{K}, c(\mathcal{K}))$ es una teoría de torsión. También se estudiará la teoría de torsión determinda por una clase natural $(\mathcal{T}_{\mathcal{K}}, \mathcal{F}_{\mathcal{K}})$ a partir de su relación con la clase natural $\mathcal{K}$. Todo esto se realizará en el contexto de la subcategoría $\sigma[M]$.

Para empezar se definirá la subcategoría $\sigma[M]$ que es el contexto en el cual se busca trabajar. Para un módulo fijo M se define $\sigma[M]$ como la subcategoría plena de R-Mod cuyos objetos son los módulos M-subgenerados; es decir si son isomorfos a un submódulo de un cociente de la forma $M^{(I)}/V$ donde I es un conjunto de indices y $V \leq M^{(I)}$. Mucho de la teoría de módulos y anillos se esta trabajando en $\sigma[M]$ dado que esta generaliza mucho aspectos de R-Mod como se puede ver en [6]. Los conceptos de R-Mod se generalizan a $\sigma[M]$ de forma que esta tiene su propia cápsula inyectiva y su producto categórico que pueden ser diferentes a los de R-Mod.

En el capítulo 2 se desarrollará la teoría de las clases naturales y las teorías de torsión en R-Mod, principalmente las definiciones y propiedades individuales y hasta el siguiente capítulo haremos la generalización hacia $\sigma[M]$, con las clase M-naturales y las teorías de torsión en $\sigma[M]$. Como es de esperarse las clases M-naturales son cerradas bajo submódulos, sumas directas y cápsulas M-inyectivas mientras que las clases libres de torsión de una teoría de torsión hereditaria en $\sigma[M]$ son cerradas bajo submódulos, extensiones en $\sigma[M]$, productos directos de $\sigma[M]$ y cápsulas M-inyectivas. Posteriormente se trabajará con las relaciones de estos conceptos; en particular se definirá la teoría de torsión $(\mathcal{T}_{\mathcal{K}}, \mathcal{F}_{\mathcal{K}})$ y depués se hará notar que esta es la teoría de torsión cogenerada por la clase M-natural $\mathcal{K}$. Se buscarán condiciones para que sea estable y también para que $(c(\mathcal{K}), \mathcal{K})$ forme una teoría de torsión. Como aplicación, esta teoría de torsión define módulos simples relativos a $(\mathcal{T}_{\mathcal{K}}, \mathcal{F}_{\mathcal{K}})$.

Supondremos siempre que R es un anillo asociativo con unidad.

Capítulo 1

La categoría $\sigma[M]$

1.1. Definición y propiedades

Se va a definir para un R-módulo M una categoría cercana a M que refleje algunas de sus propiedades.

Definición 1.1.1. *Sea M un R-módulo, decimos que un R-módulo N es* subgenerado *por M o que M subgenera a N si N es isomorfo a un submódulo de un módulo M generado.*

Recordando que un Módulo M-generado lo podemos ver como la imagen epimórfica de una suma directa de copias de M; tenemos que un módulo N subgenerado por M tiene la forma $M^{(I)}/V$ para algún conjunto de indices I y un submódulo $V \subset M^{(I)}$. Una subcategoría $\mathcal{C}$ de R-Mod es subgenerada por M o M es subgenerador para $\mathcal{C}$ si todo objeto de ella es subegenerado por M. Denotamos $\sigma[M]$ a la categoría plena de R-Mod cuyos objetos son todos los R-módulos subgenerados por M. Por definición M es un subgenerador para $\sigma[M]$.

Un módulo es subgenerado por M si y sólo si es un núcleo de un morfismo entre módulos generados por M; si N es núcleo de un morfismo, es un submódulo de un módulo M-generado y por lo tanto es M-subgenerado y si N es M-subgenerado, podemos verlo como $N \subseteq M^{(I)}/V$ para algún conjunto de índices I y un submódulo V de $M^{(I)}$, considerando la proyección canónica $M^{(I)}/V \to (M^{(I)}/V)/N$ tenemos que $(M^{(I)}/V)/N$ es la imagen homomórfica de un módulo M-generado y por lo tanto es M-generado.

Propiedades de $\sigma[M]$ 1.1.2. *Para un R-módulo M se tiene:*

1. *Para N en $\sigma[M]$, todos los cocientes y todos los submódulos de N pertenecen a $\sigma[M]$, es decir $\sigma[M]$ tiene núcleos y conúcleos.*

2. *La suma directa de una familia de módulos de $\sigma[M]$ pertenece a $\sigma[M]$.*

3. *Los conjuntos $\mathcal{M}_e = \{U \subseteq M^{\mathbb{N}} | U finitamente\ generado\}$ y $\mathcal{M}_z = \{Rm | m \in M^{(\mathbb{N})}\}$ son conjuntos generadores en $\sigma[M]$.*

4. *$U_e = \oplus\{U | U \in \mathcal{M}_e\}$ y $U_z = \oplus\{Z | Z \in \mathcal{M}_z\}$ son generadores en $\sigma[M]$.*

5. *El Producto fibrado (pullback) y la suma fibrada (pushout) de morfismos en $\sigma[M]$ pertenecen a $\sigma[M]$.*

6. *Para una familia $\{N_\lambda\}_\Lambda$ de módulos de $\sigma[M]$, el producto en $\sigma[M]$ existe y está dado por $\prod_\Lambda^M := Tr(U_e, \prod_\Lambda N_\lambda)$.*

Demostración. 1. Los submódulos de N también son submódulos del módulo M-generado $M^{(I)}/V$ y si tenemos K un cociente de N, consideramos la suma fibrada:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "p"] \arrow[d, "i"] & K \arrow[d, "f"] \\ M^{(I)}/V \arrow[r, "g"] & X \end{tikzcd}$$

en el cual como p es epi e i mono tenemos que g es epi y f mono; es decir X es M-generado y entonces K resulta M-subgenerado.

2. Si $\{N_\lambda\}$ es una familia de R-módulos en $\sigma[M]$ y $N_\lambda \subseteq M_\lambda$ para algunos M_λ M-generados, entonces $\oplus_\Lambda N_\lambda \subseteq \oplus_\Lambda M_\lambda$ que es M-generado, por lo que $\oplus_\Lambda N_\lambda$ pertenece a $\sigma[M]$ y este coincide con el coproducto de $\{N_\lambda\}$ en $\sigma[M]$.

3. Sea N en $\sigma[M]$; es suficiente mostrar que cada submódulo ciclico $Rn \subset N$, $n \in N$, es generado por $\mathcal{M}_z$ y por lo tanto por $\mathcal{M}_e$. Por definición si $N \in \sigma[M]$ tenemos $N \subset N'$ para algún N' módulo M-generado. Sea $\varphi : M^{(\Lambda)} \to N'$ epi y $m \in M^{(\Lambda)}$ tal que $\varphi(m) = n \in N$. Entonces $m \in M^{(k)}$ para algún k natural y $\forall m \in M^{(\Lambda)}$, $m \in M^{(\mathbf{N})}$, es decir $Rm \in \mathcal{M}_z$ y la restricción $\varphi|_{Rm} : Rm \to Rn$ es epi.

4. Por propiedades de generadores U_e y U_z son también generadores.

5. Por la construcción del prodcuto fibrado y la suma fibrada y por 1. y 2. el pushout y pullback de morfismos de $\sigma[M]$ pertenece a $\sigma[M]$.

6. Sea $\{f_\lambda : X \to N_\lambda\}$ una familia de morifsmos en $\sigma[M]$, por el producto en R-Mod tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \prod N_\lambda \arrow[r, "\Pi_\lambda"] & N_\lambda \\ X \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "f_\lambda"'] & \end{tikzcd}$$

Como $X \in \sigma[M]$, $f(X) \in \sigma[M]$; es decir

$$f(X) \subset Tr(\mathcal{M}_e, \prod_{\Lambda} N_\lambda) = Tr(U_e, \prod_{\Lambda} N_\lambda)$$

Tenemos que $Tr(U_e, \prod_\Lambda N_\lambda)$ junto con las restricciones de las proyecciones canónicas $\{\pi_\lambda\}$ es el producto $\{N_\lambda\}$ en $\sigma[M]$. $\square$

Proposición 1.1.3. *Si N es un generador de $\sigma[M]$, para una familia $\{N_i\}_{i\in I}$ de módulos en $\sigma[M]$ tenemos que $Tr(N, \prod_I N_i)$ y $\{\pi|_{Tr(N,\prod_i N_i)}\}_{i\in I}$ donde $\prod_i N_i$ es el prodcuto directo en R-Mod, forman el producto directo en $\sigma[M]$.*

Demostración. Hemos visto que en $\sigma[M]$ hay generadores. Para cada $i \in I$ denotaremos $p_i : \pi_i|_{Tr(N,\prod_i N_i)}$; sea $\{f_i : X \to N_i\}$ una familia de morfismos en $\sigma[M]$. Con el producto en R-Mod podemos inducir un único morfismo $\varphi : X \to \prod_i N_i$ de forma que para todo $i \in I$ conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i"', "f"] & \prod_i N_i \arrow[dl, "\pi_i"] \\ N_i & \end{tikzcd}$$

Entonces $Im(\varphi) \leq \prod_i N_i$ y como $X \in \sigma[M]$ tenemos que también $Im(\varphi) \in \sigma[M]$, aparte este es N-generado. Aparte $Tr(N, \prod_i N_i)$ es el mayor submódulo N-generado de $\prod_i N_i$, se tiene que $Im(\varphi) \leq Tr(N, \prod_i N_i)$. Ahora vemos que para cada $i \in I$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i"] & Tr(N, \prod_i N_i) \arrow[dl, "p_i"] \\ N_i & \end{tikzcd}$$

Es decir se cumple la propiedad universal de producto. $\square$

De lo anterior obtenemos lo siguiente.

Teorema 1.1.4. *Son equivalentes para N, M dos R-módulos:*

1. *N es subgenerador para $\sigma[M]$*
2. *$\sigma[M] = \sigma[N]$*
3. *$N \in \sigma[M]$ y $M \in \sigma[N]$*

Podemos observar que M no necesariamente es generador para $\sigma[M]$ pero para el caso particular de $M = R$ si sucede, aparte si R es M-subgenerado tenemos que $\sigma[M] = R$-Mod.

1.2. Módulos M-inyectivos

Como ya se vio la subcategoría $\sigma[M]$ tiene muchas de las propiedades deseadas de una categoría, tiene núcleos, conúcleos, coproductos y un producto que no necesariamente coincide con el producto de R-Mod. Aparte tenemos que si $M = R$, $\sigma[M] = R$-Mod así que el estudio de $\sigma[M]$ generaliza a R-Mod. Ahora queremos describir como serían los módulos inyectivos Q para esta categoría; es decir que un diagrama con fila exacta

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \\ & Q & \end{tikzcd}$$

se extienda con un mofismo $B \to Q$ de forma conmutativa. También buscamos definir la cápsula inyectiva en esta categoría de un módulo $N \in \sigma[M]$ como un módulo $Q \in \sigma[M]$ inyectivo en $\sigma[M]$ y $\eta : N \to Q$ sea un monomorfismo esencial.

1.2.1. Definición y Propiedades

Definición 1.2.1. *Sea M y U R-módulos. Decimos que U es M-inyectivo si el siguiente diagrama con fila exacta se extiende conmutativamente con un morfismo $M \to U$.*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & M \\ & U & \end{tikzcd}$$

La propiedad de que U sea M-inyectivo es equivalente a que el mapeo:

$$Hom_R(f, U) : Hom_R(M, U) \to Hom_R(K, U)$$

sea un suprayectivo para cada monomorfismo $f : K \to M$. Aparte es sabido que el funtor $Hom_R(-, U)$ es exacto izquierdo entonces tenemos que: U es M-inyectivo si y sólo si $Hom_R(-, U)$ es exacto con respecto a la sucesión exacta $0 \to K \to M \to N \to 0$.

El módulo U se llama *auto-inyectivo* (o quasi-inyectivo) si es U-inyectivo. Si $\mathcal{C}$ es una subcategoría plena de R-Mod, decimos que el R-módulo U es *inyectivo para* $\mathcal{C}$ (o *inyectivo en* $\mathcal{C}$ si $U \in \mathcal{OBJ}(\mathcal{C})$) si U es M-inyectivo para todo $M \in \mathcal{OBJ}(\mathcal{C})$.

Primero se observan algunas propiedades de los módulos M-inyectivos con respecto al producto:

Teorema 1.2.2. *Sea ${}_RM$ un R-módulo y $\{U_\lambda\}_\Lambda$ una familia de R-módulos. El producto en R-Mod, $\prod_\Lambda U_\lambda$ es M-inyectivo si y sólo si cada U_λ es M-inyectivo. Aparte si cada U_λ está en $\sigma[M]$ entonces lo anterior también sucede para el producto $\prod_\Lambda^M$ en $\sigma[M]$.*

Demostración. Sea $0 \to K \xrightarrow{f} M$ sea una sucesión exacta en R-Mod. Si cada U_λ es M-inyectivo, entonces, para cada $\mu \in \Lambda$; el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & M \\ & \prod_\Lambda U_\lambda \arrow[r, "\pi_\mu"] & U_\mu \end{tikzcd}$$

se puede extender conmutativamente con $h_\mu : M \to U_\mu$. Como tenemos una familia de morfismo $h_\mu : M \to U_\mu$ y por propiedades del producto entonces tenemos un morfismo $h : M \to \prod_\Lambda U_\lambda$ con $h\pi_\mu = h_\mu$; tenemos $fh\pi_m u = fh_\mu = g\pi_\mu$ que implica $fh = g$.

Por otra parte si $\prod U_\lambda$ es M-inyectivo,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\gamma"'] & M \\ & U_\mu \arrow[r, "\epsilon_\mu"] & \prod_\Lambda U_\lambda \end{tikzcd}$$

se extiende por $\delta : M \to \prod_\Lambda U_\lambda$ y $\epsilon_\mu\gamma = \delta f$ y tenemos $\gamma = \pi_\mu\epsilon_\mu\gamma = \pi_\mu\delta f$. □

Se muestran otras propiedades de los módulos inyectivos.

Terorema 1.2.3. *Sea U un R-módulo entonces se tiene:*

1. *Si $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to M$ es exacta en R-Mod y U es M inyectivo entonces U es M' y M''-inyectivo.*

2. *Si U es M_λ-inyectivo para la familia $\{M_\lambda\}_\Lambda$ entonces U también es $\oplus_\Lambda M_\lambda$-inyectivo.*

Demostración. 1) Si tenemos $f : M' \to M$ mono y el diagrama exacto

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] & M' \\ & U & \end{tikzcd}$$

Con la composición fh es mono y U es M-inyectivo entonces extiste $\delta : M \to U$ con $\delta fh = g$ y tenemos que $\delta f : M' \to U$ extiende al diagrama.

Si tenemos $g : M \to M''$ epi y $0 \to L \xrightarrow{h} M''$ exacta, consideremos el producto fibrado de h y g:

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "g'"] & M \arrow[d, "g"] \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\varphi"] & M'' \\
 & U &
\end{tikzcd}$$

donde h' resulta mono y g' es epi. Como U es M-inyectivo podemos extender por $\theta : M \to U$ tal que $\theta h' = \varphi g'$. Ahora si consideramos a $M'' \cong M/B$ y $L \cong X/B$ se observa que $\theta(B) = \varphi g'(B) = \varphi(0) = 0$. Así que $Nuc(g) \leq Nuc(\theta)$ y podemos definir

$$\psi : M/B \to U$$

$$m + B \to \psi(m + B) = \theta(m)$$

Entonces $\psi g(m) = \psi(m + B) = \theta(m)$; $\psi g = \theta$. Para $x \in X$, $\psi(x + B) = \psi g(x) = \theta(x) = \varphi g'(x) = \varphi(x + B)$ por lo que ψ extiende a φ y U es M/B-inyectivo.

2)Sea U M_λ-inyectivo para toda $\lambda \in \Lambda$, $M = \oplus_\Lambda M_\lambda$ y $K \subset M$. Para un morfismo $g : K \to U$, consideramos:

$$\mathcal{F} = \{h : L \to U | K \subset L \subset M \text{y} h|_K = g\}$$

Este conjunto lo ordenamos por:

$$[h_1 : L_1 \to U] \leq [h_2 : L_2 \to U] \Leftrightarrow L_1 \subset L_2 \text{y} h_2|_{L_1} = h_1$$

Observamos que $\mathcal{F}$ es un copo con ese orden, sea $\mathcal{C} = \{h_i : L_i \to U \ i \in I\}$ una cadena no vacia de $\mathcal{F}$. Si consideramos $h' : \sum_{j \in I} L_j \to U$ tal que $\sum l_i \to \sum h_i(l_i)$ h está bien definido por el orden de $\mathcal{C}$ y por el Lema de Zorn; tiene elemento máximo $h_0 : L_0 \to U$. Solo falta probar $M = L_0$, para lo cual sólo es necesario probar $M_\lambda \subset L_0$ para toda $\lambda \in \Lambda$. Consideramos:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L_o \cap M_\lambda \arrow[r] \arrow[d] & M_\lambda \\
 & L_0 \arrow[r, "h_0"] & U
\end{tikzcd}$$

que se extiende conmutativamente por la hipotesis la M_λ-inyectividad de U, con $h_\lambda : M_\lambda \to U$.

Ahora consideramos el morfismo $h' : L_0 + M_\lambda \to U$ tal que $l + m_\lambda \to h_0(l) + h_\lambda(m_\lambda)$, está bien definido; si tomamos $l + m_\lambda = 0$, tenemos que $l = -m_\lambda \in L_0 \cap M_\lambda$ y por lo tanto $h'(l + m_\lambda) = h_0(l) - h_\lambda(l) = 0$. Entonces $h' : L_0 + M_\lambda \to U$ es un morfismo de $\mathcal{F}$ y es mayor a $h_0 : L_0 \to U$. Por la maximalidad de h_0 tenemos que los morfismos son iguales y nos da la igualdad $L_0 + M_\lambda = L_0$ que nos indica $M_\lambda \subset L_0$, lo que termina la demostración. $\square$

Ahora con estos resultados obtenemos el siguiente teorema que caracteriza a los módulos M-inyectivos.

Teorema 1.2.4. *Son equivalentes para los R-módulos U y M:*

1. *U es M-inyectivo*

2. *U es N-inyectivo para todo submódulo finitamente generado (cíclico) $N \subset M$*

3. *U es N-inyectivo para todo $N \in \sigma[M]$, es decir U es inyectivo para $\sigma[M]$.*

Demostración. Es clara de la proposición anterior: si U es M-inyectivo entonces también es inyectivo para los cocientes y submódulos de M, en particular los submódulos ciclicos $N \subset M$;ahora recordando que cada módulo está generado por sus submódulos cíclicos podemos afirmar que si U es N-inyectivo, con N los submódulos ciclicos de M entonces es M-inyectivo y si considermos a K un módulo subgenerado de M, U también es K-inyectivo dado que K es submódulo de un cociente de un coproducto o suma directa de copias de M. $\square$

1.3. La Cápsula M-inyectiva

En esta sección mostraremos la construcción de la cápsula M-inyectiva de un módulo N; esta va a servir como la cápsula inyectiva de un módulo dentro de $\sigma[M]$ y esta al igual que el producto en $\sigma[M]$, no siempre va a conincidir con su cápsula inyectiva en R-Mod. Primero necesitamos estudiar a los módulos inyectivos cogeneradores en $\sigma[M]$. Recordemos que un cogenerador U de N es tal que $\forall f : L \to N \; \exists h : N \to U \,, hf \neq 0$, aunque también los podemos caracterizar de forma que si N se sumerge en un producto directo de copias de U.

Definición 1.3.1. *Un R-módulo N es* cocíclico *si $\exists n_0 \in N$ tal que $\forall g : N \to M$ con $n_0 \notin Nuc(g)$ implica que g es mono.*

Primero observamos que si N es simple entonces es cocíclico; si $g : N \to M$ tal que $\exists n_0 \notin Nuc(g)$ entonces como es simple, $Nuc(g) = 0$ por lo que g es mono. Aparte vemos que si N es cocíclico y tenemos un monomorfismo $\varphi : N \to \prod_\Lambda U_\lambda$ en R-Mod entonces $\exists \lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\pi_{\lambda_0}\varphi : N \to U_{\lambda_0}$ es mono; para ver esto consideremos a $n_0 \in N$ como en la definición de que N sea cocíclico, como $0 = Nuc(\varphi) = \bigcap_\Lambda Nuc(\varphi\pi_\lambda)$ debemos tener que $n_0 \notin Nuc(\varphi\pi_{\lambda_0})$ para algún $\lambda_0 \in \Lambda$, por lo que $\varphi\pi_{\lambda_0}$ es mono.

Ahora podemos estudiar a los módulos inyectivos cogeneradores de $\sigma[M]$.

Teorema 1.3.2. *Un módulo inyectivo Q en $\sigma[M]$ es cogenerador en $\sigma[M]$ si y sólo si cogenera a cada simple en $\sigma[M]$. Aparte como todos los simples son cocíclicos esto nos dice que Q tiene una copia de cada simple de $\sigma[M]$ como submódulo, salvo isomorfismos.*

Demostración. $\Leftarrow$ Supongamos que todos los módulos simples en $\sigma[M]$ son cogenerados por Q. Sea $f : L \to N$ en $\sigma[M]$, necesitamos encontrar $h : N \to Q$ talque $hf \neq 0$. Sea $l \in L$, $f(l) \neq 0$; consideramos la inclusión $i : Rl \to L$ y la composición $if : Rl \to N$, $if \neq 0$. Existe un submódulo máximo $K \subset Rl$ con $Nuc(fi) \subset K$. Como el cociente Rl/K es simple y por lo tanto cocíclico y también cogenerado por Q entonces aplicamos la ultima observación de los módulos cocíclicos y afirmamos que es isomorfo a un submódulo de Q. Junto con la proyección $p : Rl/Nuc(fi) \to Rl/K$ obtenemos el diagrama exacto :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Rl/Nuc(fi) \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & N \\ 0 \arrow[r] & Rl/K \arrow[r] & Q \end{tikzcd}$$

Este se puede extender con $h : N \to Q$ por la inyectividad de Q y como $0 \neq p = hfi$ tenemos $hf \neq 0$. □

El siguiente teorema nos dice que la categoría $\sigma[M]$ tiene suficientes inyectivos.

Teorema 1.3.3. *Sea M un R-módulo:*

1. *Si Q es un inyectivo en R-Mod, entonces $Tr(M, Q)$ es inyectivo en $\sigma[M]$.*
2. *Si Q es un cogenerador inyectivo en R-Mod, entonces $Tr(M, Q)$ es un cogenerador inyectivo en $\sigma[M]$.*
3. *Todo módulo en $\sigma[M]$ es submódulo de un inyectivo en $\sigma[M]$.*

Antes de la demostración del teorema veamos una relación entre la traza $Tr(M,Q)$ y N un M-subgenerado

Lema 1.3.4. *Si en el siguente diagrama P es la proyección canónica y i la inclusión y h mono con $h|_N = f$ es decir $N \cong h(N) \cong f(N)$; entonces N se sumerge en $Tr(M,Q)$.*

$$\begin{tikzcd} M^{(I)} \arrow[r, "p"] & M^{(I)}/K \arrow[r, "h"] & Q \\ & N \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $n \in N - \{0\}$, $n \notin K$ lo escribimos como $n = (n_i)_I + K$; como p es epi existe $(n_i)_i \to (n_i)_I + K$ con cada $n_i \in M$. Como sólo estamos considerando el coproducto $M^{(I)}$ sólo hay finitos i's en I talque $n_i \neq 0$. Definimos unos morfismos de la siguiente manera $I'_j : M \to M^{(I)}$ de tal forma que $m \to (\mathbf{m}_j)_i$, donde $(\mathbf{m}_j)_i$ es cero en todas las entradas excepto en la entrada j; es decir I'_j es la inclusión en la entrada j. Consideramos las I'_j sólo para las i's tales que $n_i \neq 0$, son un número finito. Componiendo con hp tenemos un numero finito de morfismos $\psi_i : M \to Q$ y como está definido $f(n) = \sum_i \psi_i(n_i)$, por lo que $f(N) \subset Tr(M,Q)$. □

Ahora la demostración del teorema.

Demostración. . 1) Si Q es inyectivo en R-Mod y tenemos el diagrama con filas exactas en $\sigma[M]$;

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "l"] \arrow[d, "f"] & M \\ & Tr(M,Q) & \end{tikzcd}$$

como Q es inyectivo y $Tr(M,Q) \subset Q$ tenemos un morfismo de $if : K \to Q$ y podemos extender conmutativamente con $h : M \to Q$, $hl = if$. Ahora como $Im(h) \subset Tr(M,Q)$, tenemos que con h se extiende un morfismo de $M \to Tr(M,Q)$, por lo que $Tr(M,Q)$ es M-inyectivo.

2) Sólo es necesario considerar los simples S en $\sigma[M]$, como son cocíclicos y cogenerados por Q, se sumergen en sólo una copia de Q y por la inyectividad de Q el siguiente diagrama se extiende con un morfismo $h : M^{(I)}/V \to Q$:

$$\begin{tikzcd} M^{(I)}/V \arrow[r, "h"] & Q \\ Si \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

por el lema previo tenemos $S \subset Tr(M, Q)$.

3) Si tenemos un cogenerador inyectivo Q en R-Mod este en particular cogenera a $N \in \sigma[M]$ por lo que N se encaja en un producto Q^Λ, este también es inyectivo y tenemos un situación similar a la anterior:

$$\begin{tikzcd} M^{(I)}/K \arrow[r] & Q^\Lambda \\ N \arrow[u, "i"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

y tenemos que $N \subset Tr(M, Q^\Lambda)$ que es un cogenerador M-inyectivo. $\square$

Lo que podemos observar es que los cogeneradores inyectivos en R-Mod juegan un papel muy importante para encontrar a los M-cogeneradores inyectivos y los cogeneradores inyectivos en R-Mod se pueden encontrar a su vez por medio de los cogeneradores inyectivos de $\mathbb{Z}$-Mod, los grupos abelianos. Recordemos que ${}_R Hom_{\mathbb{Z}}(R, B)$ es un cogenerador inyectivo para R-Mod si B lo es para los grupos abelianos, $\mathbb{Z}$-Mod. Como en $\mathbb{Z}$-Mod ser inyectivo es equivalente a ser divisible (decimos que un R-módulo N es divisible si para todo $s \in R$ que no sea un divisor de cero y para todo $n \in N$, existe $m \in N$ tal que $sm = n$) entonces ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ y ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ son divisble y por lo tanto inyectivos. Los cocientes de divisibles son divisibles por lo que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ y $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ lo son y estos si son ejemplos de cogeneradoes inyectivos para $\mathbb{Z}$-Mod. Los simples son de la forma $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_p$ para un primo p y tenemos que

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},\ z + p\mathbb{Z} \to z/p + \mathbb{Z}$$

está bien definido y es mono. Entonces tenemos que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es cogenerador y como $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ también lo es.

La siguiente propiedad de como se comportan los complementos de los submódulos nos ayudará para encontrar la cápsula inyectiva.

Lema 1.3.5. *Sea $K \subset N$ y K' complemento de K en N y K'' complemento de K' de N con $K \subset K''$. Si N es autoinyectivo entonces K'' es sumando directo de N.*

Demostración. Como $K' \cap K'' = 0$ si consideramos $i : K'' \to N$ la inclusión y $p : N \to N/K$ la proyección canónica, la composición pi es mono. Como N es autoinyectivo se tiene que

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K'' \arrow[r, "p"] \arrow[d, "i"] & N/K' \\ & N & \end{tikzcd}$$

se extiende conmutativamente por $h : N/K' \to N$ con $i = hpi$. Recordemos que bajo estas mismas hipótesis se tiene que $(K + K')/K \subset_e N/K$ y lo aplicamos a $Im(pi) = (K'' + K')/K'$ tenemos que es esencial en N/K'. Observamos que entonces h es mono; si tenemos $x \in N/K'$ no cero, como la imagen es esecial tenemos que $\exists r \neq 0$, $rx \in Im(pi)$, $rx \neq 0$, tomamos $z \in K''$ talque $0 \neq z \to rx$, tenemos ahora que $z = h(rx) = rh(x) = 0$, lo que da una contradicción y $b = 0$ y h es mono. Siguiendo tenemos que $h(N/K') \cong N/K'$ aparte es extensión esencial de K y K'' y recordando que K'' es la extension maxima de K en N, nos da que $h(N/K') = K''$ entonces pi tiene inversa por la izquierda y es un isomorfismo que nos da $N = K' + K''$. □

Definición 1.3.6. *Sea $N \in \sigma[M]$; Un módulo $E \in \sigma[M]$ con un morfismo $\epsilon : N \to E$ se le llama* cápsula inyectiva *de N en $\sigma[M]$ si E es M-inyectivo y ϵ es un monomorfismo esencial.*

Usualmente a la cápsula inyectiva de N en $\sigma[M]$ se le llama cápsula M-inyectva de N y se denota por $E_M(N)$ y para R-Mod se denota $E(N)$, en general estas no coinciden. Usando lo anterior podemos describir a la cápsula M-inyectiva. Lás cápsulas inyectivas son únicas salvo isomorfismos.

Teorema 1.3.7. *Sea M un R-módulo.*

1. *Todo módulo $N \in \sigma[M]$ tiene cápsula inyectiva en $\sigma[M]$.*
2. *$E_M(N) \cong Tr(M, E(N))$.*

Demostración. 1) Sea $N \in \sigma[M]$ entonces está contenido en un inyectivo $Q \in \sigma[M]$. Si tomamos el N' un complemento de N en Q y N'' un complemento de N' con $N \subset N''$; por la proposición anterior, $N \subset_e N''$ y N'' es sumando directo de Q y por lo tanto es M-inyectivo. Por lo tanto la inlcusión $i : N \to N''$ es una cápsula M-inyectiva de N.

2) Sea $N \in \sigma[M]$ y su cápsula inyectiva en ${}_RMod$, $E(N)$. Por la misma observación del teorema de los módulos inyectivos cogeneradores tenemos que $N \subset Tr(M, E(N)) \subset E(N)$ y vemos que $N \subset_e Tr(M, E(N))$; aparte como $E(N)$ es inyectivo , $Tr(M, E(N))$ es M-inyectivo y $N \to Tr(M, E(N))$ es un cápsula M-inyectiva de N. Finalmente tenemos que $N \cong Tr(M, E(N))$. □

1.4. Módulos de Torsión sobre $\mathbb{Z}$

En esta sección vamos a estudiar un ejemplo concreto de $\sigma[M]$ que va a constituir a los módulos de torsión de los grupos abelianos, este ejemplo seguirá siendo de interes más adelante.

Definición 1.4.1. *Para un grupo abeliano M se definen el* subgrupo de torsión $T(M) := \{a \in M | \exists z \in \mathbb{Z}; [z \neq 0, za = 0]\}$

A M se le llama de *torsión* si $M = T(M)$; es decir para todo $m \in M$ existe $n \in \mathbb{N}$ no cero talque $na = 0$ o se le dice de *p-torsión* para un primo p si para todo $a \in M$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $p^k a = 0$; y se define la *p-componente* de M como $p(M) := \{a \in M | p^k a = 0 \text{ para alguna } k \in \mathbb{N}\}$. Por otra parte se le dice *libre de torsión* si $T(M) = 0$.

Lema 1.4.2. *Todo módulo de torsión M sobre $\mathbb{Z}$ es suma directa de sus componentes p primarias(p-componentes): $M = \oplus\{p(M)|p \text{ primo }\}$.*

Demostración. Primero mostraremos que $M = \sum\{p(M)|p \text{ primo }\}$: Para $a \in M$ tenemos que $(0 : a) = n\mathbb{Z}$ y consideramos su factorización en primos $n = p_1^{k_1}...p_r^{k_r}$ para diferentes primos $p_1, ..., p_r$. Por su construcción los números $n_i = n/p_i^{k_i}$ tiene como máximo común denominador 1, por lo tanto podemos encontrar un combinación lineal con $\alpha_1, ..., \alpha_r \in \mathbb{Z}$ que $\sum \alpha_i n_i = 1$. Entonces tenemos que $a = \alpha_1 n_1 a + ... + \alpha_r n_r a$ y por construcción cada $\alpha_i n_i a \in p_i(M)$.

Falta ver que la familia $\{p(M)|p \text{ primo }\}$ es una familia independiente de submódulos. Sea $a \in p_1(M) \cap (p_2(M) + ... + p_l(M))$ para diferentes primos $P_1, ..., p_l$. Entonces tenemos que $p_1^{k_1} a = 0$ y $p_2^{k_2}...p_l^{k_l} a = 0$ para algunos $k_i \in \mathbb{N}$. Como $p_1^{k_1}$ y $p_2^{k_2}...p_l^{k_l}$ son primos relativos tenemos una combinación lineal del 1; y nos sucede que $a = 1a = (\alpha_1 p_i^{k_1} + \alpha_2 p_2^{k_2}...p_l^{k_l})a = 0$. □

Si recordamos que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es cogenerador de $\mathbb{Z}$-*Mod* y las componentes primarias de él se denotan por $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ y por lo anterior tenemos

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \oplus\{\mathbb{Z}_{p^\infty}|p \text{ primos}\}.$$

Teorema 1.4.3. *1. $\sigma[\mathbb{Z}_{p^\infty}] = \sigma[\oplus_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}_{p^n}]$ es la subcategoría de los módulos de p-torsión en $\mathbb{Z}$-Mod.*

2. $\sigma[\mathbb{Q}/\mathbb{Z}] = \sigma[\oplus_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}_n]$ es la subcategoría de módulos de torsión de $\mathbb{Z}$-Mod.

Demostración. 1) Todo cíclico de p-torsión es de la forma $\mathbb{Z}_{p^k}$ para alguna $k \in \mathbb{N}$. Entonces $\oplus_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}_{p^n}$ es generador para los módulos de p-torsión. El morfismo

$$\mathbb{Z}_{p^k} \to p(\mathbb{Q}/\mathbb{Z});\ z + p^k\mathbb{Z} \to z/p^k + \mathbb{Z}$$

esta bien definido y es mono, podemos ver ahora a $\mathbb{Z}_{p^k}$ como submodulos de $\mathbb{Z}_{p^\infty}$. Obtenemos $\sigma[\mathbb{Z}_{p^\infty}] = \sigma[\oplus_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}_{p^n}]$. Aparte observamos que $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es cogenerador para esta categoría y $\oplus_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}_{p^n}$ es generador. De forma similar se demuestra 2) y se observa que para esa categoría $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es cogenerador y $\oplus_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}_n$ es generador. □

Capítulo 2

Teorías de Torsión y Clases Naturales

En este capítulo se van a definir y a estudiar las teorías de torsión y las clases naturales en R-Mod y en $\sigma[M]$. Los siguientes capítulos se tratarán directamente con teorías de torsión y clases naturales en $\sigma[M]$. En este cápitulo y el por el resto del trabajo se trabajará con clases de módulos que son cerradas bajo ciertas propiedades. Por comodidad diremos que una clase $\mathcal{C} \subseteq R$-Mod es cerrada bajo cocientes si en realidad es cerrada bajo imagenes homomorficas, por otra parte diremos que una clase $\mathcal{C} \subseteq R$-Mod es cerrada bajo submódulos si cada que tenemos $N \to M$ un monomorfismo y $M \in \mathcal{K}$ entonces también $N \in \mathcal{K}$.

2.1. Teorías de Torsión

Definiremos las Teorías de Torsión en R-Mod, la generalización a $\sigma[M]$ se dejará para después. Se definirán las teorías de torsión como un pareja ordenada de clases de R-Mod, aunque en muchos textos se usan definiciones diferentes aquí se verán las equivalencias entre ellas.

Definición 2.1.1. *A una clase $\mathcal{C} \subseteq R$-Mod; se le llama* clase de pretorsión *si $\mathcal{C}$ es cerrada bajo cocientes y bajo sumas directas y se le llama* clase libre de pretorsión *si es cerrada bajo submódulos y productos directos.*

Definición 2.1.2. *Una* Teoría de torsión *en R-Mod es una pareja ordenada de subclases de R-Mod; $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ tales que satisfacen:*

1. $\forall T \in \mathcal{T}$, $\forall F \in \mathcal{F}$ $Hom(T, F) = 0$.

2. *Si* $\forall F \in \mathcal{F}$ $Hom(C, F) = 0$ *entonces* $C \in \mathcal{T}$.

3. Si $\forall T \in \mathcal{T}$ $Hom(T, C) = 0$ *entonces* $C \in \mathcal{F}$*.*

A la clase $\mathcal{T}$ de una teoría de torsión $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ se le llama *clase de torsión* y a los módulos de ella se les llama *módulos de torsión*, por otra parte a la clase $\mathcal{F}$ se le llama *clase libre de torsión* y a los módulos de ella se les llama *módulos libres de torsión*. Como ejemplos de teorías de torsión (t.t.) se tienen las triviales es decir; $(\{0\}, R\text{-}Mod)$ y $(R\text{-}Mod, \{0\})$ son t.t.

Lema 2.1.3. *Son equivalentes para* $(\mathcal{T}_1, \mathcal{F}_1)$ *y* $(\mathcal{T}_2, \mathcal{F}_2)$ *t.t.:*

1. $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$.

2. $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1$.

Demostración. $(1 \Rightarrow 2)$. Supongamos $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ y sea $F_2 \in \mathcal{F}_2$. Si $T \in \mathcal{T}_1$, como $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ entonces $Hom(T, F_2) = 0$ y por definición de t.t. $F_2 \in \mathcal{F}_1$. $(2 \Rightarrow 1)$ analogo. □

Como consecuencia de esto le podemos dar un orden parcial a las teorías de torsión. Decimos que $(\mathcal{T}_1, \mathcal{F}_1) \leq (\mathcal{T}_2, \mathcal{F}_2)$ si $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$

Para una subclase $\mathcal{C} \subseteq R\text{-}Mod$ definimos

$$\mathcal{F}_{\mathcal{C}} = \{F \in R\text{-}Mod | Hom(C, F) = 0 \forall C \in \mathcal{C}\}$$

y también

$$\mathcal{T}_{\mathcal{C}} = \{T \in R\text{-}Mod | Hom(T, F) = 0 \forall F \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}\}$$

Antes del teorema podemos observar que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{C}}$.

Teorema 2.1.4. *Para una subclase* $\mathcal{C} \subseteq R\text{-}Mod$ *la pareja ordenada* $(\mathcal{T}_{\mathcal{C}}, \mathcal{F}_{\mathcal{C}})$ *es una t.t. y* $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ *es la menor clase de torsión que contiene a* $\mathcal{C}$*.*

Demostración. Es claro que se satisface 1) de la definición 2.1.2. Por otra parte si $Hom(M, F) = 0$ $\forall F \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ entonces $M \in \mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ por lo que se cumple 2) de 2.1.2 . Si $Hom(T, M) = 0$ $\forall T \in \mathcal{T}_{\mathcal{C}}$; $Hom(T, M) = 0$ $\forall T \in \mathcal{C}$ y entonces tenemos $M \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}$, por lo que se cumple 3) de 2.1.2 y $(\mathcal{T}_{\mathcal{C}}, \mathcal{F}_{\mathcal{C}})$ es una t.t.

Ahora si $(\mathcal{T}', \mathcal{F}')$ es t.t. y $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}'$. Es necesario ver que $\mathcal{T}_{\mathcal{C}} \subseteq \mathcal{T}'$ lo que es equivalente a $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{C}}$. Sea $F' \in \mathcal{F}'$ entonces $\forall T' \in \mathcal{T}'$ $Hom(T', F') = 0$ en particular $Hom(T, F') = 0$ $\forall T \in \mathcal{T}_{\mathcal{C}}$. Por la definición tenemos $F' \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}$; $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ □

A la t.t. $(\mathcal{T}_{\mathcal{C}}, \mathcal{F}_{\mathcal{C}})$ la llamamos *Teoría de Torsión generada* por $\mathcal{C}$. De forma dual podemos definir la *Teoría de Torsión cogenerada* por $\mathcal{C}$; se define como:

$$\mathcal{T}^{\mathcal{C}} = \{T \in R\text{-}Mod | Hom(T, C) = 0 \ \forall C \in \mathcal{C}\}$$

y

$$\mathcal{F}^{\mathcal{C}} = \{F \in R\text{-}Mod | Hom(T, F) = 0 \ \forall T \in \mathcal{T}^{\mathcal{C}}\}$$

Teorema 2.1.5. *Para una clase $\mathcal{C} \subseteq R$-Mod, la pareja $(\mathcal{T}^{\mathcal{C}}, \mathcal{F}^{\mathcal{C}})$ cogenerada por $\mathcal{C}$ es una t.t. y se tiene que $\mathcal{F}^{\mathcal{C}}$ es la menor clase libre de torsión que contiene a $\mathcal{C}$.*

Demostración. Observamos que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}^{\mathcal{C}}$. Por construcción satisface 1) de 2.1.2 Si tenemos que $Hom(M, F) = 0$ para todo $F \in \mathcal{F}^{\mathcal{C}}$ en particular $Hom(M, F) = 0$ para todo $F \in \mathcal{C}$ por lo que $M \in \mathcal{T}^{\mathcal{C}}$ y se cumple 2) de 2.1.2. Si $Hom(T, M) = 0$ para todo $T \in \mathcal{T}^{\mathcal{C}}$ entonces $M \in \mathcal{F}^{\mathcal{C}}$; lo que indica que se cumple 3) de 2.1.2.

Ahora si tenemos $(\mathcal{T}', \mathcal{F}')$ una t.t. tal que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}'$; queremos ver que $\mathcal{F}^{\mathcal{C}} \subseteq \mathcal{F}'$ pero esto es equivalente a $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}^{\mathcal{C}}$. Sea $T \in \mathcal{T}'$, entonces $Hom(T, F) = 0$ para todo $F \in \mathcal{F}'$, en particular $Hom(T, F) = 0$ para todo $F \in \mathcal{C}$ por lo que $T \in \mathcal{T}^{\mathcal{C}}$. □

Al principio definimos las clases de pretorsión y libres de pretorsión como clases cerradas bajos ciertas propiedades y después definimos las clases de torsión y libres de torsión en función del Hom; a continuación se darán caracterizaciones de las teorías de torsión y nos dirán que como se espera, las clases de torsión son clases de pretorsión y las libres de torsión también son clases libres de pretorsión. Pero primero necesitamos un par de proposiciones.

Propiedad Universal de Núcleo 2.1.6. *Si $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ es exacta y $\alpha : M \to A$ es tal que $\alpha f = 0$ entonces existe un único $\alpha' : N \to A$ tal que $\alpha' g = \alpha$.*

Demostración.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "0"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha"] & N \arrow[r] \arrow[dl, "\alpha'"] & 0 \\
& & A & &
\end{tikzcd}$$

Definimos a $\alpha' : N \to A$ como $y \to \alpha(x)$ si $g(x) = y$. Si tenemos que $g(x) = g(x')$, tenemos que $g(x - x') = 0$ por lo que $x - x' \in Nuc(g) = Im(f)$; entonces por hipotesis $\alpha(x - x') = 0$ y $\alpha(x) = \alpha(x')$ por lo que está bien definido. □

Propiedad Universal de Conúcleo 2.1.7. *Si $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ es exacta y $\alpha : A \to M$ es talque $g\alpha = 0$ entonces existe un único $\alpha' : A \to L$ tal que $f\alpha' = \alpha$.*

Demostración.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \\
& & A \arrow[ul, "\alpha'"] \arrow[u, "\alpha"] \arrow[ur, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

Definimos a $\alpha' : A \to L$ como $x \to y$ si $f(y) = \alpha(x)$. Si $\alpha(x) = f(y) = f(y')$ como $g(\alpha(x)) = 0$, $g(f(y)) = g(f(y'))$ y $y = y'$. $\square$

Lema 2.1.8. *Sea $\mathcal{T}$ una clase de pretorsión y $\mathcal{F}$ una clase libre de pretorsión. Para un módulo M existe el mayor submódulo de pretorsión. Además existe el menor submódulo de M cuyo cociente es libre de pretorsión.*

Demostración. Consideremos a $\{N_i\}_{i\in I}$ la familia de submódulos de M que son módulos de pretorsión. Como $\mathcal{T}$ es una clase de pretorsión; consideramos $\oplus_{i\in I}N_i \to \sum_{i\in I} N_i$ por lo que $\sum_{i\in I} N_i$ es el mayor módulo de pretorsión.

Por otra parte consideremos a $\{N_i\}_{i\in I}$ la familia de submódulos de M cuyo cociente es libre de pretorsión. Como $\mathcal{F}$ es una clase libre de pretorsión, $\prod_{i\in I} M/N_i$ sigue siendo libre de pretorsión; ahora consideramos a $\alpha : M \to \prod_{i\in I} M/N_i$ dado por $x \to (x + N_i)_i$; tenemos que $Nuc(\alpha) = \bigcap_{i\in I} N_i$ por lo que $M/\bigcap_{i\in I} N_i$ se sumerge en $\prod_{i\in I} M/N_i$ y siguen siendo libre de pretorsión. $\bigcap_{i\in I} N_i$ es el menor submódulo de M cuyo cociente es libre de pretorsión. $\square$

Para una clase de pretorsión $\mathcal{T}$ denotamos al mayor submódulo de torsión de M como $T(M)$ o $T_\tau(M)$ si se quiere hacer referencia a la t.t. $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$.

Teorema 2.1.9. *Son equivalentes para una subclase $\mathcal{T} \subseteq R\text{-}Mod$:*

1. *$\mathcal{T}$ es un clase de torsión para alguna t.t. $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$.*

2. *$\mathcal{T}$ es cerrada bajo cocientes, sumas directas y extensiones.*

Demostración. $(1 \Rightarrow 2)$.

- $\mathcal{T}$ es cerrada bajo cocientes. Sean $T \in \mathcal{T}$ y $T \xrightarrow{f} N$ epimorfismo. Si $F \in \mathcal{F}$ entonces $Hom(N, F) = 0$ ya que si $\alpha : N \to F$ tomamos $T \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\alpha} F$ es decir $\alpha f \in Hom(T, F) = 0$ por lo que $\alpha = 0$ y $N \in \mathcal{T}$.

- $\mathcal{T}$ es cerrada bajo sumas directas. Si $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq \mathcal{T}$ y consideramos $F \in \mathcal{F}$. Tenemos entonces que $Hom(\oplus M_\alpha, F) \cong \prod Hom(M_\alpha, F)$ pero como $Hom(M_\alpha, F) = 0$ $\forall \alpha \in I$ tenemos $\oplus M_\alpha \in \mathcal{T}$.

- $\mathcal{T}$ es cerrada bajo extensiones. Sea $0 \to T_1 \to M \to T_2 \to 0$ exacta y $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$. Si $F \in \mathcal{F}$ y $\alpha : M \to F$ consideramos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T_1 \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "0"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha"] & T_2 \arrow[r] & 0 \\
& & F & &
\end{tikzcd}$$

como $\alpha f \in Hom(T_1, F) = 0$ y por la propiedad universal de núcleo 2.1.6 lo extendemos por $\alpha' : T_2 \to F$ que $\alpha' g = \alpha$ pero α' deber ser 0 y también $\alpha = 0$.

($2 \Rightarrow 1$) Tomemos la t.t. generada por $\mathcal{T}$, $(\mathcal{T}', \mathcal{F})$; es decir

$$\mathcal{F} = \{F | Hom(T, F) = 0\ \forall T \in \mathcal{T}\} \text{ y } \mathcal{T}' = \{T' | Hom(T', F) = 0\ \forall F \in \mathcal{F}\}$$

Falta ver que $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$ para lo que sólo es necesario ver que $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$. Sea $T' \in \mathcal{T}'$ entonces $Hom(T', F) = 0\ \forall F \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{T}$ ya es una clase de pretorsión (cerrada bajo cocientes y sumas directas) existe el mayor submódulo T de T'; $T \in \mathcal{T}$. Entonces es necesario ver que $T = T'$, supongamos que $T'/T \in \mathcal{F}$ en este caso tendríamos que $T'/T \in \mathcal{T}' \cap \mathcal{F} = \{0\}$ por lo que $T' = T$.

Para ver que si sucede que $T'/T \in \mathcal{F}$ consideremos a $0 \neq \alpha : T_1 \to T'/T$ con $T_1 \in \mathcal{T}$ entonces $0 \neq \alpha(T_1) \in \mathcal{T}$. Escribimos $\alpha(T_1) = L/T$ con $T \subseteq L \subseteq T'$. Consideramos

$$0 \to T \to L \to L/T \to 0$$

es exacta y como $\mathcal{T}$ es cerrada bajo extensiones $L \in \mathcal{T}$ lo cual contradice la elección de T, $\alpha = 0$ y concluimos que $Hom(T_1, T'/T) = 0$ y $T'/T \in \mathcal{F}$. □

Teorema 2.1.10. *Son equivalentes para una subclase $\mathcal{F} \subseteq R$-Mod:*

1. *$\mathcal{F}$ es una clase libre de torsión para alguna t.t. $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$.*

2. *$\mathcal{F}$ es cerrada bajo submódulos, productos directos y extensiones.*

Demostración. ($1 \Rightarrow 2$).

- $\mathcal{F}$ es cerrada bajo submódulos. Si $N \xrightarrow{i} F \in \mathcal{F}$ monomorfismo y sea $T \in \mathcal{T}$ y $\alpha : N \to T$ tenemos que $i\alpha : T \to F$ por lo que debe ser 0 y $\alpha = 0$; $Hom(T, N) = 0$ por lo que $N \in \mathcal{F}$.

- $\mathcal{F}$ es cerrada bajo productos directos. Si $\{M_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{F}$ y $T \in \mathcal{T}$; sabemos que $Hom(T, \prod_{i \in I} M_i) \cong \prod_{i \in I} Hom(T, M_i)$ pero $Hom(T, M_i) = 0$ para todo $i \in I$. Por lo tanto $Hom(T, \prod_{i \in I} M_i) = 0$ y tenemos $\prod_{i \in I} M_i \in \mathcal{F}$.

- $\mathcal{F}$ es cerrada bajo extensiones. Sea $0 \to F_1 \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} F_2 \to 0$ exacta y $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$. Si tenemos $\alpha : T \to N$ con $T \in \mathcal{T}$ consideramos:

$$\begin{tikzcd} & & T \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, "0"] & & \\ 0 \arrow[r] & F_1 \arrow[r, "f"] & N \arrow[r, "g"] & F_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

  tenemos que $g\alpha : T \to F_2$ que deber ser 0 y por la propiedad universal de conúcleo 2.1.7 existe $\alpha' : T \to F_1$ de forma que conmuta el diagrama pero $\alpha' = 0$ y eso indica que $\alpha = 0$.

$(2 \Rightarrow 1)$. Similar al teorema anterior sólo que esta vez consideraremos a la t.t. cogenerada por $\mathcal{F}$, $(\mathcal{T}, \mathcal{F}')$:

$$\mathcal{T} = \{T | Hom(T, F) = 0 \ \forall F \in \mathcal{F}\} \text{ y } \mathcal{F}' = \{F' | Hom(T, F') = 0 \ \forall T \in \mathcal{T}\}$$

Solo es necesario ver que $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$. Sea $F' \in \mathcal{F}'$. Como $\mathcal{F}$ es una clase libre de pretorsión (cerrada bajo submódulos y productos) encontramos el menor submódulo C de F' tal que el cociente está en $\mathcal{F}$. Si probamos que $C \in \mathcal{T}$ tenemos que que $C = 0$ y por lo tanto $F' \in \mathcal{F}$.

Para probar $C \in \mathcal{T}$, tomemos $F_1 \in \mathcal{F}$ y $0 \neq \alpha : C \to F_1$. Como $0 \neq \alpha$, $Ker(\alpha) \neq C$ y $\alpha(C) \cong C/Ker(\alpha) \in \mathcal{F}$. Consideremos

$$0 \to C/Ker(\alpha) \to F'/Ker(\alpha) \to F'/C \to 0$$

es exacta y como $\mathcal{F}$ es cerrada bajo extensiones, $F'/Ker(\alpha) \in \mathcal{F}$ lo que contradice la elección de C, lo que indica $\alpha = 0$ y $C \in \mathcal{T}$. $\square$

2.2. Teorías de Torsión Hereditarias

Al final del capítulo anterior para $\mathbb{Z}$-Mod se definieron los grupos de torsión y los libre de torsión, esas definiciones se pueden extender a R-Mod. Sin embargo ahora aparece la confunsión entre nombres y definiciones de diferentes conceptos.

En esta sección se introducirá el concepto de preradical para poder aclarar estas dificultades y se verán algunas propiedades entre prerradicales y las t.t. Pero principalmente usamos los preradicales para definir las teorías de torsión hereditarias que serán con las cuales se estará trabajando principalmente. Aunque la definición de preradical se generaliza a categorías aquí solo trabajaremos en R-Mod. Las propiedades y el estudio de los prerradicales es demasiado extenso y aquí no se desarrollará a fondo, sólo lo necesario para continuar nuestro estudio.

Definición 2.2.1. *Un* prerradical *en R-Mod es un subfuntor r del funtor identidad, es decir r asigna a cada M un submódulo $r(M)$ tal que si tenemos $\varphi : M \to N$ tenemos que $\varphi(r(M)) \leq r(N)$. Esto se puede expresar como que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] & N \\ r(M) \arrow[u] \arrow[r, "\varphi|_{r(M)}"] & r(N) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

A la clase de prerradicales en R-Mod se le denota R-Pr y podemos definir dos operaciones. Si $r, s \in R$-Pr definimos:

- $rs : R\text{-}Mod \to R\text{-}Mod$ como $M \to r(s(M))$
- $(r : s) : R\text{-}Mod \to R\text{-}Mod$ como $r : s(M)$ es tal que $(r : s)(M)/r(M) = s(M/r(M))$

Decimos que un preradical r es *idempotente* si $rr = r$ $(r(r(M)) = M\ \forall M)$ y decimos que es *radical* si $r : r = r$ $(r(M/r(M)) = 0)$.

Dado un prerradical r le asociamos dos clases de módulos:

$$\mathcal{T}_r = \{M|r(M) = M\} \text{ y } \mathcal{F}_r = \{M|r(M) = 0\}$$

como era de esperarse la clase $\mathcal{T}_r$ es una clase de pretorsión y la clase $\mathcal{F}_r$ es una clase libre de pretorsión, y cumple que $Hom(M, N) = 0$ para $M \in \mathcal{T}_r,\ N \in \mathcal{F}_r$.

Por otra parte si tenemos una clase de pretorsión $\mathcal{C}$ podemos definir un prerradical idempotente

$$r_{\mathcal{C}} : R\text{-}Mod \to R\text{-}Mod$$

como

$$M \to \sum\{N_i|N_i \leq M,\ N_i \in \mathcal{C}\}$$

Notemos que este es un prerradical idempotente y que $r_{\mathcal{C}}(M)$ es el mayor submódulo de M que pertenece a $\mathcal{C}$.

Corolario 2.2.2. *Existe una asignación biyectiva entre la clase de prerradicales idempotentes y las clases de pretorsión (R-Prtor).*

Ahora se puede ver que el estudio de las teorías de torsión esta ligado al estudio de los prerradicales, ahora si los prerradicales tienen mas propiedades las clases $\mathcal{T}_r$ que definen tendrán mas propiedades y recíprocamente si consideramos ahora teorías de torsión o teorías de torsión hereditarias los prerradicales que determinan deberían tener mas propiedades.

Antes de continuar se mencionan algunas propiedades de los radicales y prerradicales.

Proposición 2.2.3. *Sea r un radical en R-Mod; entonces $r(M)$ es el menor submódulo de M talque $M/r(M) \in \mathcal{F}_r$*

Demostración. Para empezar vemos que $r(M)$ cumple, es decir que se tiene $r(M/r(M)) = 0$. Como r es radical, $r(M/r(M)) = 0$ por lo que $M/r(M) \in \mathcal{F}_r$. Ahora si $N \leq M$ y $M/N \in \mathcal{F}_r$. Tomamos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "p"] & M/N \\
r(M) \arrow[u, "i"] \arrow[r, "p|_{r(M)}"] & r(M/N) = 0 \arrow[u, "i"]
\end{tikzcd}$$

obtenemos $r(M) \leq Nuc(p) = N$. □

Observemos que si r es un prerradical idempotente entonces $\mathcal{F}_r$ es cerrada bajo extensiones; si $A, C \in \mathcal{F}_r$ tenemos que $r(A) = r(C) = 0$. Entonces $r(B) \leq Nuc(g) \cong Im(f) \cong A$ y por eso $r(B) = rr(B) \leq r(A) = 0$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & 0 \\
 & r(A) \arrow[u] \arrow[r] & r(B) \arrow[u] \arrow[r] & r(C) \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Recordemos que un funtor r exacto izquierdo es tal que para toda $0 \to A \to B \to C \to 0$ sucesión exacta tenemos que $0 \to r(A) \to r(B) \to r(C)$ es exacta.

Lema 2.2.4. *Son equivalentes para r un prerradical:*

1. *r es un funtor exacto izquierdo.*
2. *Si $N \leq M$ entonces $r(N) = r(M) \cap N$.*
3. *r es idempotente y $\mathcal{T}_r$ es cerrada bajo submódulos.*

Demostración. $(1 \Rightarrow 2)$. Si tenemos el diagrama con el primer renglón exacto

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & M \arrow[r, "p"] & M/N \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & r(N) \arrow[u] \arrow[r] & r(M) \arrow[u] \arrow[r] & r(M/N) \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

$Nuc(p_{r(M)}) = N \cap r(M)$ por lo que el segundo renglón es exacto si y sólo si $r(N) = N \cap r(M)$.

$(2 \Rightarrow 3)$. Como $r(M) \leq M$, $rr(M) = r(M) \cap r(M) = r(M)$, r es idempotente. Si $\mathcal{T}_r = \{M | r(M) = M\}$ y $N \leq M$, $r(N) = N \cap M = N$.

$(3 \Rightarrow 2)$. $r(N) \leq N$ y $N \leq M \Rightarrow r(N) \leq r(M)$ Por lo que $r(N) \leq N \cap r(M)$. $r(M) \in \mathcal{T}_r$ por ser idempotente y cerrado bajo submódulos entonces $r(M) \cap N = r(r(M) \cap N) \leq r(M)$. □

Si tomamos una t.t. $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ y el prerradical idempotente definido $t_{\mathcal{T}}(M) = \sum\{N_i \leq M | N_i \in \mathcal{T}\}$ podemos encontrar una caracterización para los módulos libres de torsión: $M \in \mathcal{F} \iff t_{\mathcal{T}}(M) = 0$. En efecto si $M \in \mathcal{F}$ entonces $t_{\mathcal{T}}(M) \leq M$ y $t_{\mathcal{T}}(M) \in \mathcal{T} \cap \mathcal{F} = \{0\}$. Por otra parte si $t_{\mathcal{T}}(M) = 0$ recordemos que $M \in \mathcal{F} \iff Hom(T, M) = 0\ \forall T \in \mathcal{T}$ y usando el digrama conmutativo siguiente:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\alpha"] & M \\ T = t_{\mathcal{T}}(M) \arrow[u] \arrow[r] & t_{\mathcal{T}}(M) = 0 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Obtenemos que $Hom(T, M) = 0\ \forall T \in \mathcal{T}$.

Observamos tambien que el prerradical idempotente $t_{\mathcal{T}}$ es radical. En efecto, $t_{\mathcal{T}}(M/t_{\mathcal{T}}(M)) = 0 \iff M/t_{\mathcal{T}}(M) \in \mathcal{F}$. Si $L/t_{\mathcal{T}}(M) \leq M/t_{\mathcal{T}}(M)$ y $L/t_{\mathcal{T}} \in \mathcal{T}$ vemos que por la sucesión exacta

$$0 \to t_{\mathcal{T}}(M) \to L \to L/t_{\mathcal{T}}(M) \to 0$$

y por la cerradura bajo extensiones $L \in \mathcal{T}$. Lo que indica $L \leq t_{\mathcal{T}}(M)$ y $L/t_{\mathcal{T}}(M) = 0$ y se concluye $M/t_{\mathcal{T}}(M) \in \mathcal{F}$.

Por otra parte si tomamos un radical idempotente r las clases $(\mathcal{T}_r, \mathcal{F}_r)$ forma una t.t. La única dificultad es probar la segunda condición de la definición: Si $Hom(C, F) = 0\ \forall F \in \mathcal{F}_r$ entonces $C \in \mathcal{T}$. Supongamos que $r(C) \neq C$ entonces $C/r(C) \neq 0$. Pero como r es radical $r(C/r(C)) = 0$ lo que indica que $C/r(C)$ es libre de torsión que es una contradicción.

Lo anterior se resume en el siguiente corolario.

Corolario 2.2.5. *Hay una asignación biyectiva entre las t.t. (R-Tor) y los radicales idempotentes.*

El siguiente teorema juega un papel muy importante en la definición de las teorías de torsión hereditarias.

Teorema 2.2.6. *Para una t.t. $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ son equivalentes:*

1. *$\mathcal{T}$ es cerrada bajo submódulos.*
2. *$\mathcal{F}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas.*

Demostración. Recordemos que a $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ se le asocia un radical idempotente.

$(1 \Rightarrow 2)$. Como $\mathcal{T}$ es cerrada bajo submódulos y r es idempotente se cumplen las condiciones del lema anterior. Sea $F \in \mathcal{F}$; $F \leq_e E(F)$. Tenemos que $0 = t(F) = t(E(F)) \cap F$ entonces $t(E(F)) = 0$ y $E(F) \in \mathcal{F}$.

(2 ⇒ 1). Sea $T \in \mathcal{T}$ y $C \leq T$. Podemos encontrar un morfismo $f : T \to E(C/t(C))$ tal que $fi = i'p$ por hipótesis $E(C/t(C)) \in \mathcal{F}$ por lo que $f = 0$ entonces $p = 0$ y $C = t(C) \in \mathcal{T}$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p"] & T \\
 & C/t(C) \arrow[d, "i'"] & \\
 & E(C/t(C)) &
\end{tikzcd}$$

□

Definición 2.2.7. *A una t.t.* $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ *que cumple las condiciones del teorema 2.2.6 se le llama* Teoría de Torsión Hereditaria*.*

Como consecuencia del lema 2.2.4 y la definición 2.2.7 tenemos.

Corolario 2.2.8. *Hay una correspondencia biyectiva entre las teorías de torsión hereditarias y los radicales exactos izquierdos.*

Las teorías de torsión hereditarias son aquellas con las que se trabajará la mayor parte de tiempo, muchos autores nombran directamente a las teorías de torsión hereditarias solo como teorías de torsión. Los teoremas siguientes son de importancia para dar una caracterización de las t.t. hereditarias a partir de módulos inyectivos.

Proposición 2.2.9. *Una t.t.hereditaria* $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ *esta generada por la familia de los módulos cíclicos que están en* $\mathcal{T}$*.*

Demostración. Notemos que $M \in \mathcal{T} \iff Rx \in \mathcal{T}\ \forall x \in M$. □

Teorema 2.2.10. *Una t.t.* $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ *es hereditaria si y sólo si puede ser cogenerada por un módulo inyectivo.*

Demostración. (⇒). Sea $E' = \prod_{A \in \mathcal{A}} E(R/A)$ donde $\mathcal{A} = \{A \leq R | R/A \in \mathcal{F}\}$. Como $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es hereditaria $E' \in \mathcal{F}$ así que $Hom(T, E') = 0\ \forall T \in \mathcal{T}$. Tomamos la t.t. cogenerada por E'.

$$\mathcal{T}_{E'} = \{T | Hom(T, E) = 0\}$$

$$\mathcal{F}_{E'} = \{F | Hom(T, F) = 0\ \forall T \in \mathcal{T}_{E'}\}$$

Por otra parte si $M \notin \mathcal{T}$ entonces $\exists 0 \neq x \in M$ talque $Rx \notin \mathcal{T}$. Debe existir $F \in \mathcal{F}$ y $0 \neq \alpha : Rx \to F$, $\alpha(Rx) = R\alpha(x) \leq F$ y $R\alpha(x) \cong R/(0 : \alpha(x)) \in \mathcal{F}$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Rx \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha"] & M \\ & R\alpha(x) \cong R/(0:\alpha(x)) \arrow[r, "i'"] & E' \end{tikzcd}$$

Existe un morfismo $f : M \to E'$ que hace que el diagrama conmute y $f \neq 0$; $Hom(M, E') \neq 0$. Se concluye que $T \in \mathcal{T} \iff Hom(T, E) = 0$ es decir $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{E'}$.

($\Leftarrow$). Sea E inyectivo y su t.t. cogenerada $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$. p.d. $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es hereditaria. Sea $M \in \mathcal{T}_E$ y $L \leq M$, si $\alpha : L \to E$ entonces

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & M \\ & E & \end{tikzcd}$$

existe $\alpha' : M \to E$ tal que $\alpha'_L = \alpha$. Como $M \in \mathcal{T}_E$ entonces $\alpha' = 0$ y $\alpha = 0$; $L \in \mathcal{T}_E$. $\square$

Teorema 2.2.11. *Sea $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ una t.t. hereditaria cogenerada por E inyectivo entonces se tiene $M \in \mathcal{F} \iff \exists M \to E^X$ monomorfismo para algún conjunto X.*

Demostración. ($\Leftarrow$). Es claro de la definición. ($\Rightarrow$). Sea $M \in \mathcal{F}$ se cumple que $\forall 0 \neq x \in M\ Rx \notin \mathcal{T}$. $\mathcal{T} = \{M | Hom(M, E = 0)\}$ entonces $\exists 0 \neq \alpha : Rx \to E$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Rx \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha"] & M \\ & E & \end{tikzcd}$$

$\exists \alpha' : M \to E$ tal que $\alpha'_{Rx} = \alpha$. Ahora definimos donde $I = Hom(M, E)$

$$\eta : M \to E^I$$

$$x \to (\varphi(x))_{\varphi \in I}$$

Si $x \neq y$ entonces $x - y \neq 0$ entonces $\exists \alpha' : M \to E$ tal que $\alpha'(x - y) \neq 0$ entonces $\alpha'(x) \neq \alpha'(y)$; lo que concluye que η es monomorfismo. $\square$

En conclusión dada una t.t hereditaria $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ podemos tomar un inyectivo E para describirla como:

$$\mathcal{T} = \{T | Hom(T, E) = 0\}$$

$$\mathcal{F} = \{F | \exists F \to E^X \text{ monomorfismo}\} \text{ p.a. } X\text{conjunto}$$

2.3. Clases de Módulos

Las clases de pretorsión, de torsión hereditaria, libres de torsión, etc. están caracterizadas por las propiedades bajo las cuales son cerradas, es decir las de pretorsión son cerradas bajo cocientes y sumas directas pero si es de pretorsión hereditaria también lo es bajo submódulos. Ahora otra clase de módulos con la que hemos trabajado es $\sigma[M]$ para un módulo M. Esta clase forma una subcategoría plena de R-Mod y como ya se vio es cerrada bajo cocientes, submódulos, sumas directas pero cerrada sólo bajo cápsulas M-inyectivas. El siguiente Lema ayuda a relacionar el concepto de $\sigma[M]$ con el de las clases de este capítulo.

Definición 2.3.1. *Para una clase de módulos $\mathcal{A}$, seleccionamos un conjunto $\{X_i\}_{i\in I}$ de representantes bajo isomorfismo de submódulos cíclicos de $\mathcal{A}$, es decir $\forall A \in \mathcal{A}$ y $\forall a \in A$ (Ra no necesariamente pertenece a $\mathcal{A}$), existe un $i \in I$ para el cual $Ra \cong X_i$. Entonces definimos a $M_{\mathcal{A}} = \oplus_{i\in I}\{X_i\}$*

Lema 2.3.2. *Para una clase $\mathcal{A}$ de módulos se tiene:*

1. *$\sigma[M_{\mathcal{A}}]$ es la menor clase de pretorsión hereditaria que contiene $\mathcal{A}$.*
2. *$\mathcal{A}$ es una clase de pretorsión hereditaria si y sólo si $\mathcal{A} = \sigma[M_{\mathcal{A}}]$.*

Demostración. Es claro que $\sigma[M_{\mathcal{A}}]$ es una clase de pretorsión. La intersección de las clases hereditarias de pretorsión que contienen a $\mathcal{A}$ es tambien una clase de pretorsión hereditaria y contiene a $\sigma[M_{\mathcal{A}}]$. Sólo falta ver que $\mathcal{A} \subseteq \sigma[M_{\mathcal{A}}]$. Para $N \in \mathcal{A}$ y $x \in N$, $Rx \to M_{\mathcal{A}}$ es mono y $Rx \in \sigma[M_{\mathcal{A}}]$. Por lo que $N = \sum\{Rx|x \in N\} \in \sigma[M_{\mathcal{A}}]$. 2) se sigue de 1). $\square$

Corolario 2.3.3. *Una clase $\mathcal{A}$ de módulos es una clase de pretorsión hereditaria si y sólo si $\mathcal{A} = \sigma[M]$ para algún módulo M.*

2.4. Clases Naturales

Definición 2.4.1. *Para una clases no vacía $\mathcal{F}$ definimos la clase $d(\mathcal{F})$ y la clase $c(\mathcal{F})$ mediante:*

$$d(\mathcal{F}) = \{N \in R\text{-}Mod|\forall 0 \neq W \leq N,\ \exists 0 \neq V \leq W,\ V \hookrightarrow A \text{ p. a. } A \in \mathcal{F}\}$$

$$c(\mathcal{F}) = \{W \in R\text{-}Mod|\forall 0 \neq V \leq W,\ V \not\hookrightarrow A\ \forall A \in \mathcal{F}\}$$

Los operadores d y c se pueden aplicar a cualquier conjunto no vacío o clase de módulos. En otras palabras $d(\mathcal{F})$ son los módulos N tal que todos sus submódulos no cero W tienen un submódulo V que se sumerge en algún módulo $A \in \mathcal{F}$, mientras que $c(\mathcal{F})$ son los módulos W que ningún submódulo no cero se puede sumergir en algún $A \in \mathcal{F}$. Observemos que:

$$\begin{aligned} c(c(\mathcal{F})) &= \{N | \forall 0 \neq W \leq N,\ W \not\hookrightarrow A \forall A \in c(\mathcal{F})\} \\ &= \{N | \forall 0 \neq W \leq N,\ \exists 0 \neq V \leq W,\ V \hookrightarrow A \in \mathcal{F}\} \\ &= d(\mathcal{F}) \end{aligned}$$

Sea $\mathcal{F}' = \{N | N \hookrightarrow A \text{ p.a. } A \in \mathcal{F}\}$, es decir $\mathcal{F}$ pero cerrada bajo submódulos; es decir $\mathcal{F}'$ es la menor clase hereditaria que contiene a $\mathcal{F}$. Entonces podemos simplificar como:

$$d(\mathcal{F}) = d(\mathcal{F}') = \{N | \forall 0 \neq W \leq N,\ \exists 0 \neq V \leq W,\ V \in \mathcal{F}'\}$$

y

$$c(\mathcal{F}) = c(\mathcal{F}') = \{W | \forall 0 \neq V \leq W,\ V \notin \mathcal{F}'\}.$$

Ahora de las defincion 2.4.1 se ve que $c(c(\mathcal{F})) = c(c(\mathcal{F}')) = d(\mathcal{F}')$ y ya vimos que $d(\mathcal{F}) = c(c(\mathcal{F}))$, por lo que se piensa a d y c como operadores complementarios. Podemos ver que $c(\mathcal{F}) \cap d(\mathcal{F}) = \{0\}$. Cuando solo se usa un módulo en vez de una clase abreviamos $c(\{P\}) = c(P)$ o $d(\{P\}) = d(P)$. Si $\mathcal{F} = \emptyset$ tenemos que $c(\emptyset) = R\text{-}Mod$ y $d(\emptyset) = \{0\}$. El concepto de clase natural está ligado a estos dos operadores y muchas de sus propiedades se expresan por medio de ellos.

Definición 2.4.2. *Una clase no vacía de módulos $\mathcal{K}$ es una* clase natural *si es cerrada bajo submódulos, sumas directas arbitrarias y cápsulas inyectivas.*

A la colección de todas las clases naturales en $R\text{-}Mod$ se le denota $\mathcal{N}(R)$. Para el estudio de las clases naturales usaremos el siguiente lema. En el siguiente enunciando denotaremos $(x)^{\perp} = \{r \in R | rx = 0\}$.

Argumento de Proyección 2.4.3. *Sea una familia de módulos $\{W_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ y $0 \neq x \in E(\oplus_{\alpha \in \Lambda} W_\alpha)$. Entonces existe $\alpha \in \Lambda$, $0 \neq r \in R$ y $0 \neq w \in W_\alpha$ talque $0 \neq Rrx \cong Rw \leq W_\alpha$ con $(rx)^{\perp} = w^{\perp}$.*

Demostración. Tenemos que $Rx \cap \bigoplus_\Lambda W_\alpha \neq 0$ lo que implica que $N \cap \bigoplus_{i \in F} W_i \neq 0$ para algún $F \subseteq \Lambda$ finito. Sea K un subconjunto máximo de F tal que $N \cap_{i \in K} W_i = 0$. Sea $j \in F - K$ entonces $N = Rx \cap (W_j \oplus (\bigoplus_{i \in K} W_i)) \neq 0$.

Sea $rx \in N$ entonces $rx = w_{j_0} \oplus \sum_K w_i$, si $r'x = w_{j_0} \oplus \sum_K w_i$ entonces $rx - r'x = \sum_K w_i$ pero $Rx \cap \bigoplus_K W_i = 0$ entonces $rx = r'x$, por lo tanto si $rx \in N$, rx queda determinado por W_j. Sea $rx = w_j \sum_K w_i \in N$ tomemos el morfismo $Rrx \to Rw_j$ el cual es suprayectivo y si $sw_j = s'w_j$ entonces $(s-s')w_j = 0$, $(s-s')rx = (s-s')w_j + (s-s')\sum_K w_i$ entonces $srx - s'rx = \sum_K w_i$ por lo tanto $srx - s'rx = 0$. Entonces $Rrx \cong Rw_j$.

Ahora si $srx = 0 = sw_j + s\sum_K w_i$ entonces $sw_j = s\sum_K w_i$ lo que implica que $sw_j = 0$ por lo tanto $rx^\perp \subseteq w_j$, si $sw_j = 0$ entonces $srx = sw_j + s\sum_K w_i = s\sum_K w_i$ lo que implica que $srx = 0$. Por lo tanto $w_j^\perp = rx^\perp$ $\square$

Es decir, el argumento de proyección dice que todo submódulo no cero de $E(\sum_{\alpha\in\Lambda} W_\alpha)$ contiene un submódulo no cero isomorfo a un submódulo de algún W_α.

Teorema 2.4.4. *Lo siguiente sucede para una clase no vacía de módulos $\mathcal{F}$:*

1. *$d(\mathcal{F})$ y $c(\mathcal{F})$ son clases naturales y $d(\mathcal{F}) \cap c(\mathcal{F}) = \{0\}$.*

2. *$d(\mathcal{F}) = c(c(\mathcal{F}))$ es la menor clase natural que contiene a $\mathcal{F}$.*

3. *$\forall \mathcal{K} \in \mathcal{N}(R)$, $\mathcal{K} = c(c(\mathcal{K}))$.*

Demostración. 1). Para $d(\mathcal{F})$; claramente es cerrada bajo submódulos, si tomamos $N \in \mathcal{F}$ y $0 \neq W \leq E(N)$ tenemos que como $N \leq_e E(N)$, $0 \neq N \cap W \leq N$ por lo que existe $0 \neq V \leq N \cap W \leq W$ tal que $V \hookrightarrow A \in \mathcal{F}$. Para ver que también es cerrada bajo sumas directas sólo es necesario aplicar el argumento de proyección a los submódulos de $\sum_{\alpha\in\Lambda} W_\alpha \leq E(\sum_{\alpha\in\Lambda} W_\alpha)$. De forma similar usando al argumento de proyección 2.4.3 $c(\mathcal{F})$ es una clase natural. También ya se observó que $d(\mathcal{F}) \cap c(\mathcal{F}) = \{0\}$.

3) Para todo $0 \neq M \in c(c(\mathcal{K}))$, usando el Lema de Zorn podemos encontrar $\sum_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha \leq_e M$ talque $0 \neq V_\alpha \in \mathcal{K}$. Si consideramos las familias independientes de submódulos de M que están en $\mathcal{K}$ resulta que no es vacía porque dado que $\mathcal{K}$ es una clase natural; podemos encontrar una familia independiente máxima y la suma de esta debe ser esencial en M porque si no lo fuera contradiria la maximalidad de ella. Por lo que $M \in \mathcal{K}$ y $\mathcal{K} = c(c(\mathcal{K}))$.

2) $\mathcal{F} \subseteq c(c(\mathcal{F}))$. Si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{K} \in \mathcal{N}(R)$, tenemos que $c(c(\mathcal{F})) \subseteq c(c(\mathcal{K})) = \mathcal{C}$. De hecho $d(\mathcal{F}) = c(c(\mathcal{F}))$. $\square$

Corolario 2.4.5. *Toda clase natural $\mathcal{K}$ es cerrada bajo extensiones.*

Demostración. Si $o \to A \to B \to C \to 0$ exacta y $A, C \in \mathcal{K}$ pero $B \notin \mathcal{K}$. Si $B \notin c(c(\mathcal{K}))$ por el teorema anterior existe un $0 \neq D \leq B$, $D \in c(\mathcal{K})$. $A \cap D = 0$ y $0 \neq D \cong (D+A)/A \hookrightarrow C$ (es consecuencia de $C \cong B/A$ y $A + D \leq B$) lo que contradice a $C \in \mathcal{K}$. $\square$

El siguiente teorema se va a demostrar después de una forma más general para M-clases inyectivas.

Teorema 2.4.6. *Para un módulo A, $d(A) = \{B | \exists I, B \hookrightarrow E(A^{(I)})\}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{C} = \{B | \exists I, B \hookrightarrow E(A^{(I)})\}$. Es claro que $A \in \mathcal{C}$ y que $\mathcal{C} \subseteq d(A)$, ahora solo en necesario ver que $\mathcal{C}$ es una clase natural. $\mathcal{C}$ es cerrada bajo submódulos y cápsulas inyectivas. Si consideramos $\{B_j\}_{j \in J}$ una familia de $\mathcal{C}$, vemos que $\oplus B_j \hookrightarrow \oplus E(A^{(I_j)})$ donde cada $B_j \hookrightarrow E(A^{(I_j)})$. Entonces tenemos que $A^{(I_j)} \hookrightarrow \oplus_{j \in J} A^{(I_j)} \hookrightarrow E(\oplus_{j \in J} A^{(I_j)})$ $\forall j$ lo que indica $E(A^{(I_j)}) \hookrightarrow E(\oplus_{j \in J} A^{(I_j)})$ $\forall j$ y $\oplus_{j \in J} E(A^{(I_j)}) \hookrightarrow E(\oplus_{j \in J} A^{(I_j)})$. Lo que concluye que $\mathcal{C}$ es cerrada bajo sumas directas. $\square$

Teorema 2.4.7. *Para una clase $\mathcal{F}$ de módulos, se tiene $d(\mathcal{F}) = d(M_{\mathcal{F}})$*

Demostración. Claramente se tiene $M_{\mathcal{F}} \in d(\mathcal{F})$ y $d(M_{\mathcal{F}}) \subseteq d(\mathcal{F})$. Para la otra contención sólo es necesario que los si $N \in \mathcal{F}$ se tiene $N \in d(M_{\mathcal{F}})$; lo cual sucede porque para los submódulos $0 \neq V \leq N$ podemos considerar $0 \neq Rx \leq V$ y Rx se puede sumerger en $M_{\mathcal{F}}$. $\square$

Como ejemplos de clases naturales está una clase libre de torsión hereditria y una clase de torsión hereditaria estable (se le llama *estable* a una t.t. si su clase de torsión es cerrada bajo cápsulas inyectivas). Una clase natural en general no es una clase de torsión hereditaria o una clase libre de torsión hereditaria. Los $\mathbb{Z}$-módulos de torsión son un clase natural que no es cerrada bajo productos, por lo que no es un clase libre de torsión hereditaria y los $\mathbb{Z}$-módulos libres de torsión es una clase que no es cerrada bajo cocientes por lo que no es una clase de torsión hereditaria.

2.5. Clases M-Naturales

Definición 2.5.1. *Una subclase $\mathcal{K}$ de $\sigma[M]$ que es cerrada bajo submódulos, sumas directas arbitrarias y cápsulas M-inyectivas se le llama* Clase M-Natural.

A a colección de clases M-Naturales se le denota $\mathcal{N}(R, M)$. El siguiente lema muestra que las clases M-naturales son cerradas bajo extensiones eseciales.

Lema 2.5.2. *Sea $\mathcal{K}$ una clase M- natural y $X \leq_e N \in \sigma[M]$. Si $X \in \mathcal{K}$ entonces $N \in \mathcal{K}$.*

Demostración. Como $X \leq_e N$, $E(X) = E(N)$ y $E_M(X) = E_M(N)$. $N \subseteq E_M(N) \in \mathcal{K}$ y $N \in \mathcal{K}$. $\square$

Teorema 2.5.3. *Sea $\mathcal{F}$ una subclase de $\sigma[M]$, entonces:*

1. *$d(\mathcal{F}) \cap \sigma[M]$ es la menor clase M-natural que contiene a $\mathcal{F}$.*

2. *$\mathcal{F}$ es una clase M-natural si y sólo si $\mathcal{F} = d(\mathcal{F}) \cap \sigma[M]$.*

Demostración. 1). $d(\mathcal{F})$ es un clase natural por lo que $d(\mathcal{F}) \cap \sigma[M]$ es un clase M-natural y sucede que $\mathcal{F} \subseteq d(\mathcal{F}) \cap \sigma[M]$. Supongamos que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}$ es una clase M-natural. Para $N \in d(\mathcal{F}) \cap \sigma[M]$, N contiene como submódulo esencial a una suma directa $\sum\{N_i|i \in I\}$ de todos los $N_i \in \mathcal{F}$ (como consecuencia del Lema de Zorn y de las familias independientes de submódulos de N). Entonces $\sum\{N_i|i \in I\} \in \mathcal{L}$ dado que es cerrada bajo submódulos. Por el lema anterior se tiene que $N \in \mathcal{L}$; $d(\mathcal{F} \cap \sigma[M] \subseteq \mathcal{L})$. 2) se sigue de 1). □

Como corolario concluimos que:

Corolario 2.5.4. *Una clase de módulos $\mathcal{F}$ es una clases M-natural si y sólo si $\mathcal{F} = \mathcal{K} \cap \sigma[M]$ para alguna $\mathcal{K}$ clase natural.*

Corolario 2.5.5. *Para $\mathcal{K}$ una clase M-natural y $X \leq N \in \sigma[M]$, se tiene:*

1. *Si $N \notin \mathcal{K}$ entonces existe $0 \neq Y \leq N$ con $Y \in c(\mathcal{K})$.*

2. *Si $X \in \mathcal{K}$ y $N/X \in \mathcal{K}$ entonces $N \in \mathcal{K}$.*

Demostración. 1) Como $N \in \sigma[M]$ pero $N \notin \mathcal{K} = d(\mathcal{K}) \cap \sigma[M]$, $N \notin d(\mathcal{K})$. Esto indica la existencia de $0 \neq Y \leq N$ con $Y \in c(\mathcal{K})$.

2) Supongamos que $N \notin \mathcal{K}$, por 1) existe $0 \neq Y \leq N$ talque $Y \in c(\mathcal{K})$. Como $X \in \mathcal{K}$ sucede que $X \cap Y = 0$. Ahora tenemos que $Y \hookrightarrow N/X \in \mathcal{K}$, lo que muestra la contradicción $Y \in \mathcal{K}$.

□

Capítulo 3

Relaciones entre Teorías de Torsión y Clases Naturales en $\sigma[M]$

En este capítulo se trabajará con clases naturales y teorías de torsión en $\sigma[M]$; se mostrarán las relaciones entre ellas, como cuando una clase natural y su complemento forman una teoría de torsión hereditaria. Como una clase natural determina una teoría de torsión hereditaria y en particular una clase M-natural determina una clase de torsión en $\sigma[M]$ y se mostraran propiedades de ella.

3.1. Representaciones de Clases M-Naturales

Se menciona una propiedad de los prerradicales.

Proposición 3.1.1. *Si r es un prerradical en R-Mod y $\{M_\alpha\}_{\alpha\in X}$ entonces se tiene que $r(\oplus_{\alpha\in X}M_\alpha) = \oplus_{\alpha\in X}r(M_\alpha)$.*

Demostración. Para cada $\alpha \in X$:

$$\begin{tikzcd} M_\alpha \arrow[r, "i"] & \oplus_{\alpha\in X}M_\alpha \\ r(M_\alpha) \arrow[u, "i"] \arrow[r, "i"] & r(\oplus_{\alpha\in X}M_\alpha) \arrow[u, "i"] \end{tikzcd}$$

entonces $r(M_\alpha) \leq r(\oplus_{\alpha\in X}M_\alpha)$, por lo que $\oplus_{\alpha\in X}r(M_\alpha) \leq r(\oplus_{\alpha\in X}M_\alpha)$.

Por otra parte tenemos que:

$$\begin{tikzcd} \oplus_{\alpha\in X} M_\alpha \arrow[r, "p_\beta"] & M_\beta \\ r(\oplus_{\alpha\in X} M_\alpha) \arrow[u, "i"] \arrow[r, "p"] & r(M_\beta) \arrow[u, "i"] \end{tikzcd}$$

sea $x \in r(\oplus M_\alpha)$, $x = \sum m_\alpha$ y bajo $p(x) = m_\beta \in r(M_\beta)$; lo que muestra $r(\oplus_{\alpha\in X} M_\alpha) \leq \oplus_{\alpha\in X} r(M_\alpha)$. □

Ahora si recordamos $Tr(M, N) = \sum \varphi(M)$, donde $\varphi \in Hom(M, N)$. Para M un módulo fijo definimos

$$Tr(M, \_) : R\text{-}Mod \to R\text{-}Mod$$

$$N \to Tr(M, N)$$

Si tenemos a $f : A \to B$ consideramos:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \\ Tr(M, A) \arrow[u, "i"] \arrow[r, "f"] & Tr(M, B) \arrow[u, "i"] \end{tikzcd}$$

queremos ver que $f(Tr(M, A)) \leq Tr(M, B)$.

$$f(Tr(M, A)) = f(\sum \varphi(M)) = \sum f\varphi(M) \leq Tr(M, B)$$

Es decir el diagrama conmuta. Concluimos que $Tr(M, \_)$ es un prerradical en R-Mod y la proposición 3.1.1 nos indica que para una familia $\{N_\alpha\}_{\alpha\in X}$ de módulos, $Tr(M, \oplus N_\alpha) \cong \oplus Tr(M, N_\alpha)$. Esta observación será útil en las siguientes proposiciones.

Lema 3.1.2. *Sea $\mathcal{K}$ una clase M-natural. Entonces existe $C \in \mathcal{K}$ tal que*

$$\mathcal{K} = \{N | \exists I,\ N \hookrightarrow Tr(M, E(C^{(I)}))\}.$$

Demostración. Sea $C = \oplus_{i\in J}\{X_i\}$ donde $X_i \in \sigma[M]$ forma un juego de representantes de las clases de isomorfismos de los cíclicos de $\mathcal{K}$. Llamemos a la clase $\mathcal{C} = \{N | \exists I,\ N \hookrightarrow Tr(M, E(C^{(I)}))\}$, es claro que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$. Para $N \in \mathcal{K}$, existe $\oplus_{i\in I} Y_i \leq_e N$ para el cual $N_i \cong X_i$ (considerando las familias de submódulos independientes de N por el lema de Zorn encontramos una familia máxima). Nótese que a diferencia de $\{X_i\}$ los módulos de la familia $\{Y_i\}$ no necesariamente son diferentes entre ellos. Como $\oplus Y_i \leq_e N$, $E_M(\oplus Y_i) = E_M(N)$ y tenemos que

$$N \leq Tr(M, E(\oplus_I Y_i) \leq Tr(M, E(C^{(I)})).$$

$\square$

Lema 3.1.3. *Para $C \in \sigma[M]$ la clase $\mathcal{F}$ es una clase M-natural.*

$$\mathcal{F} = \{N \in \sigma[M] | \exists I,\ N \hookrightarrow Tr(M, (EC)^I)\}$$

Demostración. $\mathcal{F}$ es cerrada bajo submódulos. Consideremos $\{N_i\}_{i\in I}$ tal que $N_i \hookrightarrow Tr(M, (EC)^{j_i})$. Como $Tr(M, \_)$ es un prerradical

$$\oplus N_i \hookrightarrow \oplus Tr(M, (EC)^{j_i}) \cong Tr(M, \oplus(EC)^{j_i}) \hookrightarrow Tr(M, \prod(EC)^{j_i}) \cong Tr(M, (EC)^X).$$

Ahora sólo falta ver que si $N \in \mathcal{F}$, $E_M(N) = Tr(M, EN) \in \mathcal{F}$. Si $N \hookrightarrow Tr(M, (EC)^I)$; $N \leq_e EN$ y $N \hookrightarrow Tr(M, (EC)^I) \leq (EC)^I$, tenemos $EN \hookrightarrow (EC)^I$ y $Tr(M, EN) \hookrightarrow Tr(M, (EC)^I)$. $\square$

El siguiente teorema indica cuando una clase natural es cerrada bajo productos.

Teorema 3.1.4. *Si $\mathcal{K}$ es un clase natural cerrada bajo cocientes, entonces $c(\mathcal{K})$ es cerrada bajo productos.*

Demostración. Si $\{N_i\}_{i\in I}$ con $N_i \in c(\mathcal{K})$, supongamos que $N = \prod_{i\in I} N_i \notin c(\mathcal{K})$. Entonces podemos encontrar un submódulo $0 \neq W \leq N$ tal que $W \in \mathcal{K}$ y consideramos $0 \neq Rn \leq W$, $Rn = R(n_i)_{i\in I} \in \mathcal{K}$. Tenemos que para algún

$$0 \neq V \leq Rn,\ 0 \neq Rn/V \cong Rn_i \leq N_i \in c(\mathcal{K})$$

con $n_i \neq 0$, lo que contradice $Rn/V \in \mathcal{K}$. $\square$

3.2. La Teoría de Torsión cogenerada por una Clase Natural

Trabajaremos con las teorías de torsión hereditarias en la categoría $\sigma[M]$. A pesar de que la categoría $\sigma[M]$ no es cerrada bajo extensiones y tampoco bajo el producto directo de R-Mod, las t.t. en $\sigma[M]$ se definen de igual forma que en R-Mod pero dentro del contexto de la subcategoría. Es decir una pareja de subclases $(\mathcal{T}.\mathcal{F})$ de $\sigma[M]$ es una teoría de torsión en $\sigma[M]$ si la clase de torsión $\mathcal{T} \subseteq \sigma[M]$ es cerrada bajo cocientes, sumas directas y extensiones en $\sigma[M]$ y la clase libre de torsión $\mathcal{F} \subseteq \sigma[M]$ es cerrada bajo submódulos, el producto en $\sigma[M]$ y bajo extensiones en $\sigma[M]$. Los siguientes dos teoremas ya se vieron para R-Mod ya ahora se muestran para caracterizar las t.t. hereditarias en $\sigma[M]$.

Teorema 3.2.1. *Una teoría de torsión $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ en $\sigma[M]$ es hereditaria si y sólo si $\mathcal{F}$ es cerrada bajo cápsulas M-inyectivas.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{T}$ es cerrada bajo submódulos y que $F \in \mathcal{F}$, entonces $\tau(E_M(F)) \leq E_M(F)$ y resulta que $\tau(E_M(F)) \cap F \leq \tau(E_M(F))$ es de torsión, es decir $\tau(E_M(F)) \cap F = 0$. Pero como F es esencial en $E_M(F)$, $\tau(E_M(F)) = 0$.

Ahora supongamos que $\mathcal{F}$ es cerrada bajo cápsulas M-inyectivas. Si $A \leq T \in \mathcal{T}$ entonces al diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d] & T \\ & A/\tau(A) \arrow[r, "i"] & E_M(A/\tau(A)) \end{tikzcd}$$

lo extendemos de forma que conmuta por $\varphi : T \to E_M(A/\tau(A))$. Como $E_M(A/\tau(A))$ está en $\mathcal{F}$ tenemos $\varphi = 0$ es decir $A/\tau(A) = 0$ y $\tau(A) = A$. □

Teorema 3.2.2. *Una t.t. $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ en $\sigma[M]$ es hereditaria si y sólo si $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ está cogenerada por un módulo M-inyectivo.*

Demostración. Sea $E \in \sigma[M]$ M-inyectivo que cogenera a $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$. Si $A \leq T$ de torsión y $f : A \to E$, extendemos por $f' : T \to E$ de forma que

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & T \arrow[dl, "f'"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

conmuta, pero $f' = 0$. Por lo que $f = 0$ y A es de torsión.

Supongamos que $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es hereditaria y consideramos a

$$\mathcal{U} = \{Rx \in \sigma[M] | Rx \in \mathcal{F}\}$$

y definimos a $E = Tr(N, \prod_{U \in \mathcal{U}} E_M(U))$ para un N generador de $\sigma[N]$ es decir el producto en $\sigma[M]$ de $\{E_M(U)\}_{U \in \mathcal{U}}$. E es M-inyectivo y libre de τ-torsión. Sea $\eta = (\mathcal{T}', \mathcal{F}')$ la t.t cogenerada por E y $T \in \mathcal{T}$ como $E \in \mathcal{F}$ entonces $Hom(T, E) = 0$ de donde resulta $T \in \mathcal{T}'$; $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$.

Sea $T \in \sigma[M]$ tal que $Hom(T, E) = 0$ y $T \notin \mathcal{T}$, entonces existe $F \in \mathcal{F}$ y $f : T \to F$ no cero, sea $x \in T$ tal que $f(x) \neq 0$, como $Rf(x) \leq F$, $Rf(x) \in \mathcal{U}$, entonces existe $\alpha : Rf(x) \to E$ monomorfismo. Definimos

$$g : Rx \to Rf(x)$$

mediante

$$g(rx) \to rf(x)$$

que es epimorfismo y como E es M-inyectivo existe $h : t \to E$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Rx \arrow[r] \arrow[d, "\alpha g"] & T \\ & E & \end{tikzcd}$$

pero $h = 0$ entonces $\alpha g = 0$ y $\alpha = 0$. Por lo que $Rf(x) = 0$ lo cual es una contradicción. Se concluye que $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ y $\tau = \eta$. $\square$

De lo anterior concluimos que las t.t. hereditarias en $\sigma[M]$ se comportan de forma similar a las de R-Mod, es decir la clase $\mathcal{T}$ de torsión de $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es cerrada bajo cocientes, sumas directas, extensiones y submódulos y la clase $\mathcal{F}$ libre de torsión es cerrada bajo submódulos, productos de $\sigma[M]$, extensiones y cápsulas M-inyectivas. A parte podemos encontrar un inyectivo $E \in \sigma[M]$ que cogenera a $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$.

Una propiedad que se usará frecuentemente sin mencionarla es que para $N \in \sigma[N]$ y una clase M-natural $\mathcal{K} \subseteq \sigma[M]$; si tenemos que $N \notin c(\mathcal{K})$ existe $0 \neq M \leq N$ talque $M \in \mathcal{K}$. Entonces podemos aplicar el Lema de Zorn a las familias independientes de submódulos de N que pertenezcan a $\mathcal{K}$, por lo que encontramos una familia independiente maxima $\{N_i\}_{i \in I}$, $N_i \in \mathcal{K}$ $\forall i \in I$ y como $\mathcal{K}$ es clase M-natural $0 \neq P = \oplus N_i \in \mathcal{K}$ y es máximo con esa propiedad. $P \leq N$ no necesariamente es un submódulo esencial pero $P \oplus Q \leq_e N$ donde Q es un pseudocomplemento de P en N y debe pasar que $Q \in c(\mathcal{K})$ de lo contrario para un submódulo $0 \neq Q' \leq Q$ que $Q' \in \mathcal{K}$, $P \oplus Q' \in \mathcal{K}$ contradeciría la maximalidad de P. En conclusión si $N \notin c(\mathcal{K})$ podemos encontrar $o \neq P \in \mathcal{K}$ y $Q \in c(\mathcal{K})$ tal que $P \oplus Q \leq_e N$.

Para el siguiente teorema antes es necesario hacer una observación. Nótese que para un conjunto de índices I se tiene que $E_M(C^I) = Tr(M, E(C)^I) = Tr(M, E_M(C)^I) \subseteq (E_M(C))^I$. Esto es consecuencia de que el producto de M-inyectivos es M-inyectivo; es decir tenemos que $E_M(C^I) = E_M(C)^I$ y en particular $E(C^I) = E(C)^I$; el resto se sigue de la definicion de $E_M(C)$ y de que Tr es idempotente.

Teorema 3.2.3. *Para una clase M-natural $\mathcal{K} \subseteq \sigma[M]$ con $C \in \sigma[M]$ que la genera y $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ la teoría de torsión hereditaria cogenerada con el M-inyectivo $E_M(C) \in \sigma[M]$; se tiene que $\mathcal{T} \subseteq c(\mathcal{K}) \cap \sigma[M]$.*

Demostración. Recordemos que si $C \in \sigma[M]$ genera a la clase M-natural $\mathcal{K}$ entonces escribimos

$$\mathcal{K} = \{N \in \sigma[M] | \exists I, N \hookrightarrow E_M(C^{(I)})\}$$

por otra parte cuando cogeneramos con el inyectivo $E_M(C) \in \sigma[M]$ una t.t. hereditaria en $\sigma[M]$ podemos describir a la clase de torsión como $\mathcal{T} = \{N \in \sigma[M] | Hom(N, E_M(C)) = 0\}$ Si $N \in \mathcal{T} \backslash c(\mathcal{K})$, consideramos $P \oplus Q \leq_e N$ con $0 \neq P \in \mathcal{K},\ Q \in c(\mathcal{K})$. Como $0 \neq P \in \mathcal{K}$ tenemos que para alguna I, $P \hookrightarrow E_M(C^{(I)})$; entonces existe una proyección no cero para algún $i \in I$ de forma que obtenemos $\alpha : P \to E_M(C)$ y el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha"] & N \arrow[dl, "f"] \\ & E_M(C) & \end{tikzcd}$$

que lo extendemos por $0 \neq f : N \to E_M(C)$, lo cual contradice el hecho que $N \in \mathcal{T}$ y concluimos $\mathcal{T} \subseteq c(\mathcal{K})$ y $\mathcal{T} \subseteq c(\mathcal{K}) \cap \sigma[M]$. □

Definición 3.2.4. *Para una clase M-natural $\mathcal{K} \subseteq \sigma[M]$ definimos la clase $\mathcal{T}_{\mathcal{K}} = \{N \in \sigma[M] | \forall 0 \leq V < N,\ N/V \notin \mathcal{K}\}$.*

Lema 3.2.5. *Para una clase M-natural $\mathcal{K} \subseteq \sigma[M]$. $\mathcal{T}_{\mathcal{K}} = \{N \in \sigma[M] | \forall 0 \leq V < N,\ N/V \in c(\mathcal{K})\}$.*

Demostración. Llamemos $\mathcal{C} = \{N \in \sigma[M] | \forall 0 \leq V < N,\ N/V \in c(\mathcal{K})\}$. Claramente $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{K}}$. Si $N \in \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \backslash \mathcal{C}$, entonces tenemos $0 \neq N/V \notin \mathcal{K}$ para algún $0 \leq V < N$. Consideramos $P/V \oplus Q/V \leq_e N/V$ talque $Q/V \in \mathcal{K}$ y $0 \neq P/V \in \mathcal{K}$.

Podemos encontrar en N/Q un submódulo esencial isomorfo a $P/V \in \mathcal{K}$. Tenemos que

$$P/V \cong (P/V \oplus Q/V)/(Q/V) \leq (N/V)/(Q/V) \cong N/Q$$

sólo resta ver que es esencial; lo cual sucede siempre incluso en una situación mas general. Si $A \oplus B \leq_e C$, entonces $B \cong (A \oplus B)/A \leq_e C/A$; porque si $c + A \in C/A$, existe $0 \neq r \in R,\ rc \in A \oplus B$, entonces $r(c + A) = rc + A = a + b + A \in (A \oplus B)/A$. Entonces obtenemos que N/Q tiene un submódulo esencial isomorfo a $0 \neq P/V \in \mathcal{K}$ lo que indica $N/Q \in \mathcal{K}$. Una contradicción a que $N \in \mathcal{T}_{\mathcal{K}}$. □

Teorema 3.2.6. *Para una clases M-natural $\mathcal{K}$ y $\mathcal{T}_{\mathcal{K}} = \{N \in \sigma[M] | \forall 0 \leq V < N,\ N/V \in c(\mathcal{K})\}$ se tiene:*

1. *$\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ es una clase de torsión hereditaria en $\sigma[M]$.*

2. *Definimos $\mathcal{F}_{\mathcal{K}} = \{F \in \sigma[M] | Hom(T, F) = 0\ \forall T \in \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\}$. Se tiene que $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ es una clase libre de torsión hereditaria en $\sigma[M]$, además $(\mathcal{T}_{\mathcal{K}}, \mathcal{F}_{\mathcal{K}})$ es una teoría de torión hereditaria en $\sigma[M]$.*

3. *$\mathcal{K} \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{K}} \in \mathcal{N}(R, M)$.*

4. *$\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ es la única menor clase libre de torsión hereditaria en $\sigma[M]$ que contiene a $\mathcal{K}$.*

5. *$\mathcal{T}_{\mathcal{K}} \subseteq c(\mathcal{F}_{\mathcal{K}}) \cap \sigma[M] \subseteq c(\mathcal{K}) \cap \sigma[M]$ y $\mathcal{T}_{\mathcal{K}} \subseteq c(\mathcal{F}_{\mathcal{K}}) \subseteq c(\mathcal{K})$.*

Demostración. $(1, 2)$. Consideremos $(\mathcal{T}', \mathcal{F}')$ la t.t. hereditaria en $\sigma[M]$ cogenerada por $\mathcal{K}$, su clase de torsión está descrita como

$$\mathcal{T}' = \{T \in \sigma[M] | Hom(T, C) = 0\ \forall C \in \mathcal{K}\}$$

veremos que $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_{\mathcal{K}}$. Si $N \in \mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ y $0 \neq f : N \to C$ para $C \in \mathcal{K}$; como $0 \neq f$ tenemos que $0 \neq N/ker(f) \in c(\mathcal{K})$ pero como $N/ker(f) \leq C \in \mathcal{K}$ tenemos $N/ker(f) \in \mathcal{K}$, lo cual no puede suceder. Recíprocamente si $N \in \mathcal{T}'$ no podemos tener un $0 \leq V < N$, tal que $N/V \in \mathcal{K}$ por lo que la proyección canónica sería un morfismo $0 \neq p : N \to N/V \in \mathcal{K}$; de lo que concluimos $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ y por definición de la t.t. cogenerada tenemos $\mathcal{F}' = \mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ de lo que resulta $(\mathcal{T}_{\mathcal{K}}, \mathcal{F}_{\mathcal{K}})$ es una teoría de torsión hereditaria en $\sigma[M]$.

(3). Como $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ es una clase libre de torsión hereditaria en $\sigma[M]$ es una clase M-natural, $\mathcal{F}_{\mathcal{K}} \in \mathcal{N}(R, M)$. Siendo $(\mathcal{T}_{\mathcal{K}}, \mathcal{F}_{\mathcal{K}})$ la t.t. hereditaria cogenerada por $\mathcal{K}$ es de esperarse que $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{K}}$. Si tenemos $K \in \mathcal{K} \backslash \mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ habría un morfismo $0 \neq f : N \to K$ para algún $N \in \mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ y se tiene que $0 \neq f(N) \in c(\mathcal{K})$ lo cual contradice que $N \leq K \in \mathcal{K}$.

(4). Como en (3) es natural del hecho que se trata de la t.t. cogenerada por $\mathcal{K}$. Consideremos (A) y $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ son dos clases libres de torsión hereditarias que contienen a $\mathcal{K}$ siendo $\mathcal{A}$ la menor con esa propiedad. Tenemos que $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{K}}$. Consideremos las clases de torsión hereditarias relativas a ellas, siendo $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ y

$$\mathcal{T}(\mathcal{A}) = \{T \in \sigma[M] | \forall G \in \mathcal{A}\ Hom(T, G) = 0\}$$

en vista que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ tenemos $\mathcal{T}_{\mathcal{K}} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{A})$ y en general $\mathcal{F}_{\mathcal{K}} = \mathcal{A}$ si y sólo si $\mathcal{T}_{\mathcal{K}} = \mathcal{T}(\mathcal{A})$; por lo que sólo resta ver $\mathcal{T}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{K}}$. Como $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{A}$, $\mathcal{T}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{K} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A} = 0$. Sea $N \in \mathcal{T}(\mathcal{A}) \backslash \mathcal{T}_{\mathcal{K}}$. Para algún $0 \leq V < N$, $0 \neq N/V \in \mathcal{K}$.

Vemos que $0 \neq N/V \in \mathcal{T}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{K}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto concluimos $(\mathcal{T}(\mathcal{A}), \mathcal{A}) = (\mathcal{T}_{\mathcal{K}}, \mathcal{F}_{\mathcal{K}})$.

(5). Por (3) $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ tenemos $c(\mathcal{F}_{\mathcal{K}}) \subseteq c(\mathcal{K})$ estas son clases naturales. Sea $N \in \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \backslash c(\mathcal{F}_{\mathcal{K}})$ y consideramos $\langle \mathcal{F}_{\mathcal{K}} \rangle$ la menor clase natural que contiene a $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$. Tenemos $c(\langle \mathcal{F}_{\mathcal{K}} \rangle) = c(\mathcal{F}_{\mathcal{K}}) \in \mathcal{N}(R)$. Como $N \notin c(\mathcal{F}_{\mathcal{K}})$ podemos encontrar $A \oplus B \leq_e N$ con $A \in c(\mathcal{F}_{\mathcal{K}})$ y $0 \neq B \in c(c(\mathcal{F}_{\mathcal{K}})) = \langle \mathcal{F}_{\mathcal{K}} \rangle$ y observamos que $\langle \mathcal{F}_{\mathcal{K}} \rangle \cap \sigma[M] = \mathcal{F}_{\mathcal{K}}$. Como $N \in \sigma[M]$, $B \in \langle \mathcal{F}_{\mathcal{K}} \rangle \cap \sigma[M] = \mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ lo que contradice a $B \leq N \in \mathcal{T}_{\mathcal{K}}$. y sucede $\mathcal{T}_{\mathcal{K}} \subseteq c(\mathcal{F}_{\mathcal{K}}) \cap \sigma[M] \subseteq c(\mathcal{K}) \cap \sigma[M]$ y $\mathcal{T}_{\mathcal{K}} \subseteq c(\mathcal{F}_{\mathcal{K}}) \subseteq c(\mathcal{K})$.

□

El teorema anterior se puede resumir en que la t.t. hereditaria $(\mathcal{T}_{\mathcal{K}}, \mathcal{F}_{\mathcal{K}})$ (a pesar de la primera definición de $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$) es en realidad la t.t. hereditaria cogenerada por la clase M-natural $\mathcal{K}$; siendo así debe ser natural que $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ es la menor clase libre de torsión hereditaria en $\sigma[M]$ que contiene a $\mathcal{K}$ y aparte se tiene la propiedad $\mathcal{T}_{\mathcal{K}} \subseteq c(\mathcal{F}_{\mathcal{K}}) \cap \sigma[M] \subseteq c(\mathcal{K}) \cap \sigma[M]$; nótese que $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$, $c(\mathcal{F}_{\mathcal{K}}) \cap \sigma[M]$, $c(\mathcal{K}) \cap \sigma[M]$ son todas clases M-naturales.

Teorema 3.2.7. *Para una clase M-natural $\mathcal{K} \subseteq \sigma[M]$ y $(\mathcal{T}_{\mathcal{K}}, \mathcal{F}_{\mathcal{K}})$ como en el teorema 3.2.6 se tiene:*

1. $c(\mathcal{T}_{\mathcal{K}}) = \{N \in R\text{-}Mod \mid \forall 0 \neq W \leq N,\ \exists 0 \leq V < W,\ W/V \in \mathcal{K}\} \in \mathcal{N}(R)$.
2. $\mathcal{F}_{\mathcal{K}} = c(\mathcal{T}_{\mathcal{K}}) \cap \sigma[M]$.
3. $c(\mathcal{F}_{\mathcal{K}}) \cap \sigma[M]$ *es la menor clase M-natural que contiene a* $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$.

Demostración. Primero hacemos una observación; del teorema anterior tenemos que $\mathcal{T}_{\mathcal{K}} \subseteq c(\mathcal{F}_{\mathcal{K}}) \cap \sigma[M] \subseteq c(\mathcal{K}) \cap \sigma[M]$ y que $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{K}}$. De $\mathcal{T}_{\mathcal{K}} \subseteq c(\mathcal{F}_{\mathcal{K}})$ tenemos que $\langle \mathcal{F}_{\mathcal{K}} \rangle = c(c(\mathcal{F}_{\mathcal{K}})) \subseteq c(\mathcal{T}_{\mathcal{K}})$ y $\mathcal{F}_{\mathcal{K}} = \langle \mathcal{F}_{\mathcal{K}} \rangle \cap \sigma[M] \subseteq c(\mathcal{T}_{\mathcal{K}}) \cap \sigma[M]$.

(1). Por definición $c(\mathcal{T}_{\mathcal{K}})$ es una clase natural; $c(\mathcal{T}_{\mathcal{K}}) = \{N \in R\text{-}Mod \mid \forall 0 \neq W \leq, W \notin \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\}$ y justamente $W \notin \mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ significa que $0 \neq W/V \in \mathcal{K}$ para algún $0 \leq V < W$.

(2). Por la observación inicial tenemos $\mathcal{F}_{\mathcal{K}} \subseteq c(\mathcal{T}_{\mathcal{K}}) \cap \sigma[M]$. Ahora sea $N \in c(\mathcal{T}_{\mathcal{K}}) \cap \sigma[M]$, si hubiera $T \in \mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ para el cual hubiera un morfismo $0 \neq f : T \to N$ tendríamos que como $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ es una clase de torsión hereditaria $0 \neq f(T) \in \mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ pero $c(\mathcal{T}_{\mathcal{K}}) \cap \sigma[M]$ es una clase M-natural y $0 \neq f(T) \leq N \in c(\mathcal{T}_{\mathcal{K}}) \cap \sigma[M]$ tenemos $f(T) \in \mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ lo cual es una contradicción. Por lo que $Hom(T, N) = 0$ $\forall T \in \mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ y $N \in \mathcal{F}_{\mathcal{K}}$.

(3). Aplicando el operador $c(\_)$ a la igualdad en (2) obtenemos $\langle \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle = c(c(\mathcal{T}_{\mathcal{K}})) = c(c(\mathcal{T}_{\mathcal{K}}) \cap \sigma[M]) = c(\mathcal{F}_{\mathcal{K}})$ por lo que $c(\mathcal{F}_{\mathcal{K}}) \cap \sigma[M]$ es la menor clase M-natural que contiene a $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$. □

Si tenemos una clase natural $\Delta \in \mathcal{N}(R)$ que es cerrada bajo cocientes vemos que $c(\Delta)$ es cerrada bajo productos en R-Mod y tenemos que $(\Delta, c(\Delta))$ es una t.t. hereditaria en R-Mod. El siguiente corolario muestra que es la misma que la cogenerada por $\mathcal{K} = c(\Delta)$ y $\Delta = c(\mathcal{K})$, aunque lo enunciaremos para clases M-naturales.

Corolario 3.2.8. *Sea $\mathcal{K}$ una clase M-natural y supongamos que $c(\mathcal{K})$ es cerrada bajo cocientes; entonces se tiene:*

1. $\mathcal{T}_{\mathcal{K}} = c(\mathcal{F}_{\mathcal{K}}) \cap \sigma[M] = c(\mathcal{K}) \cap \sigma[M]$ *y* $\mathcal{K} = \mathcal{F}_{\mathcal{K}} = c(\mathcal{T}_{\mathcal{K}}) \cap \sigma[M]$.

2. *En particular resulta que $\mathcal{K}$ es cerrada bajo productos en $\sigma[M]$ y $(c(\mathcal{K}) \cap \sigma[M], \mathcal{K})$ es una t.t. hereditaria en $\sigma[M]$.*

Demostración. Como $c(\mathcal{K})$ es cerrada bajo cocientes tenemos que $c(c(\mathcal{K}))$ es cerrada bajo productos en R-Mod y en particular resulta $\mathcal{K}$ es cerrada bajo el producto en $\sigma[M]$. Entonces resulta que $(c(\mathcal{K}) \cap \sigma[M], \mathcal{K})$ es una t.t hereditaria en $\sigma[M]$, de hecho también es una t.t. estable (su clase de torsión es cerrada bajo cápsulas M-inyectivas). Ahora como $\mathcal{K}$ es una clase libre de torsión hereditaria sucede que $\mathcal{K} = \mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ y de aquí tenemos $\mathcal{T}_{\mathcal{K}} = c(\mathcal{K}) \cap \sigma[M]$. □

Del corolario anterior también podemos concluir que bajo las mismas hipotesis $\mathcal{T}_{\mathcal{K}} = c(\mathcal{F}_{\mathcal{K}}) \cap \sigma[M]$ también es una clase M-natural, por lo que es una clase cerrada bajo cápsulas M-inyectivas, la teoría de torsión $(\mathcal{T}_{\mathcal{K}}, \mathcal{F}_{\mathcal{K}})$ resulta una teoría de torsión estable en $\sigma[M]$. En la siguiente sección también se buscará condiciones diferentes para que $(\mathcal{T}_{\mathcal{K}}, \mathcal{F}_{\mathcal{K}})$ sea estable.

3.3. Módulos Singulares

El objetivo principal de esta sección será encontrar las condiciones para una clase M-natural $\mathcal{K}$ con las cuales la clase de torsión hereditaria $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ es también una clase M-natural. Para lo cual sólo es necesario que sea cerrada bajo cápsulas M-inyectivas lo que indicaría que $(\mathcal{T}_{\mathcal{K}}, \mathcal{F}_{\mathcal{K}})$ es estable. Para eso estudiaremos los módulos M-singulares y M-nosingulares.

Definición y Proposición 3.3.1. *Sea $\mathcal{J}(R) = \{I \leq R | I \leq_e R\}$, entonces tenemos:*

1. $R \in \mathcal{J}(R)$.

2. *Si $I \leq J \leq R$ y $I \in \mathcal{J}(R)$ entonces $J \in \mathcal{J}(R)$.*

3. *Si $I, J \in \mathcal{J}(R)$ entonces $I \cap J \in \mathcal{J}(R)$.*

4. Si $I \in \mathcal{J}(R)$ y $r \in R$ entonces $Ir^{-1} \in \mathcal{J}(R)$.

Aquí definimos al ideal izquierdo $Ir^{-1} = \{x \in R | xr \in I\}$.

Definición 3.3.2. *Definimos para un R-módulo A, $Z(A) = \{x \in A | Ix = 0$ para algún $I \in \mathcal{J}(R)\}$*

Equivalentemente $Z(A)$ es el conjunto de $x \in A$ para los cuales el ideal izquierdo $\{r \in R | rx = 0\}$ pertenece a $\mathcal{J}(R)$. Como $R \in \mathcal{J}(R)$ entonces $0 \in Z(A)$. Si $x, y \in Z(A)$, entonces $Ix = Jy = 0$ para algunos $I, J \in \mathcal{J}(R)$. Como $(I \cap J)(x - y) = 0$, $x - y \in Z(A)$. También Si $r \in R$, $(Ir^{-1})(rx) \leq Ix = 0$ por lo que $rx \in Z(A)$. De esto concluimos que $Z(A)$ es submódulo de A le llamamos *submódulo singular* de A. De hecho $Z(\_)$ define un funtor en R-Mod y para $f : A \to B$ tenemos que $f(Z(A)) \leq Z(B)$; es decir un preradical.

Un R-módulo A se llama *singular* si $Z(A) = A$ y se llama *nosingular* si $Z(A) = 0$. Para ilustrar un poco observemos que si $R = \mathbb{Z}$, todos los ideales no cero de $\mathbb{Z}$ son esenciales, por lo que $\mathcal{J}(R)$ son todos los ideales no cero de $\mathbb{Z}$. Dado un $\mathbb{Z}$-módulo A, tenemos que $x \in Z(A)$ si y sólo si $(\mathbb{Z}n)x = 0$ para algún entero n; es decir si y sólo si x tiene orden finito. A es singular si y sólo si es un grupo de torsión; por otra parte A es nosingular si y sólo si es un grupo libre de torsión. En particular $\mathbb{Z}$ es nosingular.

Proposición 3.3.3. *Para un módulo C tenemos:*

1. *C es nosingular si y sólo si $Hom(A, C) = 0$ para todo módulo singular A.*

2. *C es singular si y sólo si existe $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ exacta tal que f es un monomorfismo esencial.*

Demostración. (1). Si A es singular y C nosingular y $f : A \to C$ tenemos $f(A) = f(Z(A)) \leq Z(C) = 0$, $f = 0$. Entonces $Hom(A, C) = 0$ cuando A es nosingular. Recíprocamente, si $Hom(A, C) = 0$ para todo A singular, en particular para $Hom(Z(C), C) = 0$. Por lo que la inlcusión es cero y $Z(C) = 0$.

(2). Supongamos que existe la secesión exacta. Dado $b \in B$ definimos $k : R \to B$ por $k(r) \to rb$; vemos que $k^{-1}(f(A)) \leq_e R$, $I = \{r \in R | rb \in f(A)\}$ pertenece a $\mathcal{J}(R)$. Ahora $Ib \leq f(A) = ker(g)$, de donde $Ig(b) = 0$ entonces $g(b) \in Z(C)$. Como g es epi tenemos $Z(C) = C$. Recíprocamente tomenos $0 \to A \xrightarrow{i} B \to C \to 0$ con C singular y B libre. Si $\{b_\alpha\}$ es base para B, para cada α tenemos $I_\alpha g(b_\alpha) = 0$ para algún $I_\alpha \in \mathcal{J}(R)$; del cual $I_\alpha b_\alpha \leq A$. Como $I_\alpha \leq_e R$ para todo α, vemos $I_\alpha b_\alpha \leq_e R$ para todo α. $\oplus I_\alpha b_\alpha \leq_e \oplus R b_\alpha = B$.

De $\oplus I_\alpha b_\alpha \leq A$, tenemos $A \leq_e B$ y la inclusión resulta un monomorfismo esencial.

$\square$

Lema 3.3.4. *Sea B nosingular y $A \leq B$. Entonces B/A es singular si y sólo si $A \leq_e B$.*

Demostración. Si B/A es singular y $0 \neq x \in B$, $Ix' = 0$ para algún $I \in \mathcal{J}(R)$, eso es $Ix \leq A$. En cuanto a B que es nosingular tenemos que $Ix \neq 0$ y $Rx \cap A \neq 0$ por lo cual $A \leq_e B$. $\square$

Teorema 3.3.5. *Para R-mod tenemos:*

1. *La clase de módulos nosingulares es cerrada bajo submódulos, productos, extensiones esenciales (cápsulas inyectivas) y extensiones.*

2. *La clase de módulos singulares es cerrada bajo submódulos, cocientes y sumas directas.*

Demostración. (1) Cuando $A \leq B$, tenemos $Z(A) = A \cap Z(B)$ de lo que si B es nosingular A lo es también. Por otra parte si tenemos $A \leq_e B$ y A nosingular como $A \cap Z(B) = Z(A) = 0$ tenemos $Z(B) = 0$. Por lo que submódulos y extensiones esenciales de nosingulares son nosingulares. Si consideramos un familia de nosingulares $\{C_\alpha\}$ y A singular entonces de $Hom(A, C_\alpha) = 0$ tenemos $Hom(A, \prod C_\alpha) = 0$.

Ahora supongamos $0 \to A \to B \to C \to 0$ con A, C singulares. Tenemos $Hom(M, C) = 0$ y $Hom(M, A) = 0$ para todo singular M y

$$0 \to Hom(M, C) \to Hom(M, B) \to Hom(M, A) \to A$$

es exacta y nos da $Hom(M, B) = 0$.

(2). Si $A \leq B$ y B singular, entonces $Z(A) = A \cap Z(B) = A$ y tenemos A singular. También si tenemos $B \to B/A$, debe llevar $Z(B)$ a $Z(B/A)$ y $B/A = Z(B)/A \leq Z(B/A)$ de lo que B/A es singular.

Si tenemos una familia de singulares $\{C_\alpha\}$, para cada α tenemos $0 \to A_\alpha \to B_\alpha \to C_\alpha \to 0$, $A_\alpha \leq_e B_\alpha$. Entonces resulta $0 \to \oplus A_\alpha \to \oplus B_\alpha \to \oplus C_\alpha \to 0$ es exacta y $\oplus A_\alpha \leq_e \oplus B_\alpha$; por el lema anterior nos da la cerradura por sumas directas.

$\square$

Del teorema anterior observamos que la clase de los módulos nosingulares forma una clase libre de torsión hereditaria mientras que la clase de los módulos singulares sólo llega a ser de pretorsión hereditaria. En caso de que $\mathbb{Z} = R$ la clase de los singulares si es de torsión hereditaria pero en general no sucede.

Si se considera $Z_2(M) \leq M$, como aquel que $Z(M/Z(M)) = Z_2(M)/Z(M)$, la clase $\Delta = \{M|Z_2(M) = M\}$ ya es una clase de torsión hereditaria que contiene a la clase de módulos singulares y junto con la clase de los nosingulares como clase libre de torsión forma una teoría de torsión hereditaria, a esta se le llama la Teoría de Torsión de Goldie.

Definición 3.3.6. *Un módulo $N \in \sigma[M]$ se llama* singular *en $\sigma[M]$ o M-singular, si existe una secuencia exacta en $\sigma[M]$, $0 \to K \to L \to N \to 0$ con $K \leq_e L$.*

La noción de M-singular es la misma que singular si $\sigma[M] = R\text{-}Mod$, claro que todo M-singular es singular en $R\text{-}Mod$. Siguiendo del teorema 3.3.5 decimos que la clase $\mathcal{S}$ de los módulos M-singulares en $\sigma[M]$ es cerrada bajo submódulos, cocientes y sumas directas; por lo que para $L \in \sigma[M]$ podemos encontrar el mayor submódulo M-singular dado por $Tr(\mathcal{S}, L)$. Decimos que L es M-singular si y sólo si $Tr(\mathcal{S}, L) = L$ y que L es M-nosingular si $Tr(\mathcal{S}, L) = 0$.

Corolario 3.3.7. *Para una clase M-natural $\mathcal{K} \subseteq \sigma[M]$ tal que todos los módulos en $\mathcal{K}$ son M-nosingulares. Entonces $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ es cerrada bajo cápsulas M-inyectivas; por lo que $\mathcal{T}_{\mathcal{K}} \in \mathcal{N}(R, M)$ es una clase M-natural.*

Demostración. Si $N \in \mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ y supongamos que $E_M(N) \notin \mathcal{T}_{\mathcal{K}}$; entonces para algún $0 \leq V < E_M(N)$, $0 \neq E_M(N)/V \in \mathcal{K}$. Entonces tenemos que $N/(N \cap V) \cong (N+V)/V \leq E_M(N)/V$ y $N/(N \cap V) \in \mathcal{K}$. Como $N \in \mathcal{T}_{\mathcal{K}}$, $N = N \cap V$ y $N \leq V \leq_e E_M(N)$; de lo que tenemos $E_M(N)/V$ es M-singular pero como $E_M(N) \in \mathcal{K}$ es una contradicción. $\square$

3.4. Módulos Cocríticos

Esta sección se puede ver como una aplicación de las secciones anteriores; tanto las clases naturales como las teorías de torsión definen módulos simples generalizados.

Definición 3.4.1. *Sea $\mathcal{K} \subseteq \sigma[M]$ una clase M-natural; un módulo no cero U es* $\mathcal{K}$-cocrítico *si $U \in \mathcal{K}$ y $U/P \notin \mathcal{K}$ para todo $0 \neq P < U$. Esto es equivale a $0 \neq U \in \mathcal{K}$ y todo cociente propio $U/P \in c(\mathcal{K})$ donde $0 < P < U$.*

Definición 3.4.2. *Si $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es una teoría de torsión en $\sigma[M]$; un módulo no cero U es* τ-cocrítico *si $U \in \mathcal{F}$ y para todo $O \neq P < U$, $U/P \in \mathcal{T}$.*

Si $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es una teoría de torsión arbitraria en $R\text{-}Mod$ y U es $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$-cocrítico, entonces U es $\mathcal{F}$-cocrítico con respecto a la clase $\mathcal{F} \in \mathcal{N}(R)$, que es una clase cerrada bajo productos.

Definición 3.4.3. *Una extensión de módulos* $0 \neq L < U$ *se le llama* racional *si para todo* $L < N \leq U$ *y todo morfismo* $f : N \to U$*, si* $f|_L = 0$ *entonces* $f = 0$*. Un módulo* U *es* fuertemente uniforme *o monoforme si* U *es una extensión racional para todo submódulo no cero de él.*

Lema 3.4.4. *Sea* $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ *una teoría de torsión hereditaria en* $\sigma[M]$*; si* U *es* τ*-cocrítico entonces:*

1. $\forall 0 \neq W < U$*,* W *es* τ*-cocrítico.*

2. U *es fuertemente uniforme.*

3. $\forall 0 \neq X \leq U$*,* $\forall Y \in \mathcal{F}$*, todo morfismo no cero* $f : X \to E(Y)$ *es un monomorfismo.*

Demostración. 1) Como $W < U \in \mathcal{F}$, $W \in \mathcal{F}$. Si $0 \neq V < W$ con $W/V \notin \mathcal{T}$, tenemos que el submódulo de torsión $T(W/V) = Q/V$ es propio $Q/V < W/V$ con $0 \neq (W/V)/(Q/V) \cong W/Q \in \mathcal{F}$. Como $U/Q \in \mathcal{T}$, tambien $W/Q \in \mathcal{T}$ lo cual es una contradicción.

2) Si no fuera así, tenemos $0 \neq L < U$ que no es racional. Es decir tenemos que existe $L < N \leq U$ con $f : N \to U$ talque $f|_L = 0$ y $f \neq 0$; ahora sea $m_1, m_2 \in N \leq U$, $0 \neq f(m_1) = m_2$, observamos que si $r \in (L : m_1) = \{r \in R | rm_1 \in L\} \leq R$, $rm_2 = f(rm_1) = 0$ y de aquí tenemos $(L : m_1)m_2 = 0$ y esto nos permite definir el morfismo:

$$g : (Rm_1 + L)/L \to Rm_2,\ f(rm_1 + L) = rm_2,\ r \in R$$

es un epimorfismo no cero. $0 = ((Rm_1 + L)/L)/Nuc(f) \cong Rm_2 \in \mathcal{F}$; lo que contradice 1) que $Rm_1 + L$ es τ-cocrítico.

3) Como $Y \leq_e E(Y)$, $Y \cap f(X) \leq_e f(X)$ y $W = f^{-1}(Y \cap f(X)) \leq_e X$. Sea $K = W \cap Nuc(f)$ sólo es necesario demostrar $K = 0$, por lo que $Nuc(f)$. Observemos que si $0 \neq f(W) = Y \cap f(X) = f(W)$; entonces $0 \neq W/K \cong f(W) \leq Y \in \mathcal{F}$ y $W/K \in \mathcal{F}$. Si $K \neq 0$, por 1) $0 \neq W/K \in \mathcal{T}$; de lo cual $K = 0$. □

Proposición 3.4.5. *Sea* $\mathcal{K} \subseteq \sigma[M]$ *una clase* M*-natural, todo módulo* U $\mathcal{K}$*-cocrítico es* $\tau = (\mathcal{T}_\mathcal{K}, \mathcal{F}_\mathcal{K})$*-cocrítico.*

Demostración. Como $0 \neq U \in \mathcal{K} \subseteq \mathcal{F}_\mathcal{K}$, sólo falta ver que $0 < P < U, U/P \in \mathcal{T}_\mathcal{K}$. Si $U/P \notin \mathcal{T}_\mathcal{K}$, tenemos que existe $Q/P < U/P$ donde $0 < P < Q < U$, con $0 \neq (U/P)/(Q/P) \cong U/Q \in \mathcal{K}$. Pero de la definición $U/Q \in c(\mathcal{K})$, lo cual es una contadicción. □

Proposición 3.4.6. *Sea una* $\mathcal{K} \subseteq \sigma[M]$ *una clase* M*-natural; si* $U \in \mathcal{F}_\mathcal{K} \backslash \mathcal{K}$ *es* $\tau = (\mathcal{T}_\mathcal{K}, \mathcal{F}_\mathcal{K})$*-cocrítico, entonces* U *es* $\mathcal{F}_\mathcal{K} \cap c(\mathcal{K})$*-cocrítico.*

Demostración. Como $U \notin \mathcal{K}$, tenemos que $P \oplus Q \leq_e U$, $P \in \mathcal{K}$ y $0 \neq Q \in c(\mathcal{K}) \cap \mathcal{F}_{\mathcal{K}}$. Como U es τ-cocrítico entonces deber ser fuertemente uniforme; ahora si $P \neq 0$ la proyección canoníca $p : P \oplus Q \to Q$ cumple que $p|_P = 0$ y $p \neq 0$ por lo que $P \leq U$ no sería racional, lo cual contradice que sea fuertemente uniforme. Entonces $P = 0$ y $U \in \mathcal{F}_{\mathcal{K}} \cap c(\mathcal{K})$ por ser una clase M-natural. Si tenemos $0 \leq V < U$, de que U es τ-cocrítico, $0 \neq U/V \in \mathcal{T}_{\mathcal{K}}$. De $\mathcal{T}_{\mathcal{K}} \cap \mathcal{F}_{\mathcal{K}} = 0$, $U/V \notin \mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ y por lo tanto $U/V \notin \mathcal{F}_{\mathcal{K}} \cap c(\mathcal{K})$ y por definición U es $\mathcal{F}_{\mathcal{K}} \cap c(\mathcal{K})$-cocrítico. □

Las proposiciónes anteriores las podemos resumir en el siguiente teorema.

Teorema 3.4.7. *Para una clase M-natural $\mathcal{K} \subseteq \sigma[M]$ y $\tau = (\mathcal{T}_{\mathcal{K}}, \mathcal{F}_{\mathcal{K}})$ la teoría de torsión hereditaria cogenerada por $\mathcal{K}$, entonces:*

1. *Todo módulo $\mathcal{K}$-cocrítico es τ-cocrítico.*

2. *Por otra parte si U es τ-cocrítico;*

   - *Si $U \in \mathcal{K}$ entonces U es $\mathcal{K}$-cocrítico.*
   - *Si $U \in \mathcal{F}_{\mathcal{K}} \backslash \mathcal{K}$ entonces U es $\mathcal{F}_{\mathcal{K}} \cap c(\mathcal{K})$-cocrítico.*

3.5. Grupos abelianos simples

Como ejemplo y aplicación del capítulo estudiaremos las clases naturales determinadas por los grupos abelianos simples; en particular consideraremos los casos de $\mathcal{K} = \langle \mathbb{Z}_p \rangle$ y $\mathcal{K} = \langle \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_p \rangle$.

Definición 3.5.1. *Un R-módulo N se llama* divisible *si para todo $s \in R$ que no sea un divisor de cero y para todo $n \in N$, existe $m \in N$ tal que $sm = n$.*

Para R un dominio entero la condición de que M es divisible esquivale a que $rM = M$ para todo $0 \neq r \in R$. Aparte podemos observar que todo cociente de un divisible también es divisible.

Criterio de Baer 3.5.2. *Para U un R-módulo son esquivalentes:*

1. *U es inyectivo en R-Mod.*

2. *U es R-inyectivo*

3. *Para todo ideal izquierdo $I \subset R$ y para todo morfismo $h : I \to U$; existe $u \in U$ con $h(a) = au$ para todo $a \in I$.*

Demostración. ($1 \Leftrightarrow 2$). Si recordamos que $\sigma[R] = R\text{-}Mod$; tenemos que un módulo U R-inyectivo es inyectivo en $\sigma[R]$; es decir es N-inyectivo para todo N módulo de $\sigma[R]$. ($2 \Rightarrow 3$). Si U es inyectivo tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h"] & R \arrow[dl, "h'"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

consideramos a $u = h'(1)$ y obtenemos $h(a) = h'(a) = ah'(1) = au$ para todo $a \in I$.

($3 \Rightarrow 2$). Si tenemos un morfismo $h : I \to U$, tal que $u \in U$ con $h(a) = au$ para todo $a \in I$. Entonces $h' : R \to U$ dado por $r \to ru$ es un morfismo que extiende a $h : I \to U$; por lo que U es inyectivo. $\square$

Teorema 3.5.3. *Si N es un R-módulo inyectivo entonces N es divisible. Además si todo ideal de R es cíclico y R no tiene divisores de cero se tiene que: N es inyectivo si y sólo si N es divisible.*

Demostración. Si N es inyectivo y $s \in R$ no es un divisor de cero. Consideramos $h : Rs \to N$, $rs \to rn$ que resulta un morfismo y por el criterio de Baer 3.5.2 existe $m \in N$ talque $n = h(s) = sm$.

Ahora si N es divible y todo ideal de R es cíclico y no tiene divisores de cero; sea $h : Rs \to N$ con $s \in R$ un morfismo. Entonces existe $m \in N$ con $sm = h(s) \in N$ y por lo tanto $h(a) = am$ para todo $a \in R$, es decir por el criterio de Baer 3.5.2 N es inyectivo. $\square$

En particular tenemos que si $R = \mathbb{Z}$; es decir para los grupos abelianos, un grupo es inyectivo sí y sólo si es divisible. Tenemos que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$ son inyectivos; aparte $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ por ser cociente de un divisible tambien resulta divisible y por lo tanto inyectivo. Anteriormente habíamos visto que los grupos simples, $\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ con p primo, se puede sumergir en $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ de la forma $z + p\mathbb{Z} \to z/p + \mathbb{Z}$. Ahora estudiaremos como son las cápsulas inyectivas de los grupos simples. Recordemos también que $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ son las p-componentes de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Teorema 3.5.4. *Para todo p primo se tiene que:*

1. *Todo submódulo propio K de $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es finito; además existe $n \in \mathbb{N}$ para que $K = \mathbb{Z}(1/p^n + \mathbb{Z})$.*

2. *Para cualesquiera submódulos K_1, K_2 de $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ se tiene que $K_1 \subseteq K_2$ o $K_2 \subseteq K_1$.*

3. $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es la cápsula inyectiva de $\mathbb{Z}_p$.

Demostración. 1). Sea K un submódulo propio de $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ y sea $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\{1/p^n + \mathbb{Z}\} \in K \text{ pero } \{1/p^{n+1} + \mathbb{Z}\} \notin K$$

Para cualquier $k/p^m + \mathbb{Z} \in K$ con $k \in \mathbb{Z}$ que p no lo divida y $m \in \mathbb{N}$, podemos encontrar $r, s \in \mathbb{Z}$ tal que $kr + p^m s = 1$. Entonces tenemos que:

$$1/p^m + \mathbb{Z} = (kr + p^m s)/p^m + \mathbb{Z} = r(k/p^m + \mathbb{Z}) \in K$$

Por la elección de n tenemos que $m \leq n$ y $K = \mathbb{Z}(1/p^n + \mathbb{Z})$.

2). Se sigue de 1) cualesquiera dos submódulos K_1, K_2 deben ser cíclicos de la forma $K_1 = \mathbb{Z}(1/p^n + \mathbb{Z}),\ K_2 = \mathbb{Z}(1/p^m + \mathbb{Z})$ para algunos $m, n \in \mathbb{N}$ entonces si $n \leq m$ tenemos que $K_2 \subseteq K_1$. 3). Por 2) $\mathbb{Z}_p \cong \{z/p + \mathbb{Z} | z \in \mathbb{Z}\}$ es esencial en $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ y como $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es un sumando directo de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ resulta divisible e inyectivo.

□

3.5.1. Ejemplo 1

Consideremos a $\mathcal{K}$ la clase natural generada por el grupo $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_p$; $\mathcal{K} = \langle \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_p \rangle$. Sabemos que a $\mathcal{K} = \langle \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_p \rangle = \{N | \exists I\ N \hookrightarrow E((\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_p)^{(I)})\}$. Aparte recordemos que como $\mathbb{Z}$ es neteriano (toda familia no vacía de submódulos de $\mathbb{Z}$ tiene máximo) tenemos que para una familia $\{M_i\}_{i \in I}$, $\oplus_{i \in I} E(M_i)$ es la cápsula inyectiva de $\oplus_{i \in I} M_I$; en este caso tenemos que $E(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Lo que nos indica que $\mathcal{K} = \{N | \hookrightarrow \mathbb{Q}^{(I)} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty}^{(I)}\}$.

Podemos observar que $c(\mathcal{K})$ consiste en todos los grupos de torsión cuya p-componente es cero; sea $W \in c(\mathcal{K})$ si $T(W) \neq W$ tenemos algún $x \in W$ con $nx \neq 0$; con $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ entonces $\langle x \rangle \hookrightarrow \mathbb{Z}$ lo cual es una contradicción; entonces $T(W) = W$ y $W = \oplus p_i(W)$ donde $p_i(W)$ son la p-componentes de W entonces deber tener $p(W) = 0$. Por otra parte es claro que un grupo de torsión con p-componente cero no puede pertenecer a $\mathcal{K}$.

Ahora observamos que $c(\mathcal{K})$ es cerrada bajo cocientes y por 3.2.8 tenemos $\mathcal{K} = \mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ y $\mathcal{T}_{\mathcal{K}} = c(\mathcal{F}_{\mathcal{K}}) = c(\mathcal{K})$.

3.5.2. Ejemplo 2

Sea $\mathcal{K} = \langle \mathbb{Z}_p \rangle$; observamos que $c(\mathcal{K}) = \langle \mathbb{Z} \oplus \oplus_q \{\mathbb{Z}_q | q \neq p\} \rangle$ con q primo. Entonces resulta que $\mathcal{F}_{\mathcal{K}} = \langle \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_p \rangle$ y por el ejemplo anterior obtenemos $c(\mathcal{F}_{\mathcal{K}}) = \langle \oplus \{\mathbb{Z}_q | q \neq p\} \rangle = \mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ que es una clase cerrada bajo cocientes.

De esto vemos que a diferencia del ejemplo 1 tenemos contenciones propias de $\mathcal{T}_{\mathcal{K}} = c(\mathcal{F}_{\mathcal{K}}) \subset c(\mathcal{K})$ y $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}_{\mathcal{K}}$. Podemos observar que $c(\mathcal{K}) \cap \mathcal{F}_{\mathcal{K}} = \langle \mathbb{Z} \rangle$

aparte $\mathbb{Z}_p$ es $\mathcal{K}$-cocritico por lo que es $\tau = (\mathcal{T}_{\mathcal{K}}, \mathcal{F}_{\mathcal{K}})$-cocritico; $\tau = (\langle \oplus \{\mathbb{Z}_q | q \neq p\} \rangle, \langle \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_p \rangle)$.

Apéndice A

Categorías

A.1. Categorías

Definición A.1.1. *Una* categoría $\mathcal{C}$ *consiste de lo siguiente:*

- *una clase* $|\mathcal{C}|$ *de* objetos $A, B, C, ...,$
- *para cada par ordenado de objetos* (A, B) *de* $\mathcal{C}$ *existe un conjunto (talvez vacio)* $[A, B]_{\mathcal{C}}$ *llamado el conjunto de* morfismos *de* A *a* B*,*
- *para cada terna ordenada* (A, B, C) *de objetos de* $\mathcal{C}$ *existe un mapeo*

  $$[B, C]_{\mathcal{C}} \times [A, B]_{\mathcal{C}} \to [A, C]_{\mathcal{C}}$$

  llamado la composición de morfismos*.*

Si $\alpha \in [A, B]_{\mathcal{C}}$ y $\beta \in [B, C]_{\mathcal{C}}$, la imagen de (β, α) se designa $\beta\alpha$ (ocasionalmente $\beta \circ \alpha$). Esto consta de los siguiente axiomas:

1. Los conjuntos $[A, B]_{\mathcal{C}}$ son ajenos para cada pareja (A, B).
2. *Ley asociativa* Para toda $\alpha \in [A, B]_{\mathcal{C}}$, $\beta \in [B, C]_{\mathcal{C}}$ y $\gamma \in [C, D]_{\mathcal{C}}$ se tiene $\gamma(\beta\alpha) = (\gamma\beta)\alpha$.
3. *Existencia de identidades* Para cada objeto A de $\mathcal{C}$ existe un *morfismo identidad* $1_A \in [A, A]_{\mathcal{C}}$ tal que para todo $\alpha \in [A, B]_{\mathcal{C}}$, $\alpha 1_A = 1_B \alpha = \alpha$.

Según el contexto si es claro de que categoría se habla podemos escribir $[A, B]$ en vez de $[A, B]_{\mathcal{C}}$. Otras notaciones para el conjunto de morfismos son $(A, B), \mathcal{C}(A, B), Hom(A, B), hom(A, B), \mathcal{MOR}_{\mathcal{C}}, \mathcal{MOR}(A, B)$. En ocasiones también se usa $\mathcal{OBJ}(\mathcal{C})$ para referirse a la clase $|\mathcal{C}|$.

Para $\alpha \in [A, B]$ definimos el *dominio* de α como $Dom(\alpha) = A$ y el *codominio* de α como $Cod(\alpha) = B$. Por el axioma 1 de la definición de categoría se observa que el dominio y codominio de α está determinado únicamente por α. En vez de escribir $\alpha \in [A, B]$ usaremos $\alpha : A \to B$.

Proposición A.1.2. *La identidad 1_A (que existe en virtud de los axiomas de la definición de categorías) está únicamente determinada.*

Demostración. Sea e_A otra identidad de A entonces tenemos $e_A = e_A 1_A = 1_A$. □

A.1.1. Ejemplos

ENS. Los objetos son la clase de todos los conjuntos y los morfismos son las funciones entre ellos con la composición de morfismos $\beta\alpha$ como la composición de funciones α seguido de β.

Gr. Los objetos son la clase de grupos y $[A, B] = Hom(A, B)$ el conjunto de todos los homomorfismos de grupos de A a B con la composición usual.

$R-Mod$. Es la categoría de los módulos izquierdos sobre R análogamente esta la categoría $Mod-R$ que son los módulos derechos sobre R. los morfismos son los R-homomorfismos de A a B y la composición usual. En general es cierto que para cada estructura algebraica con sus homomorfismos que la preservan forman una categoría. Para anillos se requiere la existencia de la identidad y homomorfismos que la preserven.

A.2. Morfismos

Definición A.2.1. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $\alpha : A \to B$. Entonces se dice que:*

1. *α es* monomorfismo *si para todo $C \in \mathcal{C}$ y para todo $\gamma_1, \gamma_2 \in [C, A]$ se tiene $[\alpha\gamma_1 = \alpha\gamma_2 \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2]$.*

2. *α es* epimorfismo *si $C \in \mathcal{C}$ y para todo $\beta_1, \beta_2 \in [B, C]$ se tiene $[\beta_1\alpha = \beta_2\alpha \Rightarrow \beta_1 = \beta_2]$.*

3. *α es* bimorfismo *si α es monomorfismo y epimorfismo.*

4. *α es* isomorfismo *si existe $\beta \in [B, A]$ talque se tiene $[\beta\alpha = 1_A;\ \alpha\beta = 1_B]$.*

5. *α es* endomorfismo *si $Dom(\alpha) = Cod(\alpha)$.*

6. *α es* automorfismo *si α es isomorfismo y endomorfismo.*

Observación: si $\alpha : A \to B$ es un isomorfismo entonces $\exists \beta : B \to A$ tal que $\beta\alpha = 1_A$ y $\alpha\beta = 1_B$. Como $\beta\alpha = 1_A$, $\alpha\beta' = 1_B$ implica $\beta = \beta'$, β está únicamente determinado por α y se le llama *inversa* de α y se escribe $\beta = \alpha^{-1}$; entonces de dice que A y B son isomorfos.

Proposición A.2.2. *Si α es isomorfismo entonces α es bimorfismo.*

Demostración. Sea $\beta\alpha = 1_A$ y $\alpha\beta = 1_B$, si $\alpha\gamma_1 = \alpha\gamma_2$ se tiene que

$$\gamma_1 = 1_A\gamma_1 = \beta\alpha\gamma_1 = \beta\alpha\gamma_2 = 1_A\gamma_2 = \gamma_2.$$

Análogamente para $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$. □

Mas ejemplos; los endomorfismos de un objeto con su composición forman un monoide. Reciprocamente un monoide se puede considerar como una categoría de un solo objeto cuyos morfismos son los elementos del moniode y un grupo puede ser visto como una categoría de un solo objeto en la cual todo morfismo es un automorfismo.

Una categoría es *discreta* si cada morfismo es una identidad, entonces cada clase se puede ver como una categoría discreta.

A.3. Categorías aditivas

Definición A.3.1. *Una categoría* semiaditiva *es una categoría en la cual cada conjunto $[A, B]$ tiene una estructura aditiva asociativa, conmutativa y con elemento 0 (monoide aditivo) de forma que se distribuye con respeto a la composición de morfismos por ambos lados y es compatible con el elemento 0 i.e.*

$$(g_1 + g_2)f = g_1 f + g_2 f; \;\; g(f_1 + f_2) = gf_1 + gf_2 \tag{A.1}$$

$$g0 = 0; \;\; 0f = 0 \tag{A.2}$$

Si [A, B] es siempre un grupo aditivo, entonces la categoría se llama *aditiva* y 1.2 es consecuencia de 1.1.

Con la composición usual de homomorfismos $Ab, R - Mod, Mod - R$ son categorías aditivas. En una categoría aditiva $[A, A]$ es un anillo y $[A, B]$ y $[B, A]$ son respectivamente módulos derechos e izquierdos sobre $[A, A]$. Un anillo con unidad se puede ver como una categoría aditiva con un solo objeto.

A.4. Subcategorías

Definición A.4.1. *Una* subcategoría $\mathcal{D}$ *de una categoría* $\mathcal{C}$ *consiste de:*

- *Una subclase de* $|\mathcal{D}|$ *de la clase de objetos de* $\mathcal{C}$
- *Para cada par ordenado* (A, B) *de objetos de* $|\mathcal{D}|$*, existe un subconjunto* $[A, B]_{\mathcal{D}}$ *de* $[A, B]_{\mathcal{C}}$ *talque:*
  1. *Para cada terna ordenada* (A, B, C) *de objetos en* $|\mathcal{D}|$*, la composición en* $\mathcal{C}$ *mapea* $[B, C]_{\mathcal{D}} \times [A, B]_{\mathcal{D}} \to [A, C]_{\mathcal{D}}$
  2. *Para cada* $A \in |\mathcal{D}|$*,* $1_A \in [A, A]_{\mathcal{D}}$*.*

Es inmediato que $\mathcal{D}$ es una categoría. La subcategoría $\mathcal{D}$ se llama *plena* si para cualesquiera dos objetos A y B en $\mathcal{D}$ todos los $\mathcal{C}$-morfismos de A a B pertenecen a $\mathcal{D}$; i.e. $[A, B]_{\mathcal{D}} = [A, B]_{\mathcal{C}}$. Una subcategoría está únicamente determinada por sus objetos.

Los conjuntos finitos son una subcategoría plena de ENS. Los grupos conmutativos determinan una subcategoría plena de la categoría de los grupos. Similarmente, está la subcategoría de los grupos libres; de forma correspodiente está la subcategoría de los grupos libre abelianos o de torsión de *Ab*.

Se pueden obtener subcategorías de $\mathcal{C}$ si se toma un objetos A de $\mathcal{C}$ y se toman todos los endomorfismos, todos los automorfismos o sólo la identidad de A. Cada categoría $\mathcal{C}$ contiene una subcategoría discreta con todos los objetos de $\mathcal{C}$.

A.5. Funtores

Definición A.5.1. *Sean* $\mathcal{C}$ *y* $\mathcal{D}$ *categorías. Un* funtor covariante $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$*, es un mapeo entre objetos y morfismos que asigna a cada objeto* $A \in |\mathcal{C}|$ *un objeto* $T(A) \in |\mathcal{D}|$ *y a cada morfismo* $f : A \to B$ *un morfismo* $T(f) : T(A) \to T(B)$ *de tal forma que*

$$T(1_A) = 1_{T(A)} \tag{A.3}$$

$$T(gf) = T(g)T(f) \tag{A.4}$$

.

Un funtor preserva identidades y la composición de morfismos. Esto implica que los isomorfismos también se preservan. Si $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ son semiaditivas, entonces $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ se le llama *aditivo* si

$$T(f_1 + f_2) = T(f_1) + T(f_2) \tag{A.5}$$

$$T(0) = 0 \tag{A.6}$$

para todos los 0-morfismos.

Definición A.5.2. *Un* funtor contravariante $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *asigna a cada objeto* $A \in |\mathcal{C}|$ *un objeto* $T(A) \in |\mathcal{D}|$ *y a cada morfismo* $f : A \to B$ *un morfismo* $T(f) : T(B) \to T(A)$ *de forma que*

$$T(1_A) = 1_{T(A)}, \tag{A.7}$$

$$T(gf) = T(f)T(g). \tag{A.8}$$

A.5.1. Ejemplos

Funtor identidad, $Id : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, mapea objetos y morfismos de una categoría en ellos mismos.

Inclusión de una subcategoría $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}$. $i : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$.

Funtor constante. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías y sea $X \in |\mathcal{D}|$. Entonces el funtor constante con valor X está dado por $T(A) = X$ para toda $A \in |\mathcal{C}|$ y $T(f) = 1_X$ para todo morfismo f en $\mathcal{C}$.

Funtores que olvidan. Si los objetos de una categoría tienen una estructura (ej. grupos, espacios topológicos etc.) y los morfismos la preservan (homomorfismos, funciones continuas etc.). Entonces un funtor que olvida puede ser $U : R\text{-}Mod \to Ab$, manda a un módulo a su estrucura de grupo que tiene, análogamente de un grupo al conjunto que tiene el grupo.

A.6. Objetos

A.6.1. Objeto cero

Definición A.6.1. *Un objeto* $A \in |\mathcal{C}|$ *se llama;* inicial *si* $\forall B \in |\mathcal{C}|, [A, B]$ *tiene un solo elemento,* terminal *si* $\forall C \in |\mathcal{C}|, [C, A]$ *tiene un solo elemento y* cero *si* A *es inicial y terminal.*

Hay un único isomorfismo entre cada par de objetos ceros de una categoría. Si existe objeto cero fijaremos uno y le denotaremos 0. Ej. En Gr, Ab, ${}_RMod$ los objetos con un solo elemento son objetos ceros.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto cero 0. Si A, B son objetos cualesquiera, entonces hay exactamente un morfismo $A \to B$ que se factoriza por 0; i.e. se puede escribir como $A \to 0 \to B$. Lo llamamos el 0-morfismo y lo denotamos por 0 o $0_{A,B}$. $0 : A \to B$ no depende de la elección del objeto cero 0 en $\mathcal{C}$, si $0'$ es otro objeto cero, consideraremos $A \to 0 \to 0' \to B$.

Si $\mathcal{C}$ es semiaditiva, entonces en cada $[A, B]$ hay un elemento neutro con respecto a la adición al cual se le refiere como 0-morfismo. Si $\mathcal{C}$ tiene objeto cero ambos conceptos coinciden.

A.6.2. Núcleo y Conúcleo

Definición A.6.2. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto cero y $f : A \to B$ un morfismo de ella. Decimos:*

1. *Un morfismo $i : K \to A$ es* núcleo *de f si $fi = 0$ y para cada morfismo $g : D \to A$ con $fg = 0$ hay un único morfismo $h : D \to K$ con $ih = g$.*

2. *Un morfismo $p : B \to C$ es* conúcleo *de f si $pf = 0$ y para cada morfismo $g : B \to D$ con $gf = 0$ hay un único morfismo $h : C \to D$ con $hp = 0$.*

Se tiene que si $f : A \to B$ en $\mathcal{C}$, el núcleo de f es monomorfismo y el conúcleo f es epimorfismo. El dominio y codominio de un núcleo de f están únicamente determinados salvo isomorfismos. i.e. si $i_1 : K_1 \to A$, $i_2 : K_2 \to A$ son núcleos de f, existe un isomorfimso $\alpha : K_1 \to K_2$ con $i_1 = \alpha i_2$. análogamente para el conúcleo.

A.6.3. Productos y Coproductos

Definición A.6.3. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $\{A_i | i \in I\}$ una familia de objetos de $\mathcal{C}$, un par $(P, (\phi_i | i \in I))$ se llama* producto *de la familia $\{A_i | i \in I\}$ si:*

1. *$P \in |\mathcal{C}|$*

2. *$(\phi_i | i \in I)$ es una familia de morfismo de $\mathcal{C}$ tal que $\phi_i : P \to A_i \; i \in I$*

3. *Para cada familia de morfismos $(\gamma_i | i \in I)$ de $\mathcal{C}$ con $\gamma_i : C \to A_i$ de $\mathcal{C}$ existe un único morfismo $\gamma : C \to P$ de $\mathcal{C}$ tal que $\gamma_i = \phi_i \gamma \;\; i \in I$.*

Definición A.6.4. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $\{A_i | i \in I\}$ una familia de objetos de $\mathcal{C}$, un par $(Q, (\eta_i | i \in I))$ es* coproducto *de $\{A_i | i \in I\}$ si:*

1. *$Q \in |\mathcal{C}|$*

2. *$(\eta_i | i \in I)$ es una familia de morfismo en $\mathcal{C}$ tal que $\eta_i : A_i \to Q \; i \in I$*

3. *Para cada familia α_i de morfismos de $\mathcal{C}$ con $\alpha_i : A_i \to B$ existe un único morfismo $\alpha : Q \to B$ en $\mathcal{C}$ tal que $\alpha_i = \alpha \eta_i \;\; i \in I$*

Los productos y coproductos son únicos salvo isomorfismos. En general no hay confusión y no se hace referencia a la familia de morfismos y se dice que P es producto de $\{A_i\}$ y similarmente que Q es el coproducto respectivamente. Se denotan $P := \prod A_i$ y $Q := \coprod A_i$. Los productos y coproductos, al igual que los objetos cero, no necesariamente existe en una categoría.

Apéndice B

La categoría R-Mod

R-Mod es una subcategoía de ENS, GRP, Ab y para $R = \mathbb{Z}$ tenemos $\mathbb{Z}$-$Mod = Ab$. El $Hom_R(A, B)$ forma un grupo abeliano así que R-Mod es una categoría aditiva.

B.1. R-Mod

B.1.1. Morfismos

Proposición B.1.1. *Sea $f : M \to N$ un morfismo en R-Mod, entonces son equivalentes:*

1. *f es monomorfismo si y sólo si f es inyectivo*
2. *f es epimorfismo si y sólo si f es suprayectivo*
3. *f es isomorfismo si y sólo si f es biyectivo*
4. *f es cero morfismo si y sólo si $Im(f) = 0$*

B.1.2. Núcleo y Conúcleo en R-Mod

Proposición B.1.2. *Sea $f : M \to N$ un R-homomorfismo entonces:*

1. *$i : Nuc(f) \to M$ es núcleo de f*
2. *$p : N \to N/Im(f)$ es conúcleo de f*

Demostración. 1) Si $g : L \to M$ y $fg = 0$; entonces $g(L) \subseteq Nuc(f)$.
2) Si $h : N \to L$ con $hf = 0$, entonces $Im(f) \subseteq Nuc(f)$ y por el teorema de factorización tenemos el morfismo $N/Im(f) \to L$. $\square$

B.1.3. Sucesiones exactas

En una categoría $\mathcal{C}$ con cero y núcleos, una secuencia de dos morfismos $f : A \to B$, $g : B \to C$ se llama *exacta* si $gf = 0$ y se tiene un único epimorfismo $h : A \to Nuc(g)$ talque $f = hi$ donde i es la inclusión de $Nuc(g)$ en B. Una secuencia de morfismos $\{f_i : A_i \to A_{i+1} | i \in \mathbf{N}\}$ en $\mathcal{C}$ se le llama *exacta* en A_i si f_{i-1} y f_i forman una sucesión exacta y se le llama *exacta* si es exacta en todas partes.

En R-Mod una sucesión de dos morfismos $f : M \to N$ $g : N \to L$ es exacta si y sólo si $Im(f) = Nuc(g)$. Y tiene como consecuencia lo siguiente.

Proposición B.1.3. *Para $f : M \to N$ en ${}_R Mod$ se tiene:*

1. $0 \to M \to N$ *es exacta si y sólo si f es monomorfismo*
2. $M \to N \to 0$ *es exacta si y sólo si f es epimorfismo*
3. $0 \to M \to N \to 0$ *es exacta si y sólo si f es isomorfismo*
4. $0 \to K \to M \to N \to L \to 0$ *es exacta si y sólo si $i : K \to M$ es núcleo de f y $p : N \to L$ es conúcleo de f*

Una sucesión exacta de R-modulos de la forma

$$0 \to K \to M \to N \to 0$$

se le llama *sucesión exacta corta* o una *extensión* de N por K. Sea $f : K \to M$ y $g : M \to N$, en este caso f es núcleo de g y g es conúcleo de f. Usualmente K se considera un submódulo y N un cociente de M.

B.2. Generadores en R-Mod

Definición B.2.1. *Un módulo ${}_R B$ es* generador *de R-Mod si*

$$\forall M \in R\text{-}Mod[M = \sum_{\phi \in Hom_R(B,M)} Im(\phi)]$$

Para arbitrarios B y M se define $Tr(B, M) := \sum_{\phi \in Hom_R(B,M)} Im(\phi)$, es un submódulo de M. La propiedad de que B sea generador dice que $Tr(B, M)$ es lo más grande posible, es todo M.

Observación: ${}_R R$ es generador de R-Mod, Sea $m \in M$ y el morfismo $\phi_m : R \to M$, $r \to rm$ existe con $\phi_m(1) = 1m = m$ entonces se sigue

$$M = \sum_{m \in M} Im(\phi_m) \hookrightarrow Tr(R, M) \hookrightarrow M$$

Entonces se tiene $Tr(R, M) = M$.

Corolario B.2.2. 1. *Si B es generador y A un módulo con $Tr(A,B) = B$ entonces A es generador.*

2. *Todo módulo que se mapea epimórficamente a ${}_RR$ es generador*

Demostración. 1) Tenemos:

$$\sum_{\psi \in Hom_R(A,B), \phi \in Hom_R(B,M)} Im(\phi\psi) = \sum_{\phi,\psi} \phi(Im(\psi))$$

$$= \sum_{\phi} \phi(\sum_{\psi} Im(\psi)) = \sum_{\phi} \phi(B) = \sum_{\phi} Im(\phi) = M$$

2) se sigue de 1) y de que ${}_RR$ es generador. □

Ahora se presenta una caracterización de los generadores.

Teorema B.2.3. *B es generador $\Leftrightarrow$*

$$\forall \mu \in Hom_R(M,N),\ \mu \neq 0 \quad \exists \phi \in Hom_R(B,M), [\, \mu\phi \neq 0].$$

Demostración. $\Rightarrow$ Como $\mu \neq 0$ entonces hay $m \in M$ con $\mu(m) \neq 0$. Como B es generador tenemos

$$m = \sum_{i=1}^{k} \phi_i(b_i)\ \phi_i \in Hom_R(B,M)\, b_i \in B$$

y por lo tanto tenemos $0 = \mu(m) = \sum_{i=1}^{k} \mu\phi_i(b_i)$. por lo tanto hay ϕ_i con $\mu\phi_i = 0$.
$\Leftarrow$ Supongamos $Tr(B,M) \neq M$, sea $\nu : M \to M/Tr(B,M)$ el epimorfismo canónico. Como $\nu \neq 0$ hay un $\phi \in Hom_R(B,M)$ con $\nu\phi \neq 0$, consecuentemente tenemos $Im(\phi)$ no pertenece a $Tr(B,M)$, contradicción. □

Se presenta el siguiente lema que servira para dar una caracterización mas completa para los generadores en R-Mod

Lema B.2.4. *Para cada homomorfismo $\psi : \coprod_{i\in I} A_i \to M$ se tiene*

$$Im(\psi) = \sum_{i\in I} Im(\psi\eta_i)$$

donde $\eta_i : A_i \hookrightarrow \coprod_{i\in I} A_i,\ a_j \to \mathbf{a}_j$ donde $\mathbf{a}_j(i) = \begin{cases} 0 & para\ i \neq j; \\ a_j & para\ i = j. \end{cases}$

Demostración. Como consecuencia de que las entradas distintas de 0 de cada elemento del coproducto son finitos, cada elemento de $\coprod_{i\in I} A_i$ se puede escribir como una suma finita $\sum \eta_i(a_i)$ con $a_i \in A_i$. Entonces tenemos que $\psi(\sum \eta_i(a_i)) = \sum \psi(\eta_i(a_i))$ y

$$Im(\psi) \hookrightarrow \sum_{i\ I} Im(\psi\eta_i).$$

Por otra parte si $m \in \sum_{i\ I} Im(\psi\eta_i)$ entonce m se representa como una suma finita

$$m = \sum \psi\eta_i(a_i) = \psi(\sum \eta_i(a_i)),\ a_i \in A_i$$

Por lo que tenemos $m \in Im(\psi)$ y obtenemos

$$\sum_{i\in} Im(\psi\eta_i) \hookrightarrow Im(\psi)$$

□

Como consecuencia del lema tenemos el siguiente teorema

Teorema B.2.5. *Son equivalentes:*

1. *${}_RB$ es generador*
2. *cada suma directa de copias de B es generador*
3. *una suma directa de copias de B es generador*
4. *cada módulo ${}_RM$ es la imagen epimórfica de una suma directa de copias de B*

Demostración. Las primeras 3 equivalencias son consecuencia directa del corolario ya mencionado. $1 \Rightarrow 4$) Sea $\coprod_{\phi\in Hom_R(B,M)} B_\phi$ con $B_\phi = B$ para todo $\phi \in Hom_R(B, M)$ entonces consideramos el homomorfismo

$$\psi : \coprod_{\phi\in Hom_R(B,M)} B_\phi \to M$$

definido como

$$\psi((b_\phi)) := \sum \phi(b_\phi)$$

donde b_ϕ es la componente en (b_ϕ) con $b_\phi \neq 0$. Como (b_ϕ) sólo tiene finitos $b_\phi = 0$ la suma está bien definida. Aplicando el lema anterior

$$Im(\psi) = \sum_{\phi\in Hom_R(B,M)} Im(\phi) = M$$

por lo que ψ es epimorfismo.

$4 \Rightarrow 1$) Si hay un epimorfismo $\psi : \coprod_{i\in I} B_i \to M$ con $B_i = B$ para todo $i \in I$ y si η_i es la i-esíma inclusión de B en $\coprod B_i$ entonces tenemos $\psi\eta_i \in Hom_R(B, M)$ y por el lema

$$M = Im(\psi) = \sum_{i\in I} Im(\psi\eta_i) \hookrightarrow \sum_{\phi\in Hom_R(B,M)} Im(\phi) \hookrightarrow M.$$

Entonces

$$\sum_{\phi\in Hom_R(B,M)} Im(\phi) = M$$

por lo que B es generador. □

B.3. Módulos inyectivos y Cápsula inyectiva

B.3.1. Módulos esenciales y superfluos

Definición B.3.1. *A un submódulo A de M se le llama* esencial *y se escribe $A \leq_e M$, si $\forall U \leq M$ $[A \cap U = 0 \Rightarrow U = O]$. De forma dual se le llama* superfluó*, $A \ll M$, si $\forall U \leq M$ $[A + U = M \Rightarrow U = M]$*

Un morfismo $\alpha : A \to B$ se le llama *esencial*, respectivamente *superfluo* si; $Im(\alpha) \leq_e B$ respectivamente $Ker(\alpha) \ll A$. De la definición de esencial se obtienen las siguientes propiedades:

Lema B.3.2.

- $A \leq B \leq M \leq N;\ B \ll M \Rightarrow A \ll N$
- $A_i;\ i = 1, \ldots, n \Rightarrow \sum_{i=1}^n A_i \ll M$
- $A \ll M,\ \phi : M \to N; \Rightarrow \phi(A) \ll M$
- *si $\alpha : A \to M,\ \beta : B \to C$ son epimorfismos superfluos entonces $\beta\alpha$ es un epimorfismo esencial*

Dualmente de la definición obtenemos las siguientes propiedades para esenciales

Lema B.3.3.

- $A \leq B \leq M \leq N;\ A \leq_e N \Rightarrow B \leq_e M$
- $A_i,\ i = 1, \ldots, n; \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i \leq_e M$
- $B \leq_e M,\ \phi : M \to N \Rightarrow \phi^{-1}(B) \leq_e M$

- *si $\alpha : A \to M$, $\beta : B \to C$ son monomorfismo esenciales $\beta\alpha$ es un monomorfismo superfluo.*

Las siguientes propiedades son muy utiles cuando se trabaja con submodulos esenciales y superfluos y se presenta sin demostración.

Lema B.3.4. *Para $a \in_R M$ se tiene: aR no es superfluó en $M \Leftrightarrow$ existe un submódulo máximo C con $a \notin C$*

Lema B.3.5. *Sea $A \leq_R M$ entonces se tiene que:*
$A \leq_e {}_R M \iff \forall m \in M \; m \neq 0 \; \exists r \in R \; [rm \neq 0 \wedge rm \in A]$

B.3.2. Módulos inyectivos y cápsula inyectiva

Teorema B.3.6. *Son equivalentes para ${}_RQ$:*

1. *todo monomorfismo $\xi : Q \to B$ se escinde ($Im(\xi)$ es sumando directo de B).*
2. *para todo monomorfismo $\alpha : A \to B$ y para todo morfismo $\phi : A \to Q$; $\exists\kappa : B \to Q$ con $\phi = \kappa\alpha$*

Si ${}_RQ$ es un módulo que cumple las condiciones anteriores se le llama *inyectivo.*

Definición B.3.7. *Un morfismo $\eta : M \to Q$ es* cápsula inyectiva *de M si Q es inyectivo y η es un monomorfismo esencial.*

Si no hay ninguna confusión se le designa a Q como la cásula inyectiva de M y no se hace referencia a η. Para un módulo la cápsula inyectiva siempre existe y esta es única salvo isomorfismos. Ahora se presenta una definición y un teorema para dar una caracterización de las cápsulas inyectivas.

Definición B.3.8. *Sea $\alpha : A \to B$ monomorfismo.*

1. *α es una* extensión esencial *de A si $Im(\alpha) \leq_e B$*
2. *α es una* extensión esencial maxima *de A si α es una extensión esencial y toda extension esencial de B es un isomorfismo.*

Teorema B.3.9. *Sea $\gamma : M \to N$ monomorfismo. Entonces: γ es una extensión esencial maxima de M si y sólo si γ es cápsula inyectiva de M.*

B.4. Módulos cogeneradores

Definición B.4.1. *Un módulo* ${}_RC$ *es* cogenerador *en* R-Mod *si*

$$\forall M \in R\text{-}Mod[0 = \bigcap_{\phi \in Hom_R(M,C)} Nuc(\phi)]$$

.

Los módulos cogeneradores se definen de forma dual a los módulos generadores. Para módulos arbitrarios C, M el

$$Nuc(M,C) := \bigcap_{\phi \in Hom_R(M,C)} Nuc(\phi)$$

es intersección de submódulos de M y por lo tanto es un submódulo de M. La propiedad de que C sea cogenerador indica que $Ker(M,C)$ es lo más chico posible para cada M y por lo tanto es 0.

De forma similar obtenemos lemas para caracterizar a los módulos cogeneradores duales a aquellos para los módulos generadores.

Teorema B.4.2. *C es cogenerador* $\Leftrightarrow$

$$\forall \lambda \in Hom_R(L,M),\ \lambda \neq 0,\ \exists \phi \in Hom_R(M,C), [\phi\lambda \neq 0]$$

Teorema B.4.3.

1. *${}_RC$ es cogenerador*
2. *cada producto directo de copias de C es cogenerador*
3. *un producto directo de copias de C es cogenerador*
4. *cada ${}_RM$ se puede mapear monomórficamente en un producto directo de copias de C*

B.5. Morfismos de Sumas y Productos Directos

Lema B.5.1. *Dadas dos familias de módulos $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{B_j\}_{j\in J}$, definimos $\psi : Hom(\oplus_{i\in I}A_i, \prod_{j\in J} B_j) \to \prod_{I\times J} Hom(A_i, B_j)$ por $\psi : \varphi \to \pi_j\varphi\eta_i$ donde π_j es la proyección canónica y η_i la inclusión. Entonces se tiene que ψ es un isomorfismo de grupo.*

Demostración. Es claro que ψ es un morfismo por lo que solo demostraremos que es monomorfismo y epimorfismo.

Monomorfismo: Sea $0 \neq \varphi \in Hom(\oplus_i A_i, \prod_j B_j)$ entonces existe $(a_i) \in \oplus_i A_i$ tal que $\varphi((a_i)) \neq 0$. Como $(a_i) = \sum_{a_i \neq 0} a_i$ tenemos que $\varphi((a_i)) = \varphi(\sum a_i) = \sum \varphi(a_i) \neq 0$. Por lo tanto existe i tal que $\varphi(a_i) = \varphi\eta_i(a_i) = 0$ y de esto tenemos que existe j talque $\pi_j\varphi\eta_i(a_i)ne0$; es decir $\pi_j\varphi\eta_j \neq 0$.

Epimorfismo. Sea $(a_{ji}) \in \prod_{i\times j} Hom(A_i, B_j)$. Para un $i \in I$ fijo y la familia $\{\alpha_{ji} | j \in J\}$ donde $\alpha_{ji} : A_i \to B_j$ le podemos asociar el morfimos $\beta_i : A_i \to \prod_j B_j$ de forma que conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[d, "\beta_i"] \arrow[dr, "\alpha_{ji}"] & \\ \prod_j B_j \arrow[r, "\pi_j"] & B_j \end{tikzcd}$$

Ahora a la familia $\{B_i | i \in I\}$ le asociamos $\varphi : \oplus_i A_i \to \prod_j B_j$ de forma que conmuta el diagrma:

$$\begin{tikzcd} & A_i \arrow[dl, "\eta_i"'] \arrow[d, "\beta_i"] \\ \oplus_i A_i \arrow[r, "\varphi"] & \prod_j B_j \end{tikzcd}$$

De lo que concluimos que $a_{ji} = \pi_j\beta_i = \pi_j\varphi\eta_i$. □

Como casos especiales de Lema tenemos que:

$$Hom(\oplus_i A_i, B) \cong \prod_i Hom(A_i, B) \text{ donde } \varphi \to (\varphi\eta_i)$$

y

$$Hom(A, \prod_j B_j) \cong \prod_j Hom(A, B_j) \text{ donde } \varphi \to (\pi_j\varphi)$$

Bibliografía

[1] J. DAUNS, *Natural Classes and Torsion Theories*, J. Algebra Appl. 2(1) 2003 p. 89-97

[2] J.DAUNS y Y. ZHOU,*Classes of Modules* (Pure and Applied Mathematics, London 2006) p. 7-13,19-25

[3] J. GOLAN, *Torsion Theories* (Longman Scientific Technical, London 1986)

[4] K.R. GOODEARL, *Ring Theory, Nonsingular Rings and Modules* (Pure and Applied Mathematics, 1976) p. 30-33

[5] B. STENSTROM, *Rings of quotients : an introduction to methods of ring theory* (Springer-Verlag, Berlin, New York, 1975)

[6] R. WISBAUER, *Foundations of Module and Ring Theory* (Gordon and Breach Science Publishers, Philadelphia 1991)

[7] R. WISBAUER, *Localization of Modules and the central closure of Rings*, Comm. Algebra 9(14) 1981 p. 1455-1493

[8] Y. ZHOU , *Direct Sums of M-injective Modules and Module Classes*, Comm. Algebra 23(3) 1995 p. 927-940

[9] Y. ZHOU, *On Direct Sums of Injective Modules and Chain Conditions*, Can. J. Math. 46(3) 1994 p.634-647