

Curso de Geometría diferencial

Parte 2. Geometría intrínseca
de las superficies

*Óscar A. Palmas Velasco
J. Guadalupe Reyes Victoria*



Esta es la continuación de la Obra Curso de geometría diferencial. Parte 1. Curvas y superficies. En esta parte se estudian conceptos como: superficie abstracta diferenciable, espacio tangente, métricas riemannianas y modelos de superficies con curvatura constante, entre muchos otros. Este libro es producto de varios cursos de Geometría Diferencial impartidos por los autores a lo largo de varios años, tanto a los estudiantes de las licenciaturas de Matemáticas y Física en la Facultad de Ciencias de la UNAM, como a los de la Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa. La presentación es diferente a la de los cursos clásicos debido a las propias necesidades de nuestras licenciaturas.

Cabe mencionar que este documento está inspirado en varias fuentes y escuelas de geometría, destacando por un lado la escuela rusa plasmada en los libros clásicos de Pogorelov y Dubrovin, Novikov y Fomenko y por otro lado, la escuela brasileña desarrollada principalmente por Do Carmo.

No olvidamos mencionar los cinco volúmenes clásicos de Spivak, donde los lectores podrán encontrar algunas de las fuentes originales para los conceptos que aquí se muestran. Los demás textos mencionados a lo largo del trabajo también han sido igualmente importantes para la elaboración de este libro.



ÓSCAR A. PALMAS VELASCO
J. GUADALUPE REYES VICTORIA

CURSO DE GEOMETRÍA
DIFERENCIAL

PARTE 2. GEOMETRÍA INTRÍNSECA DE LAS SUPERFICIES

FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM



Curso de geometría diferencial

Parte 2. Geometría intrínseca de las superficies

1ª edición, 29 de julio de 2012

Diseño de portada: Laura Uribe

© Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

ISBN: 978-607-02-3487-3

Impreso y hecho en México

Prefacio

Este libro es la continuación de la obra [16], y como aquella, es resultado de cursos impartidos a lo largo de varios años, a estudiantes de las licenciaturas de Matemáticas y Física, tanto en la Facultad de Ciencias de la UNAM, como en la Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa. Esta parte puede emplearse para un segundo curso de Geometría Diferencial impartido a lo largo de un periodo semestral o bien de uno trimestral.

En el capítulo 1 se introduce el concepto de superficie abstracta diferenciable, su parametrización y los objetos geométricos asociados a ésta al proveerla de una métrica. Se introduce el concepto de espacio tangente a una superficie diferenciable y el concepto de orientación. Además, se definen los conceptos de métricas riemannianas y semi-riemannianas (de Minkowski) y en particular se estudian los modelos de superficies con curvatura constante, que son los modelos básicos de las geometrías euclidiana, esférica e hiperbólica.

En el capítulo 2 se estudia la geometría intrínseca de una superficie diferenciable, desarrollando para ello los conceptos de derivada covariante de un campo vectorial, la curvatura geodésica y el transporte paralelo de un campo vectorial. Se estudian además las curvas geodésicas en una superficie como la generalización de las rectas en el plano. Se obtienen resultados geométricos como el Lema de Liouville y el Teorema de Clairaut.

En el capítulo 3 se estudian las propiedades locales y globales de

una superficie, utilizando los conceptos de aplicación exponencial, las coordenadas normales y polares, así como los círculos y rayos geodésicos. Además se demuestra el teorema de completez de Hopf-Rinow como un primer resultado global en una superficie completa.

En el capítulo 4 se estudian los grupos de isometrías de las superficies con curvatura constante.

Finalmente, en el capítulo 5 se demuestra el Teorema de Gauss-Bonnet, estudiando para ello las propiedades topológicas de una superficie, su triangulación y su característica de Euler-Poincaré, así como la clasificación de superficies cerradas y el índice de un campo vectorial. Este teorema muestra la relación que hay entre las propiedades dinámicas (geodésicas) y geométricas (curvatura) de una superficie con sus propiedades topológicas (característica de Euler) y es, sin duda, uno de los resultados principales de la Geometría Diferencial.

Al final de la obra se incluyen dos apéndices con algunos elementos de la teoría de funciones analíticas, la topología y la teoría de espacios métricos necesarios para la lectura de este libro.

La notación utilizada en esta obra es la misma que se utilizó en la primera parte. Nuevamente, al discutir algún ejemplo, el proceso se concluye con el símbolo \triangleright , mientras que cada demostración termina con \square .

La primera versión de esta obra fue realizada mientras el primer autor disfrutó de una estancia sabática en la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa. Agradecemos el apoyo del Dr. Carlos Signoret, jefe del Departamento de Matemáticas, para la realización de este proyecto. Igualmente, agradecemos al Comité Editorial y la Coordinación de Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias de la UNAM, por el apoyo brindado para la publicación de la obra. Por último, agradecemos también a Daniel Espinosa, Guillermo Ruiz y Víctor Cruz Barrigueté su apoyo técnico.

LOS AUTORES

Índice general

Prefacio	III
Índice general	v
1. Superficies abstractas	1
1.1. Superficies diferenciables abstractas	1
1.2. El espacio tangente a una superficie	14
1.3. Cálculo diferencial en superficies	23
1.4. Métricas riemannianas e isometrías	31
1.5. El plano de Lobachevsky	39
1.6. El punto de vista conforme	43
2. Transporte paralelo	55
2.1. Derivada covariante	55
2.2. Transporte paralelo	59
2.3. Orientación	71
2.4. Geodésicas	76
3. Superficies completas	101
3.1. La aplicación exponencial	102
3.2. El Teorema de Minding	111
3.3. Geodésicas y curvas minimizantes	118
3.4. Las superficies como espacios métricos	121

4. Isometrías de formas espaciales	129
4.1. Difeomorfismos de \mathbb{R}^n	130
4.2. Isometrías de \mathbb{R}^n	137
4.3. Isometrías de \mathbb{C}	146
4.4. Isometrías de la esfera \mathbb{S}^2	151
4.5. Isometrías del plano de Lobachevsky	157
5. El Teorema de Gauss-Bonnet	171
5.1. La característica de Euler-Poincaré	172
5.2. Índice y número de vueltas	177
5.3. Algunos aspectos históricos	182
5.4. Gauss-Bonnet I: La versión local	188
5.5. Gauss-Bonnet II: La versión global	191
5.6. Aplicaciones	193
A. Funciones complejas analíticas	201
B. Topología y espacios métricos	207
Bibliografía	211
Índice alfabético	213

CAPÍTULO 1

Superficies abstractas

En este capítulo estudiamos el objeto conocido como superficie diferenciable abstracta¹, generalizando el concepto de superficie diferenciable en \mathbb{R}^3 .

1.1. Superficies diferenciables abstractas

Iniciamos definiendo el concepto de superficie topológica, con base en el de espacio topológico, que puede consultarse en el apéndice B al final de este trabajo.

DEFINICIÓN 1.1. Un espacio topológico S es una **superficie topológica** si y sólo si para cualquier punto $p \in S$ existe una pareja (U, φ) , donde U es una vecindad de p en S y $\varphi : \Omega \rightarrow U$ es un homeomorfismo de una región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ en U .

Asociando coordenadas (u, v) en Ω , las funciones φ y φ^{-1} se pueden escribir como

$$\varphi(u, v) = q \quad \varphi^{-1}(q) = (u(q), v(q)), \quad q \in U.$$

Decimos también que φ provee a la superficie topológica S de un **sistema de coordenadas** (u, v) alrededor del punto p .

¹También llamada variedad bidimensional o 2-variedad en la literatura clásica.

En otras palabras y de igual manera que para las superficies en \mathbb{R}^3 , se dice que una superficie topológica es **localmente homeomorfa** al plano. La figura 1.1 ilustra la definición de superficie topológica.

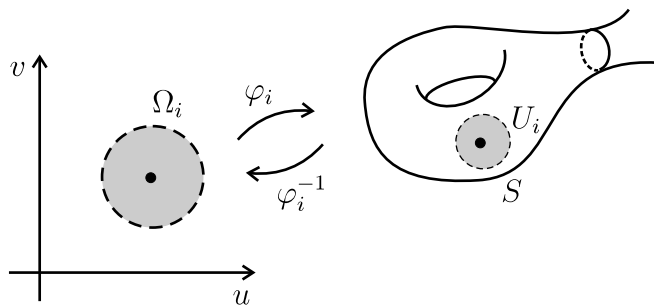


Figura 1.1: Superficie topológica.

Consecuentemente, para demostrar que un espacio topológico es una superficie topológica, es suficiente con definir en una vecindad de cada punto una transformación φ como en la definición, o su transformación inversa φ^{-1} .

DEFINICIÓN 1.2. Con la notación de la definición 1.1, decimos que

1. La pareja (U, φ) es una **parametrización** de S alrededor de p .
2. La pareja (U, φ^{-1}) es una **carta** de S alrededor de p .
3. Una familia de parametrizaciones $\mathcal{U} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ es una **estructura topológica** para S si $S = \bigcup_i U_i$.
4. Un conjunto de cartas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i^{-1})\}_{i \in I}$ es un **atlas** para S si $S = \bigcup_i U_i$.

En este texto estableceremos la mayoría de los conceptos, ejemplos y resultados en términos de parametrizaciones, aunque el lector podrá fácilmente realizar la interpretación correspondiente a través de cartas.

EJEMPLO 1.3. Es fácil ver que todas las superficies diferenciables en \mathbb{R}^3 obtenidas en [16] son superficies topológicas. \triangleright

EJEMPLO 1.4 (Plano proyectivo real de dimensión dos). Definimos el **plano proyectivo**, denotado por \mathbb{RP}^2 , como el conjunto de rectas que pasan por el origen en \mathbb{R}^3 . Es decir, cada una de estas rectas es un punto en \mathbb{RP}^2 . Si se define la distancia entre dos puntos de \mathbb{RP}^2 como el menor ángulo positivo entre las rectas correspondientes, entonces este conjunto, con esta distancia, resulta ser un espacio métrico. Damos a \mathbb{RP}^2 la topología definida mediante esta métrica.

Existe otra manera de definir el espacio proyectivo: Decimos que una pareja de puntos p y q en \mathbb{R}^3 están relacionados si y sólo si están sobre una misma recta que pasa por el origen; es decir, si y sólo si existe un escalar $\lambda \neq 0$ tal que $p = \lambda q$. \mathbb{RP}^2 también se suele definir como un conjunto de clases de equivalencia \mathbb{R}^3 / \sim bajo la relación anterior. No es difícil comprobar que las topologías de espacio métrico y de espacio cociente dadas a \mathbb{RP}^2 coinciden. Aclaremos esta afirmación a continuación.

Sea $\Pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ la aplicación que a cada punto $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ le asocia su clase de equivalencia $[p] \in \mathbb{RP}^2$. Afirmamos que Π es una función continua.

De la propiedad de la imagen inversa de los conjuntos abiertos bajo aplicaciones continuas, será suficiente con demostrar que la imagen inversa bajo Π^{-1} de una bola en \mathbb{RP}^2 es un abierto en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Sean $[p] \in \mathbb{RP}^2$, $\epsilon > 0$ y

$$B_\epsilon([p]) = \{[q] \in \mathbb{RP}^2 \mid d([p], [q]) < \epsilon\}$$

la bola de radio ϵ con centro en $[p]$. Entonces $\Pi^{-1}(B_\epsilon([p]))$ es un cono abierto en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ cuya generatriz es la recta $\{tp \mid t \neq 0\}$ con ángulo ϵ en el vértice, como se muestra en la figura 1.2. Esto demuestra la afirmación y consecuentemente Π es continua.

Por otro lado, del hecho $\Pi(\Pi^{-1}(B_\epsilon([p]))) = B_\epsilon([p])$ y de la continuidad de Π se sigue que un conjunto $U \subset \mathbb{RP}^2$ es abierto si y sólo

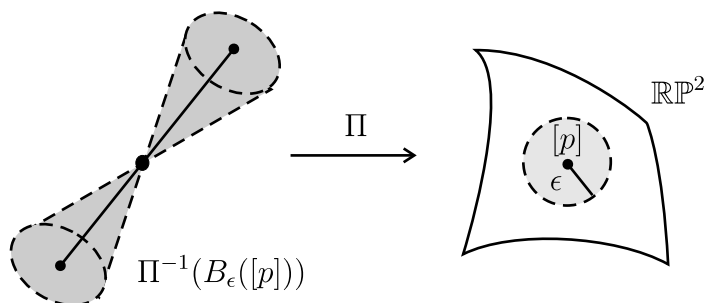


Figura 1.2: Continuidad de la proyección Π .

si $\Pi^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ es abierto. Esto dice que la topología de \mathbb{RP}^2 con la distancia dada es precisamente la topología de espacio cociente (véase [4]).

Afirmamos que \mathbb{RP}^2 tiene una estructura de superficie topológica. Para demostrar esto, utilizaremos el sistema de coordenadas euclidianas x, y, z en \mathbb{R}^3 para dotar a \mathbb{RP}^2 de coordenadas.

Observemos que

1. Si $x \neq 0$ entonces

$$(x, y, z) = x \left(1, \frac{y}{x}, \frac{z}{x} \right)$$

es decir, los puntos (x, y, z) y $(1, y/x, z/x)$ están sobre una misma recta que pasa por el origen.

2. Si $y \neq 0$, entonces los puntos (x, y, z) y $(x/y, 1, z/y)$ están sobre una misma recta que pasa por el origen.
3. De manera análoga, si $z \neq 0$, entonces los puntos (x, y, z) y $(x/z, y/z, 1)$ están sobre una misma recta que pasa por el origen.

La anterior discusión nos dice que podemos representar a los puntos de \mathbb{RP}^2 usando coordenadas *homogéneas* $(x : y : z)$, donde $x, y, z \in \mathbb{R}$

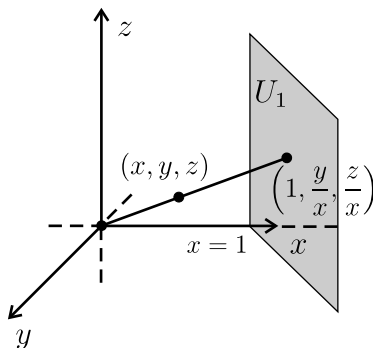


Figura 1.3: Abierto U_1 para el espacio proyectivo \mathbb{RP}^2 .

y los elementos $(x : y : z)$ y $(\lambda x : \lambda y : \lambda z)$ representan el mismo punto cuando $\lambda \neq 0$.

De esta forma, podemos definir los conjuntos

$$U_1 = \{ (x : y : z) \in \mathbb{RP}^2 \mid x \neq 0 \}$$

$$U_2 = \{ (x : y : z) \in \mathbb{RP}^2 \mid y \neq 0 \}$$

$$U_3 = \{ (x : y : z) \in \mathbb{RP}^2 \mid z \neq 0 \}$$

y ya que

$$\Pi^{-1}(U_1) = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{plano } (y, z)\}$$

$$\Pi^{-1}(U_2) = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{plano } (x, z)\}$$

$$\Pi^{-1}(U_3) = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{plano } (x, y)\}$$

entonces tales subconjuntos de \mathbb{RP}^2 resultan ser abiertos. Por ejemplo, U_1 es el conjunto de rectas que forman un ángulo positivo con el plano yz (véase la figura 1.3).

Construimos además las aplicaciones $\varphi_i : \Omega_i = \mathbb{R}^2 \rightarrow U_i$ mediante las reglas de correspondencia

$$\varphi_1(u_1, v_1) = (1 : u_1 : v_1),$$

$$\varphi_2(u_2, v_2) = (u_2 : 1 : v_2),$$

$$\varphi_3(u_3, v_3) = (u_3 : v_3 : 1).$$

y las inclusiones $J_i : \Omega_i \rightarrow \mathbb{R}^3$ mediante las reglas

$$\begin{aligned} J_1(u_1, v_1) &= (1, u_1, v_1), \\ J_2(u_2, v_2) &= (u_2, 1, v_2), \\ J_3(u_3, v_3) &= (u_3, v_3, 1). \end{aligned}$$

Entonces para cada $i = 1, 2, 3$ se tiene $\Pi \circ J_i = \varphi_i$, lo que demuestra que cada φ_i es una función continua.

Las inversas $\psi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^2$ de estas parametrizaciones vienen dadas por

$$\begin{aligned} (u_1, v_1) &= \psi_1(x : y : z) = \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x} \right), \\ (u_2, v_2) &= \psi_2(x : y : z) = \left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y} \right), \\ (u_3, v_3) &= \psi_3(x : y : z) = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z} \right). \end{aligned}$$

Si se definen en los abiertos respectivos de \mathbb{R}^3 las aplicaciones continuas $P_i : \Pi^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^2$ mediante

$$\begin{aligned} P_1(x, y, z) &= \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x} \right), \\ P_2(x, y, z) &= \left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y} \right), \\ P_3(x, y, z) &= \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z} \right), \end{aligned}$$

entonces $P_i = \psi_i \circ \Pi$. De esta forma, al tomar un conjunto abierto $\tilde{\Omega} \subset \Omega_i$, se tiene que $P_i^{-1}(\tilde{\Omega})$ es abierto, pues $P_i^{-1}(\tilde{\Omega}) = \Pi^{-1}(\psi_i^{-1}(\tilde{\Omega}))$ es abierto si y sólo si $\psi_i^{-1}(\tilde{\Omega})$ es abierto. Esto prueba la continuidad de las inversas ψ_i .

Se tiene entonces que $\{(U_i, \varphi_i)\}$ es una estructura topológica (o bien que $\{(U_i, \psi_i)\}$ es un atlas para $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$, lo que le hace una superficie topológica llamada el **plano proyectivo real** de dimensión dos. \triangleright

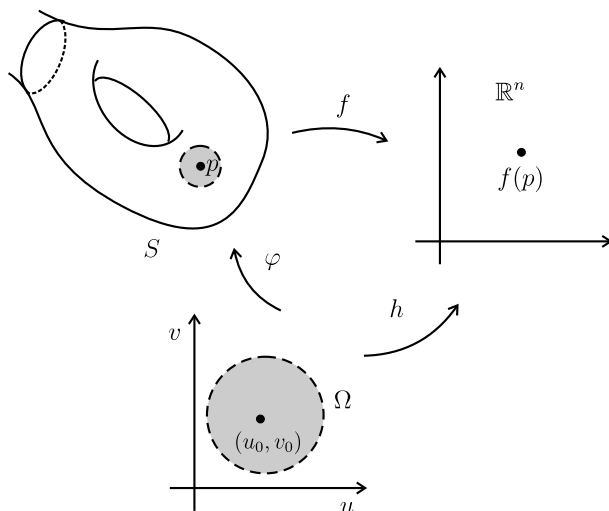


Figura 1.4: Representante de una función $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$.

En la definición de superficie topológica hemos establecido que cada punto en ella debe contar con una vecindad homeomorfa a un abierto de \mathbb{R}^2 , pero ahora distinguiremos aquellas superficies cuyas cartas y sus inversas sean diferenciables.

Después de parametrizar una porción de una superficie S , podemos estudiar cualquier objeto definido en tal porción; por ejemplo, una aplicación $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sean p un punto arbitrario de S y (U, φ) una parametrización alrededor de p , con $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U$ con coordenadas (u, v) . Sea $(u_0, v_0) \in \Omega$ de modo que $\varphi(u_0, v_0) = p$. Podemos definir una función $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ de tal forma que

$$h(u, v) = (f \circ \varphi)(u, v) = f(q),$$

con $q = \varphi(u, v) \in U$. Decimos que $h(u, v)$ representa localmente a $f(q)$ en las coordenadas (u, v) , como se muestra en la figura 1.4.

Con esta notación, diremos que la función f es **diferenciable** en el punto $p \in S$ si $h = f \circ \varphi$ es diferenciable² en el punto (u_0, v_0) .

²En esta obra usamos la palabra *diferenciable* como sinónimo de C^∞ .

Puesto que esta definición está dada en términos de una parametrización, debemos mostrar que tal definición es correcta, en el sentido de que no depende de la parametrización elegida. Si $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ es otra parametrización alrededor de p , de modo que f tenga una representación

$$\tilde{h}(\tilde{u}, \tilde{v}) = f \circ \tilde{\varphi}(\tilde{u}, \tilde{v}),$$

en términos del cambio de coordenadas, tenemos

$$\tilde{h} = f \circ \tilde{\varphi} = f \circ (\varphi \circ \varphi^{-1}) \circ \tilde{\varphi} = (f \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}) = h \circ (\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}).$$

Por lo tanto, para que la función representante \tilde{h} en las coordenadas (\tilde{u}, \tilde{v}) sea diferenciable es suficiente que la composición $\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}$ sea diferenciable. Análogamente, se tiene

$$h = \tilde{h} \circ (\tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi),$$

de modo que si \tilde{h} y $\tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi$ son diferenciables, entonces h también lo es.

A las funciones de cambio de coordenadas

$$\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi} : \tilde{\varphi}^{-1}(U \cap \tilde{U}) \rightarrow \varphi^{-1}(U \cap \tilde{U})$$

y

$$\tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(U \cap \tilde{U}) \rightarrow \tilde{\varphi}^{-1}(U \cap \tilde{U})$$

se les llama **funciones de transición** entre las coordenadas (u, v) y las coordenadas (\tilde{u}, \tilde{v}) (véase la figura 1.5).

Esta discusión muestra la necesidad de la diferenciableidad de los cambios de coordenadas para definir la diferenciableidad de una función, por medio de la propiedad correspondiente de una función representante. Las propiedades del cambio de coordenadas hacen que la diferenciableidad no dependa del representante de la función, lo cual nos lleva a definir una estructura diferenciable en S .

DEFINICIÓN 1.5. Sea S una superficie topológica con la estructura $\mathcal{U} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$. Entonces

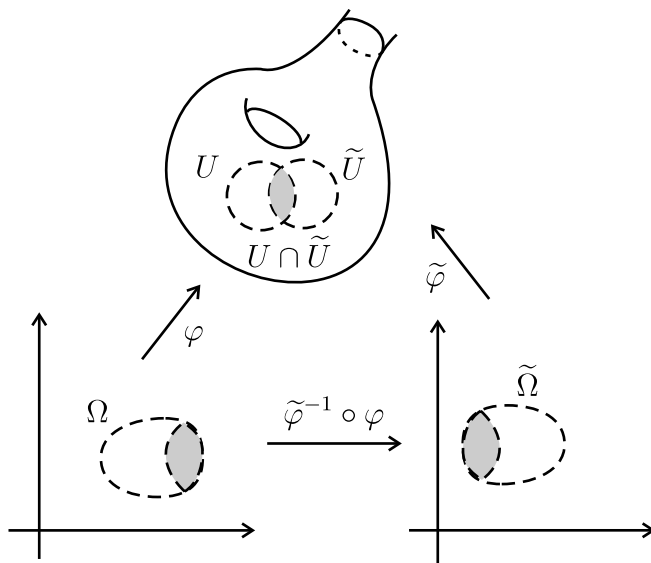


Figura 1.5: Funciones de transición en una superficie.

1. Dos parametrizaciones (U, φ) y $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ en \mathcal{U} son **compatibles** si y sólo si cada vez que $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$ se tiene que las funciones de transición $\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}$ y $\tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi$ son diferenciables.
2. \mathcal{U} es una **estructura diferenciable** para S si y sólo si cualesquiera dos parametrizaciones de \mathcal{U} son compatibles.
3. S es una **superficie diferenciable (abstracta)** si y sólo si S admite una estructura diferenciable.

El lector puede traducir la anterior definición al lenguaje de las cartas; en particular, un **atlas diferenciable** es un atlas cuyas cartas son compatibles entre sí.

También existe el concepto de C^r -compatibilidad, donde se exige que las funciones de transición sean de clase C^r ($r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$). Dejamos al lector los detalles de esta definición.

EJEMPLO 1.6. No es difícil comprobar que cualquier superficie diferenciable $S \subset \mathbb{R}^3$ (véase, por ejemplo, [16]) es una superficie diferenciable en el contexto de la definición 1.5. \triangleright

Por cuestiones técnicas, a veces conviene suponer que la estructura diferenciable contiene a la mayor cantidad de parametrizaciones posibles (por ejemplo, todas las restricciones de una parametrización dada). Formalizamos esta idea como sigue.

DEFINICIÓN 1.7. Sea S una superficie diferenciable con \mathcal{U} como estructura diferenciable. Decimos que \mathcal{U} es **maximal** si y sólo si toda parametrización compatible con las parametrizaciones en \mathcal{U} pertenece a \mathcal{U} .

PROPOSICIÓN 1.8. *Toda estructura diferenciable está contenida en una estructura diferenciable maximal.*

Demostración. Sea \mathcal{U} una estructura diferenciable para S y definamos $\tilde{\mathcal{U}}$ como el conjunto de parametrizaciones compatibles con todas las parametrizaciones de \mathcal{U} . Es fácil ver que todos los elementos de $\tilde{\mathcal{U}}$ son compatibles entre sí y que $\tilde{\mathcal{U}}$ es un atlas maximal (véase el ejercicio 1 de este capítulo). \square

Damos otros ejemplos de superficies diferenciables.

EJEMPLO 1.9. Consideremos a la superficie $S = \mathbb{R}^2$ provista del atlas

$$\mathcal{A} = \{ (\mathbb{R}^2, \psi), (\mathbb{R}^2, \tilde{\psi}) \}$$

donde $\psi(u, v) = (u, v)$ y $\tilde{\psi}(\tilde{u}, \tilde{v}) = (\tilde{u}, \tilde{v}^3)$. Entonces las funciones de transición tienen reglas de correspondencia

$$(\tilde{u}, \tilde{v}) = \tilde{\psi} \circ \psi^{-1}(u, v) = (u, v^3), \quad (u, v) = \psi \circ \tilde{\psi}^{-1}(\tilde{u}, \tilde{v}) = (\tilde{u}, \tilde{v}^{1/3}).$$

Esto nos dice que con este atlas la superficie topológica $S = \mathbb{R}^2$ no es diferenciable (ni siquiera de clase C^1), pues la segunda función coordenada $v = \tilde{v}^{1/3}$ no es diferenciable en 0; así, no se cumple la definición 1.5. \triangleright

En el ejemplo 1.9 observamos que las cartas dadas corresponden a estructuras diferenciables diferentes las cuales tienen también diferentes clases de diferenciabilidad.

En realidad, calcular el número de estructuras diferenciables diferentes (no compatibles entre sí) que puede tener una superficie abstracta es un problema muy complicado y abierto hasta la fecha. Por ejemplo, para el caso de una esfera de dimensión 7, Milnor demostró que existen 28 estructuras diferenciables distintas entre sí; véase [15]. La demostración de esta afirmación sale del alcance de este trabajo. En lugar de eso, continuamos dando ejemplos de superficies diferenciables.

EJEMPLO 1.10. Consideremos el plano proyectivo \mathbb{RP}^2 del ejemplo 1.4 con las parametrizaciones (U_i, φ_i) allí obtenidas. Para demostrar que \mathbb{RP}^2 es una superficie diferenciable es necesario comprobar que todas las composiciones $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$ están definidas en abiertos del plano \mathbb{R}^2 y que son diferenciables.

Veamos primero qué ocurre con $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$. Observe que para poder evaluar esta expresión, $\varphi_2(u_2, v_2)$ debe estar en U_1 , por lo que dicha composición está definida en

$$\{ (u_2, v_2) \mid u_2 \neq 0 \},$$

que es un conjunto abierto en \mathbb{R}^2 . La regla de correspondencia es

$$\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2(u_2, v_2) = \varphi_1^{-1}(u_2 : 1 : v_2) = \left(\frac{1}{u_2}, \frac{v_2}{u_2} \right),$$

que es diferenciable. Las otras composiciones se analizan de manera análoga. Esto hace del plano proyectivo real \mathbb{RP}^2 una superficie diferenciable.

Esta superficie se puede visualizar en \mathbb{R}^3 de la siguiente manera: Cada punto de \mathbb{RP}^2 interseca dos veces a una esfera \mathbb{S}^2 en los puntos antípodas p y $-p$. Dicho de otra forma, al realizar el espacio proyectivo \mathbb{RP}^2 , tales puntos se identifican (pegan) en el punto mencionado (véase la figura 1.6 a).

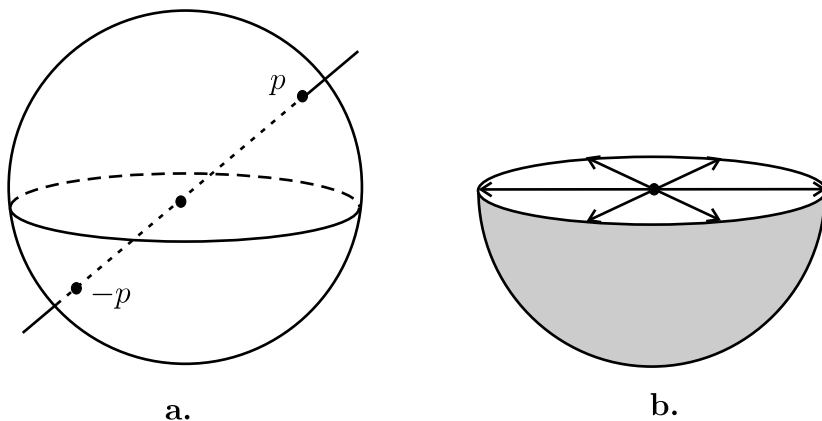


Figura 1.6: \mathbb{RP}^2 obtenido: **a.** de una esfera \mathbb{S}^2 **b.** de un disco D^2 .

Así, al identificar los puntos del hemisferio norte ($z > 0$) con sus antípodos del hemisferio sur ($z < 0$), se obtiene una semiesfera cuya frontera es el ecuador ($z = 0$). Topológicamente, esta semiesfera es un disco cerrado D^2 con su frontera, de modo que \mathbb{RP}^2 se obtiene también de identificar los puntos antípodos de la frontera de un disco cerrado (véase la figura 1.6 b).

Claramente, al realizar las identificaciones antípodos de la frontera de D^2 en \mathbb{R}^3 , la superficie obtenida tendrá autointersecciones.

No obstante, \mathbb{RP}^2 se puede realizar en \mathbb{R}^3 con una forma llamada “gorro cruzado”. Primeramente observamos que un disco D^2 con su frontera es topológicamente equivalente a un cuadrado y que \mathbb{RP}^2 se obtiene al identificar los lados de un cuadrado como se ilustra en la figura 1.7. Tal identificación es la misma que la que se efectúa en la frontera del disco como se ilustra en la misma figura. Los puntos obtenidos A y B son puntos singulares y la evolución de las curvas obtenidas por las intersecciones con planos horizontales se muestra en la misma figura.

Discutiremos más adelante el problema de “meter” una superficie

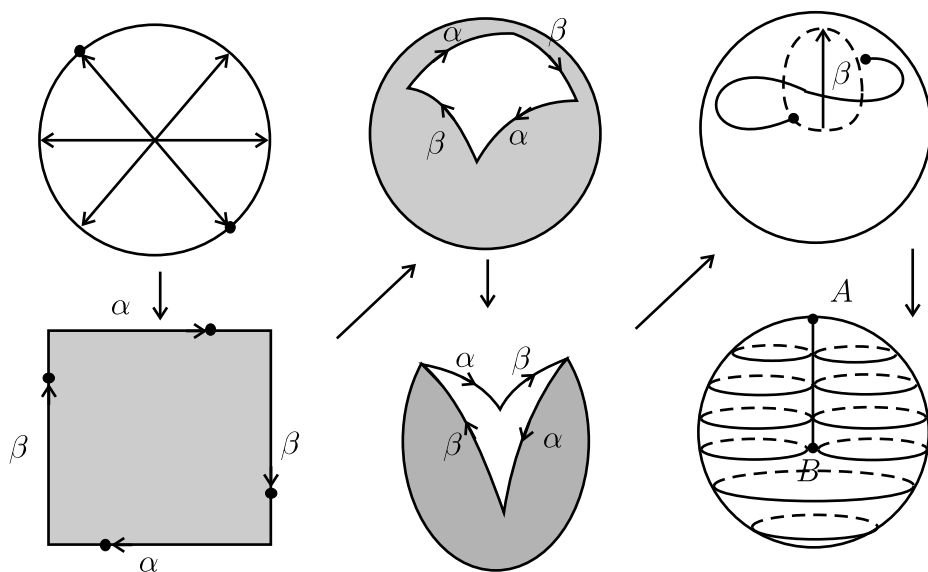


Figura 1.7: \mathbb{RP}^2 como un “gorro cruzado” en \mathbb{R}^3 .

general en \mathbb{R}^n ($n \geq 3$) sin autointersecciones. ▷

Aunque ya hemos dado la discusión sobre el concepto de diferenciable de una aplicación definida en una superficie, enunciaremos formalmente este concepto para una fácil referencia.

DEFINICIÓN 1.11. Sea S una superficie diferenciable con estructura diferenciable \mathcal{U} . Una función $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ es **diferenciable** en el punto $p \in S$ si y sólo si existe una parametrización $(U, \varphi) \in \mathcal{U}$ alrededor de p tal que la función representante $h = f \circ \varphi$ es diferenciable en el punto $(u_0, v_0) = \varphi^{-1}(p)$. Se dice que la función f es **diferenciable** en S si lo es en cada punto $p \in S$.

El ejemplo a continuación es una generalización del ejemplo 2.25 de la primera parte de esta obra [16].

EJEMPLO 1.12. Sean S una superficie diferenciable y (U, φ^{-1}) una

carta alrededor de un punto $p \in S$. Entonces $\varphi^{-1} : U \rightarrow \Omega$ es diferenciable en p , en el sentido de la definición 1.11. \triangleright

Consideremos una función diferenciable $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, un punto $p \in S$ y una parametrización (U, φ) alrededor de p tal que $p = \varphi(u_0, v_0)$.

Si $h = f \circ \varphi$ es la función representante de f en $\Omega = \varphi^{-1}(U)$, se define el **rango** de f en p como el rango de la matriz Jacobiana $(\partial h / \partial x)$ en (u_0, v_0) , es decir, como el rango de la función representante h en el punto (u_0, v_0) ; esto es,

$$\text{rango}(f)_p = \text{rango} \left(\frac{\partial h^i}{\partial x^j} \right)_{(u_0, v_0)} = \text{rango}(h)_{(u_0, v_0)}$$

donde $h = (h^1, h^2, \dots, h^n)$ en las coordenadas $u = x^1$, $v = x^2$.

Observamos que $\text{rango}(f)_p$ no depende de la parametrización elegida, pues si $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ es otra parametrización alrededor de p y $\tilde{h} = f \circ \tilde{\varphi}$ es la función representante de f , al realizar el cambio de coordenadas se tiene

$$\tilde{h} = h \circ (\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi})$$

lo que implica que

$$\text{rango } \tilde{h}_{(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)} = \text{rango } h \circ (\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi})_{(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)} = \text{rango } h_{(u_0, v_0)}$$

debido a que $\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}$ tiene rango máximo por ser un difeomorfismo.

1.2. El espacio tangente a una superficie

En esta sección definimos el espacio tangente a una superficie diferenciable abstracta. Primeramente definimos lo que es una curva diferenciable en una superficie diferenciable abstracta utilizando lo establecido en la sección anterior.

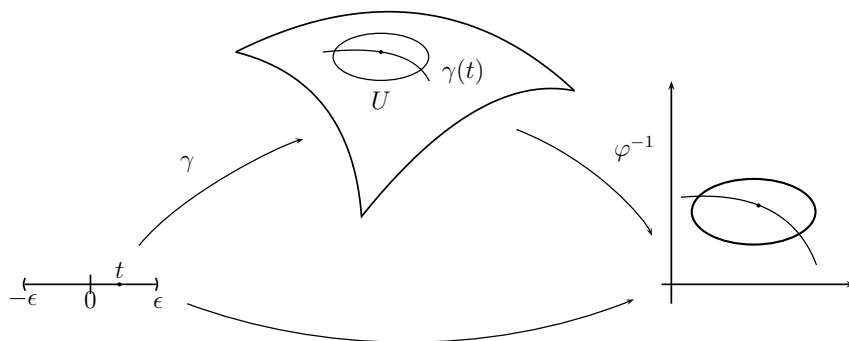


Figura 1.8: Curva diferenciable en una superficie.

DEFINICIÓN 1.13. Una curva **diferenciable** en una superficie S es una aplicación $\gamma: J \rightarrow S$ continua, $J = (-\epsilon, \epsilon)$, de tal forma que para todo $t \in J$ existe una parametrización (U, φ) de S alrededor de $\gamma(t) \in S$ de modo que la composición $\varphi \circ \gamma: J \rightarrow \varphi(U)$ es una curva diferenciable en el plano (véase la figura 1.8).

Como en la sección anterior, no es difícil ver que esta definición no depende de la parametrización escogida.

Para una superficie S en \mathbb{R}^3 , se define el espacio tangente $T_p S$ a S en p como el conjunto de vectores tangentes a todas las curvas diferenciables que pasan por p . Sin embargo, esta propiedad no puede traducirse directamente a las superficies abstractas. Para este caso, seguiremos un camino indirecto: Como cada curva en S que pasa por p puede verse como la imagen de una curva en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ bajo una parametrización, podemos decir que dos curvas en S tienen el mismo vector tangente si y sólo si las curvas correspondientes en \mathbb{R}^2 tienen el mismo vector tangente. A continuación formalizamos esta idea.

DEFINICIÓN 1.14. Sean $\gamma_1, \gamma_2: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ dos curvas diferenciables en una superficie S de tal forma que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$. Se dice que γ_1 y γ_2 son **tangentes** en p si y sólo si para alguna parametrización

(U, φ) de una vecindad de p se tiene que

$$(\varphi^{-1} \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi^{-1} \circ \gamma_2)'(0).$$

Es fácil ver que esta definición no depende de la parametrización. Con base en esto, establecemos una relación \sim entre dos curvas. Diremos que $\gamma_1 \sim \gamma_2$ si y sólo si γ_1 y γ_2 son tangentes en p . Es fácil ver que \sim es una relación de equivalencia.

DEFINICIÓN 1.15. Dada una curva diferenciable $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ tal que $\gamma(0) = p$, la clase de equivalencia de γ bajo la relación \sim arriba definida se llama el **vector tangente** a γ en p y se denota $\gamma'(0)$. El **espacio tangente** a S en p , denotado $T_p S$, es el conjunto de vectores tangentes a todas las curvas $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ tales que $\gamma(0) = p$.

Como en [16], usaremos letras griegas ξ, η, ζ para denotar vectores tangentes.

Una característica fundamental del espacio tangente $T_p S$ a una superficie en \mathbb{R}^3 es su estructura de espacio vectorial. Es posible dotar de dicha estructura al espacio tangente arriba definido, aunque de una manera tediosa. En vez de esto, veremos de otra forma a los vectores tangentes, que nos será de mayor utilidad. Primero definiremos el concepto de derivada direccional.

DEFINICIÓN 1.16. Sean S una superficie diferenciable, p un punto en S y $\xi \in T_p S$ un vector tangente asociado a una curva $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ tal que $\gamma(0) = p$; es decir, $\xi = \gamma'(0)$. Sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en p . La **derivada direccional** de f en la dirección de ξ en p , denotada $\xi(f)_p$, se define mediante la igualdad

$$\xi(f)_p = (f \circ \gamma)'(0).$$

Geoméricamente, esta derivada direccional se obtiene aplicando f a los puntos $\gamma(t)$ de la curva γ y derivando la expresión resultante. El siguiente resultado nos dice que $\xi(f)_p$ no depende de la curva en la correspondiente clase de equivalencia.

PROPOSICIÓN 1.17. Sean $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y $\gamma_1, \gamma_2 : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ dos curvas diferenciables en una superficie S tales que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$ y $\gamma_1'(0) = \gamma_2'(0) = \xi$. Entonces

$$(f \circ \gamma_1)'(0) = (f \circ \gamma_2)'(0).$$

Demostración. Puesto que sólo interesa el comportamiento cerca de p , podemos considerar una parametrización (U, φ) de una vecindad de este punto. Entonces

$$(f \circ \gamma_1)'(0) = (f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \gamma_1)'(0).$$

Aplicando la regla de la cadena usual a las funciones $f \circ \varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y $\varphi^{-1} \circ \gamma_1 : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \Omega$ (definidas en abiertos adecuados), se tiene

$$(f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \gamma_1)'(0) = d(f \circ \varphi)_{\varphi^{-1}(p)}(\varphi^{-1} \circ \gamma_1)'(0).$$

Pero como γ_1 y γ_2 son equivalentes,

$$\begin{aligned} d(f \circ \varphi)_{\varphi^{-1}(p)}(\varphi^{-1} \circ \gamma_1)'(0) &= d(f \circ \varphi)_{\varphi^{-1}(p)}(\varphi^{-1} \circ \gamma_2)'(0) \\ &= (f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \gamma_2)'(0) \\ &= (f \circ \gamma_2)'(0), \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. □

La derivada direccional satisface las siguientes propiedades, cuya demostración es un buen ejercicio para el lector.

PROPOSICIÓN 1.18. Si $f, g : S \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones diferenciables en $p \in S$ y ξ es un vector tangente a S en p , entonces:

1. Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ son escalares, entonces

$$\xi(\lambda f + \mu g)_p = \lambda \xi(f)_p + \mu \xi(g)_p$$

esto es, la operación de derivada direccional es lineal.

2. Se cumple la fórmula de Leibniz,

$$\xi(fg)_p = f(p)\xi(g)_p + \xi(f)_p g(p)$$

Las propiedades de linealidad y de la regla de Leibniz enunciadas en la proposición 1.18 son características de cierto tipo de operaciones que definimos a continuación.

DEFINICIÓN 1.19. Sean S una superficie diferenciable y $p \in S$. Una operación D que aplica una función $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en p en un número real $D(f)_p$ se llama una **derivación** en p si se satisface lo siguiente:

1. Es lineal; es decir, si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y f, g son dos funciones suaves, entonces

$$D(\lambda f + \mu g)_p = \lambda D(f)_p + \mu D(g)_p$$

2. D satisface la regla de Leibniz

$$D(fg)_p = f(p)D(g)_p + D(f)_p g(p)$$

Por la proposición 1.18, la operación de derivada direccional es una derivación en p . Más aún, el siguiente resultado prueba que cada derivación en p es precisamente la derivada direccional en la dirección de un vector tangente.

PROPOSICIÓN 1.20. Si D es una derivación en $p \in S$, entonces existe un único vector $\xi \in T_p S$ tal que para toda función $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en p se cumple

$$D(f)_p = \xi(f)_p.$$

Pospondremos la demostración por un momento. Este resultado muestra la correspondencia biyectiva que existe entre los vectores tangentes a S en p y las derivaciones en el mismo punto. La primera ventaja de esta correspondencia proviene del siguiente hecho.

PROPOSICIÓN 1.21. *El conjunto de derivaciones en p tiene la estructura de un espacio vectorial real.*

Demostración. Las operaciones se definen de manera natural: Si D_1 y D_2 son derivaciones y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$(\alpha D_1 + D_2)(f) := \alpha D_1(f) + D_2(f).$$

Es fácil ver que estas operaciones dan al conjunto de derivaciones la estructura de espacio vectorial real. \square

Ahora procedemos a dar una base para el espacio de derivaciones en p . Sea (U, φ) una parametrización de una vecindad de p , con coordenadas x^1, x^2 . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\varphi(0, 0) = p$. Definimos

$$\gamma_1(t) = \varphi(t, 0), \quad \gamma_2(t) = \varphi(0, t). \quad (1.1)$$

Observemos que si f es una función diferenciable en p ,

$$(f \circ \gamma_i)'(0) = \left. \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x^i} \right|_{(0,0)} \quad \text{para } i = 1, 2;$$

de modo que es natural³ denotar por $\frac{\partial}{\partial x^i}$ a las derivaciones correspondientes a cada γ_i , $i = 1, 2$.

PROPOSICIÓN 1.22. $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}_{i=1,2}$ es una base del espacio de derivaciones en p .

³Formalmente debemos escribir $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$, pero preferimos no complicar más la notación.

Demostración. Mostraremos primero que los vectores $\frac{\partial}{\partial x^i}$ son linealmente independientes. Si

$$D = \sum_{i=1}^2 \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} = 0,$$

esto quiere decir que $D(f)_p = 0$ para toda función f diferenciable en p . Podemos aplicar la operación D a la función “ j -ésima coordenada” definida para $q \in U$ como

$$\pi_j(q) = x^j, \quad \text{donde } \varphi(x^1, x^2) = q;$$

observe que $\pi_j \circ \varphi(x^1, x^2) = x^j$. Entonces

$$0 = D(\pi_j)_p = \sum_{i=1}^2 \xi^i \left. \frac{\partial(\pi_j \circ \varphi)}{\partial x^i} \right|_{(0,0)} = \xi^j,$$

lo que dice que los vectores son linealmente independientes.

Ahora, para mostrar que los vectores $\partial/\partial x^i$ generan al espacio de derivaciones, seguiremos un procedimiento análogo. Sea D una derivación arbitraria y definamos

$$\bar{D} = \sum_{i=1}^2 D(\pi_i)_p \frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{1.2}$$

Para ver que $\bar{D} = D$, basta verificar que las derivaciones coinciden en la base formada por las funciones π_j , $j = 1, 2$, lo cual se sigue de las igualdades

$$\bar{D}(\pi_j) = \sum_{i=1}^2 D(\pi_i)_p \frac{\partial}{\partial x^i}(\pi_j) = D(\pi_j).$$

Esto concluye la demostración. □

La expresión (1.2) obtenida al final de la demostración se conoce con frecuencia como el **teorema de la base**.

Ahora podemos analizar la proposición 1.20. Recordemos que debemos mostrar que cada derivación D se puede ver como la derivada direccional en la dirección de un vector tangente $\gamma'(0)$ a una curva $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ con $\gamma(0) = p$. Por ejemplo, si $D = \frac{\partial}{\partial x^1}$, podemos considerar la curva $\gamma_1(t) = \varphi(t, 0)$ como en la demostración anterior. Esto da una idea de la manera de construir el vector tangente.

Demostración de la proposición 1.20. Sea D una derivación. Supongamos que

$$D = \sum_{i=1}^2 \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

y definamos $\gamma(t) = \varphi(\xi^1 t, \xi^2 t)$. Si $\xi = \gamma'(0)$, entonces

$$\begin{aligned} \xi(f)_p &= (f \circ \gamma)'(0) &= (f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \gamma)'(0) \\ &= d(f \circ \varphi)_{(0,0)}(\xi_1, \xi_2) \\ &= \sum \xi^i d(f \circ \varphi)_{(0,0)}(e_i) \\ &= \sum \xi^i d(f \circ \varphi)_{(0,0)}(\varphi^{-1} \circ \gamma_i)'(0) \\ &= \sum \xi^i (f \circ \gamma_i)'(0) \\ &= \left(\sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) (f)_p = D(f)_p. \end{aligned}$$

Aquí, $\{e_i\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^2 y γ_i son las curvas definidas en (1.1). □

COROLARIO 1.23. *Existe una biyección entre el espacio tangente a S en p y el espacio vectorial de derivaciones en p .*

Esta biyección nos permite dotar a $T_p S$ de una estructura de espacio vectorial. De hecho, como podemos identificar ambos conjuntos, podemos hacer un abuso de notación, estableciendo por ejemplo que

$T_p S$ es generado por $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2} \right\}$. Esta identificación no trae mayores problemas; por el contrario, es de gran utilidad.

Para finalizar esta sección, veamos qué ocurre con la expresión local de una derivación D al cambiar de coordenadas. Más precisamente, sea (U, φ) una parametrización con coordenadas x^1, x^2 y $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ otra parametrización de S en p con coordenadas y^1, y^2 . Si llamamos $\tilde{\pi}_j$ a las proyecciones

$$\tilde{\pi}_j(q) = y^j, \quad j = 1, 2,$$

similares a las utilizadas en la demostración de la proposición 1.22, tenemos que D se puede escribir como

$$D = \sum_{j=1}^2 D(\tilde{\pi}_j)_p \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

(véase la ecuación (1.2)). En particular, si $D = \frac{\partial}{\partial x^i}$,

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x^i} (\pi_j)_p \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

Esto adquiere la forma familiar

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(p) \frac{\partial}{\partial y^j}. \quad (1.3)$$

En general, dada una derivación asociada a un vector ξ con coordenadas (ξ^1, ξ^2) y $(\tilde{\xi}^1, \tilde{\xi}^2)$ en los sistemas de coordenadas (x^1, x^2) y (y^1, y^2) , respectivamente, se cumple la siguiente ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} \tilde{\xi}^1 \\ \tilde{\xi}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \frac{\partial y^1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial y^2}{\partial x^1} & \frac{\partial y^2}{\partial x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

todo evaluado en p .

OBSERVACIÓN 1.24. Con frecuencia, la **notación de Einstein** simplifica muchas de las expresiones vectoriales y matriciales relativas a los vectores tangentes. Con esta notación, se omite el símbolo de la suma, entendiendo que dicha operación se realiza sobre los índices repetidos superior e inferiormente en una expresión. Así, por ejemplo, la ecuación (1.3) se escribe

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(p) \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

OBSERVACIÓN 1.25. En algunos textos, sobre todo relacionados con la Física, se utiliza la ecuación (1.4) como *definición* de un vector tangente; más precisamente, si $p \in S$ y x^1, x^2 es un sistema de coordenadas alrededor de p , se define un vector ξ tangente a S en p como una pareja de números (ξ^1, ξ^2) tal que si y^1, y^2 es otro sistema de coordenadas con la pareja asociada de números $(\tilde{\xi}^1, \tilde{\xi}^2)$, entonces se debe cumplir la ecuación (1.4).

1.3. Cálculo diferencial en superficies

Sean S_1 y S_2 dos superficies diferenciables y sea $f: S_1 \rightarrow S_2$ una aplicación entre tales superficies de tal forma que $f(p) = q$.

DEFINICIÓN 1.26. Se dice que la aplicación f es **diferenciable** en el punto $p \in S_1$, si existen dos parametrizaciones: (U, φ) alrededor de $p \in S_1$ y $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ alrededor de $f(p)$ en S_2 , de tal forma que la composición

$$\bar{f} = \tilde{\varphi}^{-1} \circ f \circ \varphi: \varphi^{-1}(U) \rightarrow \tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{U})$$

es diferenciable en $\varphi^{-1}(p)$ (véase la figura 1.9). $f: S_1 \rightarrow S_2$ es **diferenciable** si lo es en cada punto $p \in S_1$.

No es difícil ver que la definición dada no depende de la elección de las parametrizaciones compatibles con (U, φ) y $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ respectivamente.

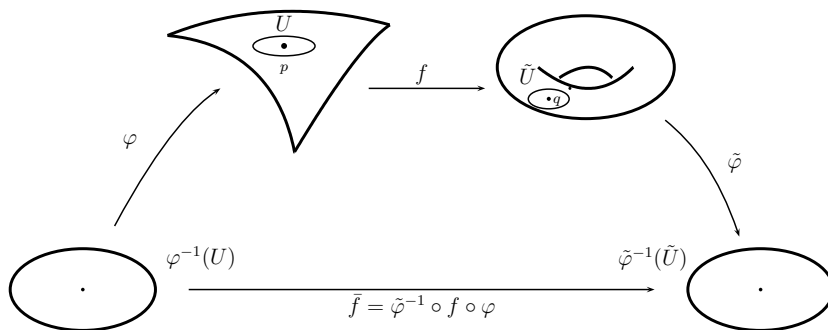


Figura 1.9: Función diferenciable entre superficies.

Ahora tenemos los elementos para extender el cálculo diferencial a las superficies abstractas. En particular, dada una función entre superficies $f : S_1 \rightarrow S_2$ diferenciable en $p \in S_1$, queremos definir la diferencial de f en p , que denotaremos por df_p .

Recordemos que df_p debe ser una transformación lineal. En particular, su dominio y contradominio deben ser espacios vectoriales. Podemos aprovechar lo visto en la sección anterior y tratar de definir una transformación $df_p : T_p S_1 \rightarrow T_q S_2$, donde $q = f(p)$.

Supongamos que $\xi \in T_p S_1$; es decir, $\xi = \gamma'(0)$, donde $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S_1$ y $\gamma(0) = p$. Puesto que $df_p(\xi)$ debe ser un vector tangente a S_2 en q , la definición geométrica natural es la siguiente.

DEFINICIÓN 1.27 (La diferencial desde un punto de vista geométrico). Sean S_1, S_2, f, p, q como arriba. Entonces la **diferencial** de f en p es la transformación $df_p : T_p S_1 \rightarrow T_q S_2$ dada por

$$df_p(\xi) = (f \circ \gamma)'(0).$$

Note la analogía de esta definición con la de las derivadas direccionales. Ahora, para mostrar que df_p es en realidad una transformación lineal, recurrimos de nuevo a la identificación de $T_p S_1$ con el

espacio vectorial de derivaciones en p . En este sentido, ξ corresponde a una derivada direccional que se aplica a funciones definidas en S_1 , mientras que su imagen $df_p(\xi)$ debe corresponder a una derivada direccional aplicada a funciones definidas en S_2 . Esto sugiere la siguiente definición alternativa:

DEFINICIÓN 1.28 (La diferencial para derivaciones). Dado $\xi \in T_p S_1$, $df_p(\xi)$ es la operación definida como sigue: Si $g : S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable en $q = f(p)$, entonces se aplica bajo $df_p(\xi)$ mediante la regla

$$[df_p(\xi)](g)_q = \xi(g \circ f)_p.$$

(véase la figura 1.10).

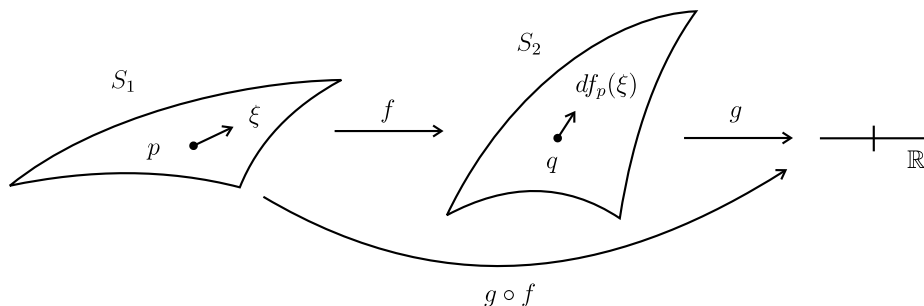


Figura 1.10: La diferencial en términos de derivaciones.

PROPOSICIÓN 1.29. *La operación $df_p(\xi)$ definida arriba es una derivación en q .*

Demostración. Hay que mostrar que $\tilde{\xi} = df_p(\xi)$ es lineal y que satisface la regla de Leibniz. Sólo mostraremos la segunda parte y dejaremos la primera como ejercicio.

Si g, h son funciones diferenciables en q , entonces

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}(g \cdot h)_q &= [df_p(\xi)](g \cdot h)_q = \xi((g \cdot h) \circ f)_p = \xi((g \circ f) \cdot (h \circ f))_p \\ &= (g \circ f)(p)\xi(h \circ f)_p + (h \circ f)(p)\xi(g \circ f)_p \\ &= g(q)\tilde{\xi}(h)_q + h(q)\tilde{\xi}(g)_q.\end{aligned}$$

lo que prueba la afirmación. \square

El resultado anterior nos dice que $df_p : T_p S_1 \rightarrow T_q S_2$ está bien definida; el siguiente, cuya prueba se omite, nos dice que df_p es lineal.

PROPOSICIÓN 1.30. *Si $\xi, \eta \in T_p S_1$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces*

$$df_p(\alpha\xi + \eta) = \alpha df_p(\xi) + df_p(\eta).$$

Como en el caso de los vectores tangentes, es importante trabajar con la diferencial df_p en términos de coordenadas. Más precisamente, sean (U, φ) y $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ parametrizaciones de vecindades de p y $q = f(p)$ con coordenadas (x^1, x^2) y (y^1, y^2) , respectivamente.

Sabemos que

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\} \text{ y } \left\{ \frac{\partial}{\partial y^j} \right\}$$

son bases de los respectivos espacios tangentes. Como $df_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)$ es un vector en $T_q S_2$, existen escalares a_{ik} tales que

$$df_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \sum_{k=1}^2 a_{ik} \frac{\partial}{\partial y^k}, \quad i = 1, 2.$$

Para determinar los coeficientes a_{ij} en estas ecuaciones, evaluamos cada expresión en una función adecuada. Si $\tilde{\pi}_j$ es la función “ j -ésima coordenada” en S_2 , $\tilde{\pi}_j(\tilde{\varphi}(y^1, y^2)) = y^j$, entonces

$$df_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) (\tilde{\pi}_j) = \sum_{k=1}^2 a_{ik} \frac{\partial}{\partial y^k} (\tilde{\pi}_j) = a_{ij};$$

por otro lado, usando la definición de la diferencial,

$$df_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) (\tilde{\pi}_j) = \frac{\partial}{\partial x^i} (\tilde{\pi}_j \circ f) = \frac{\partial f^j}{\partial x^i},$$

donde f^j denota (por abuso de notación) la j -ésima coordenada de $\tilde{\varphi}^{-1} \circ f \circ \varphi : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ (véase la figura 1.11). Así,

$$df_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial f^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

lo que podemos escribir en forma conocida, usando la notación de Einstein, como

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial f^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

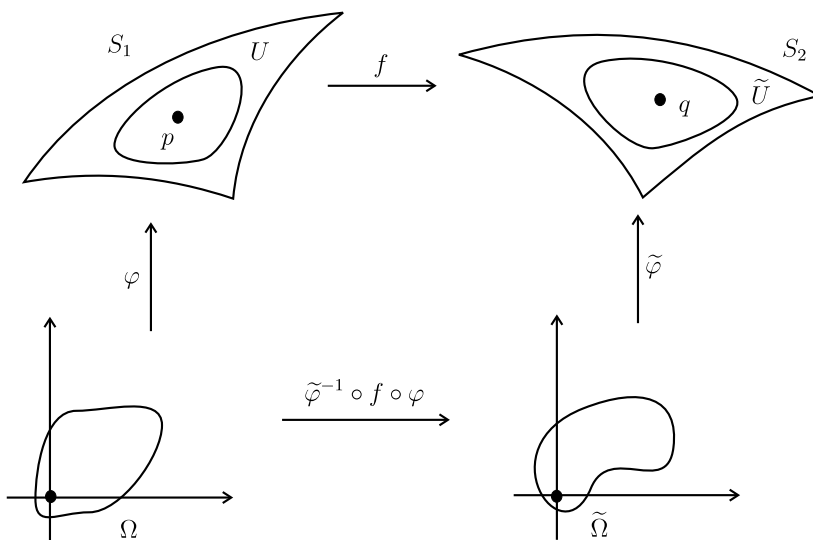


Figura 1.11: Diagrama para la expresión de df_p en coordenadas.

Esto nos dice que la transformación df_p queda representada por la matriz (evaluada en p)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \frac{\partial f^1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial f^2}{\partial x^1} & \frac{\partial f^2}{\partial x^2} \end{pmatrix}$$

con respecto de las bases $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ y $\{\frac{\partial}{\partial y^j}\}$ de los espacios tangentes $T_p S_1$ y $T_q S_2$, respectivamente; es decir, si (ξ^1, ξ^2) son las coordenadas de un vector $\xi \in T_p S_1$ con respecto de la primera base y (η^1, η^2) son las coordenadas del vector $df_p(\xi) \in T_q S_2$ con respecto de la segunda base, entonces

$$\begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \frac{\partial f^1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial f^2}{\partial x^1} & \frac{\partial f^2}{\partial x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}.$$

Al tener la diferencial de una función suave entre superficies en un punto, podemos extender la teoría del cálculo diferencial de varias variables para este tipo de aplicaciones. Por ejemplo, definir los conceptos de punto (valor) regular y punto (valor) crítico de una función.

DEFINICIÓN 1.31. Sean S_1, S_2 superficies diferenciables, $p \in S_1$, $q \in S_2$ y $f : S_1 \rightarrow S_2$ diferenciable en p . Entonces

1. p es un **punto regular** de f si y sólo si $df_p : T_p S_1 \rightarrow T_q S_2$ es suprayectiva.
2. p es un **punto crítico** de f si p no es regular.
3. q es un **valor regular** de f si para todo $p \in f^{-1}(q)$, p es un punto regular de f .
4. q es un **valor crítico** de f si no es un valor regular.

Un ejemplo de que los resultados del cálculo pueden extenderse a este caso es la siguiente versión del teorema de la función inversa para las aplicaciones entre superficies.

TEOREMA 1.32 (Teorema de la función inversa). *Sean $f : S_1 \rightarrow S_2$ una función suave y $q \in S_2$ un valor regular de f . Entonces, para cada $p \in f^{-1}(q)$ existen una vecindad U_p de p en S_1 y una vecindad V_q de q en S_2 de tal forma que $f : U_p \rightarrow V_q$ es un difeomorfismo.*

En el ejemplo 1.10 se planteó la idea de incluir una superficie diferenciable abstracta en algún espacio euclidiano.

Distinguiamos dos maneras de incluir alguna superficie en un espacio euclidiano: mediante una **inmersión** o mediante un **encaje**.

DEFINICIÓN 1.33. Una aplicación $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) es una **inmersión** si y sólo si para todo punto $p \in S$ se tiene que la diferencial $df_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}^n$ es inyectiva. Si además la aplicación $f : S \rightarrow f(S)$ es un homeomorfismo, entonces f es un **encaje** de S en \mathbb{R}^n .

En el primer caso se dice que la superficie S está **inmersa** en \mathbb{R}^n y puede tener autointersecciones. En el segundo caso, se dice que S está **encajada** en \mathbb{R}^n y no tiene autointersecciones.

EJEMPLO 1.34. El espacio $\mathbb{R}P^2$ se pudo “meter” en el espacio \mathbb{R}^3 visualizándolo como un “gorro cruzado” que tenía autointersecciones con dos puntos singulares (véase el ejemplo 1.10). Una prueba de que existe una inmersión de $\mathbb{R}P^2$ en el espacio euclidiano de dimensión 3 es el siguiente resultado, el cual se ilustra en la figura 1.12.

LEMA 1.35. *Si al espacio proyectivo $\mathbb{R}P^2$ se le separa una región homeomorfa a un disco D^2 el espacio resultante es una banda de Möbius M^2 (véase el ejemplo 3.10 de [16]).*

En la misma figura 1.12 se ilustra el procedimiento de cirugía para obtener el espacio $\mathbb{R}P^2$ a partir de la unión del disco y de la banda de Möbius. ▷

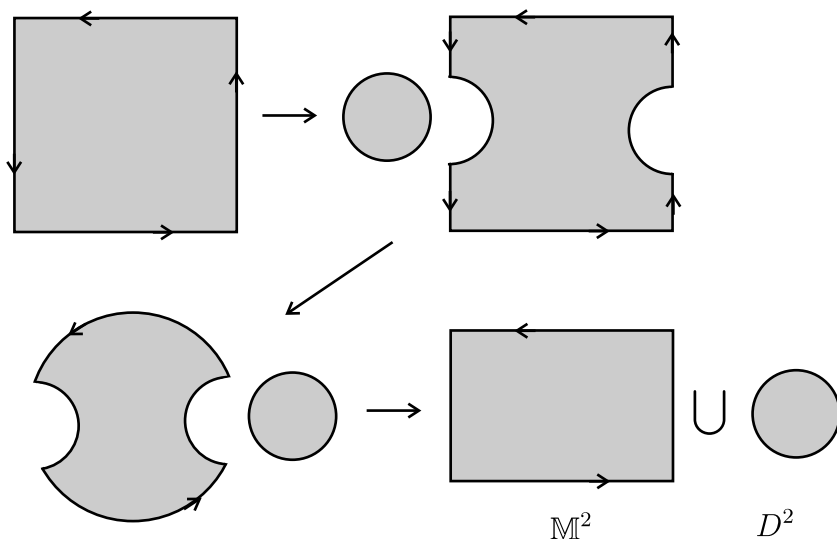


Figura 1.12: Espacio proyectivo $\mathbb{RP}^2 = D^2 \cup M^2$.

COROLARIO 1.36. Si a una esfera S^2 se le retira un disco y se le pega en la frontera una banda de Möbius, el resultado es un espacio proyectivo \mathbb{RP}^2 .

EJEMPLO 1.37. Consideremos el toro T^2 visto como el producto cartesiano de dos circunferencias: $T^2 = S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$.

Definimos una aplicación $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ mediante la regla

$$f(\theta_1, \theta_2) = (\cos \theta_1, \text{sen } \theta_1, \cos \theta_2, \text{sen } \theta_2).$$

Es claro que la imagen de f es el toro T^2 . Por otro lado,

$$Df_{(\theta_1, \theta_2)} = \begin{pmatrix} -\text{sen } \theta_1 & 0 \\ \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & -\text{sen } \theta_2 \\ 0 & \cos \theta_2 \end{pmatrix}.$$

Puesto que $\sin \theta$ y $\cos \theta$ no pueden anularse en forma simultánea, $Df_{(\theta_1, \theta_2)}$ tiene rango 2, lo que nos dice que $df_{(\theta_1, \theta_2)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ es inyectiva.

Es fácil ver que $f((0, 2\pi) \times (0, 2\pi))$ es homeomorfo a $(0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$ bajo f , por lo que obtenemos un encaje del toro \mathbb{T}^2 en \mathbb{R}^4 .

Observemos que si identificamos \mathbb{R}^2 con \mathbb{C} de la manera usual, f adquiere la forma $f(\theta_1, \theta_2) = (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})$. Más adelante analizaremos con mayor detalle nuestros objetos desde el punto de vista complejo.⁴

▷

Enunciaremos ahora un resultado sobre la inmersión de una superficie en un espacio euclidiano. Omitimos su demostración, pero el lector interesado puede consultar el enunciado y la prueba para variedades diferenciables de dimensión arbitraria en [12].

TEOREMA 1.38 (Whitney). *Para toda superficie diferenciable abstracta existe una inmersión en el espacio euclidiano \mathbb{R}^3 y un encaje en \mathbb{R}^4 .*

De esta forma, cuando se estudia una superficie diferenciable abstracta, se puede suponer que está inmersa en algún espacio euclidiano.

1.4. Métricas riemannianas e isometrías

En esta sección definimos el concepto de métrica riemanniana para una superficie diferenciable abstracta. De la misma forma que en la sección 2.4 de [16], podemos definir un producto escalar en cada espacio tangente $T_p S$ y utilizarlo para introducir la “geometría” en S .

DEFINICIÓN 1.39. Sea S una superficie diferenciable. Una **métrica riemanniana** en S consiste en la elección de un producto escalar

⁴En un apéndice hemos incluido algunos conceptos básicos de la teoría de las funciones analíticas necesarios para tal análisis.

$\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ en cada espacio tangente $T_p S$, que varíe de manera diferenciable en el siguiente sentido: Dada una parametrización (U, φ) de una vecindad de $p \in S$ con coordenadas x^i , los **coeficientes de la métrica** dados por

$$g_{ij}(q) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle_q, \quad q \in U,$$

son funciones diferenciables en U . Una **superficie riemanniana** es una pareja $(S, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ donde S es una superficie diferenciable y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es una métrica riemanniana. Cuando el contexto indique claramente la métrica utilizada, abreviaremos diciendo simplemente que S es una superficie riemanniana.

EJEMPLO 1.40. Sea S una superficie diferenciable en \mathbb{R}^3 . Si en cada espacio tangente $T_p S$ se escoge un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ como la restricción a $T_p S$ del producto escalar en \mathbb{R}^3 , entonces $(S, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es una superficie riemanniana. También decimos que la métrica en S es inducida por la métrica del espacio ambiente \mathbb{R}^3 . \triangleright

Una vez dada una métrica en S , se pueden definir varios conceptos geométricos, como la longitud de una curva, el área de una región y el ángulo entre dos curvas, de la misma forma que en el caso de las superficies en \mathbb{R}^3 . Recordamos estas definiciones a continuación.

DEFINICIÓN 1.41. Dada una superficie riemanniana $(S, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, definimos los siguientes objetos.

1. La **longitud de arco** de una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ está dada por

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle} dt = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt,$$

donde $\dot{\gamma}(t)$ es el vector tangente a la curva γ en el punto $\gamma(t)$.

2. Sean $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow S$, $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow S$ dos curvas en S , que se cortan en un punto $p = \gamma_1(t_0) = \gamma_2(s_0)$. Entonces el **ángulo**

entre γ_1 y γ_2 en p se define como el menor ángulo $\theta \geq 0$ que satisface

$$\cos \theta = \frac{\langle \dot{\gamma}_1(t_0), \dot{\gamma}_2(s_0) \rangle}{\|\dot{\gamma}_1(t_0)\| \|\dot{\gamma}_2(s_0)\|},$$

donde $\dot{\gamma}_1(t_0)$ y $\dot{\gamma}_2(s_0)$ son los vectores tangentes a las curvas en el punto p .

3. Sea R una región en S contenida en la imagen de una parametrización (U, φ) con coordenadas (u, v) . El **área** de R se define como

$$\text{Área}(R) = \int_{\varphi^{-1}(R)} \|\varphi_u, \varphi_v\| \, du \, dv = \int_{\varphi^{-1}(R)} \sqrt{\det(g_{ij})} \, du \, dv.$$

OBSERVACIÓN 1.42. En algunos textos se acostumbra describir a la métrica en forma “diferencial” como sigue: Sea (U, φ) una parametrización de una vecindad de $p \in S$ con coordenadas (u, v) y $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ una curva contenida en U . Entonces

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{du}{dt} \varphi_u + \frac{dv}{dt} \varphi_v,$$

de modo que la longitud de arco de esta curva está dada por

$$\begin{aligned} \ell(\gamma) &= \int_a^b \sqrt{\left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{g_{11} \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2g_{12} \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + g_{22} \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt, \end{aligned}$$

donde hemos usado la notación g_{ij} para los coeficientes de la métrica. Podemos denotar la expresión que aparece dentro de la raíz por

$$g_{11} du^2 + 2g_{12} du \, dv + g_{22} dv^2.$$

Esta expresión se llama el **elemento de longitud** de la métrica en la superficie S .

EJEMPLO 1.43. Procedemos a calcular el área y el perímetro de un círculo en la esfera \mathbb{S}_R^2 de radio R , parametrizada mediante coordenadas co-geográficas (ϕ, θ) . Los coeficientes de la métrica en estas coordenadas es

$$(g_{ij}(\phi, \theta)) = \begin{pmatrix} R^2 \operatorname{sen}^2 \theta & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}$$

de modo que la forma diferencial de la métrica es

$$ds^2 = R^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\phi^2 + R^2 d\theta^2.$$

Un círculo “esférico” de radio $r > 0$ con centro en el polo norte P_N (véase la figura 1.13) está definido por

$$D = \left\{ (\phi, \theta) \mid 0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq \theta < \frac{r}{R} \right\}.$$

La frontera de este círculo, la circunferencia “esférica” de radio $r > 0$ con centro en el polo norte, está definida por las relaciones

$$0 < \phi \leq 2\pi, \quad \theta = \theta_0 = \frac{r}{R}.$$

A lo largo de esta circunferencia, $\theta = \theta_0$, de modo que la métrica cumple $ds^2 = R^2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{r}{R}\right) d\phi^2$ y la longitud de esta curva es

$$P = \int_0^{2\pi} R \operatorname{sen} \left(\frac{r}{R}\right) d\phi = 2\pi R \operatorname{sen} \left(\frac{r}{R}\right).$$

Recordemos que el perímetro P de un círculo de radio r en el plano está dado por $P = 2\pi r$. Como

$$\operatorname{sen} \left(\frac{r}{R}\right) \leq \frac{r}{R},$$

concluimos que *el perímetro de un círculo de radio r en la esfera \mathbb{S}_R^2 es menor que el perímetro de un círculo de radio r en el plano.*

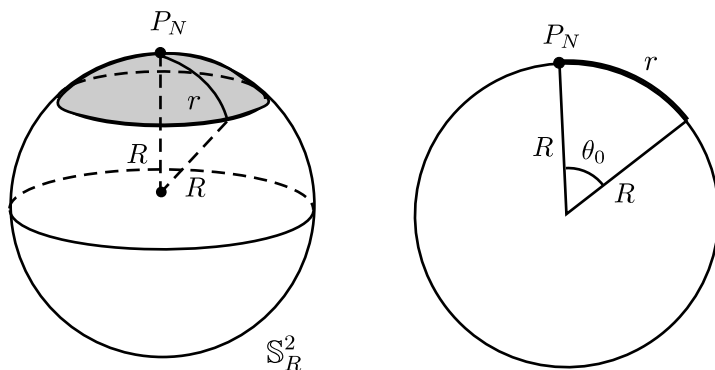


Figura 1.13: Perímetro y área de un círculo de radio r en \mathbb{S}_R^2 .

Por otro lado, $\det(g_{ij}) = R^4 \sin^2 \theta$, de modo que el área del círculo está dada por

$$A = \int_0^{r/R} \int_0^{2\pi} R^2 \sin \theta \, d\phi \, d\theta = 2\pi R^2 \left(1 - \cos \left(\frac{r}{R} \right) \right).$$

Usando la desigualdad

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} \leq \frac{1}{2}.$$

se tiene que *el área de un círculo de radio r en la esfera es menor que el área de un círculo de radio r en el plano.*

No obstante, si r es pequeño (≈ 0), el teorema de Taylor alrededor de $r = 0$ implica que

$$\begin{aligned} 2\pi R \sin \left(\frac{r}{R} \right) &= 2\pi R \left(\frac{r}{R} - \frac{r^3}{6R^3} + O(r^4) \right) \approx 2\pi r \\ 2\pi R^2 \left(1 - \cos \left(\frac{r}{R} \right) \right) &= 2\pi R^2 \left(\frac{r^2}{2R^2} + O(r^3) \right) \approx \pi r^2 \end{aligned}$$

lo que nos dice que si r es pequeño, los perímetros y las áreas de los círculos de radio r en el plano y la esfera son muy parecidos. \triangleright

Desde el punto de vista de la geometría diferencial, dos superficies serán indistinguibles si “tienen la misma métrica”. En la siguiente definición formalizamos esta idea.

DEFINICIÓN 1.44. Sean $(S_1, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ y $(S_2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ dos superficies riemannianas. Una transformación $f : S_1 \rightarrow S_2$ es una **isometría** entre S_1 y S_2 si y sólo si f es un difeomorfismo tal que para todo $p \in S_1$ y cualquier pareja de vectores ξ, η en el espacio tangente $T_p S_1$ es válida la igualdad

$$\langle df_p(\xi), df_p(\eta) \rangle_{f(p)} = \langle \xi, \eta \rangle_p.$$

Las superficies S_1 y S_2 son (**globalmente**) **isométricas** si y sólo si existe una isometría $f : S_1 \rightarrow S_2$.

Definimos ahora el concepto de isometría local.

DEFINICIÓN 1.45. Sean $(S_1, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ y $(S_2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ dos superficies riemannianas. Una transformación $f : S_1 \rightarrow S_2$ es una **isometría local** en $p \in S_1$, si existe una vecindad U de p en S_1 de tal forma que la restricción $f|_U : U \rightarrow f(U)$ es una isometría. Se dice que f es una **isometría local**, si y sólo si lo es en cada punto $p \in S_1$.

Es fácil ver que el concepto de isometría local no conduce, en general, a una relación de equivalencia. Por otro lado, en la sección 3.2 de este trabajo mostraremos que cualesquiera dos superficies con la misma curvatura gaussiana constante son localmente isométricas (teorema de Minding).

OBSERVACIÓN 1.46. Los conceptos métricos establecidos en la definición 1.41 son “invariantes bajo isometrías”. En el ejercicio 6 de este capítulo se pide enunciar formalmente y demostrar tal invarianza.

OBSERVACIÓN 1.47. Si (U, φ) es una parametrización de un conjunto abierto U en una superficie diferenciable S_1 y $f : S_1 \rightarrow S_2$ es un difeomorfismo con otra superficie S_2 , entonces es fácil ver que

$(f(U), f \circ \varphi)$ es una parametrización de un abierto en S_2 . Si además S_1, S_2 son riemannianas y f es una isometría, entonces los coeficientes de las métricas correspondientes g_{ij} y \tilde{g}_{ij} satisfacen $g_{ij} = \tilde{g}_{ij}$.

De este modo, la expresión de un concepto geométrico en S_1 utilizando los coeficientes de la métrica puede “traducirse” en un concepto geométrico en S_2 . Podemos usar esta idea para *definir* el concepto de curvatura en las superficies abstractas.

Recordemos que el concepto de curvatura para superficies en \mathbb{R}^3 se definió en términos de la variación del vector normal a dicha superficie (véase [16]). No obstante, para el caso de una superficie abstracta no se puede hablar de vectores normales, pues no hay un “ambiente” donde definirlos. Además, aunque se construyera una inmersión o un encaje en algún espacio euclidiano (de acuerdo con el Teorema de Whitney 1.38), la dimensión complementaria de la superficie puede ser mayor que 1, lo que complica la definición de los campos normales.

Para obtener una expresión local de este concepto, usamos una parametrización (U, φ) de un abierto de una superficie S con coordenadas (u, v) , obteniendo así los coeficientes de la métrica g_{ij} . En términos de estos coeficientes se definieron las funciones Γ_{ij}^k llamadas **símbolos de Christoffel** asociados a la superficie S . Los sistemas de ecuaciones lineales que expresan los símbolos de Christoffel en términos de los coeficientes de la métrica y sus derivadas aparecen en la proposición 3.32 de [16]. Los incluimos ahora para fácil referencia:

$$\begin{cases} g_{11}\Gamma_{11}^1 + g_{12}\Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2}(g_{11})_u, \\ g_{12}\Gamma_{11}^1 + g_{22}\Gamma_{11}^2 &= (g_{12})_u - \frac{1}{2}(g_{11})_v, \\ g_{11}\Gamma_{12}^1 + g_{12}\Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2}(g_{11})_v, \\ g_{12}\Gamma_{12}^1 + g_{22}\Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2}(g_{22})_u, \\ g_{11}\Gamma_{22}^1 + g_{12}\Gamma_{22}^2 &= (g_{12})_v - \frac{1}{2}(g_{22})_u, \\ g_{12}\Gamma_{22}^1 + g_{22}\Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2}(g_{22})_v. \end{cases} \quad (1.5)$$

Utilizando tales símbolos, obtuvimos la siguiente expresión para la

curvatura gaussiana K de la superficie:

$$K = \frac{\Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^2 + (\Gamma_{21}^2)_v + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{12}^2)^2}{g_{11}}.$$

Podemos usar esta expresión para *definir* la curvatura gaussiana de una superficie abstracta.

Ya que las superficies en \mathbb{R}^3 son nuestro principal punto de referencia, es importante saber cuándo podemos “meter” una superficie abstracta en éste u otro espacio euclidiano, respetando su métrica. Formalizamos esta idea a continuación.

DEFINICIÓN 1.48. Si $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una inmersión de una superficie riemanniana $(S, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ en \mathbb{R}^n tal que para todo $p \in S$ y para cualesquiera $\xi, \eta \in T_p S$ se cumple que

$$\langle df_p(\xi), df_p(\eta) \rangle_{f(p)} = \langle \xi, \eta \rangle_p,$$

donde el lado izquierdo se refiere a la métrica usual de \mathbb{R}^n , diremos que f es una inmersión **isométrica** de S en \mathbb{R}^n .

EJEMPLO 1.49. Consideremos el encaje $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ del ejemplo 1.37 dado por

$$f(\theta_1, \theta_2) = (\cos \theta_1, \text{sen } \theta_1, \cos \theta_2, \text{sen } \theta_2).$$

Como

$$df_{(\theta_1, \theta_2)}(e_1) = (-\text{sen } \theta_1, \cos \theta_1, 0, 0)$$

y

$$df_{(\theta_1, \theta_2)}(e_2) = (0, 0, -\text{sen } \theta_2, \cos \theta_2),$$

donde $\{e_1, e_2\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^2 , tenemos que

$$\langle df_{(\theta_1, \theta_2)}(e_i), df_{(\theta_1, \theta_2)}(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij},$$

de donde es fácil ver que f es una inmersión isométrica de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^4 , cuya imagen es un toro \mathbb{T}^2 . Una simple inspección de los sistemas de ecuaciones que definen a los símbolos de Christoffel nos muestra que éstos se anulan: $\Gamma_{ij}^k = 0$, lo que prueba que la curvatura de este toro también se anula, por lo que recibe el nombre del **toro plano**. \triangleright

1.5. El plano de Lobachevsky

Las superficies inmersas en \mathbb{R}^3 adoptan una métrica heredada por el producto escalar euclidiano de \mathbb{R}^3 . Tal producto escalar viene inducido por la forma cuadrática definida positiva

$$(\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Consideraremos ahora un producto escalar en \mathbb{R}^3 dado por una forma cuadrática que no es definida positiva. No obstante, le seguiremos llamando métrica por fines prácticos.

DEFINICIÓN 1.50. A la métrica inducida en \mathbb{R}^3 por

$$G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se le llamará la **métrica de Minkowski**. Al espacio tridimensional con esta métrica se le llamará el **espacio de Minkowski**. Para evitar confusiones con el caso euclidiano, lo denotaremos por \mathbb{R}_1^3 .

En las coordenadas cartesianas x^0, x^1, x^2 , el elemento de longitud correspondiente a la métrica de Minkowski viene dado por

$$ds^2 = -d(x^0)^2 + d(x^1)^2 + d(x^2)^2.$$

Dados los vectores $\xi, \eta \in \mathbb{R}_1^3$ con coordenadas cartesianas $\xi = (\xi^0, \xi^1, \xi^2)$ y $\eta = (\eta^0, \eta^1, \eta^2)$, su producto escalar (asociado a la métrica de Minkowski) se define como

$$\langle \xi, \eta \rangle_G = \eta^T G \xi = -\xi^0 \eta^0 + \xi^1 \eta^1 + \xi^2 \eta^2.$$

Es evidente que para un vector arbitrario $\xi \in \mathbb{R}_1^3$, el escalar $\langle \xi, \xi \rangle_G$ puede ser positivo, cero o negativo.

DEFINICIÓN 1.51. Un vector $\xi \in \mathbb{R}_1^3$ es:

1. un **vector espacial**, si $\langle \xi, \xi \rangle_G > 0$.
2. un **vector nulo**, si $\langle \xi, \xi \rangle_G = 0$.
3. un **vector temporal**, si $\langle \xi, \xi \rangle_G < 0$.

En cualquier caso, se define la **norma** del vector ξ , denotada $\|\xi\|_G$, como

$$\|\xi\|_G = \sqrt{|\langle \xi, \xi \rangle_G|}.$$

Continuando con la analogía con el caso euclidiano, definimos la **longitud** $\ell(\gamma)$ de una curva $\gamma(t) = (x^0(t), x^1(t), x^2(t))$ como

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{|-(\dot{x}^0)^2 + (\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2|} dt.$$

EJEMPLO 1.52. Considérese una recta en \mathbb{R}_1^3 definida por las ecuaciones

$$\gamma(t) = (\xi^0 t + \eta^0, \xi^1 t + \eta^1, \xi^2 t + \eta^2)$$

donde $\xi = (\xi^0, \xi^1, \xi^2)$ es el vector director de la recta, y $\eta = (\eta^0, \eta^1, \eta^2)$ es un punto por donde pasa la recta.

Claramente $\dot{\gamma}(t) = (\xi^0, \xi^1, \xi^2)$ cumple

$$\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle_G = -(\xi^0)^2 + (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 = \langle \xi, \xi \rangle_G,$$

de modo que si el dominio de γ es $[a, b]$, tenemos que la longitud de γ está dada por

$$\ell(\gamma) = (b - a)\|\xi\|$$

Observemos que si ξ es nulo, $\ell(\gamma) = 0$ (!). ▷

EJEMPLO 1.53. Sea γ la curva en \mathbb{R}_1^3 dada por las ecuaciones

$$\gamma(t) = (R \sinh t, R, R \cosh t),$$

donde $R > 0$. Un cálculo directo prueba que los vectores tangentes

$$\dot{\gamma}(t) = (R \cosh t, 0, R \sinh t)$$

son temporales, pues

$$\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle_G = -R^2 \cosh^2 t + R^2 \sinh^2 t = -R^2 < 0.$$

Así, si t varía en $[0, a]$, la longitud de la curva está dada por

$$\ell(\gamma) = \int_0^a \|\dot{\xi}\| dt = aR. \quad \triangleright$$

Observemos que si (ξ^0, ξ^1, ξ^2) son las coordenadas de un vector nulo ξ , entonces se cumple

$$\langle \xi, \xi \rangle_G = -(\xi^0)^2 + (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 = 0,$$

que es la ecuación de un cono circular recto con vértice en $(0, 0, 0)$ y que tiene como directriz el eje ξ^0 , llamado el **cono de luz**. No es difícil ver que los vectores temporales están contenidos en el interior de la región encerrada por el cono de luz, debido a que dichos vectores satisfacen la relación

$$\langle \xi, \xi \rangle_G = -(\xi^0)^2 + (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 < 0.$$

Por otro lado, el exterior del cono está constituido por los vectores espaciales (véase la figura 1.14).

De forma similar que para el caso de métricas definidas positivas, se tiene que si $\varphi : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ es un cambio de coordenadas de la forma

$$x^i = x^i(u^0, u^1, u^2), \quad i = 0, 1, 2,$$

entonces los coeficientes de la métrica de Minkowski g_{ij} cambian por \tilde{g}_{ij} mediante la relación

$$\begin{aligned} (\tilde{g}_{ij}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x^0}{\partial u^0} & \frac{\partial x^1}{\partial u^0} & \frac{\partial x^2}{\partial u^0} \\ \frac{\partial x^0}{\partial u^1} & \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x^0}{\partial u^2} & \frac{\partial x^1}{\partial u^2} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x^0}{\partial u^0} & \frac{\partial x^0}{\partial u^1} & \frac{\partial x^0}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^0} & \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x^2}{\partial u^0} & \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} \end{pmatrix} \\ &= \left(-\frac{\partial x^0}{\partial u^i} \frac{\partial x^0}{\partial u^j} + \frac{\partial x^1}{\partial u^i} \frac{\partial x^1}{\partial u^j} + \frac{\partial x^2}{\partial u^i} \frac{\partial x^2}{\partial u^j} \right); \end{aligned}$$

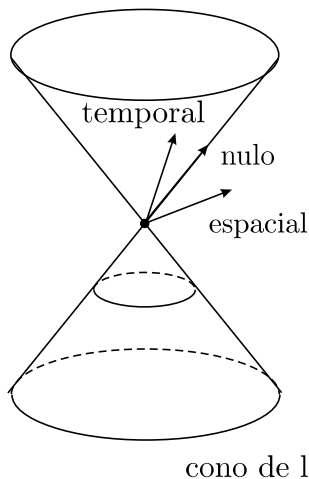


Figura 1.14: Caracterización de los vectores en \mathbb{R}_1^3 .

si denotamos $\tilde{G} = (\tilde{g}_{ij})$ y $A = \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^j} \right)$, podemos escribir lo anterior matricialmente como

$$\tilde{G} = A^T G A.$$

DEFINICIÓN 1.54. Una métrica \tilde{G} de \mathbb{R}_1^3 obtenida de G por un cambio de coordenadas, se llamará también **métrica de Minkowski**.

De igual forma que en las superficies regulares de \mathbb{R}^3 , podemos “heredar” la métrica de Minkowski a cualquier superficie $S \subset \mathbb{R}_1^3$. Sin embargo, debemos observar que dado que la métrica de Minkowski no es definida positiva, podríamos obtener superficies donde la métrica inducida fuese degenerada (el propio cono de luz es un ejemplo de esta situación). Describimos a continuación un ejemplo importante de superficie en \mathbb{R}_1^3 .

EJEMPLO 1.55 (El plano de Lobachevsky \mathbb{L}^2). Consideremos la hoja superior \mathbb{L}^2 del hiperboloide circular en \mathbb{R}_1^3 definido por

$$-(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 = -R^2,$$

llamada también la esfera de radio R en \mathbb{R}_1^3 .

Tal superficie tiene una parametrización local mediante el sistema de coordenadas **pseudoesféricas (hiperbólicas)** (θ, ϕ) dada por las ecuaciones

$$\begin{aligned}x^0 &= R \cosh \theta, \\x^1 &= R \sinh \theta \cos \phi, \\x^2 &= R \sinh \theta \sin \phi,\end{aligned}$$

de modo que al calcular las diferenciales tenemos

$$\begin{aligned}dx^0 &= R \sinh \theta d\theta \\dx^1 &= R(\cosh \theta \cos \phi d\theta - \sinh \theta \sin \phi d\phi) \\dx^2 &= R(\cosh \theta \sin \phi d\theta + \sinh \theta \cos \phi d\phi)\end{aligned}$$

de modo que el elemento de longitud es

$$ds^2 = -d(x^0)^2 + d(x^1)^2 + d(x^2)^2 = R^2(d\theta^2 + \sinh^2 \theta d\phi^2) \quad (1.6)$$

Así, esta métrica se escribe en coordenadas pseudoesféricas (θ, ϕ) como

$$(g_{ij}(\theta, \phi)) = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sinh^2 \theta \end{pmatrix}$$

y es conocida como la **métrica de Lobachevsky** en \mathbb{L}^2 . En capítulos posteriores estudiaremos con más detalle este espacio. \triangleright

1.6. El punto de vista conforme

El concepto de isometría es central en la geometría diferencial. Un concepto más débil, pero igualmente importante, es el de las transformaciones que preservan ángulos.

DEFINICIÓN 1.56. Sean $(S_1, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ y $(S_2, \langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle)$ dos superficies riemannianas.

1. Una transformación $f : S_1 \rightarrow S_2$ es una **aplicación conforme** entre las superficies S_1 y S_2 si y sólo si f es un difeomorfismo y existe una función $\lambda : S_1 \rightarrow \mathbb{R}$ positiva y diferenciable tal que

$$\langle df_p(\xi_1), df_p(\xi_2) \rangle_{f(p)} = \lambda(p) \langle \xi_1, \xi_2 \rangle_p$$

para todo $p \in S_1$ y cualesquiera $\xi_1, \xi_2 \in T_p S_1$.

2. Las superficies S_1 y S_2 son **(globalmente) conformes** o **conformemente equivalentes** si y sólo si existe una aplicación conforme $f : S_1 \rightarrow S_2$.
3. Una transformación $f : S_1 \rightarrow S_2$ es una **aplicación conforme local en** $p \in S_1$ si y sólo si existe una vecindad U de p en S_1 tal que $f|_U : U \rightarrow f(U)$ es una aplicación conforme. f es una **aplicación conforme local** si y sólo si f es una aplicación conforme local en p para todo $p \in S_1$.
4. Las superficies S_1 y S_2 son **localmente conformes** o **localmente conformemente equivalentes** si y sólo si existen aplicaciones conformes locales $f : S_1 \rightarrow S_2$ y $g : S_2 \rightarrow S_1$.

Nuevamente, la relación de conformidad global es una relación de equivalencia entre superficies.

De igual forma que para el caso de isometrías, si (U, φ) es una parametrización de un abierto U mediante las coordenadas (u, v) de una superficie diferenciable S_1 y $f : S_1 \rightarrow S_2$ es un difeomorfismo con otra superficie S_2 , entonces, nuevamente usamos el hecho de que $(f(U), f \circ \varphi)$ es una parametrización de un abierto en S_2 . Si además S_1, S_2 son riemannianas y f es una aplicación conforme, entonces los coeficientes de las métricas correspondientes g_{ij} y \tilde{g}_{ij} satisfacen:

$$g_{ij}(u, v) = \lambda(u, v) \tilde{g}_{ij}(u, v).$$

como se muestra en el Lema 2.48 en [16].

De entre todas las formas de conformidad entre métricas, la más importante es aquella en la cual la métrica de una superficie S es conforme con la métrica plana:

$$g_{ij}(u, v) = \lambda(u, v) \delta_{ij},$$

ó en notación diferencial,

$$ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 + dv^2). \quad (1.7)$$

En tal caso, se dice que la superficie S está provista de **coordenadas isotermas** (véase [16]).

Siguiendo paso a paso la demostración del Teorema 3.37 (Bers-Beltrami) en [16], podemos concluir que para una superficie abstracta arbitraria se puede construir un sistema de coordenadas isotermas.

En un sistema de coordenadas isotermas, la curvatura gaussiana se escribe como (ejercicio 13):

$$K(u, v) = -\frac{1}{2\lambda(u, v)} \Delta \ln \lambda(u, v). \quad (1.8)$$

Para ciertos cálculos usaremos también la forma compleja de la curvatura. Si sustituimos en (1.7) las identificaciones $z = u + iv$, $\bar{z} = u - iv$, podemos escribir la métrica en la forma compleja

$$ds^2 = g(z, \bar{z}) dz d\bar{z} = \lambda(x(z, \bar{z}), y(z, \bar{z})) dz d\bar{z}.$$

Y la expresión para la curvatura de una superficie en coordenadas (z, \bar{z}) es

$$K(z, \bar{z}) = -\frac{1}{2g(z, \bar{z})} 4 \frac{\partial^2 \ln g}{\partial z \partial \bar{z}}(z, \bar{z}) = -\frac{2}{g(z, \bar{z})} \frac{\partial^2 \ln g}{\partial z \partial \bar{z}}(z, \bar{z}), \quad (1.9)$$

ya que el Laplaciano en las coordenadas (z, \bar{z}) se escribe

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}.$$

Desde el punto de vista complejo, el problema interesante consiste en determinar las transformaciones $(w, \bar{w}) \mapsto (z, \bar{z})$ definidas en una región $\Omega \subset \mathbb{C}$ que preservan la forma conforme de la métrica en \mathbb{C} , esto es, que mantienen la forma

$$ds^2 = h(w, \bar{w})dw d\bar{w}.$$

Tenemos el siguiente resultado que caracteriza a tales transformaciones.

PROPOSICIÓN 1.57. *Un cambio de coordenadas $(w, \bar{w}) \mapsto (z, \bar{z})$ en $\Omega \subset \mathbb{C}$ preserva la forma conforme de la métrica si y sólo si es una transformación analítica, compuesta con la operación de conjugación.*

Demostración. Supóngase que la forma conforme de la métrica en $\Omega \subset \mathbb{C}$ en coordenadas z, \bar{z} es $ds^2 = g(z, \bar{z})dz d\bar{z}$ y que $z = z(w, \bar{w})$, es analítica en w , esto es,

$$\frac{dz}{d\bar{w}} \equiv 0$$

Entonces,

$$dz = \frac{dz}{dw}dw \quad \text{y} \quad d\bar{z} = \frac{d\bar{z}}{d\bar{w}}d\bar{w}$$

de donde

$$\begin{aligned} d\ell^2 &= g(z, \bar{z})dzd\bar{z} = g(z(w, \bar{w}), \bar{z}(w, \bar{w}))\frac{dz}{dw}dw \frac{d\bar{z}}{d\bar{w}}d\bar{w} \\ &= g(z(w, \bar{w}), \bar{z}(w, \bar{w}))\left|\frac{dz}{dw}\right|^2 dw d\bar{w} = h(w, \bar{w})dw d\bar{w} \end{aligned}$$

donde $h(w, \bar{w}) = g(z(w, \bar{w}), \bar{z}(w, \bar{w}))\left|\frac{dz}{dw}\right|^2$ y $\frac{d\bar{z}}{d\bar{w}} = \overline{\frac{dz}{dw}}$.

En forma análoga, si z es analítica en \bar{w} , entonces se conserva la forma conforme de la métrica en $\Omega \subset \mathbb{C}$.

Dejaremos la afirmación recíproca como ejercicio. □

Por la proposición 1.57, los únicos cambios de coordenadas complejas que preservan la forma conforme de una métrica son los analíticos, compuestos con la operación de conjugación. Así que al considerar cambios de coordenadas complejos, supondremos que todos estos cambios son analíticos.

EJEMPLO 1.58. Al utilizar la proyección estereográfica en \mathbb{S}^2 , es posible introducir coordenadas conformes (u, v) en la esfera (véase el ejemplo 2.51 de [16]). La forma de la métrica en estas coordenadas es

$$ds^2 = \frac{4R^4}{(R^2 + u^2 + v^2)^2} (du^2 + dv^2).$$

Al pasar a las coordenadas complejas (z, \bar{z}) , la métrica se escribe como

$$ds^2 = \frac{4R^4}{(R^2 + u^2 + v^2)^2} (du^2 + dv^2) = \frac{4R^4}{(R^2 + z\bar{z})^2} dzd\bar{z}$$

Por un cálculo directo se tiene que

$$\ln g = \ln(4R^4) - 2 \ln(R^2 + z\bar{z})$$

de donde,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\ln g) = -\frac{2z}{R^2 + z\bar{z}}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \ln g}{\partial \bar{z}} \right) = -\frac{2R^2}{(R^2 + z\bar{z})^2}$$

lo que muestra que la curvatura de la esfera en el punto (z, \bar{z}) es

$$K(z, \bar{z}) = -\frac{2}{g(z, \bar{z})} \frac{\partial^2 \ln g(z, \bar{z})}{\partial z \partial \bar{z}} = -\frac{-2(R^2 + z\bar{z})^2}{4R^4} \frac{-2R^2}{(R^2 + z\bar{z})^2} = \frac{1}{R^2}.$$

▷

EJEMPLO 1.59. Introducimos una nueva superficie definiendo una **proyección estereográfica** del plano de Lobachevsky \mathbb{L}^2 en $\mathbb{R}_{(u,v)}^2$ de la forma siguiente.

Consideremos la proyección desde el punto $P_S = (-R, 0, 0)$ contenido en la hoja inferior de \mathbb{L}^2 : Para cada punto (x^0, x^1, x^2) de la hoja superior tracemos la recta que lo une con P_S (véase la figura 1.15). Ya que esta recta interseca al plano en un punto con coordenadas (u, v) , se tienen las relaciones de semejanza entre las variables (x^0, x^1, x^2) y (u, v) dadas por

$$(u, v) = \left(\frac{Rx^1}{x^0 + R}, \frac{Rx^2}{x^0 + R} \right).$$

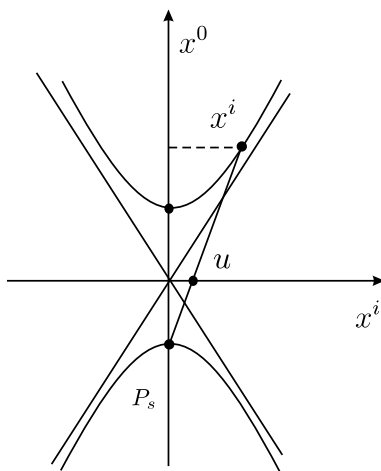


Figura 1.15: Proyección estereográfica de \mathbb{L}^2 en \mathbb{R}^2 .

De esta pareja de ecuaciones se tiene que

$$x^1 = \frac{(x^0 + R)}{R} u, \quad x^2 = \frac{(x^0 + R)}{R} v$$

lo que implica

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = (u^2 + v^2) \frac{(x^0 + R)^2}{R^2}.$$

De esta manera, de la relación $-(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 = -R^2$ se obtiene la igualdad

$$(x^0)^2 - R^2 = (u^2 + v^2) \frac{(x^0 + R)^2}{R^2}$$

de la cual, al despejar x^0 , se obtiene

$$x^0 = R \frac{R^2 + u^2 + v^2}{R^2 - u^2 - v^2}.$$

Sustituyendo este valor de x^0 en las expresiones para x^1 y x^2 se obtienen las relaciones inversas

$$\begin{aligned} x^0 &= R \frac{R^2 + u^2 + v^2}{R^2 - u^2 - v^2}, \\ x^1 &= \frac{2R^2 u}{R^2 - u^2 - v^2}, \\ x^2 &= \frac{2R^2 v}{R^2 - u^2 - v^2}. \end{aligned}$$

Un cálculo simple nos muestra que la imagen de \mathbb{L}^2 en \mathbb{R}^2 bajo esta proyección es el subconjunto del plano

$$\mathbb{D}^2 = \{(u, v) \mid u^2 + v^2 < R^2\}.$$

Otro cálculo directo implica que el elemento de longitud en \mathbb{D}^2 es

$$ds^2 = -d(x^0)^2 + d(x^1)^2 + d(x^2)^2 = \frac{4R^4}{(R^2 - u^2 - v^2)^2} (du^2 + dv^2).$$

Esto es, obtenemos una métrica para \mathbb{D}^2 conforme con la métrica euclidiana, con la función de conformidad dada por

$$\lambda(u, v) = \frac{4R^4}{(R^2 - u^2 - v^2)^2}.$$

Con esta métrica llamaremos a \mathbb{D}^2 el **disco de Poincaré**.

La curvatura de \mathbb{D}^2 se obtiene mediante la fórmula de Gauss (1.8) y cálculos análogos a los realizados en el caso de la esfera \mathbb{S}^2 . Obtenemos que

$$K(u, v) = -\frac{1}{R^2}$$

es la curvatura del disco de Poincaré en cada punto. ▷

Ejercicios

1. Complete la prueba de la proposición 1.8 mostrando que todos los elementos de $\tilde{\mathcal{U}}$ son compatibles entre sí y que por lo tanto $\tilde{\mathcal{U}}$ es un atlas maximal. *Sugerencia:* Utilice el Lema de Zorn o el axioma de elección; véase [1], p. 94–95.
2. Demuestre que la definición 1.14 no depende de la parametrización escogida alrededor del punto en la superficie.
3. Demuestre que la relación \sim obtenida de la definición 1.14 es una relación de equivalencia.
4. Demuestre las propiedades de la derivada direccional dadas en la proposición 1.18.
5. Demuestre que las operaciones en la proposición 1.21 dan al conjunto de derivaciones la estructura de espacio vectorial real.
6. Demuestre la primera parte de la proposición 1.29.
7. Demuestre la proposición 1.30.
8. Con base en el teorema de la función inversa para abiertos de \mathbb{R}^2 , demuestre el teorema 1.32.

9. Enuncie y demuestre la invarianza bajo isometrías de los siguientes conceptos métricos: longitud de arco, ángulo entre curvas, área, símbolos de Christoffel y curvatura.
10. Considere la aplicación $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\varphi = \varphi(\phi, t)$ definida por

$$\begin{aligned} x &= (r \cos t + a) \cos \phi, & y &= (r \cos t + a) \sin \phi, \\ z &= r \sin t \cos \left(\frac{\phi}{2}\right), & w &= r \sin t \sin \left(\frac{\phi}{2}\right), \end{aligned}$$

donde $0 < r < a$.

- a) Demuestre que φ es una inmersión.
- b) Demuestre que $\varphi(\phi, t) = \varphi(\phi + 2\pi k, 2\pi l - t)$ para cualquier pareja de enteros k, l . Concluya que φ induce una aplicación $\tilde{\varphi} : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que su imagen coincide con la de φ .
- c) Por el inciso anterior, la superficie $\mathbb{K}^2 \subset \mathbb{R}^4$ que se obtiene al aplicar $\tilde{\varphi}$ es la misma que se obtiene del rectángulo

$$\bar{\Omega} = \{ (\phi, t) \mid 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad 0 < t < 2\pi \}$$

en el plano, al identificar los puntos $(t, 0)$ con $(2\pi - t, 2\pi)$ y los puntos $(0, \phi)$ con $(2\pi, \phi)$ y es llamada la **botella de Klein**, como se muestra en la figura 1.16.

11. Considérense el cilindro $C \subset \mathbb{R}^3$ dado por $x^2 + y^2 = 1$ y la aplicación antípoda $f : C \rightarrow C$ dada por $f(x, y, z) = -(x, y, z)$. Sea $\mathbb{M}^2(\infty)$ el conjunto que se obtiene de identificar (x, y, z) con su imagen $f(x, y, z)$. Tal conjunto se llama la **banda infinita de Möbius**. Demuestre que este conjunto es una superficie diferenciable, construyendo un difeomorfismo local $\varphi : C \rightarrow \mathbb{M}^2(\infty)$.
12. Calcule el área y el perímetro de un disco de radio r en el plano de Lobachevsky \mathbb{L}^2 , con centro en el punto $(R, 0, 0)$.

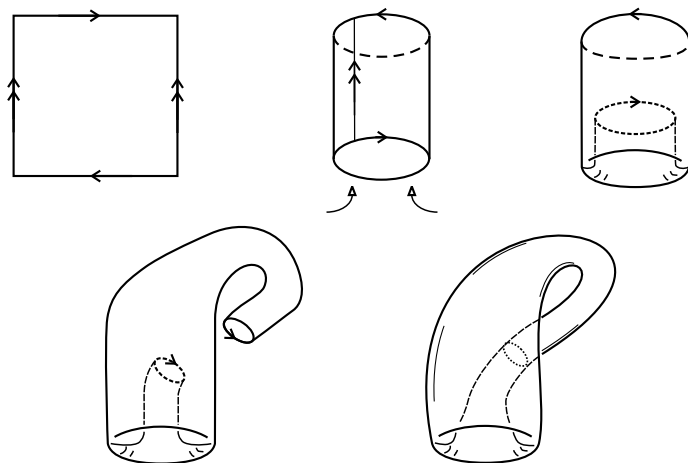


Figura 1.16: Botella de Klein \mathbb{K}^2 .

13. Demuestre que en un sistema de coordenadas isoterma, los símbolos de Christoffel son

$$-\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \frac{\lambda_u}{2\lambda}, \quad \Gamma_{22}^2 = -\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \frac{\lambda_v}{2\lambda}$$

y que la curvatura gaussiana se escribe como

$$K(u, v) = -\frac{1}{2\lambda(u, v)} \Delta \ln \lambda(u, v).$$

14. Demuestre la afirmación recíproca de la proposición 1.57.

Sea $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en las variables (z, w) . El conjunto de puntos en \mathbb{C}^2 tales que $f(z, w) = 0$ se llama una superficie topológica **de Riemann**. El teorema de la función implícita para este caso afirma que si en el punto (z_0, w_0) se tiene que

$$f(z_0, w_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial w}(z_0, w_0) \neq 0$$

entonces existe una vecindad V_{z_0} en \mathbb{C} de tal forma que alrededor de w_0 , la variable w es una función holomorfa de $z \in V_{z_0}$ y

$$0 = f(z, w(z))$$

En otras palabras, la superficie $f \equiv 0$ alrededor de (z_0, w_0) es la gráfica de una función holomorfa y la coordenada z sirve para parametrizarla localmente alrededor del punto. Ya que $w = w(z)$ es holomorfa, se dice que la superficie $f \equiv 0$ es una **superficie analítica**.

15. Sea $f(z, w) = w^2 - P_n(z)$, donde $P_n(z)$ es un polinomio complejo de grado n . Demuestre que $f(z, w) = 0$ define una superficie diferenciable inmersa en $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$. Además, demuestre que si $P_n(z)$ no tiene raíces múltiples entonces tal superficie es analítica y orientable.

Consideremos el espacio complejo \mathbb{C}^2 con las coordenadas complejas (z, w) y el conjunto de rectas por el origen. A cada línea le asociamos a un punto y a este conjunto de puntos le llamamos el **espacio proyectivo complejo** de dimensión uno, denotándolo por \mathbb{CP}^1 . De esta manera, este espacio se obtiene de identificar los puntos que están en una misma recta de la misma forma que para el espacio proyectivo real de dimensión dos \mathbb{RP}^2 , como se hizo en el ejemplo 1.4.

16. Defina coordenadas homogéneas para \mathbb{CP}^1 como en el ejemplo 1.4, sabiendo que si $z \neq 0$, los puntos (z, w) y $(1, w/z)$ están en la misma clase, y que, análogamente, los puntos (z, w) y $(z/w, 1)$ están en la misma clase cuando $w \neq 0$. Construya las cartas correspondientes a cada clase.
17. Demuestre que \mathbb{CP}^1 es difeomorfo a la esfera \mathbb{S}^2 utilizando los cambios de coordenadas de las cartas encontradas al escribirlas en coordenadas reales.

18. Considere la esfera de dimensión 3 en \mathbb{C}^2 con las coordenadas complejas (z, w) , definida por la ecuación $|z|^2 + |w|^2 = 1$. Demuestre que una recta compleja en \mathbb{C}^2 por el origen interseca a tal esfera en una circunferencia real de dimensión uno \mathbb{S}^1 , mostrando el hecho de que dos puntos p y q de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ que están en la misma clase son múltiplos por un elemento en \mathbb{S}^1 . Concluya que existe una aplicación cubriente $f : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1 (\cong \mathbb{S}^2)$ tal que para todo valor $c \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ su preimagen es un conjunto que es topológicamente \mathbb{S}^1 . Esta cubriente se llama **aplicación de Hopf**. En otras palabras, la esfera se puede dividir (“fibrar”) mediante la aplicación f por conjuntos que topológicamente equivalen a una circunferencia.

CAPÍTULO 2

Transporte paralelo

En este capítulo iniciamos el estudio de las propiedades dinámicas asociadas a la geometría intrínseca de una superficie, determinadas mediante la métrica de la misma. Por ejemplo, definiremos un concepto análogo al de aceleración de una curva, lo que nos permitirá a su vez determinar las curvas de aceleración nula con respecto de la superficie, similares a las rectas en el plano. Para esto requerimos un concepto análogo al de “segunda derivada”: la derivada covariante, que definimos a continuación, primero para superficies en \mathbb{R}^3 y posteriormente para superficies abstractas.

2.1. Derivada covariante

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable y $\gamma = \gamma(t)$, $t \in (a, b)$, una curva diferenciable en S . Si $\xi = \xi(t)$ es un campo vectorial tangente a S a lo largo de $\gamma = \gamma(t)$, queremos definir la derivada del campo ξ “vista” desde la superficie S .

Puesto que el campo ξ es diferenciable, la derivada $d\xi/dt$ está bien definida y sabemos que esta derivada mide la variación del campo ξ . Si observamos con detenimiento, esta variación puede deberse a dos factores: Como el campo vectorial tiene la restricción de ser tangente a S en todo punto, entonces ξ deberá variar o curvarse “siguiendo”

a S . Por otro lado, aunque el campo sea tangente a S , habrá algunos campos que varíen más que otros (véase la figura 2.1).

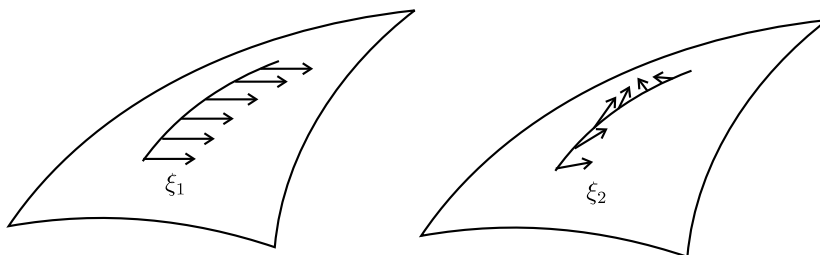


Figura 2.1: Dos campos definidos a lo largo de una curva en la superficie S . El campo ξ_2 parece curvarse más que ξ_1 .

Podemos analizar formalmente estos dos comportamientos, descomponiendo $d\xi/dt$ en dos partes, una tangente a S en p y la otra normal a S en p . Primero analizaremos la parte tangente, a la que damos un nombre especial.

DEFINICIÓN 2.1. Sea ξ un campo vectorial tangente a S a lo largo de una curva γ en S . Se define la **derivada covariante** $(D\xi/dt)(0)$ de ξ en $t = 0$ como la proyección de la derivada $(d\xi/dt)(0)$ del campo vectorial ξ en el plano tangente T_pS ; es decir,

$$\frac{D\xi}{dt}(0) = \text{Proy}_{T_pS} \left(\frac{d\xi}{dt}(0) \right)$$

como lo muestra la figura 2.2.

Veamos la expresión de la derivada covariante de un campo en un sistema de coordenadas. Si (U, φ) es una parametrización local de S en una vecindad de p con coordenadas (u, v) , entonces la curva γ puede escribirse como $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ y el plano tangente a S en cada punto de la curva es generado por los vectores φ_u, φ_v , de modo que el campo vectorial se puede escribir como

$$\xi(t) = \xi^1(t) \varphi_u(u(t), v(t)) + \xi^2(t) \varphi_v(u(t), v(t)),$$

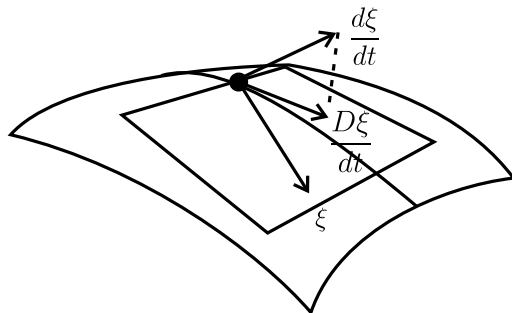


Figura 2.2: Derivada covariante de un campo vectorial.

donde las funciones $\xi^1(t)$ y $\xi^2(t)$ son diferenciables.

La derivada de ξ está dada por lo siguiente, donde omitimos los puntos donde se evalúa cada expresión.

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \dot{\xi}^1 \varphi_u + \xi^1 \dot{\varphi}_u + \dot{\xi}^2 \varphi_v + \xi^2 \dot{\varphi}_v \\ &= \dot{\xi}^1 \varphi_u + \xi^1 (\varphi_{uu} \dot{u} + \varphi_{uv} \dot{v}) + \dot{\xi}^2 \varphi_v + \xi^2 (\varphi_{uv} \dot{u} + \varphi_{vv} \dot{v}) \end{aligned}$$

donde el punto denota la derivada respecto al parámetro t .

Si n es el campo unitario

$$n = \frac{[\varphi_u, \varphi_v]}{\|[\varphi_u, \varphi_v]\|},$$

donde $[,]$ denota el producto vectorial, tenemos que $\{\varphi_u, \varphi_v, n\}$ es una base de \mathbb{R}^3 para cada punto en la imagen de la parametrización, de modo que podemos escribir

$$\begin{aligned} \varphi_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + Ln, \\ \varphi_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v + Mn, \\ \varphi_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \varphi_u + \Gamma_{22}^2 \varphi_v + Nn, \end{aligned} \tag{2.1}$$

aquí usamos la notación de la sección 3.5 de [16]. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \dot{\xi}^1 \varphi_u + \dot{\xi}^2 \varphi_v \\ &+ \xi^1 \left([\Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + Ln] \dot{u} + [\Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v + Mn] \dot{v} \right) \\ &+ \xi^2 \left([\Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v + Mn] \dot{u} + [\Gamma_{22}^1 \varphi_u + \Gamma_{22}^2 \varphi_v + Nn] \dot{v} \right). \end{aligned}$$

Reagrupando en términos de φ_u, φ_v y n , nos fijamos en la parte tangente a S ; así, la derivada covariante de ξ tiene la siguiente expresión en las coordenadas dadas con respecto de la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ del espacio tangente:

$$\begin{aligned} \frac{D\xi}{dt}(0) &= (\dot{\xi}^1 + \xi^1 \Gamma_{11}^1 \dot{u} + \xi^1 \Gamma_{12}^1 \dot{v} + \xi^2 \Gamma_{12}^1 \dot{u} + \xi^2 \Gamma_{22}^1 \dot{v}) \varphi_u \\ &+ (\dot{\xi}^2 + \xi^1 \Gamma_{11}^2 \dot{u} + \xi^1 \Gamma_{12}^2 \dot{v} + \xi^2 \Gamma_{12}^2 \dot{u} + \xi^2 \Gamma_{22}^2 \dot{v}) \varphi_v \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde cada función se evalúa en $t = 0$.

EJEMPLO 2.2. Sean S un plano en \mathbb{R}^3 , $\gamma = \gamma(t)$ una curva contenida en S y ξ un campo tangente a S definido a lo largo de γ . Se puede mostrar que $d\xi/dt$ se mantiene tangente a S , de modo que la proyección de este vector en el plano tangente coincide con el propio vector.

Veamos lo anterior en términos de coordenadas. En el ejemplo 2.32 de [16] se demostró que existe una parametrización tal que la métrica en S toma la forma

$$(g_{ij}(p)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

Al sustituir estos valores en el sistema de ecuaciones (1.5) para los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k , se sigue que éstos se anulan para toda i, j, k , y en consecuencia,

$$\frac{D\xi}{dt} = \dot{\xi}^1 \varphi_u + \dot{\xi}^2 \varphi_v,$$

lo cual indica que si la superficie es un plano, la derivada covariante coincide con la derivada ordinaria. \triangleright

OBSERVACIÓN 2.3. Supongamos que una curva $\gamma : [0, \ell] \rightarrow S$ es la restricción de una curva suave $\tilde{\gamma} : (-\epsilon, \ell + \epsilon) \rightarrow S$ para un número $\epsilon > 0$. En este caso, si $\xi = \xi(t)$ es un campo diferenciable a lo largo de γ y $\tilde{\xi}$ es una extensión de ξ a $\tilde{\gamma}$, se define la derivada covariante de ξ en $p \in \gamma$ como la derivada covariante de $\tilde{\xi}$ en p . Se puede mostrar que esta derivada covariante no depende de la extensión $\tilde{\xi}$.

Un ejemplo importante de un campo vectorial definido a lo largo de una curva $\gamma = \gamma(t)$ contenida en una superficie S es el campo de vectores tangentes $\xi(t) = \dot{\gamma}(t)$. En tal caso, la derivada covariante de ξ es

$$\frac{D\xi}{dt} = \frac{D\dot{\gamma}}{dt}.$$

Puesto que la derivada usual $d\dot{\gamma}/dt$ de una curva en \mathbb{R}^3 es su aceleración, podemos interpretar a la derivada covariante del campo de vectores tangentes como la aceleración de la curva “vista desde la superficie”.

EJEMPLO 2.4. Sean $S = \mathbb{S}^2$ la esfera unitaria en \mathbb{R}^3 y $\gamma \in \mathbb{S}^2$ un meridiano parametrizado por la longitud de arco s . Si $\xi(s) = \gamma'(s)$ es el campo de vectores tangentes a lo largo del meridiano, sabemos que $\gamma''(s)$ es normal a \mathbb{S}^2 , por lo que su proyección en el plano tangente se anula:

$$\frac{D\xi}{ds}(s) = 0.$$

En términos de la interpretación anterior a este ejemplo, γ es una curva con aceleración nula. ▷

2.2. Transporte paralelo

Iniciamos la discusión del **transporte paralelo** de un vector a lo largo de una curva parametrizada.

El quinto postulado de Euclides nos dice que dados una recta \mathcal{L} y un punto p fuera de ella, existe una única recta paralela a \mathcal{L} pasando por p .

En este caso, se puede construir un campo constante $\xi(t) = \xi_0$ a lo largo de toda la recta \mathcal{L} y los puntos extremos conforman la recta paralela pasando por p , como lo muestra la figura 2.3 a. Es evidente que la derivada covariante de este campo se anula a lo largo de toda la recta \mathcal{L} .

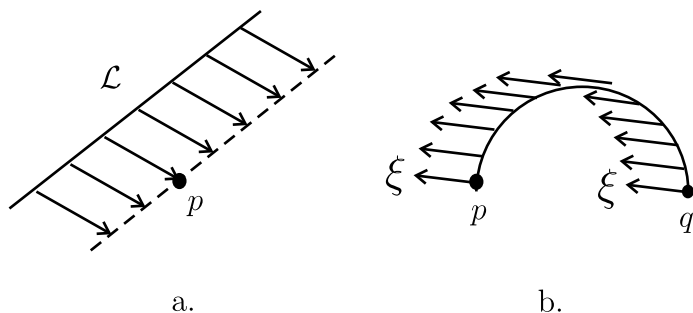


Figura 2.3: Quinto postulado de Euclides y transporte paralelo.

De igual manera, si p y q son dos puntos arbitrarios de \mathbb{R}^3 y $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva diferenciable arbitraria tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = q$, al llevar paralelamente un vector ξ_0 posicionado en p mediante un campo vectorial constante $\xi(t) = \xi_0$, el proceso nos conforma una *curva paralela* a γ (Figura 2.3 b). En tal caso, el campo vectorial $\xi(t)$ construido a lo largo de γ se llama paralelo a lo largo de tal curva.

Observemos que en este caso, no hay una distinción entre un vector $\xi_0 \in T_p\mathbb{R}^3$ y su traslación en $T_q\mathbb{R}^3$. Observamos además que la derivada del campo se anula:

$$\left. \frac{d\xi}{dt}(t) \right|_{t=0} \equiv 0.$$

Ahora, sean $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable y $p, q \in S$ dos puntos arbitrarios. Al tratar de comparar a los vectores posicionados en p con

los vectores posicionados en q , un proceso análogo al realizado en la discusión precedente nos lleva a la construcción de *campos vectoriales paralelos* a lo largo de las curvas que unen a tales puntos.

Si $p, q \in S$ y $\gamma = \gamma(t)$, $t \in [0, 1]$ es una curva diferenciable que une a $p = \gamma(0)$ con $q = \gamma(1)$, al considerar un vector $\xi_0 \in T_p S$, y realizar su transporte paralelo de manera ordinaria en \mathbb{R}^3 a lo largo de γ , obtenemos un vector posicionado en q , pero no necesariamente en $T_q S$. Para obtener un vector tangente a S en q proyectamos tal vector en $T_q S$, obteniendo $\xi_1 \in T_q S$.

Claramente, este método puede generar que al trasladar un vector $\xi_0 \neq 0$ hasta un vector ξ_1 , éste último se anule, como ocurre al trasladar de esta manera un vector ξ_0 tangente a la esfera S^2 en el polo norte p a lo largo de un meridiano, como lo muestra la figura 2.4. En este caso, el vector ξ_1 es nulo. En general, esto podría ocurrir si los puntos p y q en una superficie están muy alejados.

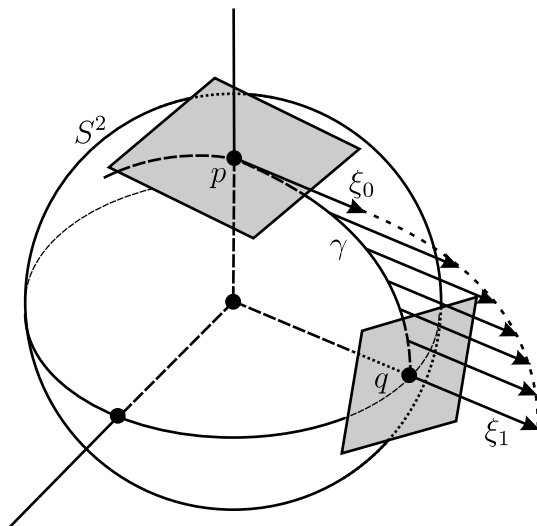


Figura 2.4: Intento de construcción de un campo paralelo en S^2 .

El concepto de paralelismo para un campo vectorial $\xi(t)$ a lo largo

de una curva γ puede definirse mediante el proceso mencionado, si se realiza de manera infinitesimal, es decir, si se supone que la proyección del vector $\frac{d\xi}{dt}(t)$ en el espacio tangente $T_{\gamma(t)}S$ se anule. De este modo, el campo ξ se considera como constante a lo largo de γ , visto desde la superficie S . En otras palabras, para que esto suceda, es necesario que la derivada covariante del campo dado se anule.

Esto da la pauta para la siguiente definición de transporte paralelo a lo largo de una curva parametrizada γ contenida en una superficie.

DEFINICIÓN 2.5. Sea $\gamma = \gamma(t)$ una curva en una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$. Un campo vectorial $\xi(t) = (\xi^1(t), \xi^2(t))$ definido a lo largo de γ es **paralelo** si y sólo si se cumple la igualdad

$$\frac{D\xi}{dt} \equiv 0.$$

OBSERVACIÓN 2.6. La definición de derivada covariante implica que un campo vectorial $\xi = \xi(t)$ a lo largo de $\gamma = \gamma(t)$ es paralelo si y sólo si la derivada $d\xi/dt$ es un vector normal a la superficie S .

EJEMPLO 2.7. En el ejemplo 2.4 mostramos que la derivada del campo de tangentes $\xi(s) = \gamma'(s)$ a lo largo de un meridiano $\gamma(s)$ de la esfera unitaria $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ se anula; por lo tanto, $\xi(s)$ es un campo paralelo a lo largo de γ . \triangleright

Ahora veremos algunas propiedades generales de los campos paralelos a lo largo de una curva.

Sean $\xi = \xi(t)$, $\eta = \eta(t)$ dos campos vectoriales tangentes a una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ a lo largo de una curva $\gamma(t)$. Si ξ es paralelo a lo largo de γ , entonces $d\xi/dt$ es normal a S y por lo tanto

$$\left\langle \frac{d\xi}{dt}, \eta(t) \right\rangle = 0.$$

Análogamente, si $\eta(t)$ es paralelo a lo largo de una curva $\gamma(t)$, se sigue que

$$\left\langle \xi(t), \frac{d\eta}{dt} \right\rangle = 0.$$

De esta manera, si ambos campos son paralelos, entonces

$$\frac{d}{dt} \langle \xi(t), \eta(t) \rangle = \left\langle \frac{d\xi}{dt}, \eta(t) \right\rangle + \left\langle \xi(t), \frac{d\eta}{dt} \right\rangle.$$

Así, si ambos campos son paralelos a lo largo de $\gamma = \gamma(t)$, entonces el producto escalar entre ellos se preserva. Esto implica con facilidad los dos últimos incisos del siguiente lema.

LEMA 2.8. *Si $\xi(t)$, $\eta(t)$ son campos vectoriales paralelos a lo largo de una curva $\gamma = \gamma(t)$ contenida en una superficie inmersa en \mathbb{R}^3 , entonces*

1. $\langle \xi(t), \eta(t) \rangle$ es constante a lo largo de $\gamma(t)$.
2. $\|\xi(t)\|$, $\|\eta(t)\|$ son constantes a lo largo de $\gamma(t)$.
3. El ángulo $\theta(t)$ entre ξ y η es constante a lo largo de $\gamma(t)$.

PROPOSICIÓN 2.9. *Sean $\gamma : [0, \ell] \rightarrow S$ una curva diferenciable, $\gamma(0) = p$ y ξ_0 un vector en $T_p S$. Entonces existe un único campo vectorial $\xi = \xi(t)$ paralelo a lo largo de γ tal que $\xi(0) = \xi_0$.*

Demostración. Consideremos una parametrización de una vecindad de p en S con coordenadas (u, v) . Las ecuaciones que definen a un campo paralelo $\xi = (\xi^1, \xi^2)$ a lo largo de la curva $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ son

$$\begin{aligned} \dot{\xi}^1 + \xi^1 \Gamma_{11}^1 \dot{u} + \xi^1 \Gamma_{12}^1 \dot{v} + \xi^2 \Gamma_{12}^1 \dot{u} + \xi^2 \Gamma_{22}^1 \dot{v} &= 0, \\ \dot{\xi}^2 + \xi^1 \Gamma_{11}^2 \dot{u} + \xi^1 \Gamma_{12}^2 \dot{v} + \xi^2 \Gamma_{12}^2 \dot{u} + \xi^2 \Gamma_{22}^2 \dot{v} &= 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Éste es un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden en las variables ξ^1 y ξ^2 sujeto a la condición inicial $\xi(0) = \xi_0$. Por el

teorema de existencia y unicidad para sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden con la condición inicial dada (véase [5]), existe un campo vectorial $\xi(t)$ que es solución del sistema. \square

DEFINICIÓN 2.10. Sean $\gamma : [0, \ell] \rightarrow S$ una curva diferenciable en S , $p = \gamma(0)$ y ξ_0 un vector tangente en p . Entonces el vector $\xi(t_1)$ en $\gamma(t_1)$ obtenido mediante el campo vectorial paralelo de la proposición 2.9 se llama el **transporte paralelo** de ξ_0 a $\gamma(t_1)$ a lo largo de $\gamma(t)$ (véase la figura 2.5).

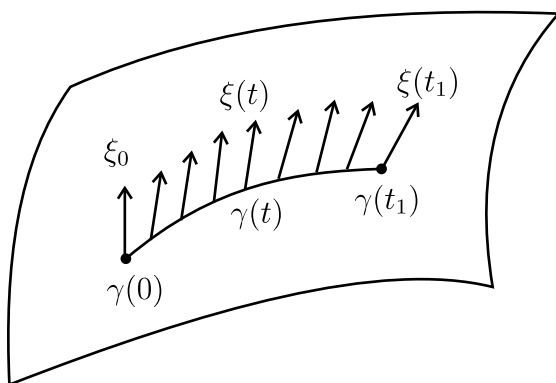


Figura 2.5: Transporte paralelo de un vector.

EJEMPLO 2.11. Debido a que en un plano $S = P$ puede escogerse la métrica como $g_{ij} = \delta_{ij}$, se sigue que todos los coeficientes de Christoffel se anulan y las ecuaciones del transporte paralelo son

$$\dot{\xi}_1 = 0, \quad \dot{\xi}_2 = 0,$$

lo que nos dice que el campo paralelo es constante $\xi(t) = \xi_0$ a lo largo de cualquier curva.

EJEMPLO 2.12. Consideremos un cono circular vertical recto S con ángulo en el vértice igual a ϕ , al cual se le quita tal vértice para

hacerlo una superficie diferenciable. Sea $p \in S$ un punto arbitrario y consideremos la curva circular por p obtenida al intersecar a S con un plano horizontal. Denotemos por γ tal curva, a la cual parametrizamos por longitud de arco. Sea ξ un vector tangente a S en p apuntando en la dirección del vértice. Calculemos el ángulo α de rotación de ξ al transportarlo paralelamente a lo largo de γ (véase la figura 2.6 a).

Denotemos por r la distancia de p al vértice. Entonces, si R es el radio de γ en \mathbb{R}^3 se tiene que $\text{sen}(\phi/2) = R/r$, es decir

$$R = r \text{sen}(\phi/2)$$

lo que nos dice que $\text{long}(\gamma) = 2\pi R = 2\pi r \text{sen}(\phi/2)$.

Cortando por la línea que une a p con el vértice tenemos una región del cono isométrica a una región del plano complementaria a un sector con ángulo α , como se muestra en la figura 2.6 b.

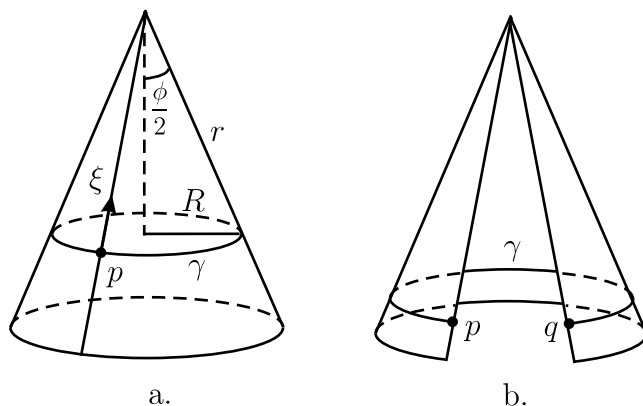


Figura 2.6: **a.** Región en el cono. **b.** Región del cono isométrica a una región plana.

Al transportar paralelamente el vector ξ a lo largo de γ se obtiene el vector ξ' que forma un ángulo α con la línea que une al punto q con el vértice (véase la figura 2.7). Procedamos a calcular el ángulo α , que es el ángulo de rotación buscado.

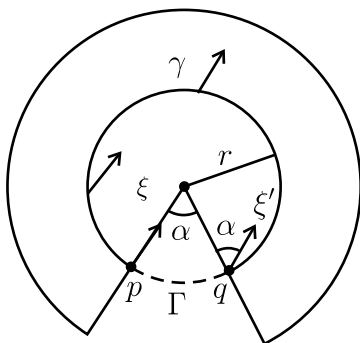


Figura 2.7: Transporte paralelo del vector ξ a lo largo de un meridiano del cono.

Si los puntos p y q se obtienen al cortar el cono y Γ es el círculo con centro en el vértice que pasa por p y q , entonces

$$\text{long}(\text{de } p \text{ a } q) = \text{long}(\Gamma) - \text{long}(\gamma)$$

Como la distancia de p al vértice es r , $\text{long}(\text{de } p \text{ a } q) = r\alpha$, pues α es el ángulo del sector.

Por otro lado, $\text{long}(\Gamma) = 2\pi r$, lo que implica que

$$r\alpha = 2\pi r - 2\pi r \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) = 2\pi r \left(1 - \sin\frac{\phi}{2}\right)$$

De esta forma, el ángulo que rota el vector ξ al ser transportado en forma paralela dando toda una vuelta a lo largo de γ en el cono es $\alpha = 2\pi \left(1 - \sin\frac{\phi}{2}\right)$.

Notamos que el transporte paralelo en el cono se obtiene del transporte en el plano debido a la isometría local entre ambas superficies.

▷

OBSERVACIÓN 2.13. Veamos cómo extender los conceptos de derivada covariante y campo paralelo al caso de las superficies abstractas. Observemos que la expresión (2.2) depende sólo del vector

tangente $\dot{\gamma}(0)$ y de los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k , los que a su vez dependen sólo de la métrica en S . De aquí se sigue que esta derivada depende sólo de la métrica en S , lo que nos permite establecer la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.14. Sean $(S, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ una superficie riemanniana, γ una curva diferenciable en S y ξ un campo diferenciable a lo largo de γ . Sea (U, φ) una parametrización de una vecindad de $p \in S$ con coordenadas (u, v) , de modo que $\gamma(t) = (u(t), v(t))$. Si ξ^1, ξ^2 son las coordenadas del campo ξ con respecto de la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ de $T_p S$ determinada por φ , entonces la **derivada covariante** de ξ en 0 está dada por la ecuación (2.2), donde Γ_{ij}^k son los símbolos de Christoffel asociados a la métrica en S .

Esto nos permite extender los conceptos de campo y transporte paralelos. A continuación veremos un ejemplo de estos conceptos en una superficie abstracta.

EJEMPLO 2.15. Definimos el **semiplano superior** como el conjunto

$$\mathbb{H}_+^2 = \{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid v > 0 \}$$

dotado de la métrica

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}.$$

En términos de los coeficientes de la métrica, $E = G = 1/v^2$ y $F = 0$, por lo que al sustituir estas funciones en el sistema (1.5), tenemos que los símbolos de Christoffel asociados a la métrica son

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{v}, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{v},$$

y $\Gamma_{ij}^k = 0$ para los demás índices.

Supongamos ahora que queremos transportar el vector $\xi_0 = (0, 1)$ en forma paralela a lo largo de la curva $u(t) = t, v(t) = 1$. Si $\xi(t) =$

$(\xi^1(t), \xi^2(t))$ son las coordenadas del transporte paralelo, las ecuaciones (2.3) para estas coordenadas están dadas en este caso por

$$\frac{d\xi^1}{dt} + \Gamma_{12}^1 \xi^2 = 0, \quad \frac{d\xi^2}{dt} + \Gamma_{11}^2 \xi^1 = 0.$$

O bien, como $v(t) = 1$,

$$\frac{d\xi^1}{dt} - \xi^2 = 0, \quad \frac{d\xi^2}{dt} + \xi^1 = 0.$$

La forma de estas ecuaciones sugiere que $\xi^1(t) = \cos \theta(t)$ y $\xi^2(t) = \sin \theta(t)$, donde $\theta(t)$ mide el ángulo del vector con la dirección horizontal positiva. Al sustituir estas expresiones en las ecuaciones anteriores, tenemos que $d\theta/dt = -1$, de modo que $\theta(t) = -t + C$, siendo C una constante. Como la condición inicial se traduce en $\theta(0) = \pi/2$, se tiene que el transporte paralelo $\xi(t)$ de $(0, 1)$ a lo largo de la curva en cuestión forma el ángulo $\theta(t) = \pi/2 - t$ con la dirección horizontal positiva (véase la figura 2.8). \triangleright

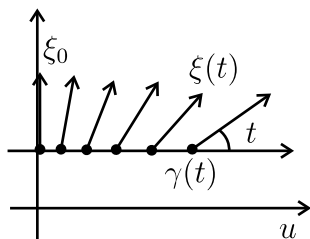


Figura 2.8: Transporte paralelo en el semiplano superior.

OBSERVACIÓN 2.16. Veamos qué ocurre con la derivada covariante al cambiar la parametrización de la curva. Si $t = t(s)$ es un cambio de parámetro tal que $dt/ds \neq 0$, la regla de la cadena implica que

$$\frac{D\xi}{ds} = \frac{D\xi}{dt} \frac{dt}{ds}.$$

Consecuentemente, el hecho de que un campo sea paralelo no depende de la parametrización. En efecto, $D\xi/dt = 0$ si y sólo si $D\xi/ds = 0$ (con la condición $dt/ds \neq 0$, por supuesto).

En otras palabras, si ξ es un campo paralelo a lo largo de una curva con el parámetro t , entonces ξ también es paralelo a lo largo de la misma curva con el parámetro s .

OBSERVACIÓN 2.17. Dada una curva $\gamma(t)$ tal que $\gamma(0) = p$, definimos una transformación

$$P : T_p S \rightarrow T_{\gamma(t)} S$$

asociando a cada vector $\xi_0 \in T_p S$ el vector $\xi(t) \in T_{\gamma(t)} S$ obtenido bajo el transporte paralelo de este vector a lo largo de γ . El Lema 2.8 implica que esta transformación es una isometría entre los espacios tangentes $T_p S$ y $T_{\gamma(t)} S$ (véase la figura 2.9).

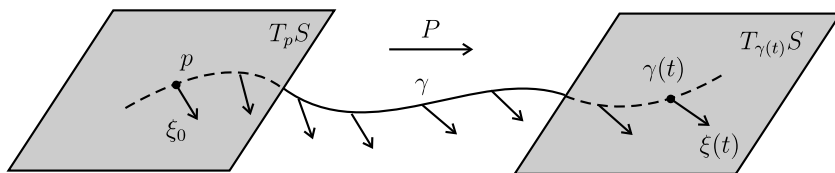


Figura 2.9: Isometría definida mediante el transporte paralelo.

OBSERVACIÓN 2.18. Sean S_1 y S_2 dos superficies diferenciables en \mathbb{R}^3 tangentes a lo largo de una curva γ ; es decir,

$$T_{\gamma(t)} S_1 = T_{\gamma(t)} S_2, \quad \text{para toda } t.$$

Entonces el transporte paralelo en ambas superficies coincide. De esto se sigue que un campo vectorial $\xi(t)$ es paralelo a lo largo de γ en S_1 si y sólo si el campo es paralelo a lo largo de γ en S_2 .

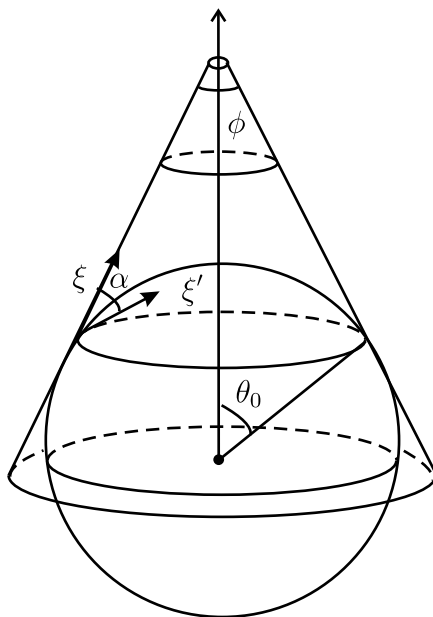


Figura 2.10: Cono y esfera tangentes en el paralelo Γ .

EJEMPLO 2.19. Sea Γ un paralelo en \mathbb{S}^2 . Si S es un cono tangente a \mathbb{S}^2 a lo largo de Γ , entonces el transporte paralelo de cualquier vector ξ a lo largo de Γ en \mathbb{S}^2 se reduce al transporte paralelo a lo largo de Γ en el cono (véase la figura 2.10).

El cono S y \mathbb{S}^2 son tangentes en Γ cuando se cumple la relación $\phi = \frac{\pi}{2} - \theta$, donde ϕ y θ son los ángulos indicados en la figura 2.10. En vista de la discusión del ejemplo 2.12, un vector ξ apuntando en dirección al polo norte gira un ángulo

$$\alpha = 2\pi \left(1 - \sin \frac{\phi}{2} \right) = 2\pi \left(1 - \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \right)$$

cuando es transportado hasta el vector ξ' a lo largo de Γ . ▷

2.3. Orientación

En esta sección generalizamos el concepto de superficie diferenciable orientada, desarrollado en la primera parte de esta obra [16] para superficies en \mathbb{R}^3 .

Sean S una superficie diferenciable y p un punto en S . Decimos que dos bases $\{\xi, \eta\}$ y $\{\tilde{\xi}, \tilde{\eta}\}$ del espacio $T_p S$ tienen la misma orientación si y sólo si existe un isomorfismo $A : T_p S \rightarrow T_p S$ de tal forma que

$$A\xi = \tilde{\xi}, \quad A\eta = \tilde{\eta}$$

y $\det A > 0$. Es fácil ver que esto define una relación de equivalencia entre bases. De hecho, para cada $p \in S$ existen sólo dos clases de equivalencia bajo esta relación. Una **orientación** en $T_p S$ consiste en la elección de una de estas clases de equivalencia.

Si (U, φ) es una parametrización de una vecindad de p en S con coordenadas (u, v) , podemos orientar a cada plano tangente $T_q S$, $q \in U$, eligiendo la orientación de la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ inducida por la parametrización. Como en la Sección 3.2 de [16], esto define una orientación en una vecindad V_p de p en S (véase la figura 2.11).

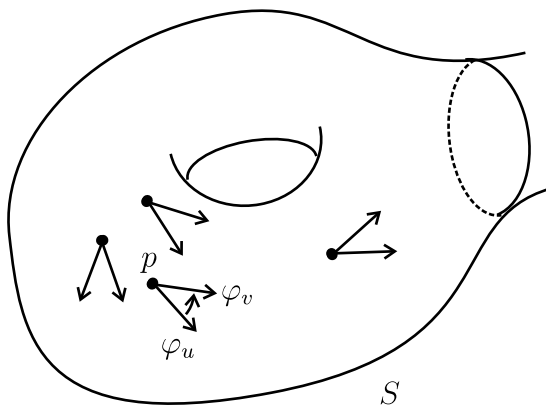


Figura 2.11: Orientación en una vecindad de un punto.

Sea $(U, \tilde{\varphi})$ otra parametrización con coordenadas (\tilde{u}, \tilde{v}) . El plano tangente $T_p S$ está generado por las bases

$$\{\varphi_u, \varphi_v\} \quad \text{y} \quad \{\tilde{\varphi}_{\tilde{u}}, \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}\}.$$

Usando la transformación $\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}$, de modo que

$$(u, v) = (u(\tilde{u}, \tilde{v}), v(\tilde{u}, \tilde{v})),$$

se tiene que estas bases están relacionadas mediante la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_{\tilde{u}} \\ \tilde{\varphi}_{\tilde{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_u \\ \varphi_v \end{pmatrix}.$$

Consecuentemente, si el Jacobiano de la función de transición

$$\frac{D(u, v)}{D(\tilde{u}, \tilde{v})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{vmatrix}$$

es positivo, entonces las bases $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ y $\{\tilde{\varphi}_{\tilde{u}}, \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}\}$ tendrán la misma orientación.

DEFINICIÓN 2.20. Sea S una superficie diferenciable abstracta. S es **orientable** si y sólo si existe una estructura diferenciable $\{(U_i, \varphi_i)\}$ de S tal que para cada i, j tal que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, ocurre que el Jacobiano de $\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j$ es positivo. La familia $\{(U_i, \varphi_i)\}$ se llamará una **orientación** para S . En caso de no existir tal estructura, S se llamará **no orientable**.

El siguiente resultado para superficies diferenciables abstractas tiene una prueba completamente análoga al Lema 3.4 en [16].

LEMA 2.21. *Sea S una superficie diferenciable que puede ser cubierta con dos parametrizaciones (U, φ) y $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$. Si $U \cap \tilde{U} \subset S$ es un conjunto conexo en S , entonces S es una superficie orientable.*

Damos otra definición de orientabilidad utilizando los llamados sistemas de referencia.

DEFINICIÓN 2.22. Si $p \in S$, un **sistema de referencia** en una vecindad U de p es una pareja de campos vectoriales $\{\xi, \eta\}$ de tal manera que en cada punto $q \in U$, $\{\xi(q), \eta(q)\}$ es una base de $T_q S$.

OBSERVACIÓN 2.23. Los campos ξ y η son diferenciables en U , por tanto continuos. Podemos decir entonces que la clase de equivalencia de orientación de tal sistema de referencia varía continuamente en U .

DEFINICIÓN 2.24. Una superficie S es **orientable** si y sólo si puede elegirse una clase de equivalencia de orientación de los sistemas de referencia en todo S . En caso contrario, S es **no orientable**.

Una **orientación** en una superficie orientable S consiste en la elección de una clase de equivalencia de un sistema de referencia definido en S .

El lector puede ver fácilmente que la definición 2.20 es equivalente a la definición 2.24.

Supondremos en lo que resta de esta sección que la superficie S es conexa.

Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$ una curva regular parametrizada de tal forma que $\gamma(0) = p$ y consideremos una base $\{\xi(0), \eta(0)\}$ de $T_{\gamma(0)} S$. Transportemos paralelamente los vectores de esta base a lo largo de γ hasta el punto $\gamma(1)$, obteniendo así una base $\{\xi(1), \eta(1)\}$ (véase la figura 2.12).

Tenemos el siguiente resultado que nos ayuda a identificar cuándo una superficie S es orientable.

TEOREMA 2.25. *Una superficie conexa S es orientable si y sólo si para toda curva cerrada $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$ con $\gamma(0) = \gamma(1) = p$, la clase de equivalencia de orientación de una base $\{\xi(0), \eta(0)\}$ de $T_p S$ coincide con la clase de su transporte paralelo $\{\xi(1), \eta(1)\}$.*

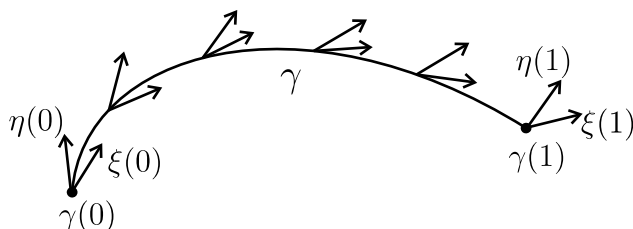


Figura 2.12: Transporte paralelo de una orientación a lo largo de γ .

Demostración. Si la superficie es orientable, existe una clase de equivalencia de orientación definida en toda la superficie. Supongamos que existe una curva cerrada $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$ con $\gamma(0) = \gamma(1) = p$ tal que las clases de equivalencia de la base $\{\xi(0), \eta(0)\}$ y de su transporte paralelo $\{\xi(1), \eta(1)\}$ difieran. Entonces a lo largo de γ , la clase de equivalencia del transporte $\{\xi(t), \eta(t)\}$ debe cambiar, o dicho de otra forma, si consideramos bases positivas (de acuerdo con la orientación de S), existe un punto de la curva donde el determinante de cambio de base entre estas bases positivas y $\{\xi(t), \eta(t)\}$ debe cambiar de signo, lo cual es una contradicción.

Recíprocamente, podemos dar una orientación de S como sigue: Fijamos un punto $p \in S$ y una base $\{\xi_0, \eta_0\}$ de $T_p S$. Para cada $q \in S$ definimos una clase de equivalencia de orientación en q como la clase del transporte paralelo de $\{\xi_0, \eta_0\}$ mediante una curva γ . Si existiera otra curva $\tilde{\gamma}$ que llevara la clase de orientación en p en una clase de orientación distinta en q , la clase de orientación de $\{\xi_0, \eta_0\}$ no coincidiría con la de su transporte paralelo a lo largo de la curva cerrada $\gamma^{-1} \cdot \tilde{\gamma}$, lo que contradice nuestra hipótesis. \square

EJEMPLO 2.26. Consideremos a la superficie \mathbb{M}^2 que se obtiene del rectángulo

$$\tilde{\Omega} = \{ (\phi, t) \mid 0 \leq \phi \leq 2\pi, -1 < t < 1 \}$$

en el plano, identificando (pegando) los puntos $(0, t)$ con $(2\pi, -t)$. Esta

superficie es llamada la **banda de Möbius** y se muestra en la figura 2.13 (para más detalles, véase el ejemplo 3.10 de [16]).

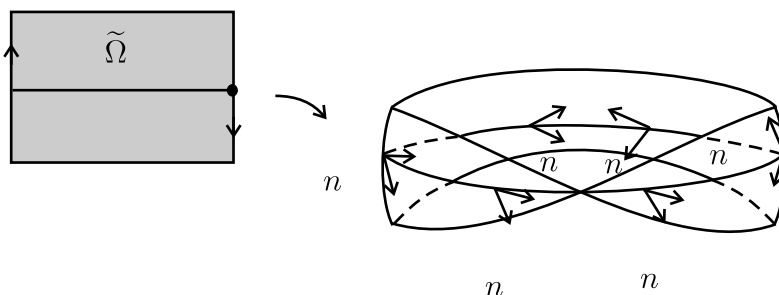


Figura 2.13: Banda de Möbius M^2 .

Consideremos la circunferencia central Γ en M^2 dada por los puntos con coordenadas $(\phi, 0)$ y un punto $p \in \Gamma$. Al deslizar un sistema de referencia en Γ iniciando en p y cerrar el circuito, vemos que la clase de orientación del sistema de referencia inicial cambia, de modo que la banda de Möbius no es orientable. \triangleright

EJEMPLO 2.27. En el ejemplo 1.4 definimos al espacio proyectivo real $\mathbb{R}P^2$ como el espacio obtenido al identificar los puntos antípodas de la frontera S^1 de un disco. Consideremos un diámetro arbitrario del disco como se muestra en la figura 2.14.

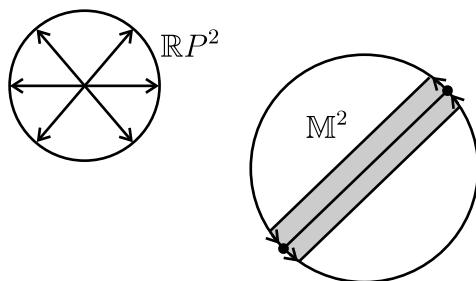


Figura 2.14: Banda de Möbius contenida en $\mathbb{R}P^2$.

Si se considera una vecindad de los extremos de este diámetro en la frontera, dada la forma de identificar los puntos en tales vecindades, existe una banda de Möbius contenida en el espacio proyectivo \mathbb{RP}^2 . Si \mathbb{RP}^2 fuese orientable, entonces es claro que cualquier subconjunto abierto también lo sería; en particular, la banda de Möbius sería orientable, lo que contradice lo establecido en el ejemplo anterior. \triangleright

2.4. Geodésicas

Sean $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable y $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ una curva diferenciable tales que $\gamma(0) = p \in S$ y $\dot{\gamma}(0) = \xi$. Podemos determinar una única curva $\tilde{\gamma} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow T_p S$ que se proyecte ortogonalmente sobre $\gamma = \gamma(t)$, de modo que el vector tangente a $\tilde{\gamma}$ sea ξ . Para construir tal curva $\tilde{\gamma}$ utilizamos las rectas normales a la superficie S que pasan por los puntos de γ y consideramos su intersección con el plano $T_p S$ (véase la figura 2.15).

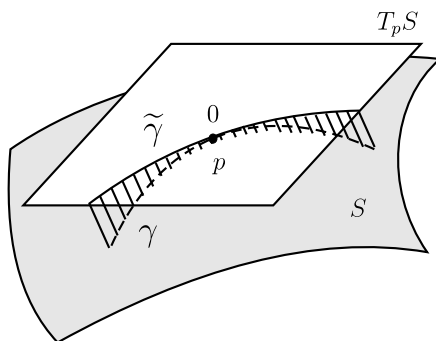


Figura 2.15: Curva γ en S y curva $\tilde{\gamma}$ en $T_p S$.

Si k es la curvatura de γ en p y k_g es la curvatura de $\tilde{\gamma}$ en 0 , entonces, por el Teorema de Euler (Teorema 3.14 de [16]) se tiene que

$$k_g = k \cos \theta$$

donde θ es el ángulo formado por los vectores normales principales m de γ en p y \tilde{m} de $\tilde{\gamma}$ en 0 .

Sean n el vector normal a la superficie S en p y $v = \dot{\gamma}/\|\dot{\gamma}\|$ el vector unitario tangente a γ . Por el Teorema de Serret-Frenet (Teorema 1.41 en [16]), si s es el parámetro por longitud de arco, se tiene que $\gamma''(s) = km(s)$ y el vector $[v(s), n]$ es paralelo al normal principal m .

En virtud de que el vector normal n es unitario se tiene entonces que

$$k_g = k \cos \theta = (\gamma'', \gamma', n),$$

donde $(')$ denota la derivada respecto a s y $(, ,)$ denota el triple producto escalar (véase la sección 1.7 de [16]).

Si se utiliza un parámetro arbitrario t , al reparametrizar la curva γ mediante $\gamma(t) = \gamma(s(t))$ se tienen las igualdades

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{ds} &= \frac{d\gamma}{dt} \frac{dt}{ds}, \\ \frac{d^2\gamma}{ds^2} &= \frac{d^2\gamma}{dt^2} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d\gamma}{dt} \frac{d^2t}{ds^2}. \end{aligned}$$

Ya que

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|\dot{\gamma}\|},$$

obtenemos la siguiente expresión para k_g con respecto de t :

$$k_g = \left(\frac{d^2\gamma}{dt^2} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d\gamma}{dt} \frac{d^2t}{ds^2}, \frac{d\gamma}{dt} \frac{dt}{ds}, n \right) = \frac{1}{\|\dot{\gamma}\|^3} (\ddot{\gamma}, \dot{\gamma}, n).$$

Para obtener la segunda igualdad se han utilizado las propiedades del triple producto escalar.

DEFINICIÓN 2.28. A la curvatura k_g de la curva $\tilde{\gamma}$ en 0 se le llama la **curvatura geodésica** de γ en p (véase la definición 3.15 de [16]).

De la expresión de la curvatura geodésica

$$k_g = \frac{1}{\|\dot{\gamma}\|^3}(\ddot{\gamma}, \dot{\gamma}, n)$$

se sigue que si se cambia la orientación de la superficie o de la curva, cambia el signo de k_g .

Ahora daremos una expresión en coordenadas para la curvatura geodésica de una curva en una superficie. Sea (U, φ) una parametrización de S con coordenadas (u, v) alrededor de p , de tal forma que la curva $\gamma = \gamma(t)$ se escribe como $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$. Entonces

$$\dot{\gamma} = \varphi_u \dot{u} + \varphi_v \dot{v} \quad \text{y} \quad \ddot{\gamma} = \varphi_{uu} \dot{u}^2 + 2\varphi_{uv} \dot{u}\dot{v} + \varphi_{vv} \dot{v}^2 + \varphi_u \ddot{u} + \varphi_v \ddot{v}.$$

Al utilizar las expresiones (2.1) de las segundas derivadas de φ en la base $\{\varphi_u, \varphi_v, n\}$ de $T_p\mathbb{R}^3$ se tiene que

$$\ddot{\gamma} = A\varphi_u + B\varphi_v + Cn,$$

donde

$$\begin{aligned} A &= \ddot{u} + \Gamma_{11}^1 \dot{u}^2 + 2\Gamma_{12}^1 \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^1 \dot{v}^2 \\ B &= \ddot{v} + \Gamma_{11}^2 \dot{u}^2 + 2\Gamma_{12}^2 \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^2 \dot{v}^2 \\ C &= L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2, \end{aligned} \tag{2.4}$$

de modo que la curvatura geodésica en las coordenadas (u, v) toma la forma

$$\begin{aligned} k_g &= \frac{1}{\|\dot{\gamma}\|^3}(\ddot{\gamma}, \dot{\gamma}, n) \\ &= \frac{1}{\|\dot{\gamma}\|^3}(A\varphi_u + B\varphi_v + Cn, \varphi_u \dot{u} + \varphi_v \dot{v}, n) \\ &= \frac{1}{\|\dot{\gamma}\|^3}(A\dot{v}(\varphi_u, \varphi_v, n) - B\dot{u}(\varphi_u, \varphi_v, n)) \\ &= \frac{(\varphi_u, \varphi_v, n)}{\|\dot{\gamma}\|^3}(A\dot{v} - B\dot{u}) \\ &= \frac{\sqrt{EG - F^2}}{(E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2)^{3/2}}(A\dot{v} - B\dot{u}). \end{aligned}$$

EJEMPLO 2.29. Ahora calcularemos la expresión de la curvatura geodésica para curvas en superficies parametrizadas con coordenadas ortogonales.

Como $F = 0$, podemos utilizar el sistema (1.5) para obtener

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{E_u}{2E}, \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{E_v}{2E}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{G_u}{2E},$$

y

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{E_v}{2G}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{G_u}{2G}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{G_v}{2G}.$$

Al sustituir en las expresiones (2.4) se tiene que

$$\begin{aligned} A &= \ddot{u} + \frac{E_u}{2E}\dot{u}^2 + \frac{E_v}{E}\dot{u}\dot{v} - \frac{G_u}{2E}\dot{v}^2, \\ B &= \ddot{v} - \frac{E_v}{2G}\dot{u}^2 + \frac{G_u}{G}\dot{u}\dot{v} + \frac{G_v}{2G}\dot{v}^2. \end{aligned}$$

En este caso, la expresión para la curvatura geodésica queda

$$k_g = \frac{\sqrt{EG}}{(E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2)^{3/2}}(A\dot{v} - B\dot{u}).$$

Si s es el parámetro por longitud de arco, la fórmula anterior se reduce a la expresión

$$k_g = \sqrt{EG}(Av' - Bu'). \quad (2.5)$$

Utilizaremos esta expresión más adelante. ▷

Consideremos una recta en \mathbb{R}^2 dada por $\gamma(t) = p + t\xi$, pasando por el punto p y en dirección del vector $\xi = \dot{\gamma}(t)$. Entonces

$$\frac{d\dot{\gamma}}{dt}(t) \equiv 0;$$

por lo tanto, la derivada covariante a lo largo de $\gamma(t)$ se anula, es decir,

$$\frac{D\dot{\gamma}}{dt}(t) \equiv 0;$$

Por otro lado, la curvatura geodésica k_g también se anula en cada punto. Si utilizamos coordenadas cartesianas para escribir

$$\gamma(t) = (u(t), v(t)) = (p_1 + t\xi^1, p_2 + t\xi^2)$$

entonces $\ddot{u} = 0$, $\ddot{v} = 0$ y $E = G = 1$, $F = 0$, de donde se sigue nuestra afirmación. De esta forma, una “geodésica” clásica de \mathbb{R}^2 (es decir, una línea recta) satisface que la derivada covariante de su campo vectorial tangente se anula o bien que su curvatura geodésica se anula. Esto da la pauta para definir lo que es una geodésica para el caso general de una superficie S .

DEFINICIÓN 2.30. Una curva $\gamma = \gamma(t)$ contenida en una superficie S es una **geodésica** si la derivada covariante de su campo vectorial tangente se anula; es decir, si

$$\frac{D\dot{\gamma}}{dt}(t) \equiv 0$$

para todo $t \in I$.

En un sistema de coordenadas definido por una parametrización (U, φ) , esto se escribe

$$\frac{D\dot{\gamma}}{dt}(t) = A\varphi_u + B\varphi_v$$

donde A, B están dados en (2.4).

Si la curva γ es una geodésica, entonces

$$0 = \frac{D\dot{\gamma}}{dt}(t) = A\varphi_u + B\varphi_v$$

implica que $A = B = 0$, y consecuentemente, la curvatura geodésica $k_g = 0$.

El siguiente resultado caracteriza una curva geodésica de diversas formas.

TEOREMA 2.31. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *La curva γ es una geodésica en S .*
2. *El campo vectorial $\xi(t) = \dot{\gamma}(t)$ es paralelo a lo largo de γ .*
3. *Dado un sistema de coordenadas, la curva $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ satisface el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden*

$$\begin{aligned} \ddot{u} + \Gamma_{11}^1 \dot{u}^2 + 2\Gamma_{12}^1 \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^1 \dot{v}^2 &= 0, \\ \ddot{v} + \Gamma_{11}^2 \dot{u}^2 + 2\Gamma_{12}^2 \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^2 \dot{v}^2 &= 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Demostración. La equivalencia entre los incisos (1) y (2) se sigue directamente de la definición.

Para ver que (1) y (3) son equivalentes basta observar que para una parametrización (U, φ) ,

$$\begin{aligned} \frac{D\dot{\gamma}}{dt} &= (\ddot{u} + \Gamma_{11}^1 \dot{u}^2 + 2\Gamma_{12}^1 \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^1 \dot{v}^2)\varphi_u \\ &\quad + (\ddot{v} + \Gamma_{11}^2 \dot{u}^2 + 2\Gamma_{12}^2 \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^2 \dot{v}^2)\varphi_v \\ &= A\varphi_u + B\varphi_v, \end{aligned}$$

por lo que $A = B = 0$ si y sólo si $D\dot{\gamma}/dt = 0$. □

OBSERVACIÓN 2.32. Observemos que el hecho de que el campo $\dot{\gamma}$ sea paralelo implica que la rapidez $\|\dot{\gamma}(t)\|$ de la curva sea constante, lo cual ocurre si y sólo si el parámetro t es proporcional a la longitud de arco s . Si $\|\dot{\gamma}(t)\|$ se anula idénticamente, la curva es constante; en caso contrario, la curva γ es regular.

COROLARIO 2.33. *Sea S una superficie en \mathbb{R}^3 . Una curva regular $\gamma : [0, \ell] \rightarrow S$ parametrizada por longitud de arco es una geodésica si y sólo si $\gamma''(s)$ está en la dirección del vector normal a la superficie en cada punto. En otras palabras, una curva geodésica en S cumple que su normal principal m en cada punto está en la dirección del normal a la superficie (véase la figura 2.16).*

Demostración. Si γ es una geodésica entonces $D\dot{\gamma}/dt \equiv 0$, lo que implica que

$$\text{Proy}_{T_p S} \frac{d\dot{\gamma}}{dt} = 0.$$

Así, el vector $d\dot{\gamma}/dt = \ddot{\gamma}$ está en la dirección del normal n , ya que por el Teorema de Serret-Frenet, $\ddot{\gamma}$ es paralelo al normal principal. En otras palabras, $(\ddot{\gamma}, \dot{\gamma}, n)$ se anula si y solamente si el normal principal es paralelo al normal de la superficie, siempre que la curvatura $k \neq 0$. Esto prueba el corolario. \square

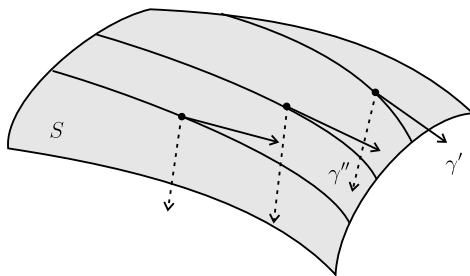


Figura 2.16: Curvas geodésicas en una superficie en \mathbb{R}^3 .

COROLARIO 2.34. *Dado un punto p en la superficie S y un vector $\xi \in T_p S$, existe un número $\epsilon > 0$ y una única curva $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ geodésica que pasa por $p = \gamma(0)$ y tal que $\dot{\gamma}(0) = \xi$.*

Demostración. Por el inciso (3) del Teorema 2.31, dado un sistema de coordenadas (u, v) , una curva geodésica $\gamma = \gamma(t)$ debe satisfacer el

sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$\begin{aligned}\ddot{u} + \Gamma_{11}^1 \dot{u}^2 + 2\Gamma_{12}^1 \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^1 \dot{v}^2 &= 0, \\ \ddot{v} + \Gamma_{11}^2 \dot{u}^2 + 2\Gamma_{12}^2 \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^2 \dot{v}^2 &= 0,\end{aligned}$$

sujeto a las condiciones iniciales $(u(0), v(0)) = p$ y $(\dot{u}(0), \dot{v}(0)) = \xi$. El teorema de existencia y unicidad de soluciones para las ecuaciones diferenciales de este tipo garantiza la afirmación (véase [5]). \square

El siguiente resultado nos muestra qué ocurre con la imagen de las curvas geodésicas bajo una isometría.

PROPOSICIÓN 2.35. *Sea $f : S_1 \rightarrow S_2$ una isometría entre las superficies diferenciables S_1 y S_2 . Si γ es una geodésica en S_1 , entonces $f \circ \gamma$ es una geodésica en S_2 .*

Demostración. Sea $f(p)$ un punto de $f \circ \gamma$, con $p \in S_1$. Si φ es una parametrización de una vecindad de p , sabemos que $f \circ \varphi$ es una parametrización de una vecindad de $f(p)$. Según la discusión posterior a la observación 1.47, los coeficientes de las métricas de S_1 y S_2 coinciden, lo que implica que los coeficientes de Christoffel con respecto de estas parametrizaciones son idénticos para ambas superficies y por lo tanto las ecuaciones de las geodésicas coinciden. Esto termina la demostración. \square

EJEMPLO 2.36. Consideremos la esfera de radio R con centro en el origen en \mathbb{R}^3 , definida por

$$\mathbb{S}_R^2 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \}.$$

Si utilizamos la parametrización (ortogonal) con coordenadas co-geográficas (ϕ, θ) , tenemos que los coeficientes de la métrica para \mathbb{S}_R^2 son

$$(g_{ij}(\phi, \theta)) = \begin{pmatrix} R^2 \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}.$$

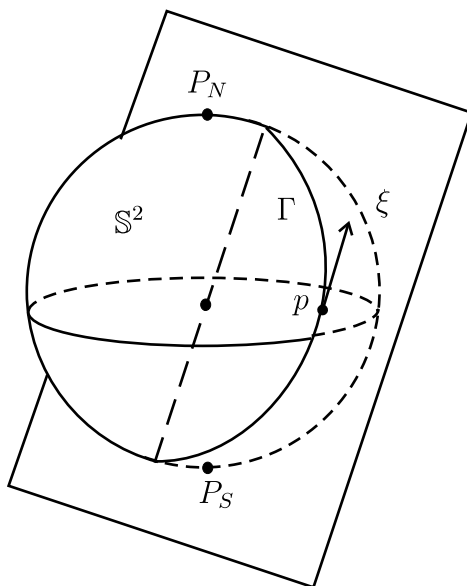


Figura 2.17: Geodésicas de una esfera de radio R .

Un cálculo directo similar al usado en el ejemplo 2.29 nos muestra que

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \cot \theta, \quad \Gamma_{11}^2 = -\operatorname{sen} \theta \cos \theta,$$

lo que implica que las ecuaciones para las geodésicas $\gamma(t) = (\phi(t), \theta(t))$ de \mathbb{S}_R^2 vienen dadas por

$$\ddot{\phi} + (2 \cot \theta) \dot{\phi} \dot{\theta} = 0, \quad \ddot{\theta} - (\operatorname{sen} \theta \cos \theta) \dot{\phi}^2 = 0.$$

Sean $p \in \mathbb{S}_R^2$ y $C \subset \mathbb{S}_R^2$ un meridiano $\gamma(s) = (\phi_0, s)$, parametrizado por la longitud de arco $s \in [0, 2\pi]$. Una sencilla sustitución muestra que $\gamma(s)$ satisface las ecuaciones anteriores, lo que implica que C es una geodésica de \mathbb{S}_R^2 .

Dado otro círculo máximo $\tilde{C} \subset \mathbb{S}_R^2$, sabemos que existe una rotación (es decir, una isometría $A \in \mathbb{SO}(3)$) tal que $A(C) = \tilde{C}$. Por la Proposición 2.35, se sigue que \tilde{C} es una geodésica. De esta forma, todo círculo máximo en \mathbb{S}_R^2 es una geodésica.

Por otro lado, sea $\Gamma \subset \mathbb{S}_R^2$ una geodésica pasando por el punto $p \in \mathbb{S}_R^2$ tal que ξ es el vector tangente a Γ en p . Consideremos el círculo máximo pasando por p , parametrizado en forma proporcional a la longitud de arco, de modo que su vector tangente coincida con ξ (véase la figura 2.17). Por la parte de unicidad del Corolario 2.34, este círculo máximo y la geodésica Γ coinciden. Esto muestra que

PROPOSICIÓN 2.37. *Las geodésicas en la esfera \mathbb{S}_R^2 son precisamente sus círculos máximos.*

Sabemos que dados dos puntos cualesquiera en un plano, existe un único segmento de geodésica que los une. En contraste, si consideramos dos puntos antípodas en la esfera, existe una infinidad de geodésicas que los une (véase la figura 2.18). \triangleright

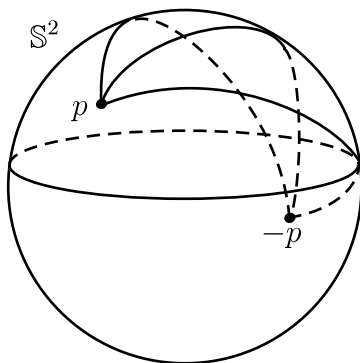


Figura 2.18: Algunas geodésicas en \mathbb{S}^2 que unen dos puntos antípodas.

EJEMPLO 2.38. Sea C el cilindro circular recto en \mathbb{R}^3 , definido por la ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

Dado un círculo obtenido al cortar a C con un plano horizontal, observamos que los normales principales a este círculo están en la dirección de los normales al cilindro. Esto dice que esta curva es una geodésica. Un caso más sencillo es el de una recta vertical contenida

en C , que también es una geodésica. Ahora daremos un argumento para determinar el resto de las geodésicas de C .

Sean $p \in C$ y Γ una geodésica en C que pasa por p . Sabemos que el cilindro C y el plano \mathbb{R}^2 son localmente isométricos (véase el ejemplo 2.45 de [16]), lo que implica que existen una vecindad U de p en C , una vecindad V de 0 en el plano y una isometría local $f : V \rightarrow U$ tal que $f(0) = p$. Sabemos entonces que existe una recta (geodésica en el plano) $\tilde{\Gamma}$ que pasa por 0 tal que $f(\tilde{\Gamma}) = \Gamma$. Si utilizamos las coordenadas (u, v) en el plano, podemos parametrizar a $\tilde{\Gamma}$ como

$$u = as, \quad v = bs, \quad a^2 + b^2 = 1.$$

Si usamos las coordenadas correspondientes (u, v) para parametrizar al cilindro, de modo que $(u, v) \mapsto (\cos u, \sin u, v)$, la curva γ se puede parametrizar como

$$x(s) = \cos(as), \quad y(s) = \sin(as), \quad z(s) = bs,$$

lo que describe una hélice en el cilindro. Claramente, de la unicidad de una geodésica por un punto con dirección dada y la proposición 2.35, se sigue que todas las hélices en el cilindro de la forma anterior son geodésicas y, recíprocamente, si una geodésica no es un círculo horizontal ni una recta vertical, entonces debe ser una hélice (véase la figura 2.19). \triangleright

EJEMPLO 2.39 (Geodésicas en una superficie de revolución). Consideremos una superficie de revolución $S \subset \mathbb{R}^3$ generada al hacer girar alrededor del eje z la curva diferenciable Γ parametrizada por

$$x = f(v), \quad z = g(v),$$

donde $v \in (a, b)$ (para más detalles, véase el ejemplo 2.22 de [16]). Entonces la parametrización local de S está dada por

$$\varphi(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v))$$

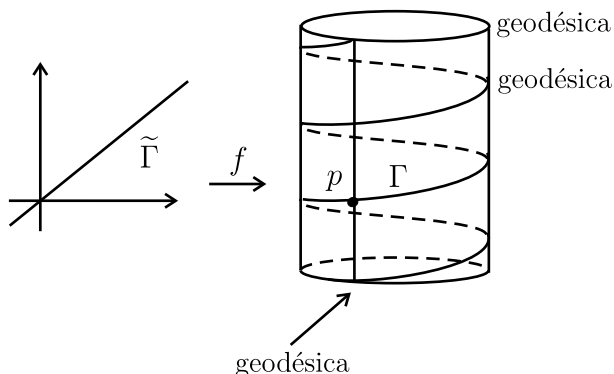


Figura 2.19: Geodésicas en el cilindro y en el plano.

donde $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (a, b)$. Los coeficientes de la métrica en estas coordenadas son

$$E = f^2, \quad F = 0 \quad \text{y} \quad G = f'(v)^2 + g'(v)^2,$$

de modo que usando el sistema (1.5) para los símbolos de Christoffel, se tiene

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 0, & \Gamma_{12}^1 &= \frac{f'f}{f^2}, & \Gamma_{22}^1 &= 0, \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{-ff'}{(f')^2 + (g')^2}, & \Gamma_{12}^2 &= 0, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2}. \end{aligned}$$

De esta forma, las geodésicas $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ en la superficie de revolución S satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \ddot{u} + 2\frac{f'f}{f^2}\dot{u}\dot{v} &= 0, \\ \ddot{v} - \frac{ff'}{(f')^2 + (g')^2}\dot{u}^2 + \frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2}\dot{v}^2 &= 0, \end{aligned}$$

donde el punto denota esta vez la derivada respecto al parámetro s .

Consideremos un meridiano $\gamma(s) = (u_0, v(s))$ en S , parametrizado por longitud de arco s . Entonces $\dot{u}(s) = \ddot{u}(s) = 0$, lo que nos indica que γ satisface la primera ecuación.

Como $\|\dot{\gamma}(s)\|^2 = g_{ij}(0, \dot{v}) = 1$ y

$$1 = g_{ij}(\dot{u}, \dot{v}) = \begin{pmatrix} 0 & \dot{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^2 & 0 \\ 0 & (f')^2 + (g')^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{v} \end{pmatrix} = [(f')^2 + (g')^2] \dot{v}^2,$$

se sigue que para el meridiano $\gamma(s)$ se cumple la igualdad

$$\dot{v}^2 = \frac{1}{(f')^2 + (g')^2}.$$

Derivando esta última igualdad respecto a s y usando el hecho que $f(v) = f(v(s))$ se obtiene

$$2\dot{v}\ddot{v} = -\frac{(2f'f''\dot{v} + 2g'g''\dot{v})}{[(f')^2 + (g')^2]^2}$$

lo que implica

$$\ddot{v} = -\frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2} \frac{1}{(f')^2 + (g')^2} = -\frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2} \dot{v}^2.$$

Esto demuestra que $\gamma(s)$ satisface también la segunda ecuación diferencial, de modo que todo meridiano de una superficie de revolución es una geodésica.

Consideremos ahora un paralelo arbitrario $\gamma(s) = (u(s), v_0)$. En este caso, $\dot{v}(s) = \ddot{v}(s) = 0$. Así, para que γ sea una geodésica se deben cumplir las ecuaciones diferenciales

$$\ddot{u} = 0 \quad \text{y} \quad -\frac{ff''}{(f')^2 + (g')^2} (\dot{u})^2 = 0.$$

Suponiendo que $\dot{u} \neq 0$, la primera ecuación dice que u debe tener la forma $u(s) = \xi s + u_0$, lo cual se cumple por estar parametrizada por

la longitud de arco. En cuanto a la segunda ecuación, como $f(v) \neq 0$ y el denominador no se anula, entonces esta ecuación se cumple para un punto $\varphi(u, v)$ si y sólo si $f'(v) = 0$.

De esta forma, para que un paralelo γ sea una geodésica es necesario que en cada punto $\varphi(u, v) \in \gamma$, se tenga que v sea un punto crítico de f (véase la figura 2.20).

Considérese $\gamma(s) = \varphi(u(s), v(s))$ una geodésica de S diferente de un meridiano y de un paralelo. Aunque no es fácil determinar una forma explícita de γ , veremos que las geodésicas de este tipo satisfacen una relación interesante.

Si se considera el campo vectorial $\varphi_u(s)$ a lo largo de $\gamma(s)$ y se denota por ϕ al ángulo entre los vectores $\dot{\gamma}$ y φ_u , entonces

$$\cos \phi = \frac{\langle \varphi_u, \dot{\gamma} \rangle}{\|\varphi_u\| \|\dot{\gamma}\|} = \frac{\langle \varphi_u, \dot{\gamma} \rangle}{\|\varphi_u\|}.$$

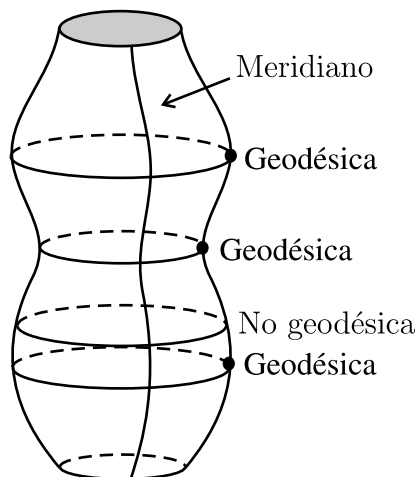


Figura 2.20: Geodésicas de una superficie de revolución.

Como $\dot{\gamma}(s) = \varphi_u \dot{u} + \varphi_v \dot{v}$ y la parametrización es ortogonal, se tiene

$$\cos \phi = \frac{\langle \varphi_u, \varphi_u \dot{u} + \varphi_v \dot{v} \rangle}{\|\varphi_u\|} = \frac{\dot{u} \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle}{\|\varphi_u\|} = \dot{u} \frac{E}{\sqrt{E}} = \dot{u} f$$

Al utilizar la primera ecuación de las geodésicas, se obtiene

$$0 = f^2 \ddot{u} + (2f f' \dot{v}) \dot{u} = \frac{d}{ds}(f^2 \dot{u})$$

lo que nos dice que $f^2 \dot{u}$ es constante.

De esta forma, $f \cos \phi = f(\dot{u} f) = \dot{u} f^2$ es constante. Si denotamos por $f(v) = r$ al radio de un paralelo, entonces concluimos el siguiente resultado.

LEMA 2.40 (Relación de Clairaut). *Si una geodésica en una superficie de revolución interseca a un paralelo de radio $r > 0$ con un ángulo ϕ , entonces*

$$r \cos \phi = \text{cte.}$$

OBSERVACIÓN 2.41. Como en el caso de la derivada covariante, la expresión para la curvatura geodésica dada en (2.5) sólo depende de la métrica y de los símbolos de Christoffel. De este modo, podemos *definir* la curvatura geodésica para una curva contenida en una superficie diferenciable abstracta, usando una parametrización (U, φ) con coordenadas (u, v) , como

$$k_g = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{(E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2)^{3/2}} (A\dot{v} - B\dot{u})$$

donde A, B, C están dados en (2.4). Es fácil ver que la definición de curvatura geodésica en una superficie no depende de la parametrización elegida. Análogamente, podemos extender el concepto de curva geodésica a estas superficies, definiéndolas como aquellas curvas que satisfacen las ecuaciones (2.6) en un sistema de coordenadas (u, v) .

EJEMPLO 2.42. Describiremos ahora las geodésicas del semiplano superior. Recordemos del ejemplo 2.15 que los símbolos de Christoffel asociados a la métrica correspondiente son

$$\Gamma_{12}^1 = -\frac{1}{y}, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{y}, \quad \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y},$$

y $\Gamma_{ij}^k = 0$ para los demás índices. De esta manera, las ecuaciones diferenciales de las geodésicas en el semiplano superior están dadas por el sistema

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{2\dot{x}\dot{y}}{y}, \\ \ddot{y} &= \frac{\dot{y}^2 - \dot{x}^2}{y}.\end{aligned}$$

Supongamos que $y = y(x)$. Se tiene entonces que

$$\frac{dy}{dx} = \dot{y} \frac{dt}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$$

lo que implica

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{\frac{\dot{y}^2 - \dot{x}^2}{y}\dot{x} - \frac{2\dot{x}\dot{y}}{y}\dot{y}}{\dot{x}^3} = -\frac{1}{y} \left(\frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2} + 1 \right) \\ &= -\frac{1}{y} \left(\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 1 \right).\end{aligned}$$

De esta forma, al denotar la derivada respecto a x mediante ($'$) se tiene

$$y'' = -\frac{1}{y}((y')^2 + 1)$$

lo que implica $yy'' + (y')^2 = -1$. Esto equivale a $(yy')' = -1$, es decir, $yy' = -x + c$.

Al integrar esta última ecuación, se tiene al fin y al cabo la relación

$$(x - c)^2 + y^2 = c^2 + k$$

la cual corresponde a una circunferencia de radio $\sqrt{c^2 + k}$ con centro en el punto $(c, 0)$, que interseca ortogonalmente al eje x . Notamos que cuando $y = 0$ (eje x) la métrica toma valores infinitos, de modo que este eje puede pensarse como una frontera ideal.

Existe otro tipo de geodésicas en el semiplano superior que se obtiene de suponer que $x = \text{cte}$. En tal caso, la ecuación diferencial que define la geodésica es $\ddot{y} = \dot{y}^2/y$, que al ser integrada nos da una solución $y(t) = Ae^{\lambda t}$. De esta forma, una recta vertical es una geodésica; parametrizada mediante $t \rightarrow (\text{cte}, Ae^{\lambda t})$, converge al eje x cuando $t \rightarrow -\infty$ y diverge a ∞ cuando $t \rightarrow \infty$.

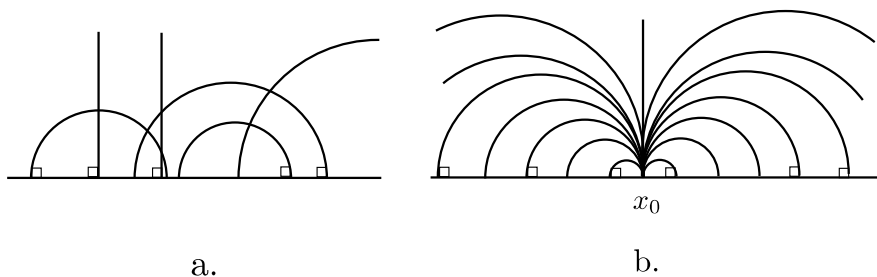


Figura 2.21: Geodésicas y geodésicas asintóticas en \mathbb{H}_+^2 .

Notamos que una línea geodésica vertical que converge a un punto $(x_0, 0)$ del eje x es tangente a una infinidad de semicircunferencias ortogonales al eje x (véase figura 2.21). Esto no contradice el teorema de unicidad de las geodésicas ya que la tangencia de esta infinidad de geodésicas se realiza en la frontera ideal $y = 0$. \triangleright

TEOREMA 2.43. *Las geodésicas del semiplano superior son semicircunferencias superiores ortogonales al eje $y = 0$ o rectas verticales.*

De la teoría de funciones holomorfas, sabemos que existe una transformación analítica del plano complejo \mathbb{C} en sí mismo que lleva el disco \mathbb{D}^2 en el semiplano superior \mathbb{H}_+^2 . De hecho, tal transformación está dada por

$$z = f(w) = \frac{1 + iw}{1 - iw}$$

(véase la figura 2.22).

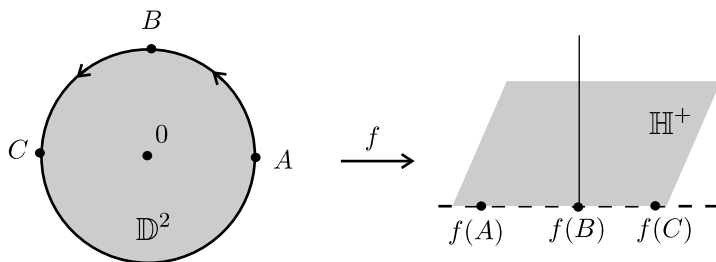


Figura 2.22: Disco de Poincaré y semiplano superior.

Esta transformación resulta ser una isometría entre el disco de Poincaré \mathbb{D}^2 y \mathbb{H}_+^2 (véase el ejercicio 17). Ya que esta transformación analítica preserva ángulos llevando circunferencias y rectas en circunferencias y rectas, se sigue el siguiente resultado.

COROLARIO 2.44. *Las geodésicas del disco de Poincaré son las partes interiores de circunferencias ortogonales a la frontera de \mathbb{D}^2 , o bien diámetros de este disco como se muestra en la figura 2.23.*

Para finalizar este capítulo obtendremos dos expresiones de la curvatura geodésica, como consecuencia del ejemplo 2.29.

PROPOSICIÓN 2.45. *Sea S una superficie dotada de una parametrización ortogonal, con coordenadas (u, v) . Si $\gamma(s) = \varphi(u(s), v(s))$ es una curva diferenciable en la superficie S , donde s es el parámetro por longitud de arco, se tiene que*

$$k_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right) + \frac{d\phi}{ds},$$

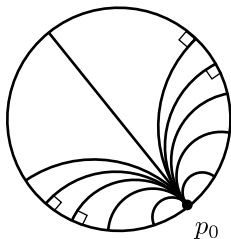


Figura 2.23: Geodésicas en el disco de Poincaré \mathbb{D}^2 .

donde ϕ es el ángulo entre el vector $\dot{\gamma}(t)$ y el vector φ_u .

Demostración. Como $\{\varphi_u, \varphi_v, n\}$ es base de $T_{\gamma(t)}S$, tenemos que

$$\gamma' = u'\varphi_u + v'\varphi_v \quad \text{y} \quad \gamma'' = A\varphi_u + B\varphi_v + Cn,$$

donde A, B, C están dados en (2.4). Por otro lado, como γ está parametrizada por longitud de arco, $1 = \|\gamma'\|^2$ y $\langle \gamma'', \gamma' \rangle = 0$, de modo que

$$1 = Eu'^2 + Gv'^2 \quad \text{y} \quad 0 = AEu' + BGv'. \quad (2.7)$$

Si ϕ es el ángulo formado por el vector φ_u y $\gamma'(t)$, entonces

$$\cos \phi = \frac{\langle \varphi_u, \gamma' \rangle}{\|\gamma'\| \|\varphi_u\|} = \frac{\langle \varphi_u, \varphi_u u' + \varphi_v v' \rangle}{\sqrt{E}} = \sqrt{E}u'.$$

Al derivar tenemos

$$-\text{sen } \phi \frac{d\phi}{ds} = \sqrt{E}u'' + \frac{1}{2\sqrt{E}}(E_u u' + E_v v')u'.$$

Observemos que

$$\text{sen } \phi = \sqrt{1 - \cos^2 \phi} = \sqrt{1 - Eu'^2} = \sqrt{G}v',$$

por la primera ecuación de (2.7), lo que indica que

$$-\frac{d\phi}{ds} = \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}v'} \left(u'' + \frac{E_u}{2E}u'^2 + \frac{E_v}{2E}u'v' \right).$$

Recordando la expresión para el coeficiente A en (2.4), tenemos que

$$\begin{aligned} -\frac{d\phi}{ds} &= \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}v'} \left(A - \frac{E_v}{E}u'v' + \frac{G_u}{2E}v'^2 + \frac{E_v}{2E}u'v' \right) \\ &= \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}v'}A + \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right). \end{aligned}$$

Para terminar la demostración debemos mostrar que la curvatura geodésica k_g es igual al primer término de la última expresión; en vista de la ecuación (2.5), debemos ver que

$$\sqrt{EG}(Av' - Bu') = \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}v'}A;$$

o, en forma equivalente, que

$$G(Av'^2 - Bu'v') = A.$$

Pero

$$G(Av'^2 - Bu'v') = AGv'^2 - BGu'v' = AGv'^2 + AEu'^2 = A,$$

donde hemos usado las ecuaciones (2.7). Esto concluye la prueba. \square

De la proposición 2.45 se tiene el siguiente corolario.

COROLARIO 2.46 (Fórmula de Liouville). *Con las hipótesis de la proposición 2.45 se tiene la siguiente igualdad:*

$$k_g = (k_g)_u \cos \phi + (k_g)_v \sin \phi + \frac{d\phi}{ds},$$

donde $(k_g)_u$ es la curvatura geodésica de las líneas asociadas al campo vectorial φ_u y $(k_g)_v$ es la curvatura geodésica de las líneas asociadas al campo vectorial φ_v .

Demostración. Sea $\gamma_u(s) = (u(s), v_0)$ una curva integral del campo vectorial φ_u . Entonces $dv/ds = 0$ y $u'(s) = 1/\sqrt{E}$, lo que implica que la curvatura geodésica $(k_g)_u$ de $\gamma_u(s)$ es

$$(k_g)_u = -\frac{E_v}{2E\sqrt{G}},$$

ya que $\phi = 0$. De igual forma, se tiene que la curvatura geodésica de la curva coordenada $\gamma_v(s) = (u_0, v(s))$ es

$$(k_g)_v = \frac{G_u}{2G\sqrt{E}}.$$

Al utilizar la fórmula de la proposición 2.45 se tiene que

$$k_g(s) = (k_g)_u \sqrt{E} \frac{du}{ds} + (k_g)_v \sqrt{G} \frac{dv}{ds} + \frac{d\phi}{ds}.$$

Por otro lado, de la definición del producto escalar obtenemos

$$\begin{aligned} \sqrt{E} \frac{du}{ds} &= \left\langle \gamma'(s), \frac{\varphi_u}{\sqrt{E}} \right\rangle = \|\gamma'(s)\| \left\| \frac{\varphi_u}{\sqrt{E}} \right\| \cos \phi = \cos \phi, \\ \sqrt{G} \frac{dv}{ds} &= \left\langle \gamma'(s), \frac{\varphi_v}{\sqrt{G}} \right\rangle = \|\gamma'(s)\| \left\| \frac{\varphi_v}{\sqrt{G}} \right\| \sin \phi = \sin \phi. \end{aligned}$$

De esta manera, al sustituir en la última igualdad se llega a la expresión

$$k_g(s) = (k_g)_u \cos \phi + (k_g)_v \sin \phi + \frac{d\phi}{ds},$$

lo que termina la prueba del corolario. \square

Ejercicios

1. Sean S una superficie diferenciable en \mathbb{R}^3 y $\xi = \xi(t)$ un campo vectorial diferenciable unitario a lo largo de una curva suave $\gamma : [a, b] \rightarrow S$, $t \in [a, b]$.

- a) Demuestre que para cada punto $\gamma(t)$ existe un número real $\lambda = \lambda(t)$ tal que

$$\frac{D\xi}{dt} = \lambda[\eta, \xi]$$

donde $n = n(t)$ es el vector normal a S en $\gamma(t)$ y los corchetes indican el producto vectorial.

- b) Demuestre que $\lambda(t) = k_g(t)$ en el punto $\gamma(t)$.

2. Demuestre que la curvatura geodésica en cada punto de una línea asintótica es igual a su curvatura (véase la sección 3.7 de [16]).
3. Demuestre que la derivada covariante de un campo vectorial a lo largo de una curva parametrizada no depende de la extensión del campo (véase la observación 2.3).
4. Sean S una superficie diferenciable y $\xi(t)$, $\eta(t)$ campos vectoriales diferenciables a lo largo de la curva $\gamma : [a, b] \rightarrow S$, $t \in [a, b]$. Demuestre que

$$\frac{d}{dt} \langle \xi(t), \eta(t) \rangle = \left\langle \frac{D\xi}{dt}, \eta(t) \right\rangle + \left\langle \xi(t), \frac{D\eta}{dt} \right\rangle.$$

5. Demuestre que el lema 2.8 es válido para superficies abstractas.
6. Demuestre que la definición 2.20 es equivalente a la definición 2.24.
7. Demuestre que la botella de Klein \mathbb{K}^2 no es orientable (véase el ejercicio 10c del capítulo 1).
8. Demuestre que la banda de Möbius infinita $\mathbb{M}^2(\infty)$ no es orientable (véase el ejercicio 11 del capítulo 1).
9. Demuestre que el proyectivo $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ es orientable (véase el ejercicio 16 del capítulo 1).

10. Calcule la curvatura geodésica de las siguientes curvas.

- a) Una circunferencia de radio r contenida en una esfera de radio R .
- b) Una hélice $u = \text{cte.}$ del helicoido

$$\varphi(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, av)$$

donde $a > 0$.

- c) Los meridianos y paralelos de la superficie

$$\varphi(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, f(v)).$$

- d) Los paralelos del toro de revolución \mathbb{T}^2 generados al hacer girar alrededor del eje z los puntos $(a + R, 0)$ y (a, R) .

11. Demuestre que la definición de curvatura geodésica en una superficie abstracta dada en la observación 2.41 no depende de la parametrización elegida.

12. Demuestre que dada una superficie inmersa en \mathbb{R}^3 , una curva γ en S es geodésica si y sólo si la curvatura geodésica de γ se anula en cada punto: $k_g(t) \equiv 0$.

13. Halle las curvas geodésicas de las siguientes superficies:

- a) Del helicoido dado en el ejercicio 10b.
- b) Del cono circular recto (sin vértice) parametrizado por

$$\varphi(r, \phi) = (r \cos \phi \operatorname{sen} \mu, r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \mu, r \cos \mu)$$

donde $r > 0$, $\mu \in (0, \frac{\pi}{2})$.

14. Considere la superficie de revolución del ejemplo 2.39. Usando el hecho de que $\dot{u}f^2 = \text{cte} = c$, demuestre que el sistema de ecuaciones diferenciales que define a las geodésicas en tal superficie puede integrarse localmente para obtener la relación

$$F(v) = c \int \frac{1}{f(v)} \sqrt{\frac{f'(v)^2 + g'(v)^2}{f(v)^2 - c^2}} dv + \text{cte},$$

donde $u = F(v)$.

15. Utilice la parametrización del paraboloides de revolución $z = x^2 + y^2$ dada por

$$\varphi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v^2)$$

donde $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, \infty)$, la relación de Clairaut y el ejercicio 14, para demostrar que una geodésica de este paraboloides se autointerseca una infinidad de veces.

16. Sean S una superficie en \mathbb{R}^3 y $V_p \subset S$ una vecindad conexa del punto $p \in S$. Demuestre que si el transporte paralelo no depende de la curva que une a dos puntos arbitrarios q y $\tilde{q} \in V_p$, entonces la curvatura gaussiana en tal vecindad se anula.

17. Demuestre que la transformación

$$z = f(w) = \frac{1 + iw}{1 - iw}.$$

es una isometría entre el disco de Poincaré \mathbb{D}^2 y \mathbb{H}_+^2 .

18. Demuestre que si todas las geodésicas de una superficie conexa S se obtienen de su intersección con algún plano, entonces toda geodésica es línea de curvatura. Muestre además que todos los puntos de la superficie son umbílicos, lo que prueba que tal superficie es parte de un plano o de una esfera (véase la proposición 3.4 en [7]).

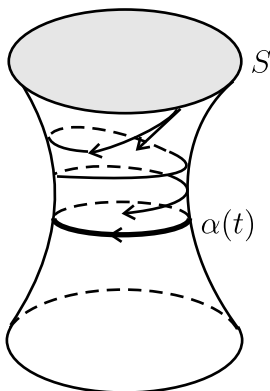


Figura 2.24: Geodésicas asintóticas en un hiperboloide.

19. Sean S el hiperboloide circular de una hoja $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, un punto $p = (x_0, y_0, z_0) \in S$ tal que $z_0 > 0$ y $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. Considere la geodésica $\gamma = \gamma(t)$ que pasa por el punto p y hace un ángulo ϕ con el meridiano por p , de tal forma que la relación de Clairaut es $r \cos \phi = 1$. Demuestre que si se toma la dirección tangente hacia abajo en tal geodésica, entonces $\gamma(t)$ converge asintóticamente a la geodésica $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, como se muestra en la figura.

CAPÍTULO 3

Superficies completas

En este capítulo definiremos la aplicación exponencial asociada a un punto p de una superficie S . Veremos que esta transformación establece una correspondencia biunívoca entre una vecindad de 0 en el plano tangente T_pS y una vecindad de p en S .

En particular, esta correspondencia nos permitirá trasladar las coordenadas usuales en el plano tangente (es decir, las coordenadas cartesianas y las polares) a los puntos cercanos a p . Utilizaremos estos sistemas de coordenadas para mostrar algunas propiedades de las geodésicas de una superficie.

La aplicación exponencial también nos permitirá definir el concepto de superficie geodésicamente completa. Básicamente, esto se refiere a la posibilidad de extender cualquier geodésica indefinidamente. Podemos decir entonces que éste es un concepto de completitud desde el punto de vista geométrico.

Por otro lado, más adelante dotaremos a una superficie S de un concepto de distancia intrínseca, con el fin de dar a S una estructura de espacio métrico. Diremos entonces que S es completa si es un espacio métrico completo relativo a esta distancia (véase el apéndice B).

El resultado principal de este capítulo, el Teorema de Hopf-Rinow, mostrará la equivalencia entre los hechos de que una superficie sea geodésicamente completa y de que sea completa como espacio métrico.

3.1. La aplicación exponencial

La aplicación exponencial, que denotaremos por \exp_p , transforma una vecindad de $0 \in T_p S$ en una vecindad de p en S . Intuitivamente, el valor de \exp_p en un vector ξ se obtiene tendiendo al vector sobre S . Para esto, se considera una geodésica que parte de p en la dirección de ξ y se mide sobre ésta un segmento de longitud igual a $\|\xi\|$ (véase la figura 3.1).

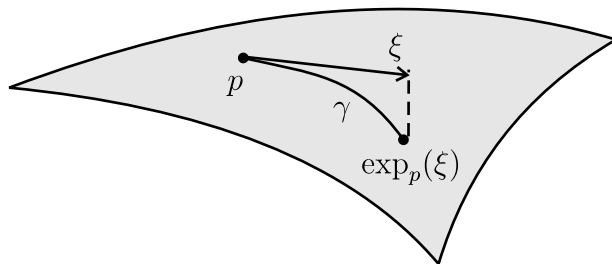


Figura 3.1: La aplicación exponencial.

Para formalizar esta idea necesitamos algunos resultados de la teoría de ecuaciones diferenciales. En ese sentido, esta sección y la siguiente contienen algunas afirmaciones cuya demostración no será incluida aquí. Una magnífica referencia es [7].

Hasta ahora, hemos considerado a cada geodésica de manera individual. El primer resultado que analizaremos nos dice que dado un punto $p \in S$ podemos coleccionar todas las geodésicas que pasan por puntos cercanos a p en una sola aplicación.

TEOREMA 3.1 ([7], Teorema 1a, página 300). *Sea S una superficie y $p \in S$. Entonces existen números $\epsilon, \delta > 0$, una vecindad W de p en S y una transformación diferenciable*

$$\Gamma : (-\epsilon, \epsilon) \times U \rightarrow S,$$

donde

$$U = \{ (q, \xi) \mid q \in W, \xi \in T_p S, \|\xi\| < \delta \}$$

de modo que para cada $(q, \xi) \in U$, la curva $\Gamma(t, q, \xi)$ es la (única) geodésica que pasa por q con velocidad ξ en el instante $t = 0$. En símbolos,

$$\Gamma(0, q, \xi) = q, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(0, q, \xi) = \xi \quad \text{y} \quad \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t, q, \xi) = 0.$$

La transformación Γ se llama el **flujo geodésico** en torno de p . Como su nombre lo indica, la existencia de Γ es consecuencia del teorema de existencia del flujo asociado a una ecuación diferencial.

Intuitivamente, si recorremos una geodésica con menor velocidad, podemos lograr que su intervalo de definición sea mayor, y viceversa. Establecemos esto formalmente como sigue.

PROPOSICIÓN 3.2. *Dado un número $a > 0$, sean $\Gamma : (-\epsilon, \epsilon) \times U \rightarrow S$ la transformación dada en el Teorema 3.1 y $(q, \xi) \in U$ fijo. Entonces la curva $\alpha : (-\epsilon/a, \epsilon/a) \rightarrow S$ dada por*

$$\alpha(t) = \Gamma(at, q, \xi)$$

es la única geodésica tal que

$$\alpha(0) = q \quad \text{y} \quad \alpha'(0) = a\xi.$$

Demostración. Las igualdades $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = a\xi$ son consecuencia directa de la definición de Γ y de la regla de la cadena. Para mostrar que α es una curva geodésica, vemos que

$$\frac{D\alpha'}{dt} = a \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(at, q, \xi) = 0.$$

□

En adelante utilizaremos la notación $\gamma(t, q, \xi)$ para la geodésica que pasa por un punto q con vector velocidad ξ en el instante $t = 0$. Con esta notación, la proposición anterior dice que

$$\gamma(t, q, a\xi) = \gamma(at, q, \xi).$$

DEFINICIÓN 3.3. Supongamos que (q, ξ) es tal que la geodésica $\gamma(t, q, \xi)$ está definida para $t = 1$. La imagen de ξ bajo la **aplicación exponencial** en q , denotada por $\exp_q(\xi)$, es el punto en S dado por

$$\exp_q(\xi) = \gamma(1, q, \xi).$$

Observemos que

$$\exp_q(\xi) = \gamma(1, q, \xi) = \gamma\left(\frac{\|\xi\|}{\|\xi\|}, q, \xi\right) = \gamma\left(\|\xi\|, q, \frac{\xi}{\|\xi\|}\right).$$

La última expresión denota una geodésica con velocidad unitaria, de modo que la longitud recorrida por dicha curva en el intervalo $[0, \|\xi\|]$ es precisamente $\|\xi\|$ (véase de nuevo la figura 3.1).

OBSERVACIÓN 3.4. Los resultados anteriores garantizan que para cada $p \in S$ existe una vecindad de p en S y un número $\delta' > 0$ tal que para todo q en dicha vecindad \exp_q está definida al menos para los vectores η tales que $\|\eta\| < \delta'$. En efecto, si en la proposición 3.2 elegimos $a < \epsilon$, sabemos que la curva α correspondiente está definida para $t = 1$. Como $\alpha(t) = \gamma(t, q, a\xi)$, tenemos que la geodésica $\gamma(t, q, \eta)$ está definida para $t = 1$ si $q \in W$ y $\|\eta\| < a\delta = \delta'$. Además, \exp_q es diferenciable en una vecindad de $0 \in T_q S$, pues la transformación Γ dada en la proposición 3.1 lo es.

EJEMPLO 3.5. Consideremos el cono de la figura 3.2. En este caso, las generatrices del cono son geodésicas que no pueden extenderse más allá del vértice, lo cual indica que para cada p la aplicación exponencial no está definida en todo $T_p S$. \triangleright

El ejemplo anterior sugiere una definición.

DEFINICIÓN 3.6. Sea S una superficie y $p \in S$. Entonces

1. S es **geodésicamente completa** en p si y sólo si \exp_p está definida para cada $\xi \in T_p S$.

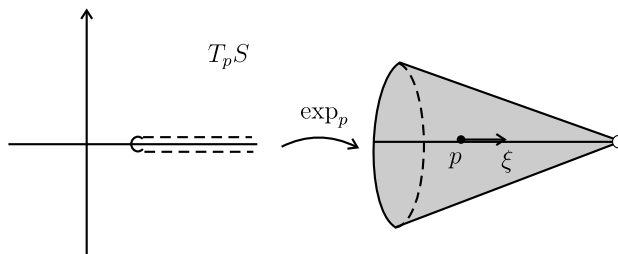


Figura 3.2: El cono y su aplicación exponencial.

2. S es **geodésicamente completa** si y sólo si es geodésicamente completa en p para todo $p \in S$.

Podemos parafrasear la definición diciendo que una superficie S es geodésicamente completa en p si y sólo si toda geodésica que pase por p se puede extender indefinidamente; es decir, tiene por dominio a todo \mathbb{R} .

EJEMPLO 3.7. Para \mathbb{R}^2 provisto de la métrica $g_{ij}(x, y) = \delta_{ij}$, la curvatura gaussiana es $K(x, y) = 0$ y los símbolos de Christoffel se anulan, lo que implica que las curvas geodésicas del plano son las rectas. Así, el plano resulta ser un espacio geodésicamente completo, ya que una recta parametrizada por longitud de arco está definida para todo valor del parámetro. \triangleright

EJEMPLO 3.8. De acuerdo a la proposición 2.37, las geodésicas de la esfera coinciden con sus círculos máximos, lo que le hace una superficie geodésicamente completa. \triangleright

EJEMPLO 3.9. En el ejemplo 2.15 presentamos al semiplano superior \mathbb{H}_+^2 . Al integrar las ecuaciones diferenciales de las geodésicas (véase el ejemplo 2.42) y hacer $y = y(x)$ se obtuvo la relación

$$(x - c)^2 + y^2 = c^2 + k$$

la cual corresponde a una circunferencia de radio $\sqrt{c^2 + k}$ con centro en el punto $(c, 0)$ y que interseca ortogonalmente al eje x . Al parametrizar

por longitud de arco, esta curva está definida en \mathbb{R} y converge a la frontera ideal.

Podemos obtener otras geodésicas en este espacio haciendo $x = \text{cte}$. En tal caso, al ser integrada la ecuación diferencial correspondiente nos da una solución $y(t) = Ae^{\lambda t}$ que converge al eje x cuando $t \rightarrow -\infty$ y diverge a ∞ cuando $t \rightarrow \infty$.

Podemos resumir este análisis en el siguiente resultado.

TEOREMA 3.10. \mathbb{H}_+^2 es geodésicamente completo.

COROLARIO 3.11. Tanto el disco de Poincaré \mathbb{D}^2 como el plano de Lobachevsky \mathbb{L}^2 son geodésicamente completos.

A continuación estudiaremos con detalle las propiedades de la aplicación exponencial.

PROPOSICIÓN 3.12. Para cada p existe una vecindad W tal que para todo $q \in W$, la aplicación exponencial \exp_q es invertible en una vecindad de $0 \in T_q S$.

OBSERVACIÓN 3.13. Observemos que para demostrar que cada aplicación \exp_q es invertible podemos aplicar el teorema de la función inversa. Formalmente, $d(\exp_q)_0 : T_0(T_q S) \rightarrow T_q S$, aunque es claro que podemos identificar $T_0(T_q S)$ con $T_q S$. Bajo esta identificación, si $\eta \in T_q S$, entonces

$$\begin{aligned} d(\exp_q)_0(\eta) &= \left. \frac{d}{dt} \exp_q(t\eta) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \gamma(1, q, t\eta) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \gamma(t, q, \eta) \right|_{t=0} = \eta, \end{aligned}$$

lo cual muestra que $d(\exp_q)_0$ es la identidad. Usamos el teorema de la función inversa para concluir que \exp_q es invertible localmente. Sin embargo, la afirmación de la proposición es un poco más fuerte, pues garantiza la existencia de toda una vecindad de cada punto $p \in S$

donde la exponencial es invertible. La demostración de este hecho depende nuevamente del teorema de la función inversa, esta vez aplicado a la transformación

$$\exp : U \rightarrow S \times S, \quad \exp(q, \xi) = (q, \exp_q(\xi)),$$

donde U es la vecindad dada en el Teorema 3.1. El único detalle a observar es que U es un conjunto de parejas (q, ξ) , donde $q \in S$ y $\xi \in T_q S$. Necesitamos una versión del teorema de la función inversa para espacios con dimensión mayor que 2. Esta versión del teorema existe y puede aplicarse en este caso, pues la diferencial de $\exp_{(0,0)}$ (donde $(0,0) \in T_q S \times T_q S$) es de nuevo la identidad. Los detalles de este argumento aparecen en [7].

EJEMPLO 3.14. En el caso de la esfera \mathbb{S}^2 , la aplicación exponencial \exp_p está definida para todo $\xi \in T_p \mathbb{S}^2$, aunque es claro que no puede ser un difeomorfismo global. \triangleright

DEFINICIÓN 3.15. Una vecindad W de $p \in S$ tal que $\exp_p : \exp_p^{-1}(W) \rightarrow W$ es un difeomorfismo se llamará una **vecindad normal** de p .

Con esta definición, podemos parafrasear la proposición 3.12 como sigue.

PROPOSICIÓN 3.16. *Para todo $p \in S$ existe un abierto W tal que es una vecindad normal de cada uno de sus puntos.*

El hecho de la existencia de vecindades normales nos permite utilizar a la aplicación exponencial como una parametrización en torno de un punto y definir algunos sistemas de coordenadas especiales.

DEFINICIÓN 3.17. Sea W una vecindad normal de $p \in S$ y $W' = \exp_p^{-1}(W)$. Entonces

1. Las **coordenadas normales** en W son las correspondientes a las coordenadas cartesianas en W' .

2. Sean $\xi \in W \setminus \{0\}$, $A' = \{t\xi \in W' \mid t \geq 0\}$ y $A = \exp_p(A')$. Las **coordenadas polares geodésicas** en $W \setminus A$ son las correspondientes a las coordenadas polares en $W' \setminus A'$ (véase la figura 3.3).

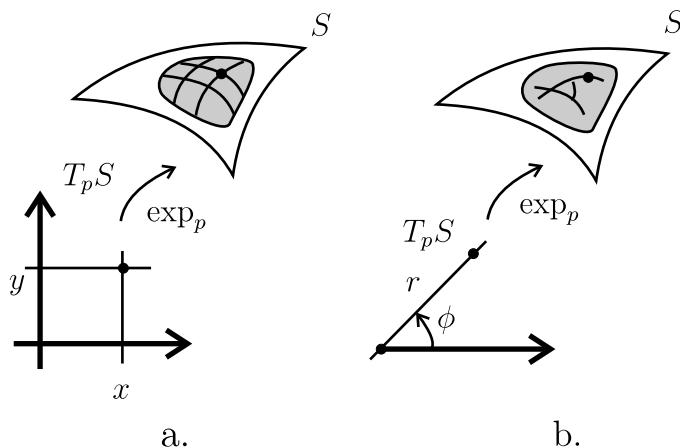


Figura 3.3: **a.** Coordenadas normales. **b.** Coordenadas polares geodésicas.

También podemos utilizar la aplicación exponencial para definir ciertos subconjuntos de S en analogía con algunos subconjuntos del plano.

DEFINICIÓN 3.18. Sea W una vecindad normal de $p \in S$ y (r, ϕ) el sistema de coordenadas polares geodésicas correspondiente. Una **geodésica radial** que parte de p es la restricción $\gamma : [0, \epsilon) \rightarrow S$ de una geodésica que pasa por p , representada en este sistema por $\phi = \text{constante}$. Un **círculo geodésico** de radio r con centro en p es la imagen bajo \exp_p de un círculo de radio r con centro en $0 \in T_p S$ y contenido en W , representada en este sistema por $r = \text{constante}$ (véase la figura 3.4).

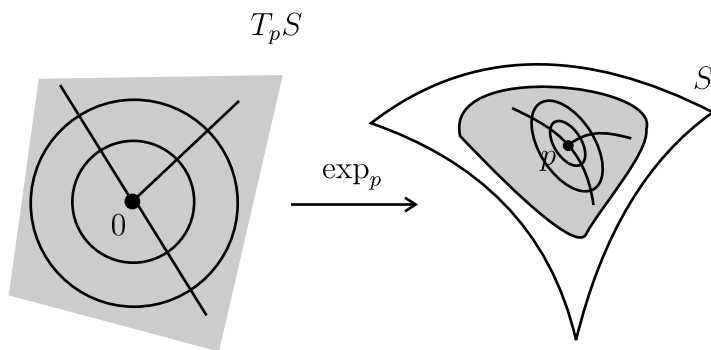


Figura 3.4: Geodésicas radiales y círculos geodésicos.

Consideremos un círculo geodésico C de radio r con centro en p . Observemos que debido a la definición de la exponencial, la distancia de p a cualquier punto de C es precisamente r . Esto justifica el nombre de círculo geodésico.

Sea W una vecindad normal de p ; es decir, $\exp_p : \exp_p^{-1}(W) \rightarrow W$ es una parametrización. Sean (r, ϕ) las coordenadas polares geodésicas con centro en $p \in S$. Entonces es fácil convencerse de que el coeficiente

$$E(r, \phi) = \left\langle \frac{\partial}{\partial r} \exp_p, \frac{\partial}{\partial r} \exp_p \right\rangle$$

de la primera forma fundamental en este sistema de coordenadas es constante e igual a 1, pues este coeficiente mide la longitud de los vectores tangentes a las curvas $\phi = \text{constante}$, es decir, las geodésicas con rapidez unitaria. De mayor interés es el siguiente resultado, que puede interpretarse como el hecho de que los círculos geodésicos son ortogonales a las geodésicas radiales.

PROPOSICIÓN 3.19 (Lema de Gauss). *Con la notación anterior, se satisface*

$$F(r, \phi) = \left\langle \frac{\partial}{\partial r} \exp_p, \frac{\partial}{\partial \phi} \exp_p \right\rangle \equiv 0.$$

Demostración. En la demostración denotaremos $\varphi = \exp_p$. Como ya hemos señalado, las curvas $\phi = \text{constante}$ son geodésicas con rapidez unitaria, de modo que

$$E = \langle \varphi_r, \varphi_r \rangle \equiv 1.$$

Si derivamos esta expresión con respecto de ϕ , tenemos que

$$\langle \varphi_r, \varphi_{r\phi} \rangle \equiv 0.$$

Por otro lado, como cada una de estas curvas es geodésica, tenemos que su derivada covariante con respecto de r se anula:

$$\frac{D}{\partial r} \varphi_r \equiv 0.$$

Ahora, si derivamos $F = \langle \varphi_r, \varphi_\phi \rangle$ con respecto de r , tenemos

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \langle \varphi_{rr}, \varphi_\phi \rangle + \langle \varphi_r, \varphi_{r\phi} \rangle = \left\langle \frac{D}{\partial r} \varphi_r, \varphi_\phi \right\rangle \equiv 0.$$

Esto nos dice que F no depende de r . Recordando la definición de φ , tenemos que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \varphi(r, \phi) = p, \quad \text{por lo que} \quad \lim_{r \rightarrow 0} \varphi_\phi = 0.$$

De este modo,

$$\lim_{r \rightarrow 0} F(r, \phi) = \lim_{r \rightarrow 0} \langle \varphi_r, \varphi_\phi \rangle = 0.$$

Como F no depende de r , tenemos que $F \equiv 0$.

□

Más adelante utilizaremos el Lema de Gauss junto con la siguiente propiedad de los coeficientes de la métrica en coordenadas polares.

PROPOSICIÓN 3.20. *Sea W una vecindad normal y (r, ϕ) las coordenadas polares geodésicas con centro en p . Sea*

$$G(r, \phi) = \left\langle \frac{\partial}{\partial \phi} \exp_p, \frac{\partial}{\partial \phi} \exp_p \right\rangle.$$

Entonces G satisface las condiciones

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{G} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r} = 1.$$

Demostración. Denotaremos $\varphi = \exp_p$. Si hacemos el cambio usual de coordenadas polares a cartesianas (normales) $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, entonces

$$\varphi_r = \cos \phi \varphi_x + \sin \phi \varphi_y, \quad \text{y} \quad \varphi_\phi = -r \sin \phi \varphi_x + r \cos \phi \varphi_y.$$

de modo que

$$G = \langle \varphi_\phi, \varphi_\phi \rangle = r^2 (\bar{E} \sin^2 \phi + \bar{G} \cos^2 \phi - 2\bar{F} \sin \phi \cos \phi),$$

donde $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ son los coeficientes de la métrica en coordenadas normales. Como $\sin \phi, \cos \phi$ son funciones acotadas y en p , $\bar{E} = \bar{G} = 1$ y $\bar{F} = 0$, se tiene que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{G} = 0.$$

Usando de nuevo la expresión anterior para G se tiene la segunda afirmación de la proposición. \square

3.2. El Teorema de Minding

El Teorema egregio de Gauss (Teorema 3.33 de [16]) prueba que si dos superficies en \mathbb{R}^3 son localmente isométricas, entonces tienen la misma curvatura en los puntos correspondientes. El ejemplo a continuación muestra que la afirmación recíproca no es válida. Esto es, que dos superficies tengan la misma curvatura alrededor de puntos correspondientes no implica que sean localmente isométricas.

EJEMPLO 3.21. Sea S_1 la superficie de revolución logarítmica en \mathbb{R}^3 , obtenida al girar la curva $x = u$, $z = \ln u$ alrededor del eje z , y cuya parametrización local está dada por

$$\varphi_1(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, \ln u)$$

definida en $(u, v) \in (0, \infty) \times (0, 2\pi)$.

Tenemos entonces que

$$(\varphi_1)_u = \left(\cos v, \operatorname{sen} v, \frac{1}{u} \right) \quad \text{y} \quad (\varphi_1)_v = (-u \operatorname{sen} v, u \cos v, 0),$$

lo que nos dice que la métrica en S_1 es

$$((g_1)_{ij}(u, v)) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{u^2} & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}.$$

El campo normal a S_1 se calcula directamente:

$$n_1 = \frac{[(\varphi_1)_u, (\varphi_1)_v]}{\|[(\varphi_1)_u, (\varphi_1)_v]\|} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}(-\cos v, -\operatorname{sen} v, u)$$

y además,

$$\begin{aligned} (\varphi_1)_{uu} &= \left(0, 0, -\frac{1}{u^2} \right), \\ (\varphi_1)_{uv} &= (-\operatorname{sen} v, \cos v, 0), \\ (\varphi_1)_{vv} &= (-u \cos v, -u \operatorname{sen} v, 0), \end{aligned}$$

lo que implica que la segunda forma fundamental de S_1 es

$$((b_1)_{ij}(u, v)) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{u\sqrt{1+u^2}} & 0 \\ 0 & \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \end{pmatrix}.$$

Consecuentemente, la curvatura en un punto (u, v) de S_1 es

$$K(u, v) = \frac{\det(b_{ij})}{\det(g_{ij})} = \frac{-\frac{1}{1+u^2}}{u^2 \left(1 + \frac{1}{u^2}\right)} = -\frac{1}{(1+u^2)^2}.$$

Por otro lado, consideremos la helicoide $S_2 \subset \mathbb{R}^3$ parametrizada mediante

$$\varphi_2(\tilde{u}, \tilde{v}) = (\tilde{u} \cos \tilde{v}, \tilde{u} \sin \tilde{v}, \tilde{v}).$$

No es difícil ver, mediante un cálculo directo, que

$$((g_2)_{ij})(\tilde{u}, \tilde{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \tilde{u}^2 \end{pmatrix}$$

es la métrica riemanniana de S_2 en cada punto $\varphi_2(\tilde{u}, \tilde{v})$ y que la curvatura está dada por

$$K(\tilde{u}, \tilde{v}) = -\frac{1}{(1 + \tilde{u}^2)^2}.$$

De esta manera, S_1 y S_2 tienen la misma curvatura en los puntos correspondientes bajo un cambio de coordenadas

$$\begin{cases} \tilde{u} = \tilde{u}(u, v) \\ \tilde{v} = \tilde{v}(u, v), \end{cases} \quad \begin{cases} u = u(\tilde{u}, \tilde{v}) \\ v = v(\tilde{u}, \tilde{v}) \end{cases}$$

Afirmamos que ni este cambio de coordenadas, ni cualquier otra aplicación de S_1 en S_2 produce una isometría entre ellas (véase el Teorema 2.43 y el Corolario 2.44 de [16]).

Una aplicación entre S_1 y S_2 que preserve la curvatura entre los puntos correspondientes deberá satisfacer la condición

$$-\frac{1}{(1 + u^2)^2} = K(u, v) = K(\tilde{u}, \tilde{v}) = -\frac{1}{(1 + \tilde{u}^2)^2}$$

es decir,

$$1 + \tilde{u}^2 = \pm(1 + u^2)$$

Ya que ambas cantidades $1 + \tilde{u}^2$ y $1 + u^2$ son positivas, entonces $1 + \tilde{u}^2 = 1 + u^2$, lo que implica que $\tilde{u} = \pm u$.

Por otro lado, la segunda coordenada \tilde{v} sería de la forma $\tilde{v} = \tilde{v}(u, v)$, donde necesariamente $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \neq 0$, pues $\frac{D(\tilde{u}, \tilde{v})}{D(u, v)} \neq 0$.

De esto obtenemos que la métrica $(g_2)_{ij}$ en S_2 toma la forma

$$(g_2)_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \tilde{u}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + u^2 \end{pmatrix}$$

de donde, el elemento de longitud de tal superficie sería

$$\begin{aligned} d\tilde{s}^2 &= d\tilde{u}^2 + (1 + \tilde{u}^2)d\tilde{v}^2 = du^2 + (1 + u^2) \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} du + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} dv \right)^2 \\ &= \left(1 + (1 + u^2) \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} \right)^2 \right) du^2 + 2(1 + u^2) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} dudv \\ &\quad + (1 + u^2) \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \right)^2 dv^2 \end{aligned}$$

De esta forma, para que la relación dada fuera una isometría sería necesario que $d\tilde{s}^2 = ds^2$, donde $ds^2 = \left(1 + \frac{1}{u^2}\right) du^2 + u^2 dv^2$ es el elemento de longitud en S_1 ; es decir, es necesario que se cumplan simultáneamente las igualdades

$$\begin{aligned} 1 + (1 + u^2) \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} \right)^2 &= 1 + \frac{1}{u^2}, \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} &= 0, \\ (1 + u^2) \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \right)^2 &= u^2. \end{aligned}$$

Debido a que $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \neq 0$, se seguiría de la segunda ecuación que $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} \equiv 0$. Esto contradiría la primera de estas ecuaciones. Por lo tanto, no es posible definir una aplicación de S_1 en S_2 tal que sea una isometría local, aún cuando las superficies tengan la misma curvatura. \triangleright

El ejemplo precedente muestra que la afirmación recíproca del Teorema egregio de Gauss no se cumple en general; sin embargo, existe

un caso importante donde es válida tal proposición, las superficies con curvatura gaussiana constante. El resultado se conoce como el Teorema de isometría local ó **Teorema de Minding**.

TEOREMA 3.22 (Minding). *Una superficie diferenciable con curvatura constante K es localmente isométrica:*

1. al plano si $K = 0$.
2. a la esfera si $K > 0$.
3. al disco de Poincaré si $K < 0$.

Demostración. Basta demostrar que cualesquiera dos superficies con la misma curvatura constante K son localmente isométricas. Sean S y \tilde{S} dos superficies con curvatura constante K en los puntos $p \in S$ y $\tilde{p} \in \tilde{S}$. Escojamos ahora bases ortonormales $\{e_1, e_2\} \subset T_p S$, $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\} \subset T_{\tilde{p}} \tilde{S}$ y consideremos una isometría lineal arbitraria $L : T_p S \rightarrow T_{\tilde{p}} \tilde{S}$ tal que $L(e_1) = \tilde{e}_1$, $L(e_2) = \tilde{e}_2$. Tomemos un sistema de coordenadas polares en $T_p S$ con eje A' y definamos $A = \exp_p(A')$, $\tilde{A} = \exp_{\tilde{p}}(L(A'))$, como se muestra en la figura 3.5.

Definamos además la aplicación $f : V_p \rightarrow V_{\tilde{p}}$ entre las vecindades normales correspondientes V_p y $V_{\tilde{p}}$ alrededor de tales puntos, mediante

$$f = \exp_{\tilde{p}} \circ L \circ \exp_p^{-1}.$$

Claramente, f será una isometría local si y sólo si los coeficientes de la métricas de S y \tilde{S} en los puntos p y \tilde{p} son los mismos en ambos sistemas de coordenadas polares (r, ϕ) . Esto implicaría también que $df_p(e_1) = \tilde{e}_1$, $df_p(e_2) = \tilde{e}_2$.

Observemos que f está definido solamente en $V_p \setminus A$ y $V_{\tilde{p}} \setminus \tilde{A}$, pero por continuidad se puede extender a las vecindades dadas.

Procedamos entonces a determinar los coeficientes de la métrica en las coordenadas (r, ϕ) . Para ello, utilizaremos el hecho de que los

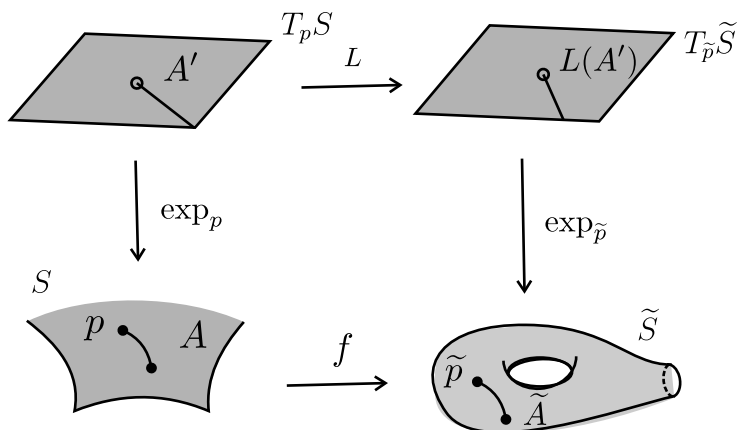


Figura 3.5: Construcción de la isometría local alrededor de p y \tilde{p} .

coeficientes de la métrica en coordenadas polares (r, ϕ) satisfacen las condiciones

$$E = 1, \quad F = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{G} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r} = 1;$$

(véase el Lema de Gauss 3.19 y la proposición 3.20).

Por otro lado, la curvatura gaussiana se escribe en términos de estas coordenadas como (véase el ejercicio 2 de este capítulo)

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial r^2}$$

o en forma equivalente, $\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial r^2} + K\sqrt{G} = 0$. Tenemos los siguientes casos.

1. $K = 0$.

En este caso la ecuación es $\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial r^2} = 0$, que al integrar nos da $\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r} = h(\phi)$, donde h es una función de ϕ . Usando las condiciones

sobre los coeficientes de la métrica, se tiene que $h(\phi) \equiv 1$. De esta forma, $\sqrt{G} = r + g(\phi)$, donde $g(\phi)$ es una función de ϕ .

Esto implica que $g(\phi) = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{G} = 0$ y consecuentemente $G = r^2$.

De esta manera, si $K = 0$, los coeficientes de la métrica son

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = r^2$$

como en el caso plano.

2. $K > 0$.

En tal caso, la solución general de la ecuación de curvatura es

$$\sqrt{G} = h(\phi) \cos(\sqrt{K}r) + g(\phi) \sin(\sqrt{K}r)$$

De acuerdo a las condiciones sobre los coeficientes, mediante un proceso análogo al del primer caso, se puede comprobar que $h(\phi) = 0$ y $g(\phi) = 1/\sqrt{K}$.

De esta manera los coeficientes de la métrica quedan

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = \frac{1}{\sqrt{K}} \sin^2(\sqrt{K}r)$$

como en el caso de una esfera.

3. $K < 0$.

En este caso, la solución general de la ecuación de curvatura es

$$\sqrt{G} = h(\phi) \cosh(\sqrt{-K}r) + g(\phi) \sinh(\sqrt{-K}r)$$

y usando las condiciones sobre los coeficientes de la métrica, tenemos que

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = \frac{1}{\sqrt{-K}} \sinh^2(\sqrt{-K}r).$$

de igual forma que en un hiperboloide.

Ya que los coeficientes son invariantes bajo f (debido a que L es una isometría lineal), se sigue de la observación 1.47 que f es una isometría local, lo que termina la prueba. \square

3.3. Geodésicas y curvas minimizantes

DEFINICIÓN 3.23. Sea $\alpha : I \rightarrow S$ una curva diferenciable por partes. α es una **curva minimizante** si para cada $t_1, t_2 \in I$, la longitud de α es menor o igual que la longitud de cualquier otra curva que una $\alpha(t_1)$ con $\alpha(t_2)$.

En esta sección analizaremos la relación entre los conceptos de curva geodésica y curva minimizante. En el siguiente resultado utilizaremos el sistema de coordenadas polares geodésicas para establecer que, al menos localmente, las geodésicas son minimizantes.

PROPOSICIÓN 3.24. *Sea S una superficie y $p \in S$. Entonces existe una vecindad W de p tal que para cada pareja $q, \tilde{q} \in W$ existe una geodésica γ en W que une q con \tilde{q} tal que*

$$\ell(\gamma) \leq \ell(\alpha),$$

donde α es cualquier otra curva que une q con \tilde{q} . La igualdad vale si y sólo si α es una reparametrización de γ . En otras palabras, $\ell(\gamma) = d(q, \tilde{q})$.

Demostración. Dado $p \in S$, la proposición 3.16 garantiza la existencia de una vecindad W de p en S que es una vecindad normal de cada uno de sus puntos. Podemos suponer que W contiene a la cerradura de una bola geodésica $B = B(q, \delta)$ para cada $q \in W$. Observemos que B es **estrellada**; es decir, para cada $\tilde{q} \in B$ existe un segmento de geodésica radial γ que une q con \tilde{q} y que está totalmente contenido en B . En este contexto, sean (r, ϕ) las coordenadas polares geodésicas definidas en $W \setminus \gamma$.

Analizaremos qué ocurre con las curvas α que unen q con \tilde{q} , clasificándolas en tres casos.

- Supongamos primero que la imagen de α está contenida en $W \setminus \gamma$. Entonces $\alpha : (0, a) \rightarrow S$ queda parametrizada por $(r(t), \phi(t))$ (véase la figura 3.6 a). Sean $\epsilon > 0$ y α_ϵ la restricción de α al intervalo $[0 + \epsilon, a - \epsilon]$.

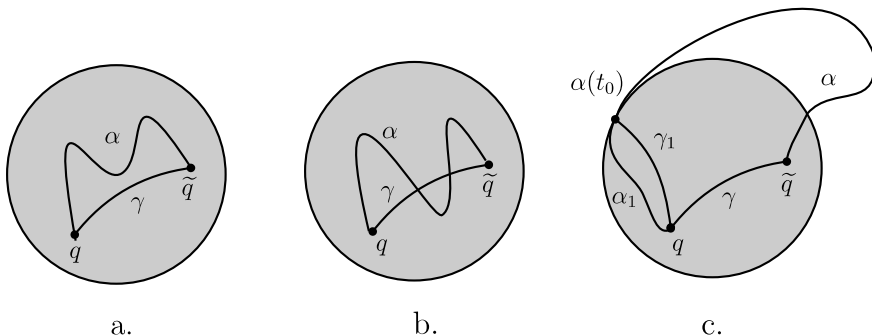


Figura 3.6: Existencia de geodésicas minimizantes.

Se cumple entonces que

$$\begin{aligned} \ell(\alpha_\epsilon) &= \int_{0+\epsilon}^{a-\epsilon} \sqrt{\dot{r}^2 + G\dot{\phi}^2} dt \geq \int_{0+\epsilon}^{a-\epsilon} |\dot{r}| dt \\ &\geq \int_{0+\epsilon}^{a-\epsilon} \dot{r} dt = r(a - \epsilon) - r(0 + \epsilon). \end{aligned}$$

Al hacer tender ϵ a 0, tenemos que

$$\ell(\alpha) \geq r(a) - r(0) = \ell(\gamma).$$

La igualdad ocurre si y sólo si $\dot{\phi} = 0$ y $\dot{r} \geq 0$; es decir, si ϕ es constante (de hecho, $\phi \equiv 0$) y $r(t)$ es una función creciente, de modo que α no es más que una reparametrización de γ .

- Supongamos ahora que la imagen de α está contenida en W , pero que α puede cortar varias veces a γ (véase la figura 3.6 b). Si la imagen de α no coincide con la imagen de γ , entonces podemos

aplicar el argumento anterior a cada uno de los subintervalos de $[0, a]$ donde las imágenes difieran. En este caso, $\ell(\alpha) > \ell(\gamma)$.

3. Finalmente, supongamos que la imagen de α sale de W , de modo que α sale de la bola B por primera vez en $\alpha(t_0)$ (véase la figura 3.6 c). Denotamos por α_1 el segmento de α que va de p a $\alpha(t_0)$. Por la primera parte de la demostración, para el punto $\alpha(t_0)$ existe una geodésica radial minimizante γ_1 . Entonces

$$\ell(\alpha) > \ell(\alpha_1) \geq \ell(\gamma_1) = \delta \geq \ell(\gamma).$$

Esto concluye la prueba. □

OBSERVACIÓN 3.25. En general, no ocurre que las geodésicas sean minimizantes en todo su dominio. Por ejemplo, las geodésicas que parten de un punto p de una esfera sólo minimizan la longitud de arco antes del punto antípoda $-p$.

Ahora veremos una especie de recíproco de la proposición anterior; a saber, que cualquier curva minimizante es necesariamente una geodésica.

PROPOSICIÓN 3.26. *Sea $\alpha : [0, a] \rightarrow S$ una curva regular, diferenciable por partes y parametrizada por longitud de arco. Si α es una curva minimizante, entonces α es una geodésica.*

Demostración. Supongamos primero que α es diferenciable en todo $[0, a]$. Mostraremos que para cada punto $p = \alpha(s_0)$, $s_0 \in (0, a)$, existe $\epsilon > 0$ tal que α es geodésica en $(s_0 - \epsilon, s_0 + \epsilon)$.

Sea W una vecindad normal de p y $q = \alpha(s) \in W$. Si γ es la geodésica radial que une p con q , entonces $\ell(\alpha) = \ell(\gamma)$ y por la proposición 3.24 las imágenes de α y γ coinciden en el intervalo (s_0, s) . Como α está parametrizada por longitud de arco, α es geodésica en (s_0, s) . Por continuidad, α es geodésica en $[s_0, s]$.

Ahora supongamos que existe una partición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = a$ de $[0, a]$ tal que α es diferenciable en cada subintervalo (t_{i-1}, t_i) . Mostraremos que α no tiene “picos” en los puntos t_i , $i = 1, \dots, k - 1$.

Sea W una vecindad de $p = \alpha(t_i)$ que es vecindad normal de cada uno de sus puntos y sea $\epsilon > 0$ tal que los puntos $q = \alpha(t_i - \epsilon)$ y $\tilde{q} = \alpha(t_i + \epsilon)$ estén en W . Sea γ la geodésica radial (minimizante) que une q con \tilde{q} . Entonces $\ell(\gamma) \leq \ell(\alpha)$ en $(t_i - \epsilon, t_i + \epsilon)$; pero por hipótesis se cumple la desigualdad $\ell(\alpha) \leq \ell(\gamma)$, de modo que la proposición 3.24 implica que las imágenes de α y γ coinciden y que α es regular en t_i . \square

3.4. Las superficies como espacios métricos

En esta sección estudiaremos a las superficies desde el punto de vista de los espacios métricos¹; es decir, definiremos una **distancia intrínseca** en una superficie S .

Recordemos que dados dos puntos p, q en \mathbb{R}^3 el segmento de recta que los une tiene la menor entre todas las longitudes de las curvas que unen estos dos puntos y además dicha longitud es la distancia (euclidiana) entre p y q .

Podemos aprovechar esta idea para una superficie conexa S . Dados dos puntos $p, q \in S$, consideremos el conjunto de todas las curvas α diferenciables por partes que unen p con q . Podemos calcular la longitud de cada una de estas curvas, que denotamos por $\ell(\alpha)$.

DEFINICIÓN 3.27. La **distancia intrínseca** entre dos puntos p, q de una superficie S es el ínfimo de las longitudes de las curvas diferenciables por partes que unen p con q ; en símbolos,

$$d(p, q) = \inf\{ \ell(\alpha) \mid \alpha \text{ une } p \text{ con } q \}.$$

¹En el apéndice B al final de esta obra incluimos las definiciones y propiedades básicas de los espacios métricos.

LEMA 3.28. *La distancia intrínseca arriba definida es realmente una distancia; es decir, satisface las propiedades establecidas en la definición B.4.*

Demostración. Es claro que d satisface las dos primeras propiedades de la definición, por lo que basta demostrar la desigualdad del triángulo,

$$d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r).$$

Sean α_{pq} una curva que une p con q y α_{qr} una curva que une q con r . Denotamos por α_{pr} a la curva definida al recorrer primero α_{pq} y luego α_{qr} . Es claro que

$$d(p, r) \leq \ell(\alpha_{pr}) = \ell(\alpha_{pq}) + \ell(\alpha_{qr}),$$

de donde

$$d(p, r) - \ell(\alpha_{qr}) \leq \ell(\alpha_{pq}).$$

Como α_{pq} es una curva arbitraria que une p con q , esto implica que

$$d(p, r) - \ell(\alpha_{qr}) \leq d(p, q).$$

Análogamente, como α_{qr} es arbitraria, obtenemos que

$$d(p, r) - d(q, r) \leq d(p, q),$$

de donde se sigue la desigualdad del triángulo. □

OBSERVACIÓN 3.29. Si una curva α que une p con q satisface $\ell(\alpha) = d(p, q)$, la proposición 3.26 implica que α es una geodésica.

DEFINICIÓN 3.30. Una superficie S es **completa** si lo es con respecto de la distancia intrínseca; es decir, si (S, d) es un espacio métrico completo.

Antes de enunciar y demostrar el resultado principal del capítulo, destacaremos en el siguiente lema el paso crucial de la demostración.

LEMA 3.31. *Dada una superficie S , si existe p tal que S es geodésicamente completa en p , entonces para todo $q \in S$ existe una geodésica γ que une p con q tal que*

$$d(p, q) = \ell(\gamma).$$

Demostración. La demostración consiste en una “buena” elección de la dirección inicial de una geodésica que parte de p con la intención de pasar por q . Sea $B(p, \delta)$ una bola con centro en p contenida en una vecindad normal de p y supongamos que $q \notin B(p, \delta)$, pues de lo contrario basta elegir una geodésica radial. Si $S(p, \delta)$ denota la frontera de $B(p, \delta)$, entonces la función $f : S(p, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(s) = d(s, q)$ es continua y $S(p, \delta)$ es compacta, de modo que f alcanza su valor mínimo en algún punto $r \in S(p, \delta)$. Sea $\gamma(t)$ la geodésica con rapidez unitaria que pasa por r . Probaremos que

$$d(p, q) = d(p, r) + d(r, q).$$

La desigualdad del triángulo garantiza que el lado izquierdo es menor o igual que el lado derecho. Para mostrar la otra desigualdad, observemos que si α es una curva que une p con q , ésta corta a $S(p, \delta)$ en algún punto que descompone a α en dos partes α_1 y α_2 . Tenemos entonces que

$$\ell(\alpha) = \ell(\alpha_1) + \ell(\alpha_2) \geq \delta + d(r, q) = d(p, r) + d(r, q).$$

Al considerar el ínfimo del lado izquierdo obtenemos la desigualdad requerida.

Afirmamos que γ es la geodésica minimizante que une p con q . Para mostrar esto, veremos que el conjunto

$$A = \{ t \in [0, d(p, q)] \mid d(\gamma(t), q) = d(p, q) - t \}$$

contiene al número $d(p, q)$, de modo que $\gamma(d(p, q)) = q$. Observemos que A es no vacío ($0 \in A$) y que por definición está acotado superiormente, de modo que $t_0 = \sup A$ existe. Como las funciones implicadas

en la definición de A son continuas, A es cerrado y por tanto $t_0 \in A$. Supondremos que $t_0 < d(p, q)$ y llegaremos a una contradicción.

Sea $p' = \gamma(t_0)$. Como en el caso de p , sea $B(p', \delta')$ una bola con centro en p' contenida en una vecindad normal de p' . Si $S(p', \delta')$ denota a la frontera de $B(p', \delta')$, entonces la función $f : S(p', \delta') \rightarrow \mathbb{R}$, $f(s) = d(s, q)$, alcanza su mínimo en un punto $r' \in S(p', \delta')$. Sea σ la geodésica con rapidez unitaria que une $\gamma(t_0)$ con r' (véase la figura 3.7).

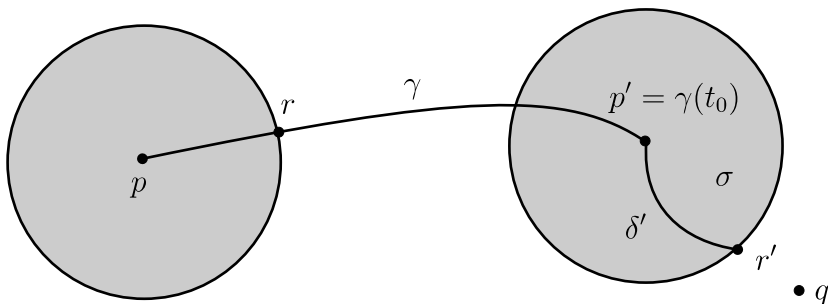


Figura 3.7: Búsqueda de una geodésica minimizante.

Con un razonamiento análogo al realizado para p ,

$$d(p', q) = d(p', r') + d(r', q) = \delta' + d(r', q).$$

Por otro lado, como $t_0 \in A$,

$$d(p', q) = d(p, q) - t_0.$$

De estas ecuaciones obtenemos que

$$d(p, q) - d(r', q) = \delta' + t_0.$$

Al aplicar la desigualdad del triángulo, obtenemos que

$$d(p, r') \geq \delta' + t_0.$$

Pero el lado derecho es precisamente la longitud de la curva $\gamma|_{[0, t_0]}$ unida a $\sigma|_{[0, \delta']}$. Así, esta curva minimiza la distancia entre p y r' , por

lo que no puede quebrarse (proposición 3.26). Esto dice que podemos extender el dominio de γ a $[0, t_0 + \delta']$. Pero entonces $r' = \gamma(t_0 + \delta')$ y

$$d(\gamma(t_0 + \delta'), q) = d(r', q) = d(p, q) - d(p, r') = d(p, q) - (t_0 + \delta'),$$

de modo que $t_0 + \delta' \in A$, lo que contradice la elección de t_0 y concluye la demostración. \square

TEOREMA 3.32 (Hopf-Rinow). *Sea S una superficie conexa en \mathbb{R}^3 . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. S es completa (como espacio métrico).
2. S es geodésicamente completa.
3. Existe p tal que S es geodésicamente completa en p .
4. **(Condición de Heine-Borel)** Todo conjunto cerrado y acotado en S es compacto.

Demostración. Supongamos que S es completa. Sea $\gamma : [0, b) \rightarrow S$ una geodésica. Queremos demostrar que γ se puede extender a b . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\|\gamma'\| = 1$. Si $\{t_i\}$ es una sucesión en $[0, b)$ tal que $t_i \rightarrow b$, entonces la sucesión $\{\gamma(t_i)\}$ es de Cauchy en (S, d) , pues

$$d(\gamma(t_i), \gamma(t_j)) \leq |t_i - t_j|$$

y $\{t_i\}$ es convergente. Como (S, d) es un espacio métrico completo, $\{\gamma(t_i)\}$ converge a algún punto $p \in S$. Es claro que si $\{t'_i\}$ es otra sucesión en $[0, b)$ tal que $t'_i \rightarrow b$, $\{\gamma(t'_i)\}$ también converge a p , pues

$$d(\gamma(t_i), \gamma(t'_i)) \leq |t_i - t'_i|.$$

Esto nos dice que γ se puede extender como $\gamma(b) = p$.

La segunda implicación es clara. Supongamos ahora que S es geodésicamente completa en p y sea Λ un conjunto cerrado y acotado

en S . Por el Lema 3.31, sabemos que para cada $q \in \Lambda$ existe una geodésica minimizante γ_q que une p con q , tal que $\ell(\gamma_q) = d(p, q)$. Por otro lado, como Λ está acotado, existe $r \in S$ tal que $d(r, q) < \delta$ para algún número $\delta > 0$. La desigualdad del triángulo implica que

$$d(p, q) \leq d(p, r) + \delta = \delta'$$

para todo $q \in \Lambda$. Esto dice que Λ está contenido en una bola $B(p, \delta')$. Pero entonces

$$\Lambda \subset \exp_p(\overline{B(0, \delta')}),$$

donde $B(0, \delta')$ es la bola con centro en 0 y radio δ' en $T_p S$. Como $\overline{B(0, \delta')}$ es un conjunto compacto y la aplicación \exp_p es continua, $K = \exp_p(\overline{B(0, \delta')})$ es un conjunto compacto. Como Λ es cerrado y $\Lambda \subset K$, Λ es compacto.

Finalmente, sea $\{p_i\}$ una sucesión de Cauchy en S . Entonces $\overline{\{p_i\}}$ es un conjunto cerrado y acotado, por tanto compacto. Esto implica que la sucesión debe tener una subsucesión convergente a un punto $p \in S$. Como la sucesión es de Cauchy, es fácil ver que toda la sucesión converge a p . \square

COROLARIO 3.33. *Una superficie compacta es completa.*

Demostración. Es claro que la condición de Heine-Borel se satisface en este caso. \square

Ejercicios

1. Demuestre que en una superficie con curvatura constante, los círculos geodésicos tienen curvatura geodésica constante.
2. Demuestre que la expresión para la curvatura gaussiana K en coordenadas polares geodésicas está dada por

$$K = -\frac{\sqrt{G_{rr}}}{\sqrt{G}},$$

donde $G(r, \phi)$ es el tercer coeficiente de la primera forma fundamental.

3. Muestre que las ecuaciones de las geodésicas en coordenadas polares geodésicas están dadas por

$$\begin{aligned} r'' - \frac{1}{2}G_r(\phi')^2 &= 0, \\ \phi'' + \frac{G_r}{G}r'\phi' + \frac{1}{2}\frac{G_\phi}{G}(\phi')^2 &= 0. \end{aligned}$$

4. Muestre que en un sistema de coordenadas normales con centro en $p \in S$, todos los símbolos de Christoffel se anulan en p .
5. Un difeomorfismo $F : S_1 \rightarrow S_2$ es una **aplicación geodésica** si y sólo si para cada curva γ geodésica en S_1 se tiene que la curva imagen $F \circ \gamma$ es una geodésica en S_2 . Muestre que si F es una aplicación geodésica conforme, entonces existe λ constante tal que para todo $p \in S_1$, $\xi, \eta \in T_p S_1$ se tiene que

$$\langle \xi, \eta \rangle_p = \lambda \langle dF_p(\xi), dF_p(\eta) \rangle_{F(p)}.$$

6. Considere el semiplano superior $\mathbb{H}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ dotado con la métrica

$$(g_{ij}(x, y)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix}$$

Demuestre que la longitud de los vectores es arbitrariamente grande cuando están próximos de la frontera de \mathbb{H}_+^2 . Demuestre que este espacio no es completo probando el hecho de que la longitud del segmento de recta vertical $(0, t)$, con $0 < t \leq 1$, tiende a 2 si $t \rightarrow 0$.

7. Sea S una superficie completa y $p \in S$. Muestre que $S \setminus \{p\}$ no es completa. En general, sea K un subconjunto no vacío, cerrado de S tal que $S \setminus K$ es conexo. Muestre que $S \setminus K$ no es completa.

8. Un **rayo geodésico** en S desde un punto $p \in S$ es una geodésica $\gamma : [0, \infty) \rightarrow S$ tal que $\gamma(0) = p$ con la propiedad de que para todo $t \in [0, \infty)$, la restricción de γ a $[0, t]$ es la geodésica minimizante entre p y $\gamma(t)$. Muestre que si S es una superficie completa conexa y no compacta, entonces para cada $p \in S$ existe un rayo desde p .
9. La **energía** E de una curva $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ está dada por

$$E(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\|^2 dt.$$

- a) Muestre que $\ell(\alpha)^2 \leq (b - a)E(\alpha)$ y que la igualdad vale si y sólo si α está parametrizada de forma proporcional a la longitud de arco.
- b) Si γ es una geodésica minimizante que une $p = \gamma(a)$ con $q = \gamma(b)$ y α es cualquier otra curva que une estos puntos, muestre que $E(\gamma) \leq E(\alpha)$ y que la igualdad vale si y sólo si α es una geodésica minimizante.

Isometrías de formas espaciales

Una **forma espacial** de dimensión 2 es una superficie conexa con curvatura gaussiana constante. El Teorema de Minding obtenido en el capítulo anterior (Teorema 3.22) garantiza que una forma espacial es localmente isométrica al plano, a la esfera \mathbb{S}^2 o bien al disco de Poincaré, dependiendo de que la curvatura sea nula, positiva o negativa, respectivamente.¹

En los capítulos anteriores analizamos estos “modelos” de superficies con detalle; ahora queremos estudiar las transformaciones que llevan cada una de estas superficies en sí misma y que preservan la métrica correspondiente; es decir, analizaremos las isometrías de estas formas espaciales.

Primero veremos qué ocurre con estas transformaciones en \mathbb{R}^n , para luego analizar el caso en que el espacio en cuestión admite cierta estructura compleja.

En el caso del disco de Poincaré, utilizaremos con frecuencia sus similares isométricos, el semiplano superior y el hiperboloide \mathbb{L}^2 .

¹Un resultado fundamental de la geometría muestra que el plano, la esfera y el disco de Poincaré son las únicas formas espaciales simplemente conexas. La demostración de este hecho puede consultarse en [2].

4.1. Difeomorfismos de \mathbb{R}^n

Comencemos con el caso $K = 0$, estableciendo algunas definiciones en el caso general de \mathbb{R}^n . Dadas dos regiones $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$, un difeomorfismo entre ellas es una transformación $\varphi : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ diferenciable con inversa $\varphi^{-1} : \Omega_2 \rightarrow \Omega_1$ diferenciable.

EJEMPLO 4.1. Considérense dos copias del plano \mathbb{R}^2 , una de las cuales está provista con coordenadas polares (r, ϕ) y la otra con coordenadas cartesianas (x, y) . Definamos los conjuntos

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \left\{ (r, \phi) \mid 0 < r < R, 0 < \phi < \frac{\pi}{2} \right\}, \\ \Omega_2 &= \left\{ (x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 < R, x, y > 0 \right\}.\end{aligned}$$

Entonces la relación de cambio de coordenadas

$$x = r \cos \phi \quad \text{y} \quad y = r \sin \phi$$

es un difeomorfismo de Ω_1 en Ω_2 , con una inversa definida mediante las reglas

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad \phi = \arctan \frac{y}{x}.$$

Esta transformación lleva el rectángulo Ω_1 en el sector circular Ω_2 (véase la figura 4.1). Los segmentos horizontales ℓ en Ω_1 son llevados en radios \mathcal{L} contenidos en Ω_2 que parten del origen. \triangleright

Observemos que un difeomorfismo $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega$ de una región en sí misma es simplemente un cambio de coordenadas en Ω . Definimos ahora el conjunto de transformaciones de una región Ω por

$$\begin{aligned}\mathfrak{Dif}(\Omega) &= \{ \varphi : \Omega \rightarrow \Omega \mid \varphi \text{ es un difeomorfismo} \} \\ &= \{ \varphi : \Omega \rightarrow \Omega \mid \varphi \text{ es un cambio de coordenadas en } \Omega \}\end{aligned}$$

LEMA 4.2. *Dada una región $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, el conjunto $\mathfrak{Dif}(\Omega)$ es un grupo no conmutativo bajo la composición de transformaciones.*

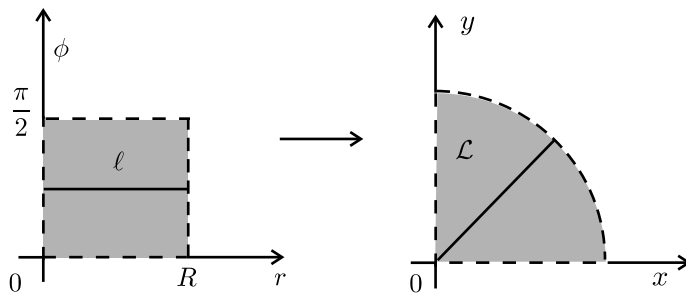


Figura 4.1: Geometría de las coordenadas polares.

Demostración. Es claro que la composición de difeomorfismos es de nuevo un difeomorfismo, lo cual implica que $\mathfrak{Dif}(\Omega)$ es cerrado bajo la composición. Además, la identidad $I : \Omega \rightarrow \Omega$ pertenece a $\mathfrak{Dif}(\Omega)$ y cada $\varphi \in \mathfrak{Dif}(\Omega)$ tiene su inverso, a saber, φ^{-1} . Las demás propiedades de grupo pueden verificarse fácilmente. En general, $\mathfrak{Dif}(\Omega)$ no es conmutativo, pues la composición de transformaciones no es conmutativa. \square

Dada una región $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, existen ciertas transformaciones en Ω que en conjunto resultan ser subgrupos de $\mathfrak{Dif}(\Omega)$.

De hecho, uno de los problemas más interesantes en las matemáticas consiste en estudiar los subgrupos de transformaciones de una región Ω e identificarlos (mediante isomorfismos de grupos) con grupos que podemos reconocer rápidamente. Esta identificación se llama una **representación del subgrupo** de transformaciones. A continuación daremos algunos ejemplos de esta situación.

EJEMPLO 4.3. Sean u^1, \dots, u^n un sistema de coordenadas cartesianas en \mathbb{R}^n y $\xi \in \mathbb{R}^n$ un vector fijo con coordenadas (ξ^1, \dots, ξ^n) . Definimos una transformación T_ξ como

$$T_\xi(u^1, \dots, u^n) = (u^1 + \xi^1, \dots, u^n + \xi^n);$$

esta transformación es una **traslación** de \mathbb{R}^n mediante el vector ξ .

Sea $T(\mathbb{R}^n) = \{ T_\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \xi \in \mathbb{R}^n \}$ el conjunto de traslaciones de \mathbb{R}^n . Si T_ξ y T_η son dos traslaciones, podemos considerar su composición, dada por

$$\begin{aligned} (T_\xi \circ T_\eta)(u) &= T_\xi(T_\eta(u)) = T_\xi(u + \eta) \\ &= (u + \eta) + \xi = u + (\eta + \xi) = T_{\eta+\xi}(u) \end{aligned}$$

donde $u = (u^1, \dots, u^n)$. Esto es, si $T_\xi, T_\eta \in T(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$T_\xi \circ T_\eta = T_{\eta+\xi} = T_{\xi+\eta} = T_\eta \circ T_\xi;$$

es decir, la composición corresponde a una suma de vectores en \mathbb{R}^n .

Para calcular el inverso de cualquier traslación se procede de la manera siguiente. Tenemos que $T_\xi \circ T_\eta = I = T_0$ si y sólo si $T_{\xi+\eta} = T_0$, lo que a su vez ocurre si y sólo si $\xi + \eta = 0$, con lo que $\eta = -\xi$ y por tanto

$$T_\xi^{-1} = T_{-\xi} \quad \circ \quad T_\xi^{-1}(u) = u - \xi.$$

De las relaciones $T_\xi \circ T_\eta = T_{\eta+\xi}$, $T_\xi^{-1} = T_{-\xi}$ se tiene que el grupo $T(\mathbb{R}^n)$ es isomorfo al grupo aditivo de vectores \mathbb{R}^n .

El isomorfismo

$$\phi : T(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

está dado por $\phi(T_\xi) = \xi$. ▷

En el ejemplo 4.3 fue explícito el isomorfismo entre el subgrupo de transformaciones y el grupo que lo representa, siendo este último más cómodo y práctico. En los siguientes ejemplos se puede seguir el mismo procedimiento.

EJEMPLO 4.4. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ un número real diferente de cero; considere la transformación $T_\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida por

$$x = T_\lambda(u) = \lambda u.$$

Para cada número real $\lambda \neq 0$, T_λ define una **homotecia** de \mathbb{R}^n .
Sea

$$H(\mathbb{R}^n) = \{ T_\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \mid T_\lambda \text{ es homotecia} \}.$$

Es claro que $H(\mathbb{R}^n)$ es un grupo bajo la composición. De hecho, si $T_\lambda, T_\mu \in H(\mathbb{R}^n)$, entonces su composición es

$$(T_\lambda \circ T_\mu)(y) = T_\lambda(T_\mu(y)) = T_\lambda(\mu y) = \lambda\mu y.$$

Esto claramente implica la igualdad

$$T_\lambda \circ T_\mu = T_{\lambda\mu} = T_{\mu\lambda} = T_\mu \circ T_\lambda;$$

es decir, $H(\mathbb{R}^n)$ es un **grupo abeliano** (conmutativo).

Para calcular la inversa de T_λ , se tiene que

$$T_\lambda \circ T_\mu = I = T_1$$

si y sólo si

$$T_1 = T_{\lambda\mu} \quad \text{o} \quad \lambda\mu = 1,$$

lo que equivale a que $\mu = 1/\lambda$, es decir,

$$T_\lambda^{-1} = T_{1/\lambda}.$$

Ya que cada número real distinto de cero define una homotecia en \mathbb{R}^n y se cumplen las igualdades

$$T_\lambda \circ T_\mu = T_{\lambda\mu} \quad \text{y} \quad T_\lambda^{-1} = T_{1/\lambda},$$

se tiene un isomorfismo entre los grupos $H(\mathbb{R}^n)$ y $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (provisto del producto de números reales) definido mediante la regla

$$T_\lambda \mapsto \lambda.$$

▷

EJEMPLO 4.5. Si $L_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal en \mathbb{R}^2 y consideramos las coordenadas respecto de la base canónica, L_A está dada por las reglas

$$\begin{cases} x^1 = au^1 + bu^2 \\ x^2 = cu^1 + du^2 \end{cases}$$

o matricialmente,

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}.$$

Es decir, L_A tiene asociada la siguiente matriz con respecto de la base canónica de \mathbb{R}^2 :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Si $L_{A'} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es otra transformación lineal que se escribe con respecto de la base canónica como

$$\begin{cases} u^1 = a'y^1 + b'y^2 \\ u^2 = c'y^1 + d'y^2 \end{cases}$$

es decir, $L_{A'}$ tiene asociada la matriz

$$A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix},$$

entonces la composición $L_A \circ L_{A'} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ está dada por

$$\begin{cases} x^1 = (aa' + bc')y^1 + (ab' + bd')y^2 \\ x^2 = (ca' + dc')y^1 + (cb' + dd')y^2 \end{cases}$$

y tal transformación tiene asociada la matriz producto

$$AA' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

es decir

$$L_A \circ L_{A'} = L_{AA'}$$

De esta forma, si se define el grupo

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^2) = \{ L_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid L_A \text{ es lineal e invertible} \},$$

se tiene que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ es isomorfo al grupo de matrices invertibles

$$\mathbb{GL}(2, \mathbb{R}) = \{ A \in M(2, \mathbb{R}) \mid \det A \neq 0 \}.$$

El isomorfismo

$$\phi : \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{GL}(2, \mathbb{R})$$

asocia a cada L_A la matriz invertible A que representa a L_A con respecto de la base canónica. De las relaciones

$$L_A \circ L_{A'} = L_{AA'} \quad \text{y} \quad L_A^{-1} = L_{A^{-1}}$$

se concluye la prueba de la afirmación.

El grupo de matrices invertibles $\mathbb{GL}(2, \mathbb{R})$ se llama el **grupo lineal general real** a dimensión 2. En general, el grupo de isomorfismos lineales

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) = \{ L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \mid L_A \text{ es isomorfismo} \}$$

se representa con el **grupo lineal general real a dimensión n**

$$\mathbb{GL}(n, \mathbb{R}) = \{ A \in M(n, \mathbb{R}) \mid \det A \neq 0 \}. \quad \triangleright$$

Otro grupo importante es el formado por transformaciones que son una composición de un isomorfismo lineal y de una traslación.

EJEMPLO 4.6. Sean $A \in \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ una matriz invertible y $\xi \in \mathbb{R}^n$ un vector arbitrario. Denotemos por

$$L_{(A, \xi)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

la transformación dada por $L_{(A,\xi)}(x) = Ax + \xi$.

Si (B, η) es otra pareja de una matriz invertible y un vector, que caracteriza a la transformación $L_{(B,\eta)}(y) = By + \eta$, entonces la composición de ambas está dada por

$$\begin{aligned} L_{(B,\eta)} \circ L_{(A,\xi)}(u) &= L_{(B,\eta)}(Au + \xi) = B(Au + \xi) + \eta \\ &= BAu + (B\xi + \eta) = L_{(BA, B\xi + \eta)}(u); \end{aligned}$$

en otras palabras, tal composición genera una operación producto en el conjunto

$$G = \{(A, \xi) \mid A \in \mathbb{GL}(n, \mathbb{R}), \xi \in \mathbb{R}^n\}$$

mediante la regla

$$(B, \eta)(A, \xi) = (BA, B\xi + \eta).$$

El conjunto G junto con este producto recibe el nombre de **producto semidirecto**. Es claro que el elemento identidad en tal producto G está dado por $(I, 0)$, donde I es la matriz identidad. Así, para calcular el inverso del elemento (A, ξ) , denotado por (B, η) es necesario que

$$(I, 0) = (B, \eta)(A, \xi) = (BA, B\xi + \eta)$$

o de manera equivalente $BA = I$, $B\xi + \eta = 0$, lo que nos lleva a que $B = A^{-1}$ y $\eta = -B\xi$. En consecuencia,

$$(A, \xi)^{-1} = (A^{-1}, -A^{-1}\xi).$$

Por esto, para la transformación $L_{(A,\xi)}$ se tiene que su inversa está definida mediante

$$L_{(A,\xi)}^{-1} = L_{(A^{-1}, -A^{-1}\xi)}$$

De esta manera, el grupo de transformaciones de \mathbb{R}^n

$$F = \{L_{(A,\xi)}(x) = Ax + \xi \mid A \in \mathbb{GL}(n, \mathbb{R}), \xi \in \mathbb{R}^n\}$$

cuyos elementos son composición de un isomorfismo y una traslación, es isomorfo al grupo G provisto con la operación mencionada. \triangleright

Los ejemplos aquí mencionados son sencillos. En general, el problema de representar a un grupo particular de transformaciones de una región es difícil. Nos ocuparemos más adelante de este tipo de problemas para grupos de transformaciones que preservan ciertas características geométricas de una región.

4.2. Isometrías de \mathbb{R}^n

Caracterizamos en esta parte al grupo de transformaciones que preservan la longitud (distancia) en el espacio euclidiano \mathbb{R}^n .

DEFINICIÓN 4.7. Sea $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal.

1. L es una **isometría lineal** de \mathbb{R}^n si y sólo si preserva la norma de los vectores; esto es, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\|L(\xi)\| = \|\xi\|$$

2. L **preserva el producto escalar euclidiano** si y sólo si para toda pareja de vectores $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\langle L(\xi_1), L(\xi_2) \rangle = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle. \quad (4.1)$$

LEMA 4.8. *Una isometría lineal L preserva el producto escalar euclidiano. Recíprocamente, si una transformación lineal preserva el producto escalar euclidiano entonces es una isometría lineal.*

Demostración. La primera afirmación se sigue de las igualdades

$$\begin{aligned} 2 \langle L(\xi_1), L(\xi_2) \rangle &= \langle L(\xi_1) - L(\xi_2), L(\xi_1) - L(\xi_2) \rangle \\ &\quad - \langle L(\xi_1), L(\xi_1) \rangle - \langle L(\xi_2), L(\xi_2) \rangle \\ &= \|L(\xi_1) - L(\xi_2)\|^2 - \|L(\xi_1)\|^2 - \|L(\xi_2)\|^2 \\ &= \|L(\xi_1 - \xi_2)\|^2 - \|L(\xi_1)\|^2 - \|L(\xi_2)\|^2 \\ &= \|\xi_1 - \xi_2\|^2 - \|\xi_1\|^2 - \|\xi_2\|^2 \\ &= \langle \xi_1 - \xi_2, \xi_1 - \xi_2 \rangle - \langle \xi_1, \xi_1 \rangle - \langle \xi_2, \xi_2 \rangle \\ &= 2 \langle \xi_1, \xi_2 \rangle \end{aligned}$$

La otra afirmación es inmediata. \square

Sea $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal que preserva el producto escalar euclidiano, que se escribe como $L(\xi) = A\xi$. Entonces la relación $\langle L(\xi), L(\eta) \rangle = \langle \xi, \eta \rangle$ se cumple para toda pareja de vectores en \mathbb{R}^n si y solamente si

$$\eta^T \xi = (A\eta)^T A\xi = \eta^T A^T A\xi = \eta^T (A^T A)\xi$$

Por lo tanto, L es una isometría de \mathbb{R}^n si

$$I = A^T A = A A^T.$$

La matriz A cumple que $\det(A^T A) = 1$, es decir, $(\det A)^2 = 1$, lo que implica que $\det A = \pm 1$. En particular, A es invertible; es decir, $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$.

DEFINICIÓN 4.9. Una matriz $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ tal que

$$A^T A = I$$

se llamará **ortogonal**. Al conjunto de matrices

$$\mathbb{O}(n) = \{A \in \text{GL}(n, \mathbb{R}) \mid A^T A = I\}$$

se le llama el **grupo ortogonal** a dimensión n .

Una matriz $A \in \mathbb{O}(n)$ es **propia** si y sólo si $\det A = 1$. El conjunto de matrices ortogonales propias se llama el **grupo especial ortogonal** a dimensión n y se le denota por $\mathbb{SO}(n)$; esto es,

$$\mathbb{SO}(n) = \{A \in \mathbb{O}(n) \mid \det A = 1\}.$$

OBSERVACIÓN 4.10. $\mathbb{SO}(n)$ es un subgrupo normal de $\mathbb{O}(n)$.

OBSERVACIÓN 4.11. La condición $A^T A = I$ implica que los vectores columna de la matriz A conforman una base ortonormal de \mathbb{R}^n .

Si consideramos el epimorfismo entre los grupos $\mathbb{O}(n)$ y $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$ definido por el determinante

$$\det : \mathbb{O}(n) \rightarrow \mathbb{Z}_2,$$

entonces su núcleo es $\ker(\det) = \mathbb{SO}(n)$. Por el primer teorema de isomorfismo de grupos se tiene

$$\frac{\mathbb{O}(n)}{\mathbb{SO}(n)} \cong \mathbb{Z}_2,$$

lo que nos dice que $\mathbb{O}(n)$ es topológicamente una unión disconexa de dos copias de $\mathbb{SO}(n)$. Además, ya que $\mathbb{SO}(n)$ es conexo, entonces

$$\dim \mathbb{SO}(n) = \dim \mathbb{O}(n).$$

Pasamos ahora a la definición general formal de una **isometría** del espacio euclidiano \mathbb{R}^n imponiendo la condición (4.1) sobre la derivada de la transformación en cada punto. Conviene que el lector compare esto con la definición anterior de isometría para superficies (véase la definición 1.44).

DEFINICIÓN 4.12. Un difeomorfismo $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega$ de la región $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, se llamará una **isometría** de Ω , cuando para cada punto $p \in \Omega$ se cumpla que

$$\langle d\varphi_p(\xi), d\varphi_p(\eta) \rangle = \langle \xi, \eta \rangle. \quad (4.2)$$

para cualesquiera $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$.

En términos de coordenadas, si la transformación φ tiene la forma $x^i = x^i(u^1, \dots, u^n)$, $i = 1, \dots, n$ y

$$A = \left(\frac{\partial x^s}{\partial u^r} \right)$$

es la matriz Jacobiana de la transformación φ en el punto p , entonces φ es una isometría en Ω si y sólo si $I = A^T A$ para cada $p \in \Omega$; es decir,

$$(\delta_{ij}) = \sum_{k,l=1}^n \left(\frac{\partial x^k}{\partial u^i} \right)_p \delta_{kl} \left(\frac{\partial x^l}{\partial u^j} \right)_p,$$

donde $(\delta_{ij}) = I$ es la matriz identidad.

Un resultado importante y evidente es el siguiente.

LEMA 4.13. *Dada una región $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ provista con el producto escalar euclidiano, el conjunto de isometrías de Ω es un grupo bajo la operación de composición.*

El siguiente lema nos dice que las isometrías de \mathbb{R}^n que dejan fijo al origen son necesariamente lineales.

LEMA 4.14. *Si $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una isometría tal que $\varphi(0) = 0$, entonces es una transformación lineal.*

Demostración. Sea $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$ un vector arbitrario en la base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$; esto es,

$$\xi = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i = \sum_{i=1}^n \langle \xi, e_i \rangle e_i$$

Así, si $f_i = \varphi(e_i)$, entonces $\{f_i\}_{i=1}^n$ es una base ortonormal de \mathbb{R}^n , ya que φ es una isometría.

De aquí que las coordenadas de $\varphi(\xi)$ con respecto de esta base sean $\varphi(\xi)^i = \langle \varphi(\xi), f_i \rangle$. Pero

$$\langle \varphi(\xi), f_i \rangle = \langle \varphi(\xi), \varphi(e_i) \rangle = \langle \xi, e_i \rangle,$$

pues φ es isometría. Por lo tanto,

$$\varphi(\xi) = \sum_i \langle \varphi(\xi), f_i \rangle f_i = \sum_i \langle \xi, e_i \rangle f_i = \sum_i \xi^i f_i$$

es decir, las coordenadas de $\varphi(\xi)$ respecto a la base $\{f_i\}$ son iguales a las coordenadas de ξ en la base $\{e_i\}$.

Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$; entonces la i -ésima coordenada de $\lambda\eta + \mu\xi$ es $\lambda\eta^i + \mu\xi^i$, con lo que

$$\varphi(\lambda\eta + \mu\xi) = \sum_i (\lambda\eta^i + \mu\xi^i) f_i = \lambda \sum_i \eta^i f_i + \mu \sum_i \xi^i f_i = \lambda\varphi(\eta) + \mu\varphi(\xi)$$

lo que prueba la linealidad de φ . \square

El siguiente resultado simplifica el cálculo del grupo de isometrías de \mathbb{R}^n .

TEOREMA 4.15. *Si $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una isometría, entonces existen una traslación $T_\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y una transformación lineal ortogonal $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tales que*

$$\varphi = T_\xi \circ L.$$

Demostración. Sea $T_\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una traslación tal que $T_\xi^{-1}(\varphi(0)) = 0$, entonces $L = T_\xi^{-1} \circ \varphi$ es una isometría, pues T_ξ es una isometría, y φ lo es también. Pero $L(0) = (T_\xi^{-1} \circ \varphi)(0) = T_\xi^{-1}(\varphi(0)) = 0$, lo que nos dice que L es una isometría lineal por el Lema 4.14. Esto concluye la prueba, pues la matriz de L ha de ser ortogonal. \square

De esta forma, una isometría φ de \mathbb{R}^n tiene la forma

$$\varphi(u) = Au + \xi,$$

donde $A \in \mathbb{O}(n)$ y $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Caracterizamos ahora las isometrías del plano \mathbb{R}^2 utilizando los resultados anteriores.

Una isometría lineal del plano $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tiene una matriz asociada del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{O}(2).$$

La condición de ortogonalidad de A es que $A^T A = I$, o en forma equivalente,

$$\begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esto es, la matriz A está asociada a una isometría de \mathbb{R}^2 si y sólo si sus coeficientes satisfacen las condiciones de ortonormalidad

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 &= 1 \\ ab + cd &= 0 \\ b^2 + d^2 &= 1 \end{aligned}$$

Ya que $a^2 + c^2 = 1$, hacemos $a = \cos \phi$, $c = \sin \phi$, y tenemos dos posibilidades para la pareja b, d :

$$\begin{cases} d = \cos \phi \\ b = -\sin \phi \end{cases}$$

o

$$\begin{cases} d = -\cos \phi \\ b = \sin \phi \end{cases}$$

En otras palabras, la matriz A tiene la forma

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

o bien

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ \sin \phi & -\cos \phi \end{pmatrix}$$

donde el determinante de la primera matriz es 1, mientras que el de la segunda es -1 .

Más aún, la segunda se puede obtener de la primera mediante la igualdad

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ \sin \phi & -\cos \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donde la segunda matriz del lado derecho corresponde a la transformación lineal de reflexión respecto al primer eje de coordenadas, definida por

$$(u^1, u^2) \mapsto (x^1, x^2), \quad \text{donde } x^1 = u^1, \quad x^2 = -u^2.$$

De esta manera tenemos caracterizadas a las isometrías lineales del plano.

PROPOSICIÓN 4.16. *Sea $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una isometría lineal con una matriz asociada $A \in \mathbb{O}(2)$.*

1. *Si $\det(A) = 1$, entonces L es una rotación del plano con ángulo ϕ .*
2. *Si $\det(A) = -1$, entonces L es una reflexión respecto a un eje, seguida de una rotación del plano con ángulo ϕ .*

Demostración. La matriz

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & -\text{sen } \phi \\ \text{sen } \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

es una rotación del plano con ángulo ϕ . □

El siguiente resultado caracteriza las isometrías del plano según el determinante de la matriz ortogonal asociada a tal isometría.

TEOREMA 4.17. *Sea $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una isometría del plano. Entonces:*

1. *Si φ es propia, entonces es una rotación alrededor de un punto con ángulo ϕ , o es una traslación.*
2. *Si φ no es propia, entonces es una composición de una rotación con una reflexión respecto a una recta y una traslación a lo largo de esa recta.*

Demostración. Analizaremos los casos por separado.

1. Por el Teorema 4.15 una isometría propia tiene la forma $\varphi(u) = Au + \xi$, $A \in \mathbb{SO}(2)$, donde A es del tipo

$$A = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\operatorname{sen} \phi \\ \operatorname{sen} \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

Cuando el ángulo $\phi = 0$, entonces $A = I$ y por lo tanto φ es una traslación.

Si $A \neq I$, ($\phi \neq 0$) entonces buscamos un punto fijo u_0 del plano tal que sea el centro de la rotación, $\varphi(u_0) = u_0$, es decir, buscamos resolver la ecuación $u_0 = Au_0 + \xi$.

Esta ecuación equivale a $(I - A)u_0 = \xi$ y tal sistema de ecuaciones tiene solución

$$u_0 = (I - A)^{-1}\xi$$

en virtud de que

$$\begin{aligned} \det(I - A) &= \begin{vmatrix} 1 - \cos \phi & -\operatorname{sen} \phi \\ \operatorname{sen} \phi & 1 - \cos \phi \end{vmatrix} = (1 - \cos \phi)^2 + \operatorname{sen}^2 \phi \\ &= 2 - 2 \cos \phi = 2(1 - \cos \phi) \neq 0 \end{aligned}$$

pues $\phi \in (0, 2\pi)$, lo que nos indica que $(I - A)$ es invertible.

Así pues, el centro de la rotación existe y es $u_0 = (I - A)^{-1}\xi$, lo que prueba la primera afirmación.

2. Ahora considere una isometría del plano que no sea propia. Al rotar con un ángulo ϕ puede suponerse que la matriz es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esto es, la matriz A representa una reflexión a lo largo del nuevo eje de las abscisas.

Con esto, puede suponerse que en tales coordenadas la isometría se escribe como

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u^1 + \xi^1 \\ -u^2 + \xi^2 \end{pmatrix}$$

y al realizar el cambio de coordenadas en el plano, dado por

$$\begin{cases} u^1 = y^1 \\ u^2 = y^2 + \xi^2 \end{cases}$$

se tiene que la transformación final se escribe

$$\begin{cases} x^1 = y^1 + \xi^1 \\ x^2 = -y^2 \end{cases}$$

que corresponde a una transformación que recibe el nombre de **reflexión deslizante** a lo largo del eje y^1 . La figura 4.2 ilustra este resultado.

□

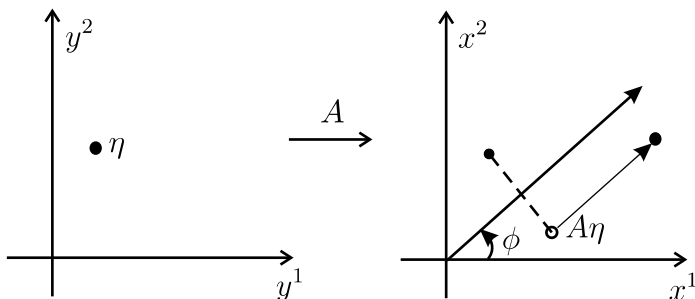


Figura 4.2: Reflexión deslizante en \mathbb{R}^2 .

La proposición 4.16 y el Teorema 4.17 implican que el grupo de isometrías propias del plano que dejan fijo el origen es precisamente $\text{SO}(2)$.

4.3. Isometrías de \mathbb{C}

Ahora desarrollamos un análisis similar al de la sección anterior, pero desde el punto de vista complejo. Introducimos algunas definiciones que nos serán de utilidad.

DEFINICIÓN 4.18. El **grupo general lineal complejo** es el conjunto

$$\mathbb{GL}(1, \mathbb{C}) = \{L_\lambda : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \mid L_\lambda(z) = \lambda z, \lambda \neq 0\},$$

con la operación de composición.

EJEMPLO 4.19. Como en el ejemplo 4.4, se puede ver que existe una representación de $\mathbb{GL}(1, \mathbb{C})$ en el grupo multiplicativo $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (con la operación de multiplicación usual de números complejos). \triangleright

EJEMPLO 4.20 (Transformaciones de Möbius). Considérese el conjunto de matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

donde $a, b, d, c \in \mathbb{C}$ y $\det A = ad - bc = 1$. Las propiedades usuales del determinante muestran que este conjunto es un grupo bajo la operación de multiplicación de matrices, denotado por

$$\mathbb{SL}(2, \mathbb{C}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc = 1 \right\}$$

y llamado el **grupo especial lineal complejo** a dimensión 2. A cada matriz $A \in \mathbb{SL}(2, \mathbb{C})$ le asociamos una transformación dada por

$$T_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Claramente $T_A : (\mathbb{C} - \{-\frac{d}{c}\}) \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica en z y su derivada respecto a esta variable es

$$\frac{\partial T_A}{\partial z} = \frac{d}{dz} T_A = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} = \frac{1}{(cz + d)^2}$$

(véase el apéndice A).

Sea $\mathcal{T}(\mathbb{C})$ el conjunto de tales transformaciones. Dadas dos transformaciones $T_A, T_{A'} \in \mathcal{T}(\mathbb{C})$, su composición se calcula mediante

$$\begin{aligned} T_A \circ T_{A'}(z) &= T_A \left(\frac{a'z + b'}{c'z + d'} \right) = \frac{a \left(\frac{a'z + b'}{c'z + d'} \right) + b}{c \left(\frac{a'z + b'}{c'z + d'} \right) + d} \\ &= \frac{(aa' + bc')z + (ab' + db')}{(ca' + dc')z + (cb' + dd)} = T_{AA'}(z) \end{aligned}$$

Un cálculo directo prueba también que para $T_A \in \mathcal{T}(\mathbb{C})$ se cumple $T_A^{-1} = T_{A^{-1}}$. Esto es,

$$T_A^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a} = T_{A^{-1}}(z),$$

donde

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

es la matriz inversa de A .

De esta manera, el conjunto $\mathcal{T}(\mathbb{C})$ es un grupo bajo la composición, llamado el **grupo de Möbius**.

Las relaciones $T_A \circ T_{A'} = T_{AA'}$ y $T_A^{-1} = T_{A^{-1}}$ implican la existencia de un homomorfismo de grupos

$$\phi : \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathbb{C})$$

definido por $\phi(A) = T_A$; es claro que ϕ es suprayectiva, por construcción. Ahora, calculemos su núcleo $\ker \phi$. Tenemos que $\phi(A)$ es igual a la identidad $I \in \mathcal{T}(\mathbb{C})$ si y sólo si para todo complejo z se cumple que

$$\frac{az + b}{cz + d} = z,$$

lo que equivale a $az + b = cz^2 + dz$, o bien, $cz^2 + (d - a)z - b = 0$.

Ya que la última condición debe cumplirse para todo z en una región de \mathbb{C} , entonces necesariamente

$$c = 0, \quad b = 0, \quad \text{y} \quad d = a$$

Pero como además $ad - bc = 1$, entonces $ad = aa = a^2 = 1$, de donde $a = \pm 1 = d$.

De lo anterior, las matrices de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ en el núcleo de ϕ son $\pm I$, es decir

$$\ker \phi = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Por el primer teorema de isomorfismo de grupos se tiene entonces que los grupos

$$\mathcal{T}(\mathbb{C}) \quad \text{y} \quad \text{SL}(2, \mathbb{C})/\{\pm I\}$$

son isomorfos. ▷

Usaremos las transformaciones complejas para simplificar las pruebas de algunos resultados. Para una discusión más amplia sobre transformaciones en el plano complejo \mathbb{C} , el lector es referido a [14].

La identificación de \mathbb{R}^2 con \mathbb{C} dada por las relaciones $z = x + iy$ y $\bar{z} = x - iy$, donde (x, y) es el sistema coordenado cartesiano y (z, \bar{z}) son las coordenadas en \mathbb{C} , permite introducir un concepto de longitud en \mathbb{C} .

Al identificar un punto $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ con el punto $z = x + iy \in \mathbb{C}$, se tiene que la norma $\|p\|$ del punto se puede escribir en términos complejos como

$$\|p\|^2 = x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy) = z\bar{z}.$$

Por eso, es natural definir la norma de $z \in \mathbb{C}$ como

$$\|z\|^2 = |z|^2 = z\bar{z}$$

donde $|\cdot|$ denota el módulo del número complejo z .

Podemos generalizar lo anterior y definir el **producto escalar** de dos vectores $\xi, \eta \in \mathbb{C}$ como

$$\langle \xi, \eta \rangle_{\mathbb{C}} = \xi \bar{\eta}.$$

Tal producto se denomina **producto escalar hermitiano** y toma en general valores en el campo \mathbb{C} .

No es difícil ver que el producto hermitiano goza de las propiedades de un producto escalar sobre \mathbb{C} , con las condiciones adicionales de que si $\lambda \in \mathbb{C}$ y $\xi, \eta \in \mathbb{C}$, entonces son válidas las fórmulas

1. $\langle \xi, \eta \rangle_{\mathbb{C}} = \overline{\langle \eta, \xi \rangle_{\mathbb{C}}}$.
2. $\langle \xi, \lambda \eta \rangle_{\mathbb{C}} = \bar{\lambda} \langle \xi, \eta \rangle_{\mathbb{C}}$.

Ahora determinaremos el subgrupo de $\mathbb{GL}(1, \mathbb{C})$ que deja invariante el producto escalar hermitiano de \mathbb{C} (véase el ejemplo 4.20).

Claramente, $A \in \mathbb{GL}(1, \mathbb{C})$ deja invariante el producto escalar si para $\xi, \eta \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\langle A\xi, A\eta \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \xi, \eta \rangle_{\mathbb{C}}$$

lo que equivale a

$$\overline{(A\eta)A\xi} = \bar{\eta} \bar{A} A \xi = \bar{\eta} \xi.$$

Esto nos dice que $A \in \mathbb{GL}(1, \mathbb{C})$ (realmente un número complejo) debe satisfacer la condición

$$1 = \bar{A}A = |A|^2$$

Al grupo de matrices complejas

$$\mathbb{U}(1) = \{ A \in \mathbb{GL}(1, \mathbb{C}) \mid \bar{A}A = 1 \}$$

se le llamará el **grupo unitario complejo** a dimensión (compleja) 1.

Observamos que la condición $|A|^2 = 1$ implica necesariamente que

$$A \in \mathbb{S}^1 = \{ e^{i\phi} \mid \phi \in [0, 2\pi] \}.$$

Por otro lado, ya que $e^{i\phi}$ puede identificarse con la matriz (de rotación propia)

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & \operatorname{sen} \phi \\ -\operatorname{sen} \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \in \mathbb{SO}(2)$$

mediante un isomorfismo de grupos, se tiene el siguiente resultado.

TEOREMA 4.21. *Los grupos $\mathbb{SO}(2)$, $\mathbb{U}(1)$ y \mathbb{S}^1 (provisto con el producto usual de los números complejos) son isomorfos.*

De esta manera, utilizando el Teorema 4.17, tenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 4.22. *El grupo de isometrías de \mathbb{C} , provisto con el producto escalar hermitiano $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$, es el conjunto de transformaciones de la forma*

$$z \rightarrow T(z) = \lambda z + \xi$$

donde $\lambda \in \mathbb{S}^1$ y $\xi \in \mathbb{C}$.

Por otro lado, la matriz de reflexión

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

aplicada en el plano \mathbb{R}^2 de la forma $(x, y) \mapsto (x, -y)$, induce la transformación en \mathbb{C} (analítica en \bar{z}) dada por la conjugación:

$$z = x + iy \mapsto x - iy = \bar{z}$$

La otra manera (compleja) de obtener una matriz de rotación (no propia) de la forma

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & -\operatorname{sen} \phi \\ \operatorname{sen} \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

consiste en utilizar un elemento $\lambda \in \mathbb{U}(1)$ y componer con la operación de conjugación en \mathbb{C} .

4.4. Isometrías de la esfera \mathbb{S}^2

Denotaremos por $\mathfrak{Iso}(\mathbb{S}^2)$ al grupo de isometrías de \mathbb{S}^2 . Es claro el siguiente resultado, por lo que omitiremos su demostración.

LEMA 4.23. $\mathbb{O}(3) \subset \mathfrak{Iso}(\mathbb{S}^2)$.

Dado un punto $p \in \mathbb{S}^2$, definimos el conjunto

$$H(p) = \{f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \mid f \in \mathfrak{Iso}(\mathbb{S}^2), f(p) = p\},$$

llamado el **estabilizador** de p . Es claro que $H(p)$ es un subgrupo de $\mathfrak{Iso}(\mathbb{S}^2)$.

Si $f \in H(p)$, entonces $f(p) = p$, lo que implica que la diferencial df_p es un isomorfismo de $T_p\mathbb{S}^2$ en sí mismo. De esta manera, $df_p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ (véase el ejemplo 4.5). Mediante una rotación (es decir, un cambio de coordenadas alrededor de p), podemos suponer que la métrica en p está dada por $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$. Esto dice que si f es una isometría que fija a p , la matriz de df_p está en el grupo ortogonal $\mathbb{O}(2)$. Identificando df_p con su matriz y abusando de la notación escribiremos $df_p \in \mathbb{O}(2)$.

Sea $\mu : H(p) \rightarrow \mathbb{O}(2)$ una aplicación de grupos definida mediante la regla $\mu(f) = df_p$.

LEMA 4.24. *La aplicación μ es un monomorfismo del grupo $H(p)$ en $\mathbb{O}(2)$.*

Demostración. La cadena de igualdades

$$\mu(f \circ g) = d(f \circ g)_p = df_{g(p)} \circ dg_p = df_p \circ dg_p = \mu(f)\mu(g)$$

muestra que μ es un homomorfismo, en virtud de que f y g dejan fijo a p .

Si E es el elemento identidad de $\mathbb{O}(2)$, supóngase que $f \in H(p)$ es tal que $\mu(f) = df_p = E$. Afirmamos que $f(q) = \text{Id}(q) = q$ para todo $q \in \mathbb{S}^2$, es decir f es la identidad en \mathbb{S}^2 .

Sea $q \in \mathbb{S}^2$ un punto arbitrario. Ya que, por el ejemplo 3.8, \mathbb{S}^2 es una superficie completa, existe una geodésica $\gamma : [0, \ell) \rightarrow \mathbb{S}^2$ que une a $\gamma(0) = p$ con $\gamma(\ell) = q$. Si f es la isometría escogida, entonces $f \circ \gamma : [0, \ell) \rightarrow \mathbb{S}^2$ es una geodésica que une $p = f(p)$ con $f(\gamma(\ell))$. Como $\mu(f) = df_p = E$, se tiene que el vector $\dot{\gamma}(0) = \xi$ tangente a γ en p es aplicado en sí mismo; es decir, $df_p(\xi) = \xi$. De esta forma, γ y $f(\gamma)$ tienen el mismo vector tangente. Por el Corolario 2.34, estas geodésicas coinciden, de modo que $f(\gamma(t)) = \gamma(t)$ para toda t ; en particular, $f(\gamma(\ell)) = q$; es decir, $f(q) = q$ (véase la figura 4.3).

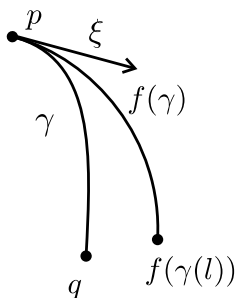


Figura 4.3: Curvas γ y $f(\gamma)$.

Como q es un punto arbitrario, se sigue que la isometría f es la identidad de \mathbb{S}^2 . En consecuencia, $\ker(\mu) = \text{Id}_{\mathbb{S}^2}$, lo que concluye la prueba. \square

Del Lema 4.24 se concluye que $\dim H(p) \leq \dim \mathbb{O}(2) = 1$. De hecho, tenemos un resultado más fuerte.

PROPOSICIÓN 4.25. $\dim(\mathfrak{Iso}(\mathbb{S}^2)) \leq 3$.

Demostración. Sea $f \in \mathfrak{Iso}(\mathbb{S}^2)$. Afirmamos que f queda completamente definido por los valores de la correspondencia $\mathfrak{Iso}(\mathbb{S}^2) \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{O}(2)$ dada por

$$f \rightarrow (f(p), df_p)$$

es decir, por su valor $f(p)$ y el de su diferencial $df_p : T_p\mathbb{S}^2 \rightarrow T_{f(p)}\mathbb{S}^2$.

En efecto, sean $f, g \in \mathfrak{Iso}(\mathbb{S}^2)$ de tal manera que $(f(p), df_p) = (g(p), dg_p)$ y definamos $h = f^{-1} \circ g \in \mathfrak{Iso}(\mathbb{S}^2)$. Entonces, para el punto $p \in \mathbb{S}^2$ se tiene

$$h(p) = (f^{-1} \circ g)(p) = f^{-1}(g(p)) = E$$

ya que $f(p) = g(p)$ y consecuentemente $h \in H(p)$.

Por otro lado,

$$dh_p = d(f^{-1} \circ g)_p = df_{g(p)}^{-1} \circ dg_p = p$$

debido a que $df_p = dg_p$ y $g(p) = f(p)$. De la demostración del Lema 4.24 se sigue que $h(p) = p$ para todo $p \in \mathbb{S}^2$, lo que prueba nuestra afirmación.

De esta manera, para que un elemento $f \in \mathfrak{Iso}(\mathbb{S}^2)$ esté bien definido, se necesitan a lo más dos variables (en \mathbb{S}^2) más otra (en $\mathbb{O}(2)$), lo que termina la prueba. \square

El ejercicio 5c de este capítulo implica que toda rotación $A \in \mathbb{O}(3)$ está definida por tres variables (**Teorema de Euler**), lo que significa que

$$\dim \mathbb{O}(3) = \dim \mathbb{SO}(3) = \dim \mathfrak{Iso}(\mathbb{S}^2) = 3.$$

Combinando el Lema 4.23 y estos resultados se tiene el siguiente Teorema.

TEOREMA 4.26. *La componente conexa del grupo de isometrías de \mathbb{S}^2 que contiene a la identidad $\text{Id}_{\mathbb{S}^2}$ es el grupo $\mathbb{SO}(3)$.*

El grupo completo de isometrías de la esfera, $\mathbb{O}(3)$, se obtiene de agregar a $\mathbb{SO}(3)$ los elementos de determinante negativo del grupo ortogonal.

Ahora analizaremos el grupo de isometrías de \mathbb{S}^2 , pero desde el punto de vista complejo. Recordemos que la métrica en \mathbb{S}^2 se puede llevar al plano complejo \mathbb{C} mediante la proyección estereográfica (véase el ejemplo 1.58). Así obtenemos la métrica dada en forma compleja por

$$ds^2 = \frac{4 dz d\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2}.$$

Consideremos una transformación de Möbius (véase el ejemplo 4.20) de la forma

$$z = f(w) = \frac{aw + b}{cw + d}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y $ad - bc = 1$. Veamos qué ocurre con la métrica al aplicar una transformación de este tipo. Se tiene que

$$dz = \frac{dw}{(cw + d)^2}, \quad d\bar{z} = \frac{d\bar{w}}{(\bar{c}\bar{w} + \bar{d})^2}$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{4 dz d\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2} = \frac{4 dz d\bar{z}}{(1 + z\bar{z})^2} = \frac{4}{\left(1 + \frac{|aw+b|^2}{|cw+d|^2}\right)^2} \frac{dw d\bar{w}}{|cw + d|^2} \\ &= \frac{4 dw d\bar{w}}{[(|b|^2 + |d|^2) + (\bar{d}c + \bar{b}a)w + (d\bar{c} + b\bar{a})\bar{w} + (|a|^2 + |c|^2)|w|^2]^2} \end{aligned}$$

Ya que una isometría debe preservar los coeficientes en la métrica, entonces $f(w)$ es una isometría si y sólo si se cumplen las ecuaciones

$$\begin{aligned} |b|^2 + |d|^2 &= 1, & \bar{d}c + \bar{b}a &= 0, \\ |a|^2 + |c|^2 &= 1, & d\bar{c} + b\bar{a} &= 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Recordemos que el **grupo especial lineal complejo** a dimensión 2, denotado $\mathbb{S}\mathbb{L}(2, \mathbb{C})$, es el grupo formado por las matrices A de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

donde $ad - bc = 1$. Consideremos el subgrupo de $\mathbb{S}\mathbb{L}(2, \mathbb{C})$ definido por

$$\mathbb{S}\mathbb{U}(2) = \{A \in \mathbb{S}\mathbb{L}(2, \mathbb{C}) \mid \bar{A}^T A = I\},$$

llamado el **grupo unitario a dimensión 2** (véase el ejercicio 6d de este capítulo). Entonces $A \in \mathbb{S}\mathbb{U}(2)$ si y sólo si se cumplen las igualdades matriciales

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 + |c|^2 & \bar{a}b + \bar{c}d \\ a\bar{b} + \bar{c}d & |b|^2 + |d|^2 \end{pmatrix}.$$

Observamos que al igualar las entradas de las matrices primera y tercera se obtiene el sistema (4.3), lo que nos dice que una transformación de Möbius $z = f(w)$ representa una isometría de \mathbb{S}^2 si y sólo si su matriz asociada está en $\mathbb{S}\mathbb{U}(2)$ (véase el ejemplo 4.20). Ya que las transformaciones fraccionales lineales se corresponden con el espacio de matrices $\mathbb{S}\mathbb{L}(2, \mathbb{C})/\{\pm I\}$ según el mencionado ejemplo, se tiene el siguiente resultado.

LEMA 4.27. *El grupo $\mathbb{S}\mathbb{U}(2)/\{\pm I\}$ está contenido en $\mathfrak{Iso}(\mathbb{S}^2)$.*

Notamos que la segunda y tercera ecuaciones de (4.3) son las mismas, ya que $\bar{d}c + \bar{b}a = \overline{dc + ba}$, lo que reduce el sistema a tres ecuaciones.

Por otro lado, de la relación $ad - bc = 1$ y del sistema (4.3) reducido se tiene la cadena de igualdades

$$\bar{d} = add - bc\bar{d} = a|d|^2 - b(-\bar{b}a) = a|d|^2 + a|b|^2 = a(|d|^2 + |b|^2) = a$$

lo que nos dice que $d = \bar{a}$.

De manera análoga, utilizando las mismas relaciones, se demuestra que $c = -\bar{b}$.

Consecuentemente, una matriz $A \in \mathbb{SU}(2)$ debe tener la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

sujeta a la relación $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

Si asociamos a cada matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

la pareja de números complejos $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ sujeta a la relación $|a|^2 + |b|^2 = 1$, entonces ésta define una esfera de radio 1 en $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2$.

Ya que la mencionada relación es una biyección continua, se sigue que $\mathbb{SU}(2)$ es homeomorfo a la esfera \mathbb{S}^3 . Esto implica necesariamente que $\dim \mathbb{SU}(2) = 3$ y además que es un conjunto conexo en $\mathcal{Iso}(\mathbb{S}^2)$.

Hemos obtenido el siguiente resultado.

TEOREMA 4.28. *La componente conexa del grupo de isometrías propias de la esfera \mathbb{S}^2 que contiene a la transformación de Möbius $f(w) = w$ es el subgrupo $\mathbb{SU}(2)/\{\pm I\}$.*

Para completar el grupo de isometrías $\mathcal{Iso}(\mathbb{S}^2)$ es necesario, de igual forma que en el caso plano \mathbb{C} , componer los elementos de $\mathbb{SU}(2)/\{\pm I\}$ con la operación de conjugación $z \rightarrow \bar{z}$, cuya matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Un resultado que se obtiene de los Teoremas 4.26 y 4.28 es el siguiente.

COROLARIO 4.29. *$\mathbb{SO}(3)$ y $\mathbb{SU}(2)/\{\pm I\}$ son isomorfos.*

Denotamos por \mathbb{RP}^3 al **espacio proyectivo real** de dimensión 3 que se obtiene de identificar los puntos antípodas de la esfera $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$, generalizando el ejemplo 1.4. Los puntos (a, b) y $-(a, b)$ en \mathbb{S}^3 corresponden a las matrices A y $-A \in \mathbb{SU}(2)$, que a su vez corresponden a la misma isometría de \mathbb{S}^2 . De esta forma, al identificar los puntos correspondientes en \mathbb{S}^3 y en $\mathbb{SU}(2)$ se obtiene el siguiente resultado.

COROLARIO 4.30. $\mathbb{SO}(3)$ es un espacio homeomorfo al espacio proyectivo real \mathbb{RP}^3 .

4.5. Isometrías del plano de Lobachevsky

Para identificar el grupo de isometrías de \mathbb{R}_1^3 con la métrica de Minkowski G , seguiremos un camino análogo al euclidiano. Como en ese caso (véase el Lema 4.14), las isometrías que dejan fijo el origen de coordenadas son isometrías lineales, de modo que primero analizaremos a las transformaciones de este tipo.

Si $L : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ es una transformación lineal cuya matriz en base canónica es A , entonces L es una isometría de \mathbb{R}_1^3 si para cada par de vectores $\xi, \eta \in \mathbb{R}^3$ se tiene que

$$\langle A\xi, A\eta \rangle_G = \langle \xi, \eta \rangle_G$$

(véase la sección 4.3). Lo anterior se escribe matricialmente como

$$\eta^T A^T G A \xi = \eta^T G \xi$$

lo que implica que L es una isometría de \mathbb{R}_1^3 si y sólo si para la matriz A se cumple la ecuación matricial

$$A^T G A = G$$

Distinguimos a tal clase de matrices.

DEFINICIÓN 4.31. Al conjunto de matrices reales denotado por

$$\mathbb{O}(1, 2) = \{ A \in \mathbb{GL}(3, \mathbb{R}) \mid A^T G A = G \}$$

se le llama el **grupo ortocrónico** asociado a \mathbb{R}_1^3 . Un elemento $A \in \mathbb{O}(1, 2)$ se llama una **rotación ortocrónica**. Al subgrupo de $\mathbb{O}(1, 2)$ de matrices propias

$$\mathbb{SO}(1, 2) = \{ A \in \mathbb{O}(1, 2) \mid \det A = 1 \}$$

se le llama el **grupo especial ortocrónico** asociado a \mathbb{R}_1^3 .

No daremos una descripción de este grupo de transformaciones como lo hicimos para el caso de \mathbb{R}^3 . Sólo mencionamos que la descripción es más difícil, aún para el caso del plano \mathbb{R}_1^2 , donde se obtiene el llamado **grupo de Lorentz** (véase el ejercicio 11 de este capítulo).

Este grupo es muy importante en la **teoría de la relatividad especial**. Si el lector está interesado en este tópico, puede referirse al trabajo seminal [10], a [13] ó a et al. [8], [9], donde encontrará mayor información.

Recordemos que la métrica en el plano de Lobachevsky \mathbb{L}^2 se hereda de la métrica de Minkowski en \mathbb{R}_1^3 . Así, como toda isometría lineal de este último espacio deja invariante a \mathbb{L}^2 (pues preserva la norma), se sigue que la métrica de \mathbb{L}^2 es invariante bajo cualquier elemento del grupo $\mathbb{O}(1, 2)$; es decir, se tiene el siguiente resultado.

LEMA 4.32. $\mathbb{O}(1, 2)$ está contenido en el grupo $\mathfrak{Iso}(\mathbb{L}^2)$. En particular, $\mathbb{SO}(1, 2) \subset \mathfrak{Iso}(\mathbb{L}^2)$.

La geometría del plano de Lobachevsky \mathbb{L}^2 es similar a la de la esfera \mathbb{S}^2 , como se muestra a continuación.

LEMA 4.33. Las curvas geodésicas de \mathbb{L}^2 se obtienen al intersectar \mathbb{L}^2 con planos que pasan por el origen de \mathbb{R}_1^3 (véase la figura 4.4).

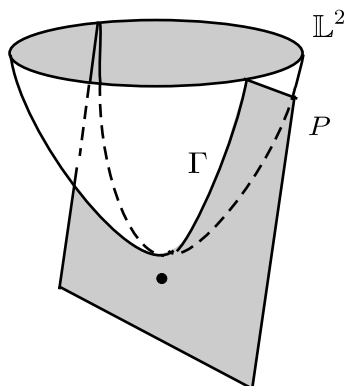


Figura 4.4: Geodésicas del plano de Lobachevsky.

Demostración. Recordemos (véase la ecuación (1.6)) que los coeficientes de la métrica de \mathbb{L}^2 en las coordenadas (θ, ϕ) son

$$E = R^2, \quad F = 0 \quad \text{y} \quad G = R^2 \sinh^2 \theta,$$

de donde se sigue que los coeficientes de Christoffel correspondientes son

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \coth \theta, \quad \Gamma_{22}^1 = -\sinh \theta \cosh \theta.$$

De esta manera, las ecuaciones de las geodésicas en \mathbb{L}^2 vienen dadas por la pareja de ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} + (2 \coth \theta) \dot{\phi} \dot{\theta} &= 0, \\ \ddot{\theta} - (\sinh \theta \cosh \theta) \dot{\phi}^2 &= 0 \end{aligned}$$

Un meridiano en \mathbb{L}^2 es la curva que se obtiene al intersecar \mathbb{L}^2 con un plano vertical $\phi = \text{cte.}$ que pasa por el origen. Es claro que este meridiano se puede parametrizar por $\theta(t) = at + b$, $\phi = \text{cte}$ y que satisface la pareja de ecuaciones diferenciales anteriores; por lo tanto, es una geodésica de \mathbb{L}^2 . De igual forma que en el caso de la esfera,

cualquier curva obtenida de intersectar un plano por el origen con \mathbb{L}^2 se puede realizar mediante la **rotación ortocrónica** (es decir, usando un elemento de $\mathcal{O}(1,2)$) de un meridiano de \mathbb{L}^2 (véase el ejercicio 11d de este capítulo). En virtud de que las isometrías preservan las geodésicas, entonces tales curvas son geodésicas.

Por otro lado, sea γ una geodésica por $p \in \mathbb{L}^2$ con vector tangente ξ y considérese el único plano P que pasa por el origen y por p , tal que la recta de su intersección con $T_p S$ contiene a ξ (véase la figura 4.5).

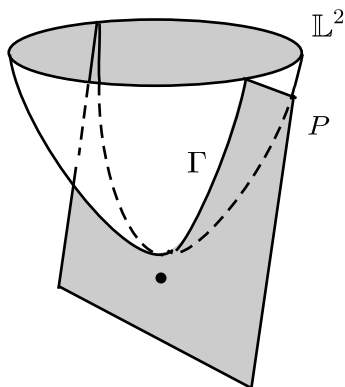


Figura 4.5: Unicidad de geodésicas en \mathbb{L}^2 .

Entonces $P \cap \mathbb{L}^2$ es una geodésica γ por p en dirección del vector ξ . Por el Corolario 2.34, las geodésicas Γ y γ coinciden en una vecindad de p . Esto termina la prueba del Lema. \square

Ya que dos puntos de \mathbb{L}^2 pueden unirse mediante una geodésica, debido a que este espacio es geodésicamente completo, podemos seguir paso a paso la demostración de la proposición 4.25 para obtener el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 4.34. *Sea $\mathcal{Iso}(\mathbb{L}^2)$ el grupo de isometrías del plano*

de Lobachevsky. Entonces

$$\dim(\mathfrak{Iso}(\mathbb{L}^2)) \leq 3.$$

Definimos $\mu : \mathbb{O}(1, 2) \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ como

$$\mu(A) = (\det A, \text{signo}\langle e_3, Ae_3 \rangle)$$

donde e_3 es el vector que genera el eje z en \mathbb{R}^3 . No es difícil ver (ejercicio 12) que μ es un epimorfismo de grupos. Ya que $\ker(\mu) = \mathbb{SO}(1, 2)$, se sigue que

$$\frac{\mathbb{O}(1, 2)}{\mathbb{SO}(1, 2)} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

lo que nos dice que $\mathbb{O}(1, 2)$ tiene cuatro componentes conexas que son copias de $\mathbb{SO}(1, 2)$. Consecuentemente, se tiene que $\dim \mathbb{SO}(1, 2) = \dim \mathbb{O}(1, 2)$. Ya que una rotación ortocrónica $A \in \mathbb{O}(1, 2)$ está definida por tres variables, se sigue que $\dim \mathbb{SO}(1, 2) = 3$. Esto implica el siguiente resultado.

TEOREMA 4.35. *La componente conexa del grupo de isometrías $\mathfrak{Iso}(\mathbb{L}^2)$ que contiene a la identidad $\text{Id}_{\mathbb{L}^2}$ es el grupo $\mathbb{SO}(1, 2)$.*

De igual manera que en el caso de la esfera, podemos dar otra caracterización de las isometrías del plano de Lobachevsky, usando la proyección estereográfica para traducir el problema al análisis de las isometrías del disco de Poincaré \mathbb{D}^2 , desde el punto de vista complejo. Así, analizaremos las transformaciones de Möbius

$$z = f(w) = \frac{aw + b}{cw + d}$$

donde nuevamente $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y $ad - bc = 1$.

En este caso,

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{4 dz d\bar{z}}{(1 - |z|^2)^2} = \frac{4 dz d\bar{z}}{(1 - z\bar{z})^2} \frac{4}{(1 - |aw + b|^2)^2} = \frac{dw d\bar{w}}{|cw + d|^2} \\ &= \frac{4 dw d\bar{w}}{[(|b|^2 - |d|^2) + (\bar{d}c - \bar{b}a)w + (d\bar{c} - b\bar{a})\bar{w} + (|c|^2 - |a|^2)|w|^2]^2} \end{aligned}$$

De esta forma, f es una isometría si y sólo si se cumplen las ecuaciones siguientes para los coeficientes a, b, c y d :

$$|d|^2 - |b|^2 = 1, \quad \bar{d}c - \bar{b}a = 0, \quad |a|^2 - |c|^2 = 1.$$

Sólo obtenemos tres ecuaciones en virtud de que $\bar{d}c - \bar{b}a = \overline{d\bar{c} - b\bar{a}}$.

Definimos el **grupo unitario ortocrónico** a dimensión 2 como

$$\mathbb{U}(1, 1) = \{A \in \mathbb{GL}(2, \mathbb{C}) \mid \bar{A}^T G A = G\},$$

donde

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

además, el **subgrupo especial unitario ortocrónico** está dado por

$$\mathbb{SU}(1, 1) = \{A \in \mathbb{U}(1, 1) \mid \det A = 1\}.$$

Entonces

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{SU}(1, 1)$$

si y sólo si se cumple la cadena de igualdades matriciales

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |a|^2 - |c|^2 & \bar{a}b - \bar{c}d \\ a\bar{b} - c\bar{d} & |b|^2 - |d|^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En otras palabras, la transformación de Möbius f es una isometría si y sólo si la matriz asociada A pertenece a $\mathbb{SU}(1, 1)$.

Ya que las matrices A y $-A \in \mathbb{SU}(1, 1)$ definen la misma transformación de Möbius, tenemos el siguiente resultado.

LEMA 4.36. *El grupo $\mathbb{SU}(1, 1)/\{\pm I\}$ está contenido en el grupo de isometrías $\mathfrak{Iso}(\mathbb{L}^2)$.*

Del sistema de ecuaciones que define a un elemento $A \in \mathbb{S}\mathbb{U}(1, 1)$ y mediante un cálculo directo se puede obtener que $c = \bar{a}$ y $d = \bar{b}$, es decir, tal matriz tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

sujeta a la relación $|a|^2 - |b|^2 = 1$.

De esta manera, al asociar a cada matriz A de $\mathbb{S}\mathbb{U}(1, 1)$ una pareja de números complejos $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, sujeta a la relación $|a|^2 - |b|^2 = 1$, tenemos una inmersión del grupo $\mathbb{S}\mathbb{U}(1, 1)$ en $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ como un hiperboloide tridimensional de dos hojas; es decir, $\dim(\mathbb{S}\mathbb{U}(1, 1)) = 3$.

Ya que $\mathbb{S}\mathbb{U}(1, 1)$ no es un conjunto conexo, tenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 4.37. *La componente conexa del grupo de isometrías propias del disco de Poincaré \mathbb{D}^2 que contiene a la identidad $\text{Id}_{\mathbb{D}^2}$ es el grupo*

$$\mathbb{S}\mathbb{U}(1, 1)/\{\pm I\}.$$

Para completar el grupo de isometrías del disco de Poincaré \mathbb{D}^2 es necesario componer los elementos de $\mathbb{S}\mathbb{U}(1, 1)/\{\pm I\}$ con la operación de conjugación $z \rightarrow \bar{z}$ cuya matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Para concluir este capítulo haremos un análisis similar a los anteriores para determinar el grupo de isometrías del semiplano superior \mathbb{H}_+^2 .

Como antes, buscamos las isometrías de \mathbb{H}_+^2 entre las transformaciones de Möbius de la forma

$$z = f(w) = \frac{aw + b}{cw + d}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y $ad - bc = 1$.

Una transformación de este tipo debe aplicar el semiplano superior \mathbb{H}_+^2 en sí mismo. En consecuencia, la primera condición es que el eje real sea aplicado en el eje real. Por el ejercicio 8d de este capítulo, tal condición es equivalente a que los coeficientes a, b, c y d sean reales. De esta forma, f es una isometría de \mathbb{H}_+^2 si la matriz asociada

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

es un elemento de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. En virtud de que A y $-A$ definen la misma transformación, podemos utilizar argumentos similares a los ya desarrollados en este capítulo para demostrar lo siguiente.

TEOREMA 4.38. *La componente conexa del grupo de isometrías del semiplano superior que contiene a $\mathrm{Id}_{\mathbb{H}_+^2}$ es el grupo $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\{\pm I\}$.*

Para obtener todo el grupo de isometrías de \mathbb{H}_+^2 es necesario componer los elementos de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\{\pm I\}$ con la operación compleja $z \rightarrow -\bar{z}$ cuya matriz correspondiente es

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A continuación resumimos los resultados relativos a los grupos de isometrías propias del espacio de Lobachevsky, el disco de Poincaré y el semiplano superior.

COROLARIO 4.39. *Los grupos $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\{\pm I\}$, $\mathrm{SU}(1, 1)/\{\pm I\}$ y el grupo formado por la componente conexa de $\mathrm{SO}(1, 2)$ que contiene a la identidad son isomorfos.*

Ejercicios

1. Complete la prueba del Lema 4.2.

2. Demuestre el Lema 4.13.
3. Represente a los siguientes grupos de transformaciones de \mathbb{R}^n mediante un homomorfismo de grupos.

$$a) L_1(\mathbb{R}^n) = \{L_{(\lambda, \xi)}(x) = \lambda x + \xi \mid \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \xi \in \mathbb{R}^n\}.$$

$$b) L_2(\mathbb{R}^n) = \{L_{(A, \lambda, \xi)}(x) = \lambda Ax + \xi\}, \text{ donde } A \in \text{GL}(n, \mathbb{R}), \\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ y } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

4. Identifique el grupo de matrices al que pertenece cada una de las siguientes matrices.

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

5. Sea $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una isometría lineal.
- a) Demuestre que L deja invariante al menos un subespacio \mathbb{R}_λ de \mathbb{R}^3 de dimensión uno. Los puntos de tal subespacio \mathbb{R}_λ quedan fijos o son reflejados simétricamente bajo L .
- b) Sea \mathbb{R}_λ^2 el subespacio ortogonal complementario a \mathbb{R}_λ . Demuestre que \mathbb{R}_λ^2 también es invariante bajo L .
- c) Concluya que una isometría lineal $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es de alguna de las siguientes formas:
- Una rotación con ángulo ϕ en el plano \mathbb{R}_λ^2 con eje de rotación \mathbb{R}_λ^3 .
 - Una rotación con ángulo ϕ con reflexión en el plano \mathbb{R}_λ^2 , y eje de rotación \mathbb{R}_λ con una reflexión simétrica en tal eje.

- Una rotación con ángulo ϕ en \mathbb{R}_λ^2 con eje de rotación \mathbb{R}_λ , y con una reflexión simétrica en \mathbb{R}_λ .
 - La composición de una reflexión en \mathbb{R}_λ^2 con una rotación en torno de \mathbb{R}_λ .
6. Sea \mathbb{C}^n el espacio vectorial complejo a dimensión n sobre \mathbb{C} . Claramente \mathbb{C}^n se puede identificar con \mathbb{R}^{2n} mediante las relaciones

$$\begin{cases} z^j = x^j + iy^j \\ \bar{z}^j = x^j - iy^j \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x^j = \frac{1}{2}(z^j + \bar{z}^j) \\ y^j = \frac{1}{2i}(z^j - \bar{z}^j) \end{cases}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Es decir, el sistema de coordenadas $x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n$ en \mathbb{R}^{2n} induce el sistema de coordenadas $z^1, \dots, z^n, \bar{z}^1, \dots, \bar{z}^n$ en \mathbb{C} . Definamos el **producto escalar hermitiano** en \mathbb{C}^n por

$$\langle \xi, \eta \rangle_{\mathbb{C}} = \sum_{j=1}^n \xi^j \bar{\eta}^j, \quad \xi, \eta \in \mathbb{C}^n$$

donde, por ejemplo, un vector $\xi \in \mathbb{C}^n$ tiene las coordenadas complejas

$$\xi = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n).$$

- a) Demuestre que para cualquier pareja de vectores ξ, η en \mathbb{C}^n o en \mathbb{R}^{2n} , se cumple

$$\langle \xi, \eta \rangle_{\mathbb{R}} = \operatorname{Re} \langle \xi, \eta \rangle_{\mathbb{C}}$$

- b) Utilice el inciso anterior para concluir que si $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ y $\|\cdot\|_{\mathbb{R}}$ representan a las normas respectivas en \mathbb{C}^n y \mathbb{R}^{2n} , entonces para cualquier vector,

$$\|\xi\|_{\mathbb{R}}^2 = \|\xi\|_{\mathbb{C}}^2.$$

- c) Demuestre que si $M(n, \mathbb{C})$ es el conjunto de matrices de $n \times n$ con entradas complejas, el subconjunto

$$\mathbb{GL}(n, \mathbb{C}) = \{A \in M(n, \mathbb{C}) \mid \det A \neq 0\}$$

es un grupo bajo la multiplicación de matrices. Se le llama el **grupo lineal complejo** a dimensión n . Demuestre además que el conjunto

$$\mathbb{SL}(n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{GL}(n, \mathbb{C}) \mid \det A = 1\}$$

es un subgrupo normal de $\mathbb{GL}(n, \mathbb{C})$, llamado el grupo **especial lineal complejo** a dimensión n .

- d) Demuestre que una transformación lineal $L_A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ preserva el producto escalar hermitiano $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$ si y sólo si la matriz asociada compleja A es un elemento del grupo unitario a dimensión n .

Al subgrupo de $\mathbb{U}(n)$ definido por

$$\mathbb{SU}(n) = \{A \in \mathbb{U}(n) \mid \det A = 1\}$$

se le llama el **grupo unitario especial** a dimensión n .

7. Identifique el grupo de matrices complejas al que pertenece cada una de las siguientes matrices.

$$\begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1-i \\ 1+i & \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 5 \\ 1-i & 2 & i \\ 5 & -i & 7 \end{pmatrix}.$$

8. a) Dada la transformación de Möbius

$$f(z) = \frac{z-1}{z-3},$$

obtenga las imágenes del círculo unitario y del eje real.

b) Realice lo mismo para la transformación

$$f(z) = \frac{z - i}{z + 1}.$$

c) Calcule la imagen del eje imaginario bajo la transformación

$$f(z) = \frac{z - 1}{z + 1}.$$

d) Demuestre que una transformación de Möbius

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

lleva el eje real en el eje real si y sólo si a, b, c y d son números reales.

9. a) Dada la isometría de \mathbb{C} ,

$$f(z) = \frac{3 + i}{\sqrt{10}}z + (z - i)$$

calcule la isometría correspondiente de \mathbb{R}^2 y clasifíquela de acuerdo al Teorema 4.17.

b) Dada la isometría del plano

$$f(x, y) = (-y + 2, x - 1)$$

calcule la isometría que induce en \mathbb{C} .

10. Sea $M(n, \mathbb{R})$ el conjunto de matrices $n \times n$ con entradas reales.

a) Demuestre que $M(n, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial isomorfo a \mathbb{R}^{n^2} .

- b) Para una matriz $A = (a_j^i) \in M(n, \mathbb{R})$ se define el número real

$$\|A\|^2 = \sum_{j=1}^n (a_j^i)^2$$

Demuestre que $\|\cdot\|$ es una norma en $M(n, \mathbb{R})$. Esto hace de $M(n, \mathbb{R})$ un espacio vectorial isomorfo a \mathbb{R}^{n^2} con una distancia dada por

$$d(A, B) = \|A - B\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n (a_j^i - b_j^i)^2}, \quad \text{con } B = (b_j^i).$$

- c) Demuestre que $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ es una región de $M(n, \mathbb{R})$ y concluya que su dimensión es n^2 .

De igual forma definimos una norma en el espacio vectorial de matrices complejas $M(n, \mathbb{C})$ como

$$\|A\|^2 = \sum_{i,j} |a_j^i|^2,$$

donde $|a_j^i|$ es el módulo del número complejo a_j^i . Con esto obtenemos que $M(n, \mathbb{C})$ es un espacio vectorial con una distancia e isomorfo a \mathbb{C}^{n^2} . Concluya que $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ es también una región de $M(n, \mathbb{C})$.

11. Dada una transformación $A \in \mathcal{O}(1, 1)$ cuya matriz asociada tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

- a) Demuestre que si hacemos $\beta = c/a$, entonces A se puede escribir de la forma

$$A = \pm \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \pm \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \pm \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}$$

- b) Verifique que si $\beta = \tanh \chi$, entonces la matriz anterior se escribe como

$$A = \pm \begin{pmatrix} \cosh \chi & \pm \sinh \chi \\ \sinh \chi & \pm \cosh \chi \end{pmatrix}$$

- c) Calcule el determinante de una matriz $A \in \mathbb{O}(1, 2)$.
- d) Demuestre que cualquier línea obtenida al intersectar un plano P con \mathbb{L}^2 se puede obtener al aplicar una rotación ortocrónica A en $\mathbb{O}(1, 2)$ a alguna línea vertical (meridiano) dada como la intersección de \mathbb{L}^2 con un plano vertical.
12. Sea $\mu : \mathbb{O}(1, 2) \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ un homomorfismo de grupos dado por

$$\mu(A) = (\det A, \text{signo}\langle e_3, A(e_3) \rangle)$$

donde el vector e_1 genera el eje z en \mathbb{R}_1^3 . Demuestre que μ es un epimorfismo.

13. Considere la transformación de Möbius $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$z = L(w) = \frac{1 + iw}{1 - iw}$$

- a) Demuestre que L lleva el disco de Poincaré \mathbb{D}^2 de radio 1 en la parte superior del plano complejo

$$\mathbb{H}_+^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z \geq 0\}.$$

- b) Demuestre que la métrica en \mathbb{D}^2 dada por

$$ds^2 = 4 \frac{dx^2 + dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

es llevada bajo esta transformación en la métrica en \mathbb{H}_+^2 dada por

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}, \quad y > 0.$$

El Teorema de Gauss-Bonnet

Recordemos uno de los principales teoremas de la geometría diferencial, el Teorema egregio de Gauss (véase, por ejemplo, nuestra discusión en [16]). Este resultado nos dice que la curvatura gaussiana K de una superficie S , aunque definida en términos del entorno \mathbb{R}^3 , es en realidad una propiedad intrínseca de S .

Pero, ¿qué ocurre con la distribución global de los valores de la curvatura? Parecería que esta distribución es tan arbitraria, que podríamos deformar a la superficie S y modificar los valores de K a nuestro antojo. Sin embargo, en este capítulo mostraremos que K tiene algunas restricciones dictadas por la forma de S , es decir, la topología de S determina a K en forma global.

Este resultado, conocido como el **Teorema de Gauss-Bonnet**, es sin duda uno de los más importantes no sólo de la geometría diferencial, sino de la matemática en general, pues establece una relación precisa entre conceptos de dos ramas de las matemáticas, la geometría diferencial y la topología.

Para establecer y demostrar este teorema, necesitaremos construir herramientas como la **característica de Euler-Poincaré** de una superficie y la **teoría de índice** para curvas y campos vectoriales. Después de mostrar el Teorema de Gauss-Bonnet desarrollaremos varias aplicaciones, algunas bastante sorprendentes.

Como podrá verse, en este capítulo utilizaremos conceptos y resultados de varias ramas de las matemáticas, por lo que en algunos casos sólo enunciaremos algunos resultados, sin demostrarlos, proporcionando las referencias adecuadas para los lectores interesados en esos temas.

5.1. La característica de Euler-Poincaré

Dentro del vasto legado matemático de L. Euler aparece una fórmula relativa a un poliedro formado por un número V de vértices, una cantidad A de aristas (segmentos de un vértice a otro) y C caras. Euler observó que para cualquier poliedro convexo se cumple la fórmula

$$V - A + C = 2.$$

Este resultado fue generalizado posteriormente, no sólo para poliedros sino para superficies y objetos de mayor dimensión, dando lugar a la llamada característica de Euler-Poincaré, que definimos a continuación para el caso de una superficie compacta S .

Para ver a S como un “poliedro”, supongamos que podemos descomponerla en una unión finita de subconjuntos $\bigcup T_i \subset S$, cada uno de ellos homeomorfo a un triángulo en el plano.

DEFINICIÓN 5.1. Una descomposición de S del tipo anterior es una **triangulación** de S . Denotaremos a tal descomposición por $\mathcal{T} = \{T_i\}$.

Dada una triangulación \mathcal{T} de la superficie S , denotaremos por V_0 al número de **vértices**, por V_1 al número de **aristas** o **lados** y por V_2 al número de **triángulos** o **caras** de \mathcal{T} .

Para evitar problemas en el conteo de los elementos de una triangulación \mathcal{T} , pediremos una condición técnica.

DEFINICIÓN 5.2. Una triangulación \mathcal{T} de la superficie S se llama **admisible** si y sólo si para cada dos triángulos $T_i, T_j \in \mathcal{T}$ con intersección no vacía ocurre que $T_i \cap T_j$ es todo el triángulo, toda una arista o un vértice.

La figura 5.1 muestra algunos casos a evitar en este contexto. En adelante nos interesarán sólo triangulaciones admisibles.

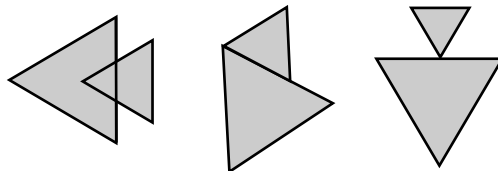


Figura 5.1: Ejemplos de triangulaciones no admisibles.

DEFINICIÓN 5.3. Sea \mathcal{T} una triangulación admisible de la superficie S . El número

$$V_0 - V_1 + V_2$$

se llama la **característica de Euler–Poincaré** de la triangulación \mathcal{T} .

Es sorprendente que el número anterior no dependa de la triangulación específica de S , sino sólo de su forma. Este hecho (que no demostraremos aquí, aunque el lector interesado puede consultar [2]) nos permite establecer la siguiente definición.

DEFINICIÓN 5.4. Dada cualquier triangulación admisible de S , el número $V_0 - V_1 + V_2$ se llama la **característica de Euler–Poincaré** de la superficie S y se denota $\chi(S)$.

EJEMPLO 5.5. Es claro que la característica de Euler–Poincaré de un triángulo es igual a 1. Ya que topológicamente un triángulo es un disco, se sigue que la característica de Euler–Poincaré de cualquier región homeomorfa a un disco D también es igual a 1.

EJEMPLO 5.6. Calculemos la característica de Euler-Poincaré de la esfera \mathbb{S}^2 . Podemos lograr esto de varias formas, una de las cuales consiste en pensar la esfera como un tetraedro “inflado”, como se observa en la figura 5.2 a. En este caso, tenemos cuatro vértices, seis aristas y cuatro caras o triángulos, de modo que $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$.

EJEMPLO 5.7. Sea C un cilindro “sin tapas”, como en la figura 5.2 b. Entonces podemos triangular a C como se muestra en dicha figura, mostrando que $\chi(C) = 0$. \triangleright

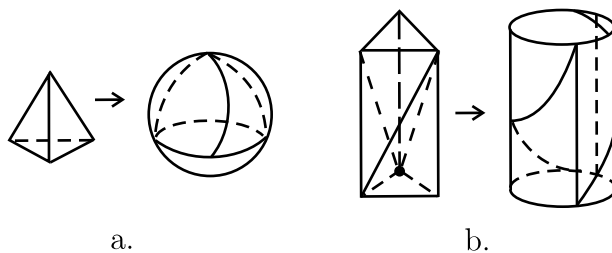


Figura 5.2: Triangulaciones de la esfera y del cilindro.

EJEMPLO 5.8. Calculemos la característica de Euler-Poincaré de un toro \mathbb{T}^2 . En lugar de triangular directamente, mostraremos una manera de “pegar” superficies para obtener un toro y calcular la característica de \mathbb{T}^2 en términos de las características de las superficies utilizadas en el pegado. Observemos que es posible construir un toro recortando dos discos en la esfera y pegando un cilindro al conjunto resultante, como se muestra en la figura 5.3 a. A este procedimiento le llamaremos **agregar un asa**.

Triangulemos ahora a la esfera y al cilindro. Podemos suponer que cada uno de los triángulos T_1 y T_2 recortados a la esfera es un elemento de su triangulación (véase la figura 5.3 b). De este modo,

$$\chi(\mathbb{S}^2 \setminus (T_1 \cup T_2)) = \chi(\mathbb{S}^2) - 2 = 0.$$

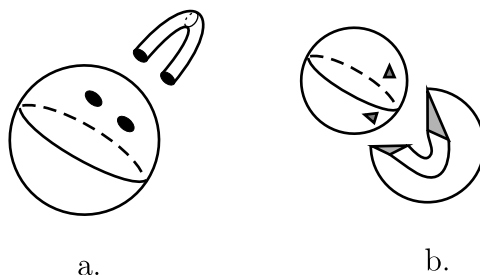


Figura 5.3: **a.** Agregando un asa a una esfera. **b.** Triangulaciones.

Por otro lado, también podemos suponer que los vértices del cilindro coincidirán con los vértices en los huecos anteriores de T_1 y T_2 (véase la figura 5.3 b). Así, este procedimiento no agrega vértices, pero agrega tantas aristas como caras. Esto muestra que la característica del toro está dada por

$$\chi(\mathbb{T}^2) = \chi(\mathbb{S}^2 \setminus (D_1 \cup D_2)) = \chi(\mathbb{S}^2) - 2 = 0,$$

donde D_1 y D_2 son los interiores de T_1 y T_2 .

Podemos utilizar de nuevo este argumento para calcular la característica del **doble toro**, obtenido al agregar un asa al toro, o bien, pegando dos asas a una esfera (véase la figura 5.4 a).

$$\chi(\text{doble toro}) = \chi(\mathbb{T}^2 \setminus (D_1 \cup D_2)) = \chi(\mathbb{T}^2) - 2 = -2.$$

Un argumento típico de inducción muestra que la característica del n -**toro** obtenido al agregar n asas a una esfera es

$$\chi(n\text{-toro}) = 2 - 2n.$$

(véase la figura 5.4 b). ▷

En este contexto podemos citar tres resultados que muestran el poder de la característica como auxiliar en la clasificación de las superficies. De nuevo, referimos al lector a [2].

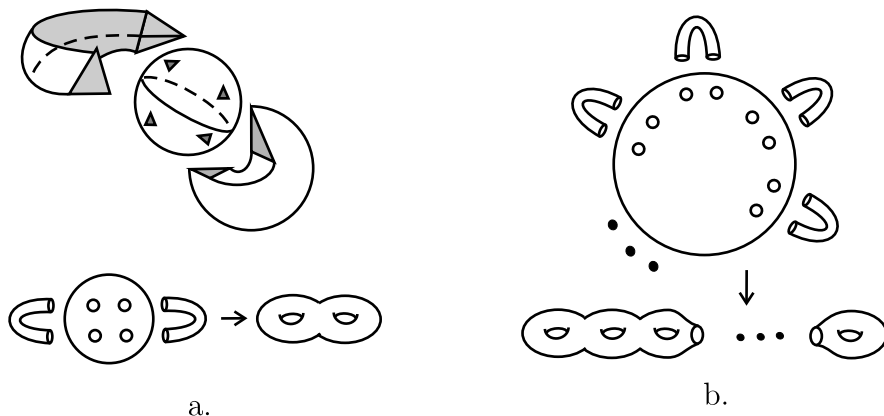


Figura 5.4: **a.** El doble toro obtenido de una esfera. **b.** El n -toro.

PROPOSICIÓN 5.9. *Dada una superficie compacta y orientable S , existe $n \geq 0$ tal que $\chi(S) = 2 - 2n$. Recíprocamente, dada $n \geq 0$ existe una superficie compacta y orientable S tal que $\chi(S) = 2 - 2n$.*

PROPOSICIÓN 5.10. *Si S_1 y S_2 son dos superficies compactas y orientables tales que $\chi(S_1) = \chi(S_2)$, entonces S_1 es homeomorfa a S_2 .*

COROLARIO 5.11. *Sea S una superficie compacta y orientable. Entonces S es homeomorfa a \mathbb{S}^2 o a algún n -toro.*

OBSERVACIÓN 5.12. Tal vez algunos lectores conozcan o deseen conocer la versión más general del teorema de clasificación de superficies compactas, que incluye el caso no orientable. Referimos al lector de nuevo a [2].

La característica de Euler-Poincaré de una superficie S es uno de los números más importantes relativos a dicha superficie. En las siguientes secciones veremos la relación de $\chi(S)$ con otros conceptos geométricos no menos importantes.

5.2. Índice y número de vueltas

Consideremos una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, diferenciable y cerrada, así como un punto p que no esté en la imagen de γ . Nuestra intención es definir el **número de vueltas** que da γ en torno de p .

Este número puede definirse de varias formas. Pensando a \mathbb{R}^2 como el plano complejo \mathbb{C} , podemos definir este número utilizando el siguiente resultado de la teoría de funciones de variable compleja.

LEMA 5.13 ([3], página 115). *Si una curva cerrada diferenciable por partes γ no pasa por el punto p , entonces el valor de la integral*

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z - p}$$

es un múltiplo entero de $2\pi i$.

DEFINICIÓN 5.14. El **número de vueltas** de γ en torno de un punto p está dado por

$$n(\gamma, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - p}.$$

Para definir el número de vueltas de γ en torno de p sin utilizar la variable compleja, podemos utilizar la llamada **teoría de grado**. Aquí no desarrollaremos con detalle esta teoría; sólo daremos un bosquejo de las ideas principales. Invitamos al lector a estudiar dos magníficas y detalladas exposiciones de este tema en [9] y [12].

Sea $r(t)$ el rayo que pasa por p y por $\gamma(t)$. Sea v un vector unitario fijo. Intuitivamente, contaremos las vueltas que da γ en torno de p fijándonos en el número de veces que el rayo $r(t)$ “pasa” por v . A su vez, este último número es igual a la cardinalidad de la imagen inversa $u^{-1}(v)$ bajo la **transformación de dirección** $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^1$ definida por

$$u(t) = \frac{\gamma(t) - p}{\|\gamma(t) - p\|}.$$

Una primera condición técnica necesaria para formalizar esta idea es que la imagen inversa $u^{-1}(v)$ debe constar de un número finito de puntos. Por la compacidad del intervalo $[a, b]$, esto queda garantizado si pedimos que v sea un *valor regular* de u ; es decir, si $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in u^{-1}(v)$ (véase la figura 5.5).

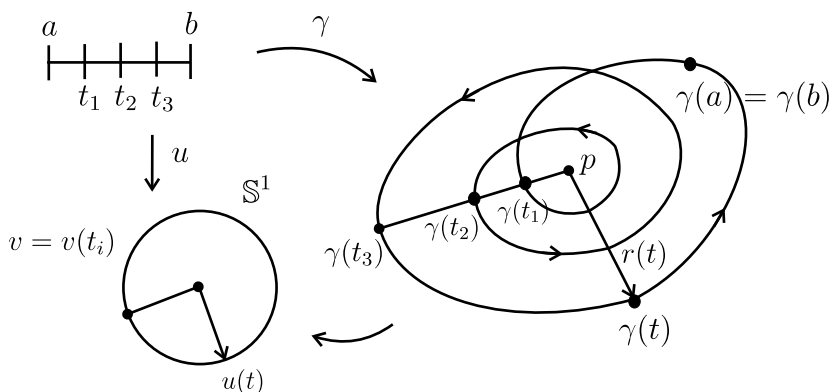


Figura 5.5: Número de vueltas de una curva cerrada.

En segundo lugar, hay que tomar en cuenta la *dirección* cuando pasamos por el vector v . Para esto, damos una orientación a \mathbb{S}^1 y nos fijamos si al pasar $r(t)$ por v se preserva o invierte dicha orientación. Así, cada punto de $u^{-1}(v)$ tiene asociado un **número de orientación** $+1$ o -1 , según se preserve o se invierta la orientación, respectivamente (véase la figura 5.6). Recomendamos al lector trazar varias figuras para convencerse de que la suma de los números de orientación es independiente del vector v elegido.

DEFINICIÓN 5.15. La suma de los números de orientación de los puntos de la preimagen $u^{-1}(v)$ de un valor regular de u se denomina el **número de vueltas** de γ en torno de p .

Cambiaremos ahora un poco nuestro punto de vista. En vez de pensar a los vectores de la transformación $u(t)$ anclados en el punto p , podemos pensarlos anclados en cada $\gamma(t)$ (véase la figura 5.7).

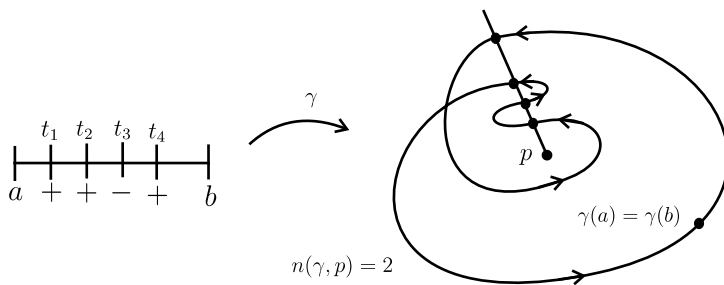


Figura 5.6: Cálculo del número de vueltas. Observe los signos asociados a cada punto en $u^{-1}(v)$.

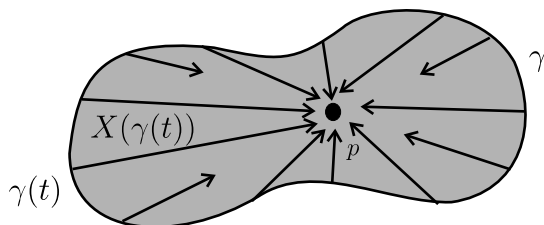


Figura 5.7: $X(\gamma(t))$ pensado como un campo a lo largo de γ .

La ventaja de esta nueva formulación de nuestro problema es que ahora podemos considerar un campo *arbitrario* X de vectores definido a lo largo de γ . Establecemos esta generalización como sigue.

DEFINICIÓN 5.16. Sean $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva diferenciable cerrada y $X = X(\gamma(t))$ un campo diferenciable de vectores no nulos definido a lo largo de γ . Sean $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^1$ la transformación definida por

$$u(t) = \frac{X(\gamma(t))}{\|X(\gamma(t))\|}$$

y v un valor regular de u , de modo que $u^{-1}(v)$ conste de un número finito de puntos $t_1, \dots, t_n \in [a, b]$. Sea $n_i = \pm 1$ el número de orientación asociado a cada t_i como antes. El **número de vueltas** del

campo vectorial X en torno de γ , denotado $n(X, \gamma)$, es la suma de tales números de orientación; es decir,

$$n(X, \gamma) = \sum_{i=1}^n n_i.$$

En los ejercicios de este capítulo daremos varios ejemplos de curvas γ y de campos X definidos a lo largo de éstas, para que los lectores puedan calcular los números $n(X, \gamma)$.

En lo que resta de esta sección mencionaremos dos resultados más de esta teoría. Utilizaremos el primero de ellos en la demostración del teorema de Gauss-Bonnet. El segundo de ellos puede omitirse en una primera lectura.

Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva diferenciable cerrada. Consideremos el número de vueltas que da el campo de vectores tangentes en torno de γ ; es decir, sea

$$X(\gamma(t)) = \gamma'(t).$$

La demostración del siguiente resultado puede consultarse en [7].

TEOREMA 5.17 (Teorema de rotación de las tangentes). *Para cualquier curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ diferenciable, cerrada y sin autointersecciones se cumple que el campo tangente rota una sola vez a lo largo de γ , es decir,*

$$n(\gamma', \gamma) = 1.$$

Sea X un campo vectorial definido en una región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y $p \in \Omega$. El siguiente resultado dice que X da siempre el mismo número de vueltas en curvas cerradas “pequeñas” con centro en p .

PROPOSICIÓN 5.18 (véase [7]). *Para cada $p \in \Omega$ existe $R > 0$ tal que si γ_1, γ_2 son circunferencias con centro en p de radios $r_1, r_2 < R$, orientadas positivamente, entonces $n(X, \gamma_1) = n(X, \gamma_2)$.*

DEFINICIÓN 5.19. Sean $R > 0$ y γ una circunferencia de radio $r < R$ como en la proposición anterior. El número $n(X, \gamma)$ se llama el **índice** de X con respecto de p y se denota $i_X(p)$.

En la figura 5.8 se muestran varios campos vectoriales y sus índices en algunos puntos. Existe un caso particular de poco interés para nosotros: Si p es un punto donde $X(p) \neq 0$, es fácil ver que $i_X(p) = 0$. En ese sentido, es mucho más interesante calcular el índice de X en sus **singularidades**; es decir, en los puntos p tales que $X(p) = 0$.

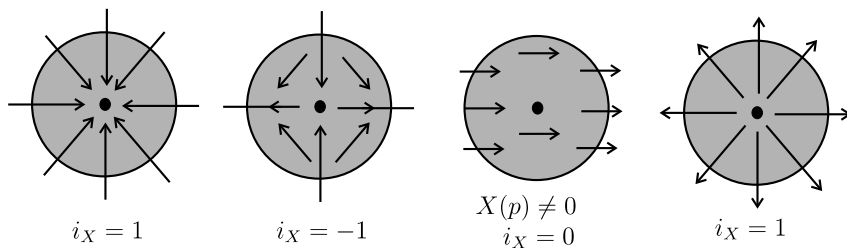


Figura 5.8: Índice de algunos campos vectoriales.

La proposición 5.18 permite extender la definición de índice a campos definidos en superficies diferenciables abstractas.

DEFINICIÓN 5.20. Sean S una superficie diferenciable y X un campo vectorial definido en S . Sean $p \in S$ una singularidad de X y $\varphi : \Omega \rightarrow U$ una parametrización de una vecindad U de p . El **índice** de X en p , denotado $i_X(p)$, se define como

$$i_X(p) = i_Y(q),$$

donde $\varphi(q) = p$ y Y es el único campo vectorial en Ω que satisface $d\varphi(Y) = X$.

No es difícil comprobar que la definición de índice no depende de la parametrización elegida.

Concluimos esta sección estableciendo la primera de las importantes relaciones de la característica de Euler-Poincaré con un concepto geométrico (véase [12]).

TEOREMA 5.21 (Poincaré-Hopf). *Sean S una superficie orientable compacta y X un campo vectorial en S con un número finito de singularidades p_1, \dots, p_k . Entonces*

$$\chi(S) = \sum_{i=1}^k i_X(p_i).$$

En palabras, la característica de Euler-Poincaré es igual a la suma de los índices de X en cada singularidad.

Veamos una primera consecuencia de este teorema. Supongamos que X es un campo en la esfera \mathbb{S}^2 con un número finito de singularidades. Puesto que $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$, la suma que aparece en el teorema es distinta de cero, lo que implica la existencia de al menos una singularidad (recordemos que si p no es singularidad de X , dicha suma es igual a cero). No es difícil imaginar la diversidad de los campos X definidos en \mathbb{S}^2 que tienen un número finito de singularidades, pero . . . ¿Cómo es posible que dichas singularidades se organicen de modo que la suma de sus índices sea siempre igual a 2? Según el teorema 5.21, la topología de la superficie se encarga de hacer tal organización.

5.3. Algunos aspectos históricos

En esta sección discutiremos el desarrollo histórico y las diversas vertientes del Teorema de Gauss-Bonnet, siguiendo de cerca el desarrollo en [11].

En realidad, lo que se conoce como Teorema de Gauss-Bonnet es un conjunto de resultados que giran en torno de una misma idea: la de relacionar diversos conceptos geométricos como áreas, ángulos y curvaturas.

En este sentido, podemos considerar al siguiente conocido teorema como el primer antecedente del teorema de Gauss-Bonnet:

TEOREMA 5.22. *La suma de los ángulos internos de un triángulo en el plano es igual a π .*

Antes de mostrar por qué decimos que este resultado es un antecedente de Gauss-Bonnet, lo reformularemos con la ayuda de la siguiente notación: Si φ es un ángulo interno de un triángulo (o de un polígono cualquiera), entonces $\phi = \pi - \varphi$ es el correspondiente *ángulo externo*.

TEOREMA 5.23. *La suma de los ángulos externos de cualquier triángulo en el plano es igual a 2π .*

Pensemos en un vector tangente a uno de los lados del triángulo y observemos qué ocurre al recorrer dicha figura. Por supuesto, mientras el vector se mantiene en un lado del triángulo, no presentará variación alguna. Pero al llegar a un vértice, el vector tendrá que dar un “salto” para llegar al siguiente lado del triángulo; un salto equivalente al ángulo externo formado por los dos lados en cuestión. Así, el teorema anterior se puede reformular como sigue:

TEOREMA 5.24. *La variación angular total de los vectores tangentes a los lados de un triángulo en el plano es igual a 2π .*

Para nuestros fines posteriores extenderemos este resultado a curvas orientadas en el plano que sean regulares por partes, las que definimos a continuación.

DEFINICIÓN 5.25. Una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ en el plano es **regular por partes** si y sólo si existe una partición de $[a, b]$ de la forma

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k = b,$$

tal que γ restringida a cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, k$, es regular.

Una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ regular por partes dada como la frontera de una región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ está **orientada en sentido positivo** (resp. **negativo**) si y sólo si para cada $t \in [a, b]$, excepto posiblemente por un número finito de puntos, existe una vecindad U de $\gamma(t)$ tal que $U \cap \Omega$ permanece a la izquierda (resp. derecha) del vector $\gamma'(t)$ (véase la figura 5.9).

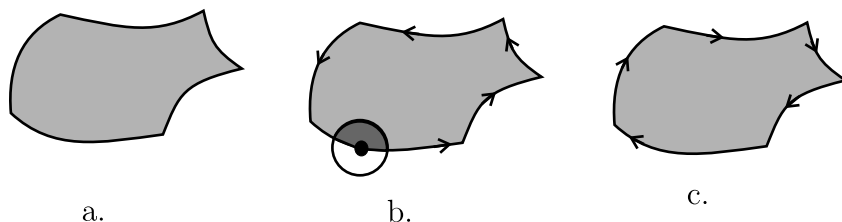


Figura 5.9: Una curva en el plano. **a.** Orientada positivamente. **b.** Orientada negativamente.

DEFINICIÓN 5.26. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada, regular por partes. Un **vértice** de γ es un punto de la curva donde $\gamma'(t) = 0$.

Si $\gamma(t_0)$ es un vértice de la curva γ , definimos el **ángulo externo** θ en dicho vértice como sigue (véase la figura 5.10 a): $|\theta|$ es el menor ángulo en $(0, \pi]$ formado por los límites laterales

$$\gamma'(t_0^-) := \lim_{t \rightarrow t_0^-} \gamma'(t) \quad \text{y} \quad \gamma'(t_0^+) := \lim_{t \rightarrow t_0^+} \gamma'(t).$$

Si $|\theta| = \pi$, se dice que $\gamma(t_0)$ es una **cúspide** de γ (véase la figura 5.10 b).

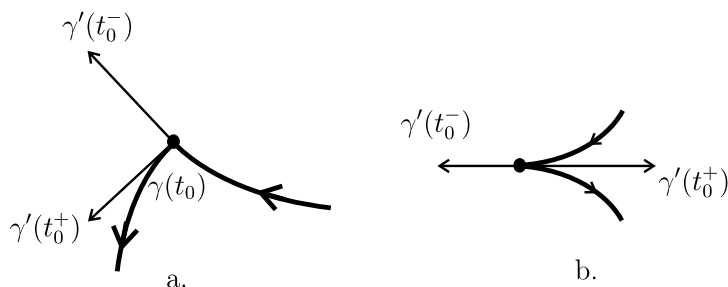


Figura 5.10: **a.** Ángulo externo. **b.** Cúspide.

Si el punto no es una cúspide, damos a θ el signo del determinante de la matriz formada por los límites anteriores, en ese orden.

Si $\gamma(t_0)$ es una cúspide, se puede mostrar que existe $\epsilon > 0$ tal que el determinante de la matriz formada por los vectores

$$\gamma'(t_1) \quad \text{y} \quad \gamma'(t_2).$$

no cambia de signo para $t_1 \in (t_0 - \epsilon, t_0)$, $t_2 \in (t_0, t_0 + \epsilon)$. Damos a θ este signo.

DEFINICIÓN 5.27. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva plana, cerrada, regular por partes, con vértices $\gamma(t_0), \dots, \gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k) = \gamma(t_0)$. Para cada $i = 1, \dots, k$, sea $\alpha_i : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable por partes tal que para cada $t \in [a, b]$, $\alpha_i(t)$ mide el ángulo formado por $\gamma'(t)$ con alguna dirección fija. Sean $\theta_1, \dots, \theta_k$ los ángulos externos en los vértices de γ . La **variación angular total** de los vectores tangentes a γ se define como la suma

$$\sum_{i=1}^k (\alpha_i(t_i) - \alpha_i(t_{i-1})) + \sum_{i=1}^k \theta_i.$$

Ahora podemos enunciar la generalización del teorema 5.24.

TEOREMA 5.28. *La variación angular total de los vectores tangentes a una curva plana, cerrada, regular por partes y orientada positivamente (resp. negativamente) es igual a 2π (resp. a -2π).*

Podemos extender aún más este resultado a las superficies orientables inmersas en \mathbb{R}^3 , pues en este caso podemos definir la orientación de una curva. Más concretamente, sea S una superficie orientable, con un campo vectorial normal $n : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ globalmente definido. Si $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ es una curva regular por partes dada como la frontera de una región $R \subset S$, decimos que γ está **orientada en sentido positivo** (resp. **negativo**) si y sólo si para cada $t \in [a, b]$, excepto posiblemente por un número finito de puntos, existe una vecindad U de $\gamma(t)$ en \mathbb{R}^3 tal que la intersección $U \cap R$ está “a la izquierda” del vector $\gamma'(t)$; es decir, contenida en el semiespacio determinado por el

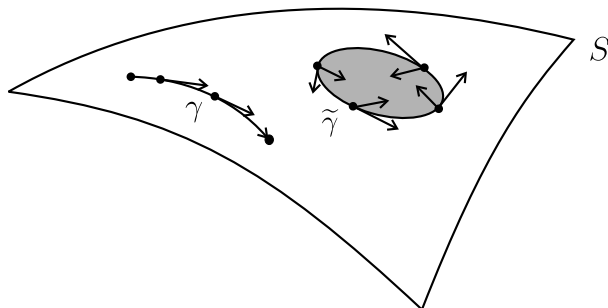


Figura 5.11: Curvas orientadas en una superficie.

plano generado por $\gamma'(t)$ y $n(\gamma(t))$, hacia el cual apunta $\gamma''(t)$ (véase la figura 5.11).

Con esta notación, se puede ver que el teorema 5.28 es válido para curvas orientadas contenidas en una superficie orientable, dadas como la frontera de una región simplemente conexa.

Los resultados anteriores se refieren a la variación de los vectores tangentes a una curva. Si quisiéramos analizar una situación similar en el caso de una superficie, nuestro primer problema en este nuevo contexto es que en cada punto de una superficie hay una infinidad de vectores tangentes, por lo que no tiene sentido hablar de su variación total.

Revisemos el caso de las curvas planas. Observemos que en este caso es equivalente fijarse en la variación total de los vectores tangentes y en la variación total de los vectores *normales*. En el caso de las superficies, en vez de fijarnos en los vectores tangentes podremos estudiar la variación de un vector normal a la superficie en un punto dado. En otras palabras, habrá que estudiar la diferencial dn_p de la aplicación de Gauss $n : S \rightarrow \mathbb{S}^2$.

En este caso tenemos el siguiente resultado. Omitiremos su prueba, pero el lector interesado puede consultarla en [8] (Teorema 26.2, pág. 192).

LEMA 5.29. Sean K la curvatura de $S \subset \mathbb{R}^3$, $d\sigma$ el elemento de área

de S y $\Omega(\theta, \phi) = \text{sen } \theta \, d\theta \, d\phi$ el elemento de área de \mathbb{S}^2 en coordenadas esféricas. Entonces

$$K(p) \, d\sigma = \text{sen } \theta(n(p)) \, d\theta(n(p)) \, d\phi(n(p)),$$

donde $(\theta, \phi) = n(p)$ son las coordenadas de la aplicación de Gauss en \mathbb{S}^2 .

De lo anterior tenemos que la variación del vector normal n en una vecindad de un punto p tiene que ver con la curvatura K de S en p , pues mientras mayor curvatura se tenga, mayor será la variación del vector normal.

Si queremos obtener una expresión para la **variación total del vector normal** en una región $R \subset S$, podríamos considerar la integral

$$\iint_R K \, d\sigma$$

donde $d\sigma$ es el elemento de área de S .

Podemos enunciar una primera generalización del teorema 5.24 al caso de una superficie concreta (la esfera unitaria).

Diremos que un **triángulo geodésico** en la esfera unitaria \mathbb{S}^2 es una región acotada por tres círculos máximos.

TEOREMA 5.30. *Sea R un triángulo geodésico en la esfera unitaria \mathbb{S}^2 . Entonces la variación total del vector normal en R es igual al área de R . En símbolos,*

$$\iint_R K \, d\sigma = \text{Área de } R.$$

Ésta fue la versión del teorema principal de este capítulo demostrada por Gauss en 1825. En general, el Teorema de Gauss-Bonnet relaciona la variación total del vector normal (es decir, la integral de la curvatura gaussiana) en una región R de una superficie orientable

S con la variación angular de los vectores tangentes a la frontera de R .

En la sección 5.4 presentaremos una versión local de este resultado (en un tipo particular de región, contenida en la imagen de una parametrización) y en la sección 5.5 mostraremos una versión global, relacionando la integral de la curvatura en S con la característica de Euler-Poincaré.

Para concluir esta sección citaremos a Gottlieb (véase [11]), quien afirma que existen algunos resultados de Descartes (publicados hasta 1860) y Dyck (1888) que extienden los teoremas de Gauss y Bonnet y observan por vez primera la relación entre la integral de la curvatura gaussiana y la característica de Euler-Poincaré.

En este sentido, Gottlieb sugiere que el conocido teorema de Gauss-Bonnet debería ser llamado el Teorema de Descartes-Dyck. Éste es un caso más en la historia donde se conjuga el esfuerzo de muchas personas, aunque sólo una o dos de ellas se conviertan en parte integral del nombre de un resultado.

5.4. Gauss-Bonnet I: La versión local

En esta sección daremos una demostración sencilla de un caso particular de nuestro teorema, usando algunas restricciones que iremos eliminando en refinamientos posteriores. Sea R una región contenida en la imagen de una parametrización $\varphi : \Omega \rightarrow S$ de una superficie orientada S . Supondremos, sólo para facilitar nuestros cálculos, que φ es ortogonal.

Diremos que $R \subset S$ es **simple** si es homeomorfa a un disco en \mathbb{R}^2 . Supongamos que R es simple y que la frontera de R se puede describir mediante una geodésica $\gamma : [a, b] \rightarrow S$, cerrada, regular por partes, orientada positivamente, parametrizada por longitud de arco. Más adelante eliminaremos la restricción de que γ sea una geodésica.

Sean $\gamma(s_0), \dots, \gamma(s_{k-1}), \gamma(s_k) = \gamma(s_0)$ los vértices de γ y $\theta_1, \dots, \theta_k$ los ángulos externos en los vértices de γ .

TEOREMA 5.31 (Gauss-Bonnet, primera versión local). *Con las notaciones anteriores se cumple la igualdad*

$$\iint_R K d\sigma + \sum_{i=1}^k \theta_i = 2\pi. \quad (5.1)$$

Demostración. Para cada $i = 1, \dots, k$, sea $\alpha_i : [s_{i-1}, s_i] \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable por partes tal que para cada $s \in [a, b]$, $\alpha_i(s)$ mide el ángulo formado por $\gamma'(s)$ con el vector φ_u . Por el Teorema 5.28, basta demostrar que

$$\iint_R K d\sigma = \sum_{i=1}^k (\alpha_i(s_i) - \alpha_i(s_{i-1})).$$

Puesto que cada α_i es diferenciable, podemos escribir lo anterior como

$$\iint_R K d\sigma = \sum_{i=1}^k \int_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{d\alpha_i}{ds} ds.$$

Esta forma integral sugiere el uso de uno de los teoremas fundamentales del cálculo. Recordemos la siguiente expresión para la curvatura geodésica de una curva arbitraria, con respecto de una parametrización ortogonal, obtenida en la proposición 2.45,

$$k_g(s) = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right) + \frac{d\alpha_i}{ds} ds.$$

En nuestro caso, la curvatura geodésica se anula en todo punto $s \in [a, b]$. Al integrar la expresión anterior en cada intervalo $[s_{i-1}, s_i]$ tenemos que

$$\sum_{i=1}^k \int_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{d\alpha_i}{ds} ds = - \sum_{i=1}^k \int_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right) ds.$$

Usando el teorema de Green en la expresión del lado derecho, tenemos que

$$\sum_{i=1}^k \int_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{d\alpha_i}{ds} ds = \iint_{\varphi^{-1}(R)} \left(\left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u \right) du dv.$$

Pero el integrando del lado derecho es precisamente la expresión para la curvatura con respecto de una parametrización ortogonal (véase el ejercicio 16 de este capítulo), lo que muestra la afirmación y concluye la demostración del teorema. \square

OBSERVACIÓN 5.32. Para simplificar los cálculos en la demostración, supusimos que la parametrización φ era ortogonal. Sin embargo, puede demostrarse que la expresión (5.1) es independiente de la parametrización.

Por otro lado, la demostración del teorema sugiere la siguiente generalización al caso en que γ no es una geodésica en una superficie diferenciable orientable.

TEOREMA 5.33 (Gauss-Bonnet, segunda versión local). *Sea R una región simple contenida en la imagen de una parametrización $\varphi : \Omega \rightarrow S$ de una superficie diferenciable orientada S . Supongamos que la frontera de R se puede describir por medio de una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow S$, cerrada, regular por partes, orientada positivamente y parametrizada por longitud de arco con curvatura geodésica $k_g(s)$. Si $\theta_1, \dots, \theta_k$ son los ángulos externos de γ , entonces se cumple la igualdad*

$$\sum_{i=1}^k \int_{s_{i-1}}^{s_i} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{i=1}^k \theta_i = 2\pi.$$

Utilizaremos esta versión del teorema en la próxima sección.

5.5. Gauss-Bonnet II: La versión global

Usaremos la segunda versión local del teorema de Gauss-Bonnet para demostrar el siguiente resultado.

TEOREMA 5.34 (Gauss-Bonnet, versión global). *Sea R una región contenida en una superficie diferenciable orientada S . Supongamos que la frontera de R está formada por un número finito de curvas $\gamma_j : [a, b] \rightarrow S$, $j = 1, \dots, N$, cerradas, regulares por partes, orientadas positivamente, y parametrizadas por longitud de arco con curvatura geodésica k_g . Si $\theta_1, \dots, \theta_k$ son los ángulos externos de estas curvas, entonces*

$$\sum_{j=1}^N \int_{\gamma_j} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{i=1}^k \theta_i = 2\pi\chi(R).$$

Demostración. Sea $\mathcal{T} = \{T_i\}$ una triangulación de la región R con V vértices, A aristas y C caras, de modo que cada triángulo esté contenido en la imagen de una parametrización. Si aplicamos el teorema 5.33 a cada triángulo y sumamos los resultados, obtenemos

$$\sum_{i=j}^N \int_{\gamma_i} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum \tilde{\theta}_l = 2\pi C,$$

donde $\sum \tilde{\theta}_l$ representa la suma de los ángulos externos de todos los triángulos de \mathcal{T} . Queremos mostrar que

$$\sum \tilde{\theta}_l = 2\pi(A - V) + \sum_{i=1}^k \theta_i.$$

Para esto, haremos uso de los ángulos internos $\beta_l = \pi - \tilde{\theta}_l$ de cada triángulo para escribir

$$\sum \tilde{\theta}_l = \sum (\pi - \beta_l) = 3\pi C - \sum \beta_l.$$

Podemos descomponer la expresión de la derecha, clasificando los vértices de \mathcal{T} en tres conjuntos, con V_1, V_2, V_3 elementos en cada conjunto. El primer conjunto está formado por los vértices de las curvas γ_j . El segundo conjunto es el de los vértices distintos de los anteriores y que se encuentran en la frontera de R . Finalmente, el tercer conjunto es el de los vértices de \mathcal{T} que están en el interior de R . Si β_i es el ángulo interno en cada uno de los vértices de las curvas γ_j , tenemos que

$$\begin{aligned} 3\pi C - \sum \beta_l &= 3\pi C - \left(\sum_{i=1}^k \beta_i + \pi V_2 + 2\pi V_3 \right) \\ &= 3\pi C - \left(\sum_{i=1}^k (\pi - \theta_i) + \pi V_2 + 2\pi V_3 \right) \\ &= 3\pi C - \pi V_1 + \sum_{i=1}^k \theta_i - \pi V_2 - 2\pi V_3. \end{aligned}$$

Para simplificar lo anterior observamos que se cumple la fórmula $3C = 2A_i + A_e$, donde A_e es el número de aristas de la triangulación que forman parte de la frontera de R y A_i es el número de las aristas restantes. Observemos además que $A_e = V_1 + V_2$, de modo que

$$3C = 2A_i + A_e = 2A_i + V_1 + V_2.$$

Tenemos entonces que

$$3\pi C - \pi V_1 + \sum_{i=1}^k \theta_i - \pi V_2 - 2\pi V_3 = 2\pi A_i + \sum_{i=1}^k \theta_i - 2\pi V_3.$$

Sumamos y restamos $A_e = V_1 + V_2$ para obtener finalmente

$$\begin{aligned} \sum \tilde{\theta}_i &= 2\pi A_i + 2\pi A_e - 2\pi V_1 - 2\pi V_2 + \sum_{i=1}^k \theta_i - 2\pi V_3 \\ &= 2\pi(A - V) + \sum_{i=1}^k \theta_i, \end{aligned}$$

□

5.6. Aplicaciones

El Teorema de Gauss-Bonnet 5.34 puede verse como un resultado que relaciona la geometría de una superficie (representada en los ángulos y las curvaturas) con su topología (representada por la característica de Euler). Como veremos, la existencia de esta relación establece fuertes restricciones sobre las superficies en ambas direcciones, la geométrica y la topológica.

Veamos una primera aplicación del teorema.

PROPOSICIÓN 5.35. *Sea R una región triangular en una superficie S acotada por las curvas $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, con ángulos externos $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. Entonces*

$$\sum_{j=1}^3 \int_{\gamma_j} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{i=1}^3 \theta_i = 2\pi.$$

En particular, si las aristas del triángulo son geodésicas de S , se tiene

$$\iint_R K d\sigma + \sum_{i=1}^3 \theta_i = 2\pi.$$

Demostración. Observe que la característica de una región triangular es igual a 1. □

Si definimos los ángulos internos $\beta_i = \pi - \theta_i$, obtenemos

COROLARIO 5.36. *La suma de los ángulos internos de un triángulo geodésico en una superficie S con curvatura gaussiana K es*

1. *menor que π si $K < 0$.*
2. *igual a π si $K \equiv 0$.*
3. *mayor que π si $K > 0$.*

Ahora veamos una aplicación del teorema al estudio de las áreas.

PROPOSICIÓN 5.37. *Sea R un triángulo geodésico en la esfera unitaria \mathbb{S}^2 , con ángulos internos $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. Entonces*

$$\text{Área}(R) + \sum_{i=1}^3 \theta_i = 2\pi.$$

Demostración. Basta observar que, como $K \equiv 1$,

$$\iint_R K \, d\sigma = \text{Área}(R).$$

□

Veamos ahora algunas consecuencias globales de nuestro teorema.

PROPOSICIÓN 5.38. *Sea S una superficie compacta en \mathbb{R}^3 . Entonces*

$$\iint_S K \, d\sigma = 2\pi\chi(S). \quad (5.2)$$

Demostración. Recordemos que S es necesariamente orientable. Podemos pensar a S como una región con frontera vacía, o bien descomponer a la superficie en una unión finita de regiones R_i tales que la frontera de cada región sea una curva orientada positivamente. En este caso, es fácil ver que los demás términos de la fórmula de Gauss-Bonnet se anulan, de modo que obtenemos (5.2). □

La expresión (5.2) es sin duda notable. Como sabemos, la curvatura es un concepto métrico, en cierta medida asociado a una cierta “rigidez” de una superficie S . Sin embargo, la característica de Euler es un concepto topológico. Podemos estirar, doblar o curvar a una superficie y el valor $\chi(S)$ seguirá siendo el mismo. De esta manera, en todas las superficies obtenidas de esta manera, la distribución de los valores de la curvatura $K(p)$ se equilibran para que su “suma” (es decir, la integral) se mantenga constante. Veamos qué consecuencias tiene la fórmula (5.2).

COROLARIO 5.39. *Sea S una superficie en \mathbb{R}^3 , homeomorfa a una esfera. Entonces S tiene al menos un punto elíptico.*

Demostración. Por la igualdad (5.2), tenemos que

$$\iint_S K d\sigma = 2\pi\chi(S).$$

Como S es homeomorfa a una esfera, tenemos que

$$\chi(S) = \chi(\mathbb{S}^2) = 2.$$

Así, la integral $\iint_S K d\sigma$ es positiva. Si suponemos que S no tiene puntos elípticos, entonces $K \leq 0$ y tendríamos que la integral es negativa o cero, lo cual es una contradicción. \square

En los ejercicios de esta sección se verán otros ejemplos de aplicación de este teorema.

Ejercicios

1. Calcule la característica de Euler de las siguientes superficies, dando una triangulación específica.
 - a) El elipsoide.
 - b) El toro.
 - c) El doble toro.

2. Existe una operación de “pegado” en las superficies, que puede describirse como sigue. Sean S_1 y S_2 dos superficies cualesquiera y D_1 y D_2 discos abiertos en cada una de ellas. Sea $h : \partial D_1 \rightarrow \partial D_2$ un homeomorfismo entre las fronteras de estos discos. La **suma conexa** de S_1 y S_2 , que se denota $S_1 \# S_2$, es la superficie que se obtiene de la unión $(S_1 \setminus D_1) \cup (S_2 \setminus D_2)$ identificando cada punto $x \in \partial D_1$ con $h(x) \in \partial D_2$ (véase la figura 5.12).

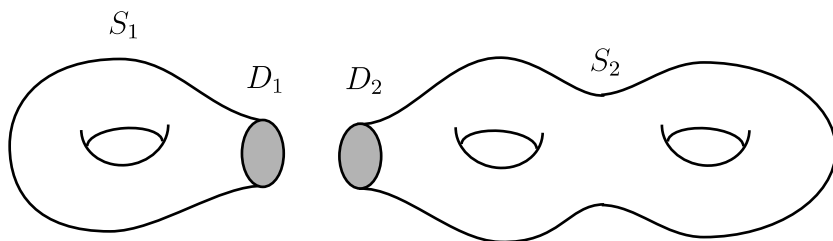


Figura 5.12: Suma conexa de superficies.

- a) Demuestre que para cualquier superficie S se cumple que $S \# \mathbb{S}^2$ es homeomorfa a S ; es decir, que \mathbb{S}^2 sirve como neutro para la suma conexa.
- b) Demuestre que

$$\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2.$$

3. Calcule la característica de Euler-Poincaré de $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$.
4. Calcule la característica de Euler-Poincaré de la botella de Klein \mathbb{K}^2 .
5. Calcule el número de vueltas de cada una de las curvas en la figura 5.13 en torno de los puntos señalados.
6. Calcule el número de vueltas de cada uno de los campos de la figura 5.14 con respecto de las curvas indicadas.
7. Calcule el índice de cada uno de los campos de la figura 5.15 con respecto de la singularidad indicada.
8. Demuestre el teorema 5.28 para una curva plana cerrada regular.
9. Sin utilizar el teorema de Gauss-Bonnet, demuestre directamente el teorema 5.30.

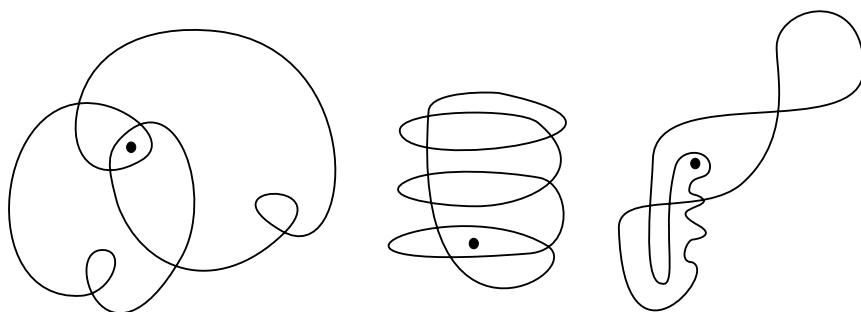


Figura 5.13: Curvas para el ejercicio 5.

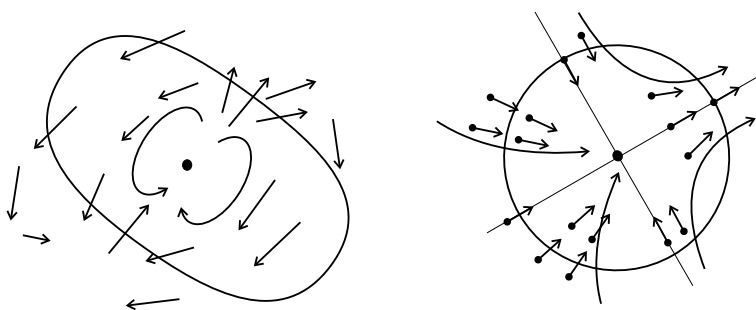


Figura 5.14: Campos y curvas para el ejercicio 6.

10. Sea S una superficie en \mathbb{R}^3 homeomorfa a un toro. Demuestre que S debe tener puntos elípticos, hiperbólicos y planos.
11. Demuestre que no existen superficies compactas en \mathbb{R}^3 con curvatura gaussiana negativa.¹
12. Sean γ_1, γ_2 dos geodésicas que parten de un punto p en una superficie S con curvatura cero. Muestre que las geodésicas no pueden volver a cortarse en un punto q de modo que formen la frontera de una región simple. ¿Qué ocurre si S tiene curvatura negativa? ¿Y si S tiene curvatura positiva?

¹Este resultado es válido también para superficies completas no compactas.

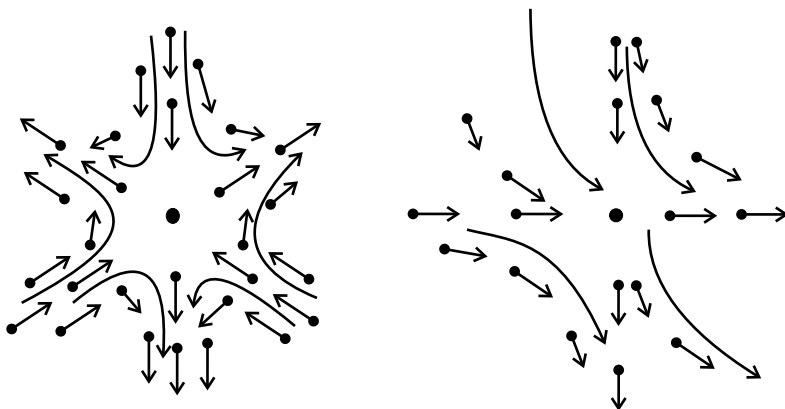


Figura 5.15: Campos y singularidades para el ejercicio 7.

13. Demuestre el teorema de Euler para poliedros ($V - A + C = 2$) aplicando el teorema de Gauss-Bonnet.
14. Es posible realizar dos cortes en un toro \mathbb{T}^2 para obtener una región simple (véase la figura 5.16). Demuestre, sin usar el teorema de Gauss-Bonnet, que

$$\iint_{\mathbb{T}^2} K d\sigma = 0.$$

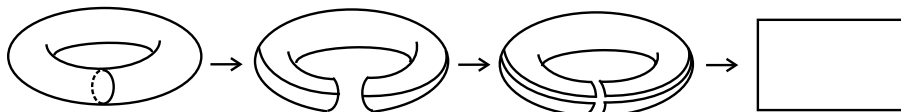


Figura 5.16: Dos cortes en un toro.

15. De manera análoga al ejercicio anterior, muestre que es posible realizar $2p$ cortes a una superficie compacta de género p (una

esfera con p asas) para obtener una región simple. Aplique el teorema de Gauss-Bonnet a esta región para obtener

$$\iint_{\mathbb{T}^2} K d\sigma = 4\pi(1 - p).$$

16. Demuestre que en una parametrización ortogonal, la curvatura gaussiana tiene la siguiente expresión:

$$K(u, v) = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u \right).$$

17. Considere el plano de Lobachevsky \mathbb{L}^2 . ¿Cómo es, respecto a π , la suma de los ángulos interiores de un triángulo geodésico en el plano de Lobachevsky \mathbb{L}^2 ?

APÉNDICE A

Funciones complejas analíticas

Consideremos el campo de los números complejos \mathbb{C} provisto de un sistema de coordenadas (z, \bar{z}) , identificado con el plano \mathbb{R}^2 de coordenadas x, y a través de las fórmulas

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}), \quad (\text{A.1})$$

siendo el número complejo $z = x + iy$ y el número $\bar{z} = x - iy$ su conjugado.

Dada una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, ésta tiene una representación como una función $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, donde

$$f(x, y) = g(z, \bar{z}).$$

La forma compleja de la diferencial de $g = g(z, \bar{z})$ en el punto (z, \bar{z}) es

$$dg = \frac{\partial g}{\partial z} dz + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} d\bar{z}.$$

DEFINICIÓN A.1. Una función $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se llamará **analítica** (en la coordenada z de \mathbb{C}) si y sólo si g no depende de la variable conjugada \bar{z} , esto es, si

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \equiv 0.$$

EJEMPLO A.2. Considérese $f : \mathbb{R}_{(x,y)}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{(u,v)}^2$ definida por

$$f(x, y) = (x^2 + y^2, -2xy) = (u, v).$$

Entonces f induce una función $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$w = u + iv = (x^2 + y^2) + i(-2xy) = z\bar{z} + \frac{1}{2}(z^2 - \bar{z}^2) = g(z, \bar{z}).$$

Claramente g no es analítica en virtud de que

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = z - \bar{z} \neq 0.$$

▷

EJEMPLO A.3. Sea f la función $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy) = (u, v)$, la cual induce la función $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$w = u + iv = (x^2 - y^2) + i(2xy) = z^2 = g(z, \bar{z}).$$

En este caso, $g(z, \bar{z}) = z^2$ es analítica, pues se cumple la igualdad

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(z^2) \equiv 0.$$

▷

OBSERVACIÓN A.4. Las relaciones $z = x + iy$ y $\bar{z} = x - iy$ implican las siguientes igualdades para la función $g = g(z, \bar{z})$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial z}(1) + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(1) \\ &= \frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) (g) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial z}(i) + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(-i) \\ &= i \left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \right) = i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) (g) \end{aligned}$$

Por lo tanto, se obtienen las igualdades operacionales

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)\end{aligned}$$

Por otro lado, considerando $f(x, y)$ como una función compleja analítica $g(z, \bar{z})$, y tomando en cuenta las ecuaciones (A.1), se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{1}{2i} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) (f)\end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{-1}{2i} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2i} \frac{\partial f}{\partial y} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} \right) (f) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (f)\end{aligned}$$

de las cuales se obtienen las igualdades operacionales

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

Por esto, la función $g(z, \bar{z})$ es analítica si y sólo si

$$0 = \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + iv)$$

lo que equivale a

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$$

Al igualar a cero las partes real e imaginaria en la última ecuación, se tiene que g es una función analítica si y solamente si se cumplen las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} &= 0, \end{aligned}$$

llamadas las ecuaciones de **Cauchy-Riemann**.

EJEMPLO A.5. Para la función $f(x, y) = (x^2 + y^2, -2xy) = (u, v)$ del ejemplo A.2 se tiene que

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 2x - (-2x) = 4x \neq 0,$$

de modo que g no cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann, lo que implica la no analiticidad de la función inducida $g = g(z, \bar{z})$. \triangleright

EJEMPLO A.6. Para la función $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy) = (u, v)$ del ejemplo A.3 se tienen las igualdades

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} &= 2x - 2x \equiv 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} &= 2y + (-2y) \equiv 0 \end{aligned}$$

lo que implica que se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann y de allí la analiticidad de la función inducida

$$g = g(z, \bar{z}) = z^2.$$

▷

DEFINICIÓN A.7. Un **biholomorfismo** de una región Ω del plano complejo \mathbb{C} con coordenadas z, \bar{z} es una función $f : \Omega \rightarrow \Omega$ invertible, analítica y con inversa $f^{-1} : \Omega \rightarrow \Omega$ analítica.

EJEMPLO A.8. Consideremos una transformación lineal $L_\lambda : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por

$$L_\lambda(z) = \lambda z$$

donde $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Ya que $\frac{\partial L_\lambda}{\partial \bar{z}} = 0$, entonces L_λ es analítica. Por otro lado, dado $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ se tiene que en coordenadas $z = x + iy$ la transformación L_λ se escribe como

$$L_\lambda(z) = \lambda z = (a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(bx + ay)$$

Esta función L_λ induce en \mathbb{R}^2 la transformación lineal

$$L_A(x, y) = (ax - by, bx + ay)$$

que matricialmente y en la base canónica se escribe

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

es la matriz de la transformación lineal inducida por $g(z)$. Entonces,

$$\det A = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 = |\lambda|^2$$

el cual es diferente de cero (pues $\lambda \neq 0$), de modo que A es invertible.

Escribiendo $a+bi = \lambda = |\lambda|(\cos \varphi, \text{sen } \varphi)$ se tiene una identificación

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mapsto |\lambda| \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\text{sen } \varphi \\ \text{sen } \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

donde el segundo elemento es el producto de $|\lambda|$ con un elemento del grupo $\mathbb{SO}(2)$. ▷

Topología y espacios métricos

En este apéndice incluimos los resultados básicos de la Topología y de la teoría de los espacios métricos. Dos referencias clásicas que sugerimos al lector son [4] y [18].

DEFINICIÓN B.1. Sea X un conjunto. Una **topología** en X es una colección \mathcal{U} de subconjuntos de X , con las siguientes propiedades:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{U}$;
2. Para cualquier familia finita $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{U}$, se cumple que

$$\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{U};$$

3. Para una familia arbitraria $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{U}$, se cumple que

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{U}.$$

Si una colección \mathcal{U} satisface las propiedades anteriores, se llama a los elementos de \mathcal{U} los **abiertos** de dicha topología.

Un **espacio topológico** es una pareja (X, \mathcal{U}) , donde X es un conjunto y \mathcal{U} es una topología en X .

EJEMPLO B.2. Las colecciones $\mathcal{U}_1 = \{X, \emptyset\}$ y $\mathcal{U}_2 = \mathcal{P}(X)$, donde $\mathcal{P}(X)$ denota el conjunto potencia de X , son topologías en cualquier conjunto X , como el lector podrá verificar fácilmente.

DEFINICIÓN B.3. Sean (X, \mathcal{U}) y (Y, \mathcal{V}) espacios topológicos y $\varphi : X \rightarrow Y$ una aplicación entre ellos.

1. φ es **continua** si y sólo si para cada abierto $V \in \mathcal{V}$ se cumple que su imagen inversa $\varphi^{-1}(V)$ es un abierto en X ; es decir, si $\varphi^{-1}(V) \in \mathcal{U}$.
2. φ es un **homeomorfismo** si y sólo si φ es biyectiva, continua y su inversa $\varphi^{-1} : Y \rightarrow X$ también es continua.

En nuestro caso, los ejemplos más relevantes de espacios topológicos serán aquellos cuya topología surja de una función distancia.

DEFINICIÓN B.4. Sea X un conjunto arbitrario. Una **distancia** en X es una función $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface las siguientes condiciones:

1. $d(x, y) \geq 0$ para cualesquiera $x, y \in X$, y $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$ para cualesquiera $x, y \in X$.
3. Para cualesquiera $x, y, z \in X$ se cumple la **desigualdad del triángulo**

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Un **espacio métrico** es una pareja (X, d) , donde X es un conjunto dotado de una distancia d .

EJEMPLO B.5. La función $d_e : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d_e(x, y) = \|x - y\|$$

define una distancia en \mathbb{R}^3 , que llamaremos **distancia euclidiana**. Dado un conjunto arbitrario $X \subset \mathbb{R}^3$, podemos dotarlo de una distancia, restringiendo d_e a los elementos de X . Así, cualquier subconjunto de \mathbb{R}^3 es un espacio métrico. Éste es un ejemplo de una distancia extrínseca, en el sentido de que está definida en términos del ambiente donde vive X . \triangleright

DEFINICIÓN B.6. Sean (X, d) un espacio métrico. Entonces

1. Si $p \in X$ y δ es un número real positivo, la **bola con centro en p y radio δ** , denotada $B(p, \delta)$, es el conjunto

$$B(p, \delta) = \{ q \in X \mid d(p, q) < \delta \}.$$

2. Un conjunto $A \subset X$ está **acotado** si y sólo si existe un punto $p \in X$ y un número $\delta > 0$ tal que $A \subset B(p, \delta)$.
3. Un conjunto $\Omega \subset X$ es **abierto** si y sólo si para cada $p \in \Omega$ existe $\delta > 0$ tal que $B(p, \delta) \subset \Omega$.
4. Un conjunto $\Lambda \subset X$ es **cerrado** si y sólo si su complemento $X \setminus \Lambda$ es abierto.

El lector debe notar que en el inciso (3) de la definición anterior estamos determinando cuáles deben ser los conjuntos abiertos en un espacio métrico. Es decir, si definimos \mathcal{U} como la colección de subconjuntos de X abiertos de acuerdo con (3), entonces el lector podrá convencerse que \mathcal{U} es una topología en X , llamada la topología **inducida** por la métrica de X .

EJEMPLO B.7. En el ejemplo 1.4 definimos una distancia en el plano proyectivo real. En dicho ejemplo utilizamos la topología de \mathbb{RP}^2 inducida por dicha distancia.

DEFINICIÓN B.8. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en un espacio métrico (X, d) . Entonces

1. $\{x_n\}$ es **convergente** en X si y sólo si existe $x \in X$ tal que para todo $\epsilon > 0$ existe un número real N tal que si $n > N$ entonces

$$d(x_n, x) < \epsilon.$$

En este caso, decimos que x es el **límite** de $\{x_n\}$ y escribimos

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

2. $\{x_n\}$ es una **sucesión de Cauchy** en X si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe N tal que si $n, m > N$, entonces

$$d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

PROPOSICIÓN B.9. *Toda sucesión convergente en X es una sucesión de Cauchy en X .*

DEFINICIÓN B.10. Un espacio métrico (X, d) es **completo** si y sólo si toda sucesión de Cauchy en X es convergente en X .

EJEMPLO B.11. (\mathbb{R}^3, d_e) es un espacio métrico completo. Por otro lado, el espacio $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ con la distancia dada por la restricción de d_e no es completo, pues la sucesión $\{(1/n, 0, 0)\}$ es de Cauchy en X y no es convergente. \triangleright

Bibliografía

- [1] Amor, J. A., *Teoría de conjuntos para estudiantes de ciencias*, UNAM–Facultad de Ciencias, 2005.
- [2] Alexandroff, P. S., *Combinatorial Topology*, Dover, 1998.
- [3] Ahlfors, L., *Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1979.
- [4] Armstrong, M. A., *Topología básica*, Reverté, 1986.
- [5] Arnold, V. I., *Ordinary Differential Equations*, MIT Press, 1978.
- [6] Becerril, R., Jardón, R., Reyes, G., *Cálculo Diferencial en Varias Variables*, Pub. CBS, UAM–Iztapalapa, 2002.
- [7] do Carmo, M. P., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, 1976.
- [8] Dubrovin, B., Novikov, S. P., Fomenko, A. T., *Geometría Moderna: Métodos and Aplicaciones*, Parte I, Edit. URSS, 2000.
- [9] Dubrovin, B., Novikov, S. P., Fomenko, A. T., *Geometría Moderna: Métodos and Aplicaciones*, Parte II, Edit. URSS, 2000.
- [10] Einstein, A., *Sobre la teoría de la relatividad especial y general*, Alianza, 1988.

-
- [11] Gottlieb, D. H., *All the way with Gauss-Bonnet and the Sociology of Mathematics*, American Mathematical Monthly, 103–6 (1996), 457–469.
- [12] Guillemin V., Pollack A., *Topología Diferencial*, Sociedad Matemática Mexicana, 2003.
- [13] Hawking, S., Ellis, G., *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, 1973.
- [14] Marsden, J.E., Hoffman, M.J., *Análisis básico de variable compleja*, Trillas, 1996.
- [15] Milnor, J., *On Manifolds homeomorphic to the 7-sphere*, Ann. of Math. (2), 64 (1956) 224–237.
- [16] Palmas, O., Reyes, G., *Curso de Geometría Diferencial, Parte 1, Curvas y Superficies*, UNAM–Facultad de Ciencias, 2005.
- [17] Pogorélov, A. V., *Geometría diferencial*, Mir, 1977.
- [18] Rudin, W., *Principios de análisis matemático*, McGraw-Hill, 1987.
- [19] Spivak, M., *A comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Publish or Perish, 1999.

Índice alfabético

- Agregar un asa, 174
- Ángulo
 - entre curvas, 32
 - externo, 184
- Aplicación de Hopf, 54
- Aplicación
 - conforme, 44
 - local, 44
 - exponencial, 104
 - geodésica, 127
- Área de una región, 33
- Arista
 - de una triangulación, 172
- Atlas, 2
 - diferenciable, 9
- Banda de Möbius, 75
 - infinita, 51
- Biholomorfismo, 205
- Bola, 209
- Botella de Klein, 51
- Campo
 - paralelo, 62
- Característica de Euler
 - de una superficie, 173
 - de una triangulación, 173
- Carta, 2
- Círculo geodésico, 108
- Coefficientes de una métrica, 32
- Condición de Heine-Borel, 125
- Conjunto
 - abierto, 207, 209
 - acotado, 209
 - cerrado, 209
- Cono de luz, 41
- Coordenadas
 - hiperbólicas, 43
 - homogéneas, 4
 - normales, 107
 - polares geodésicas, 108
 - pseudoesféricas, 43
- Curva
 - geodésica, 80
 - minimizante, 118
 - orientada positivamente, 185
 - regular por partes, 183
- Curvas
 - tangentes, 15
- Curvatura geodésica, 77
- Cúspide, 184

- Derivación, 18
- Derivada covariante, 56
- Derivada direccional, 16
- Desigualdad del triángulo, 208
- Diferencial, 24
- Disco de Poincaré, 50
- Distancia, 208
 - euclidiana, 209
- Doble toro, 175
- Ecuaciones
 - de Cauchy-Riemann, 204
- Einstein, 158
- Elemento de longitud, 33
- Encaje, 29
- Espacio
 - de Minkowski, 39
 - métrico, 208
 - completo, 210
 - proyectivo
 - complejo, 53
 - real, 157
 - tangente, 16
- Estabilizador, 151
- Estructura
 - diferenciable, 9
 - maximal, 10
 - topológica, 2
- Flujo geodésico, 103
- Forma espacial, 129
- Función
 - analítica, 201
 - de transición, 8
 - diferenciable, 7
- Geodésica radial, 108
- Grupo
 - abeliano, 133
 - de Lorentz, 158
 - de Möbius, 147
- Grupo lineal
 - especial
 - complejo, 146, 155, 167
 - general
 - complejo, 146, 167
 - real, 135
 - ortocrónico, 158
 - especial, 158
 - ortogonal, 138
 - especial, 138
 - unitario, 150, 155
 - especial, 167
 - ortocrónico, 162
 - ortocrónico especial, 162
- Hawking-Ellis, 158
- Homomorfismo, 208
- Homotecia, 133
- Índice de un campo vectorial
 - en \mathbb{R}^2 , 180
 - en una superficie, 181
- Inmersión, 29
 - isométrica, 38
- Isometría, 36, 139
 - lineal, 137
 - propia, 138

- Lema de Gauss, 109
- Longitud de una curva en \mathbb{R}_1^3 , 40
- Longitud de arco, 32
- Marsden, 148
- Matriz
 ortogonal, 138
- Métrica
 de Lobachevsky, 43
 de Minkowski, 39, 42
 riemanniana, 31
- Notación
 de Einstein, 23
- Novikov, 158
- n -toro, 175
- Número
 de orientación, 178
 de vueltas
 de un campo, 180
 de una curva, 177, 178
- Orientación, 71, 72
- Parametrización, 2
- Parametrizaciones compatibles, 9
- Plano
 de Lobachevsky, 42
 proyectivo real, 3, 6
- Producto
 escalar, 149
 hermitiano, 149, 166
 semidirecto, 136
- Punto
 crítico, 28
 regular, 28
- Rango de una función, 14
- Reflexión deslizante, 145
- Región simple, 188
- Relatividad especial, 158
- Representación
 de un subgrupo, 131
- Riemann, 52
- Rotación
 ortocrónica, 158
- Semiplano superior, 67
- Símbolos de Christoffel, 37
- Singularidad de un campo vectorial, 181
- Sistema de referencia, 73
- Sucesión de Cauchy, 210
- Suma conexa, 195
- Superficie
 analítica, 53
 completa, 122
 diferenciable, 9
 geodésicamente completa, 104
 no orientable, 72, 73
 orientable, 72, 73
 riemanniana, 32
 topológica, 1
- Superficies
 conformemente
 equivalentes, 44
 conformes, 44
 globalmente isométricas, 36
 isométricas, 36

- localmente conformemente equivalentes, 44
- localmente conformes, 44
- Teorema
 - de Euler, 153
 - de Hopf-Rinow, 125
 - de la base, 21
 - de Minding, 115
- Teoría de grado, 177
- Topología, 207
- Toro
 - plano, 38
- Transformación continua, 208
- Transformaciones de Möbius, 146
- Transporte paralelo, 64
- Traslación, 131
- Triangulación, 172
 - admisible, 173
- Triángulo
 - de una triangulación, 172
- Triángulo geodésico, 187
- Valor
 - crítico, 28
 - regular, 28
- Vecindad
 - estrellada, 118
 - normal, 107
- Vector
 - espacial, 40
 - nulo, 40
 - tangente, 16
 - temporal, 40
- Vértice
 - de una triangulación, 172